8.2-Intervalo de confiança para o valor médio.

(Fórmula do IC, amplitude, margem de erro, calculadora gráfica...)

Intervalo de confiança de um parâmetro é um intervalo no qual temos alguma confiança que contenha o verdadeiro valor do parâmetro. A essa confiança chamamos **nível** ou **grau de confiança**.

Qualquer intervalo de confiança tem a forma:

] estatística – margem de erro; estatística + margem de erro **[**

Nota: Quando afirmamos que o intervalo tem 95% confiança, significa que, para 100 amostras diferentes, da mesma dimensão, selecionadas da mesma população, esperamos que 95 dos correspondentes intervalos obtidos, contenham o valor médio da população a estudar.

Nota: a partir do teorema do Limite central e das propriedades da distribuição Normal, vamos obter intervalos de confiança.

Recordemos:

Para $n \geq 30$ $\quad \overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Como

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \text{ então}$$

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

A partir daqui, obtemos o intervalo de confiança na forma:

$$\left]\overline{X} - Z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{X} + Z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Nota: para o caso do intervalo com **90% de confiança**, usamos com **z= 1.645** e obtemos:

$$\left]\overline{X} - 1.645 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{X} + Z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[\text{ é 90\%.}$$

Exemplo

Com vista a estudar o peso dos adultos de uma determinada região, foi recolhida uma amostra com 60 adultos, tendo-se obtido uma média amostral de 65 quilos. Sabemos que o desvio padrão é 6 quilos. Obtenha um intervalo com 90% confiança para os pesos dos adultos dessa região. Apresente os extremos arredondados às centésimas.

Basta substituir na fórmula:

$$\left]65 - 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{60}};\ 65 + 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{60}}\right[=]63.73; 66.27[$$

Nota: Quando afirmamos que o intervalo tem 90% confiança, significa que, para 100 amostras diferentes, da mesma dimensão, selecionadas da mesma população, esperamos que 90 dos correspondentes intervalos obtidos, contenham o valor médio da população a estudar.

Nota: do mesmo modo, podemos obter intervalos com outras probabilidades.

Intervalo de confiança:

$$\left]\overline{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Z}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}};\ \overline{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{Z}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right[$$

$\overline{\boldsymbol{X}}$ é a <u>média amostral</u> $\boldsymbol{\sigma}$ desvio padrão

n é o número de elementos da amostra

Z é o valor relacionado com a confiança. Os valores usuais para Z são os que constam da tabela seguinte:

Nível de confiança	90%	95%	99%
Valor de Z	1,645	1,960	2,576

A **Amplitude do intervalo(A)** é a diferença entre os dois extremos do intervalo:

$$\mathbf{A} = \left(\overline{X} + Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

A **margem de erro** do intervalo é dada por $\boldsymbol{\varepsilon} = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Reparemos que:

A **amplitude** é igual ao dobro da margem de erro. **A = 2×ε**

A **margem de erro** é igual a metade da amplitude **ε = A/2**

Exemplo:
No exemplo anterior, obtivemos o intervalo:]63.73; 66.27[
A amplitude é **A**= 66.27-63.73= 2.54

A margem de erro será $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2.54}}{\mathbf{2}} = 1.27$

Usando os dados do exemplo anterior, com Z=1.645, σ=6 e n=60, podemos obter a margem de erro a partir de:

$$\varepsilon = Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \times \frac{6}{\sqrt{60}} \approx 1.27$$

Nota: Quando afirmamos que o intervalo tem 95% confiança, significa que, para 100 amostras diferentes, da mesma dimensão, selecionadas da mesma população, esperamos que 95 dos correspondentes intervalos obtidos, contenham o valor médio da população a estudar.

Exemplo Intervalo com 95% de confiança.
Com vista a estudar o peso dos adultos de uma determinada região, foi recolhida uma amostra com 60 adultos, tendo-se obtido uma média amostral de 65 quilos. Sabemos que o desvio padrão é 6 quilos. Obtenha um intervalo com 95% confiança para os pesos dos adultos dessa região. Apresente os extremos arredondados às centésimas.

Resolução:

Basta substituir na fórmula:

$$\left]65 - 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{60}};\ 65 + 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{60}}\right[=]63.48; 66.52[$$

Calculemos a amplitude: A= 66.52- 63.48 = 3.04

Exemplo Intervalo com 99% de confiança.
Com vista a estudar o peso dos adultos de uma determinada região, foi recolhida uma amostra com 60 adultos, tendo-se obtido uma média amostral de 65 quilos. Sabemos que o desvio padrão é 6 quilos. Obtenha um intervalo com 99% confiança para os pesos dos adultos dessa região. Apresente os extremos arredondados às centésimas.
Basta substituir na fórmula:

$$\left]65 - 2.576 \times \frac{6}{\sqrt{60}};\ 65 + 2.576 \times \frac{6}{\sqrt{60}}\right[=]63.00 ;67.00[$$

Amplitude A= 67-63= 4

Nota: Observando os três exemplos anteriores, e para os dados iguais, exceto o nível de confiança, pudemos observar que, para o nível 90% obtivemos A=2.54, para 95% obtivemos A=3.04 e para 99%, obtivemos A=4. De um modo geral, ***quando aumentamos o grau de confiança, a amplitude do intervalo aumenta.***

Retomemos o último exemplo, mas vamos mudar o tamanho da amostra. Em vez de 60 elementos, vamos considerar 1000 elementos.

