8.3-Intervalo de confiança para a proporção.

(Estimativa pontual, distribuição de amostragem, Fórmula do IC, amplitude, margem de erro, calculadora gráfica...)

Estimativa pontual de proporção.

$$\boldsymbol{\hat{p} = \frac{f}{n}}$$

A **proporção** é o número de elementos favoráveis à nossa condição, a dividir pelo número total de elementos da amostra.

Exemplo

Considere uma amostra com 20 alunos, dos quais 9 são rapazes.

A proporção de rapazes é dada por:

$$\hat{p} = \frac{9}{20} = 0.45 \text{ ou } 45\%$$

Considerando novamente a referida amostra de 20 alunos:

Seja M- rapaz e F- Rapariga.

M M M M M M M M M F F F F F F F F F F F

Se estamos interessados em contabilizar os rapazes, vamos atribuir:

Rapazes (M) o número "1"

Raparigas (F) o número "0".

Assim, podemos escrever os rapazes e raparigas na forma:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Fazendo a média destes zeros e uns, fica:

$$\bar{x} = \frac{1+1+1+1+1+1+1+1+1+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0+0}{20}$$

Obtemos:

$$\bar{x} = \frac{9}{20} = 0.45$$

Esta média de zeros e uns dá o mesmo valor que a proporção de rapazes.

***Nota**: Como vimos, podemos sempre transformar uma proporção numa média,*
anotamos **1** para os casos favoráveis e **0** para os restantes.

Podemos assim aproveitar os resultados teóricos vistos para as médias, adaptando-os ao caso das proporções.

A média é igual à proporção.

Para o desvio padrão, a dedução não é tão simples.

Utilizemos uma adaptação do teorema do limite central às proporções:

Para amostras com dimensão maior ou igual a 30 elementos, os valores de $\hat{p}$ seguem uma distribuição aproximadamente normal com:

valor médio p

e desvio padrão $\sqrt{\frac{\boldsymbol{p(1-p)}}{\boldsymbol{n}}}$

Isto é, para n≥ 30, temos:

$$\boldsymbol{\hat{p} \sim N\left(p;\ \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)}$$

Nota: O desvio padrão de amostragem também se designa" **erro padrão**"

Exemplo.
Dos alunos de uma escola, consideremos que a proporção de rapazes é 48%. Se escolhermos aleatoriamente uma amostra de dimensão 60, como será a distribuição de amostragem da proporção amostral?

Resolução:

Visto tratar-se de uma amostra com mais de 30 elementos, o teorema do limite central garante que:

-as proporções amostrais têm distribuição normal, isto é, $\hat{P} \sim N$,

- o valor médio, das proporções amostrais será 0.48

-O desvio padrão das proporções amostrais: $\sqrt{\frac{0.48(1-0.48)}{60}} \approx 0.064$

Intervalos de confiança para a proporção.

Tal como no intervalo de confiança para o valor médio, podemos obter:

intervalo de confiança para a proporção.

$$\left]\hat{p} - Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} ; \hat{p} + Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

$\hat{p}$ Representa a proporção amostral.

n é o número de elementos da amostra

Z é o valor relacionado com a confiança. Os valores usuais para Z são os que constam da tabela seguinte:

Nível de confiança	90%	95%	99%
Valor de Z	1,645	1,960	2,576

$\boldsymbol{\varepsilon} = Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ é a margem de erro.

A diferença entre os dois extremos do intervalo é a **amplitude do intervalo(A)**.

A **amplitude** é igual ao dobro da margem de erro, **A = 2**×ε, logo, a **margem de erro** é igual a metade da amplitude **ε = A/2**

Exemplo (Confiança de 90%)
Numa amostra de 200 clientes que entraram num centro comercial, observou-se que 15% eram estudantes do ensino secundário.
Apresente um intervalo com 90 % de confiança para a proporção de clientes que eram estudantes do ensino secundário. Arredonde os extremos do intervalo às milésimas.

Resolução:

$$\left]\hat{p} - Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} ; \hat{p} + Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[=$$

$= \left]0.15 - 1.645\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}};\ 0.15 + 1.645\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}}\right[$ =] 0.108; 0.192[

Amplitude do intervalo: A= 0.192-0.108 = 0.084

margem de erro: ε=A/2 = 0.084/2 = 0.042

a margem de erro também pode obter-se por: $\varepsilon = 1.645\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}} \approx 0.042$

Exemplo (Confiança de 95%)
Numa amostra de 200 clientes que entraram num centro comercial, observou-se que 15% eram estudantes do ensino secundário.
Apresente um intervalo com 95 % de confiança para a proporção de clientes que eram estudantes do ensino secundário. Arredonde os extremos do intervalo às milésimas.