Exemplo

Com vista a estudar o peso dos adultos de uma determinada região, foi recolhida uma amostra com 1000 adultos, tendo-se obtido uma média amostral de 65 quilos. Sabemos que o desvio padrão é 6 quilos. Obtenha um intervalo com 99% confiança para os pesos dos adultos dessa região. Apresente os extremos arredondados às centésimas.

Basta substituir na fórmula:

$$\left]65 - 2.576 \times \frac{6}{\sqrt{1000}};\ 65 + 2.576 \times \frac{6}{\sqrt{100}}\right[$$ =]64.51 ;65.49[

Amplitude A= 65.49-64.51= 0.98

Conclusão: a amplitude diminuiu. De um modo geral, ***quando aumentamos o tamanho da amostra, a amplitude do intervalo diminui***.

Nota muito importante: Usamos o símbolo **σ** para o desvio padrão populacional, mas quando se trata de uma amostra devemos usar o símbolo "**s**".

Na fórmula para o intervalo, escrevemos:

$$\left]\overline{X} - Z\frac{s}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + Z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\ .$$

Nota: *para utilizarmos estas fórmulas para os intervalos de confiança. os dados têm que estar de acordo com o Teorema do Limite Central (TLC), isto é, n≥ 30 ou então, se a dimensão for menor que 30, os dados precisam ter uma distribuição, pelo menos aproximadamente normal. Caso contrário, seria necessário usar a distribuição t de student, que está fora do programa de MACS.*

Nota: Quando aumentamos o grau de confiança, a amplitude do intervalo aumenta, e consequentemente a informação fica menos precisa.

Nota: Quando aumentamos o número de elementos da amostra, a margem de erro $Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ diminui e a amplitude do intervalo também diminuir. Assim, melhoramos a precisão da nossa estimação.

Exemplo

Pretendemos avaliar os conhecimentos em Matemática de uma população de alunos de uma escola. Para isso foi feito um teste de conhecimentos gerais desta disciplina e analisados os resultados numa escala de zero a vinte valores. Foi escolhida uma amostra, na qual sabemos que 5 alunos obtiveram 10 valores, 4 alunos obtiveram 11 valores, 7 alunos obtiveram 12 valores, 15 alunos obtiveram 14 valores, 5 alunos obtiveram 15 valores e 2 alunos obtiveram 16 valores.

Tendo em conta os valores obtidos a partir desta amostra, obtenha um intervalo de com 90% de confiança para a média das notas dos alunos. Apresente todos os valores com arredondamento às milésimas.

Resolução:

Começamos por lançar na calculadora gráfica as listas:

Lista1	Lista2
10	5
11	4
12	7
14	15
15	5
16	2

Depois obtemos: média amostral: 13.026

Desvio padrão amostral: 1.808

n= 38

Z= 1.645

$$\left]\, 13.026-1.645\times\frac{1.808}{\sqrt{38}},\ \ 13.026+1.645\times\frac{1.808}{\sqrt{38}} \,\right[$$

=] 12.544; 13.508[

Exemplo

Com vista a estudar as alturas, em centímetros, de um tipo de árvore, foi recolhida uma amostra com dimensão 4096 e construído o respetivo intervalo com 95% de confiança. Sabemos que o desvio padrão é cinco vezes mais pequeno do que a média amostral e que a amplitude do intervalo é igual a 15,68 centímetros.

.1) Calcule o valor da margem de erro.

.2) Calcule o valor da média amostral, indicando todos os cálculos.

.3) Indique os extremos do intervalo de confiança referido.

Resolução

.1) A= 15.68 logo a margem de erro é 15.68/2 = 7.84

.2) $1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{4096}}=7.84 \Leftrightarrow \sigma=\frac{7.84\times\sqrt{4096}}{1.96} \Leftrightarrow \sigma=256$

Logo a média amostral é 5×256= 1280

.3) $\left]\, 1280-1.96\times\frac{256}{\sqrt{4096}}, 1280+1.96\times\frac{256}{\sqrt{4096}} \,\right[$

Obtemos o intervalo:] 1272.16; 1287.84[

Os extremos do intervalo de confiança são: .1272.16 e 1287.84

Exemplo

Com vista a estudar as alturas, em centímetros, dos alunos de uma escola, foi recolhida uma amostra com 200 alunos. Foi obtido o seguinte intervalo, com 95% de confiança]167,9 ; 170,6[.

Calcule, indicando todos os cálculos, os seguintes valores:

.1) média amostral (2 c.d). **.2)** desvio padrão(2 c.d).

.3) margem de erro(2 c.d)). **.4)** amplitude do intervalo(1 c.d.).

.5) extremos de um intervalo com 90% confiança para os mesmos dados(2c.d.).

Resolução

.1) $\bar{x} = \frac{167,9 + 170,6}{2} = 169,25$

.2) $1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{200}} = 1,35 \Leftrightarrow \sigma = \frac{1,35 \times \sqrt{200}}{1,96}$

(1,35 é calculado em 7.3) $\Leftrightarrow \sigma = 9,741$

.3) $\varepsilon = \frac{170,6 - 167,9}{2} = \frac{2,7}{2} = 1,35$

.4) $A = 170,6 - 167,9 = 2,7$

.5) $\left]169,25 - 1,645 \times \frac{9,741}{\sqrt{200}} \; ; \; 169,25 + 1,645 \times \frac{9,741}{\sqrt{200}}\right[=$

$= \left]168,117 \; ; \; 170,383\right[$

Exemplo

A direção de uma escola pretende construir cacifos para os alunos do 10º ano. Para concretizar esse projeto, procurou estudos sobre o valor médio das alturas dos alunos do 10º ano e encontrou o seguinte resultado: «É possível afirmar, com uma confiança de 95%, que o intervalo entre 165,04 centímetros e 168,96 centímetros contém o valor medio das alturas dos alunos do 10º ano. No estudo feito, considera-se que o valor do desvio padrão é igual a 12. Com o objetivo de garantir uma maior confiança, a direção da escola procurou encontrar um intervalo de confiança de 99% para o valor médio das alturas dos alunos do 10º ano com base na mesma amostra. Determine o intervalo de confiança pretendido. Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais. Apresente os valores dos extremos do intervalo com arredondamento às unidades.

Resolução

$\bar{x} = \frac{165.04+168.96}{2}$=167 σ =12 Z= 1.96 $\varepsilon = \frac{168.96-165.04}{2} = 1.96$

$$1.96\frac{12}{\sqrt{n}} = 1.96 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96\times 12}{1.96} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 12 \Leftrightarrow n = 144$$

$$\left]\ 167 - 2.576\times\frac{12}{\sqrt{144}},\ 167 + 2.576\times\frac{12}{\sqrt{144}}\ \right[$$

Obtemos o intervalo:] 164; 170[

Calculadora gráfica

nos Intervalos de confiança para a média.

***IMPORTANTE*:** Use estas instruções **<u>apenas para verificar o resultado</u>**. Não dispensa a construção dos intervalos de confiança usando as fórmulas e a indicação de todos os passos da resolução.

Exemplo

Intervalo de confiança para a **média** a 95% de confiança, a partir de uma amostra com 36 elementos (n=36), com uma média amostral $\bar{x} = 12$ e desvio padrão populacional: $\sigma = 3$.

Casio 9850GB

MENU / STAT / INTR / 1-s / Data :Var / c-Level :0.95 / $\sigma : 3$ / $\bar{x} : 12$ / n:36 $\boxed{\text{EXE}}$

Ou: para modelos mais recentes:

MENU / STAT / INTR / Z / 1-sample / Data :Var / c-Level :0.95 / $\sigma : 3$ / $\bar{x} : 12$ / n:36 $\boxed{\text{EXE}}$

Obtemos: **Lower =11.020018 Upper = 12.979982**

Texas TI-83

STAT / TESTS / Z Interval / Input:STATS / $\sigma : 3$ / $\bar{x} : 12$ / n:36 /

C-Level:0.95/ / Calculate

$\boxed{\text{ENTER}}$

Obtemos: **11.02; 12.98**

Nota 1: Devemos pedir sempre o "*Z interval*"

Nota 2: Este intervalo foi pedido a partir das estatísticas(STATS- n, media e desvio padrão) ". Se pretendermos calcular a partir de uma lista referente a uma amostra, devemos indicar as respetivas informações e indicar "List" ou "Data" consoante a calculadora, e fornecer a informação pedida.

Outros modelos de calculadoras:

Nota 1: *Para a calculadora* ***NumWorks,*** *siga os links das instruções a partir do tutorial:*

https://www.numworks.com/pt/professores/tutoriais/

Escolha "Inferência" / "Calcular um intervalo de confiança de uma amostra"

Ou diretamente:

https://www.numworks.com/pt/professores/tutoriais/inferencia

Explore a sua calculadora, adaptando o exemplo acima.

Nota 2: *Para a calculadora* ***Texas TI Nspire****, siga a sequência:*

4. Adicionar Listas e Folha de cálculo> Menu> 4 Estatística> 3 Intervalo de confiança> 1 Intervalo Z> Método de entrada de dados== estatística> OK

(Para a proporção: Intervalo z 1-Prop)

Explore a sua calculadora, adaptando o exemplo acima.