Resolução:

$$\left]\hat{p} - Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[=$$

$$= \left]0.15 - 1.96\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}};\ 0.15 + 1.96\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}}\right[$$

=] 0.101; 0.199[

Amplitude do intervalo: A= 0.199-0.101 = 0.098

Exemplo (Confiança de 99%)
Numa amostra de 200 clientes que entraram num centro comercial, observou-se que 15% eram estudantes do ensino secundário.
Apresente um intervalo com 99 % de confiança para a proporção de clientes que eram estudantes do ensino secundário. Arredonde os extremos do intervalo às milésimas.

Resolução:

$$\left]\hat{p} - Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[=$$

$$= \left]0.15 - 2.576\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}};\ 0.15 + 2.576\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{200}}\right[$$

=] 0.085; 0.215[

Amplitude do intervalo: A= 0.215-085 = 0.13

Nota: À semelhança do que acontecia para o intervalo do valor médio, também podemos verificar que nas **proporções**, **quanto maior for o nível de confiança, maior é a amplitude do intervalo**.

Exemplo (aumentar o tamanho da amostra)
Numa amostra de 1000 clientes que entraram num centro comercial, observou-se que 15% eram estudantes do ensino secundário.
Apresente um intervalo com 99 % de confiança para a proporção de clientes que eram estudantes do ensino secundário. Arredonde os extremos do intervalo às milésimas.

Resolução:

$$\left]\hat{p} - Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + Z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[=$$

$$= \left]0.15 - 2.576\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{1000}};\ 0.15 + 2.576\sqrt{\frac{0.15(1-0.15)}{1000}}\right[$$

=] 0.121; 0.179[

Amplitude do intervalo: A= 0.179-0.121 = 0.058

Nota: À semelhança do que acontecia para o intervalo do valor médio, também podemos verificar que nas proporções, **quanto maior for a dimensão da amostra, menor é a amplitude do intervalo de confiança**.

Exemplo

Dos alunos de uma escola, selecionaram-se aleatoriamente alguns com o objetivo de estimar a proporção de alunos do sexo masculino. A seguir apresentam-se os resultados obtidos, usando as letras F para representar o sexo feminino e M para o masculino.

M	F	M	M	M	F	M	M	M	F	F
F	M	M	M	M	M	M	F	M	M	F
M	M	M	M	M	M	M	F	M	M	

Construa um intervalo com uma confiança de 90% para estimar a proporção de alunos do sexo masculino da escola. Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais. Apresente os extremos com arredondamento às centésimas.

Resolução:

Proporção: $\hat{p} = 24/32 = 0.75$ n= 32 Z= 1.645

$$\left]\ 0.75 - 1.645\sqrt{\frac{0.75\times 0.25}{32}}; 0.75 + 1.645\sqrt{\frac{0.75\times 0.25}{32}}\ \right[$$

Obtemos:] 0.62; 0.88[

Calculadora gráfica

nos Intervalos de confiança para a proporção.

IMPORTANTE: Use estas instruções **apenas para verificar o resultado**. Não dispensa a construção dos intervalos de confiança usando as fórmulas e a indicação de todos os passos da resolução.

Exemplo

Numa amostra aleatória de 200 saquetas de açúcar retiradas de uma caixa, verificou-se que 62 saquetas tinha 8 ou mais gramas.
Obtenha um intervalo de 95% de confiança para a **proporção** de saquetas com 8 ou mais gramas, indicando os extremos do intervalo arredondados às milésimas.

Resolução:

2) $\hat{p} = \frac{62}{200} = 0,31 \qquad n = 200 \qquad z = 1,96$

$$\left]0,31 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,31 \times 0,69}{200}} \; ; \; 0,31 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,31 \times 0,69}{200}}\right[$$

$$= \left]0,246 \; ; \; 0,374\right[$$

Calculadora:

Casio:

MENU / STAT / INTR / Z / 1-PROP / c-Level :0.95 /x: 62/ n: 200 $\boxed{\text{EXE}}$

Texas:

STAT / TESTS / 1 Prop Z Int / x: 62/ n: 200/ C-Level:0.95/ Calculate

$\boxed{\text{ENTER}}$

Outros modelos de calculadoras:

Nota 1: *Para a calculadora* ***NumWorks,*** *siga os links das instruções a partir do tutorial:*

https://www.numworks.com/pt/professores/tutoriais/

Escolha "Inferência" / "Calcular um intervalo de confiança de uma amostra"

Ou diretamente:

https://www.numworks.com/pt/professores/tutoriais/inferencia

Explore a sua calculadora, adaptando o exemplo acima.

Nota 2: *Para a calculadora* ***Texas TI Nspire****, siga a sequência:*

4. Adicionar Listas e Folha de cálculo> Menu> 4 Estatística> 3 Intervalo de confiança> 1 Intervalo Z> Método de entrada de dados== estatística> OK

(Para a proporção: Intervalo z 1-Prop)

Explore a sua calculadora, adaptando o exemplo acima.