6.4-Crescimento Logarítmico.

(Noção de logaritmo e regras, fórmula, gráfico, regressão logarítmica.)

Noção de logaritmo:

$$a^x=y \Leftrightarrow x=\log_a y$$

X é o logaritmo de y na base "a"

Exemplos:

1) $2^5=32 \Leftrightarrow 5=\log_2 32$

2) $3^4=81 \Leftrightarrow 4=\log_3 81$

C.G. Log significa logaritmo de base 10. Ln- Logaritmo de base *e*.

Importante!!! algumas calculadoras têm apenas as bases "e" e "10".

Verifique a sua.

Por exemplo: Logaritmo de 64 na base 2: ***$Log_2 64$*** ***(****dá 6, pois $2^6=64$).*

Casio CG 50 (…e outras…) CATALOG/ "L" / logab(logab(2,64)

Texas Nspire $\log_a b$

Texas 84 MATH A log Base (64, 2)…

Experimente na sua calculadora!...

Questão : se a calculadora tem apenas as bases "e" e "10", como fazemos para calcular os outros logaritmos?

Resposta: fazemos uma mudança de base de acordo com a fórmula seguinte:

Conversão ou mudança de base:

$$\boldsymbol{log_a\, b = \frac{\log b}{\log a}} \quad \text{(ou } log_a\, b = \frac{\ln b}{\ln a}\text{)}$$

Exemplo de aplicação: $log_2\, 64 = \frac{\log 64}{\log 2}$.

Exemplos: *(utilize a sua calculadora)*

1) $log_2 32$ =5 **2)** $log_3 81$=4

3) $log_{10} 1$=0 **4)** $log_2 1$ =0 **5)** $log_{10} 10$=1 **6)** $log_5 5$=1 **7)** $log_5 5^4$=4

8) $log_6 6^7$=7 **9)** $log_{10} 10^2$=2

Propriedades importantes dos logaritmos

$\mathbf{Log_a 1=0}$ $\mathbf{log_a a=1}$ $\mathbf{log_a a^b=b}$

Exemplos: Determinar o valor de x

1) $\log_5 X = 3 \Leftrightarrow x=5^3 \Leftrightarrow x = 125$

2) $\log_2 X = 8 \Leftrightarrow x=2^8 \Leftrightarrow x = 256$

3) $2^x=120 \Leftrightarrow x= \log_2 120$

4) $3^{1+2X}=2187 \Leftrightarrow 1+2X=\log_3 2187 \Leftrightarrow x= (7-1)/2 \Leftrightarrow x= 3$

5) $e^{0.04t}=3 \Leftrightarrow 0.04t=\ln 3 \Leftrightarrow t = \frac{ln3}{0.04} \Leftrightarrow t\approx 27.5$

6) $\ln x=4 \Leftrightarrow x=e^4 \Leftrightarrow x\approx 54.6$

Exemplo

Suponha que a altura A(em metros) de uma pessoa do sexo masculino pode ser definida, em função do seu peso p(em quilogramas), pela seguinte expressão:

$$A(p) = 0{,}57 \ln(p) - 0{,}52$$

Recorrendo à expressão, determine:

.1- A altura do Rafael, sabendo que o seu peso é de 46 kg

.2 - O peso do David, sabendo que tem 1,76 m de altura. Resolva esta questão analiticamente, isto é indicando todos os cálculos.

Resolução:

.1) $A(46) = 0{,}57 \ln(46) - 0{,}52 = 1.662$

.2) $1.76= 0.57\ln(p) - 0.52 \Leftrightarrow 1.76+0.52 = 0.57\ln(p) \Leftrightarrow \ln(p)= (1.76+0.52)/0.57$

$\ln(p)=4 \Leftrightarrow p=e^4 \Leftrightarrow p\approx 54.598$

Exemplo

Para obter o povoamento de coelhos em certa região, libertaram-se nela alguns casais desta espécie. Sabe-se que o número de coelhos existente t meses após o povoamento é dado pela fórmula $C(t)=500\times1.012^t$

Ao fim de quantos meses, o número de coelhos atingiu os 1700? Resolva esta questão analiticamente, isto é, indicando todos os cálculos. Apresente o resultado em anos, meses e dias, arredondado às unidades. (Nota: considere que 1 mês tem 30 dias).

Resolução:

$C(t)=500\times1.012^t$ $C(0) = 500$ queremos t de tal modo que $C(t)=1700$.

$500\times1.012^x =1700$

$\Leftrightarrow 1.012^x= 1700/500$

$\Leftrightarrow 1.012^x= 3.4$

$\Leftrightarrow x = log_{1.012}3.4$

$\Leftrightarrow x= (\log 3.4)/(\log 1.012)$

$\Leftrightarrow x= 102.5919572$ meses $102 =12\times8+6$ e $0.5919572\times30\approx18$

R: são 8 anos, 6 meses e 18 dias.

O **Modelo de Crescimento logarítmico** é dado por:

$$\mathbf{P(t) = a + \log_c t}$$

Onde a, e b são constantes, t é positivo e c é positivo diferente de 1.

Exemplo

A altura de uma planta, em milímetros é dada pela expressão

$P(t) = 10 + \log(t+1)$ onde log representa o logaritmo de base 10, t representa o tempo em meses e t=0 representa o primeiro momento que a planta foi medida.

.1) Qual o comprimento da planta no primeiro momento em foi medida (t=0)?

Resposta:

$P(0) = 10 + \log(0+1)=10$ R: No primeiro momento em que foi medida, a planta media **10 mm.**

.2) Qual o comprimento da planta, 3 meses depois do primeiro momento em foi medida ?

Resposta:

$P(3) = 10 + \log(3+1)\approx10.6$ R: três meses depois do primeiro momento em que foi medida, a planta media 10.6 mm.

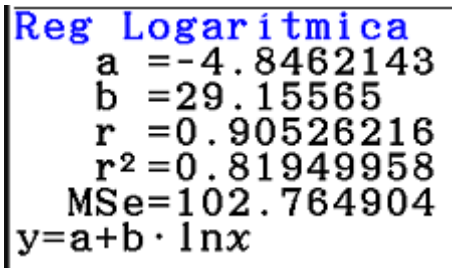
Exemplo - Regressão logarítmica.

Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existente numa área reservada desde a sua criação:

Número de meses decorridos desde a criação da área reservada(x)	Número de animais existentes na área reservada(y)
2	24
4	30
6	38
8	48
10	64
12	80

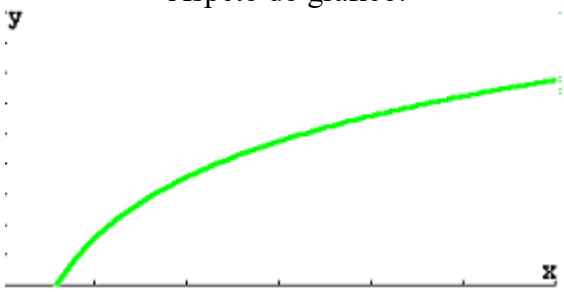
Com o auxílio da calculadora, determine o modelo de regressão logarítmica (log ou ln, consoante a calculadora.) ($y = a + b.\ln x$), que se ajusta a estes valores. Apresente os valores dos coeficientes com arredondamento às milésimas.





Y= -4.846 + 29.156lnx.

Aspeto do gráfico:



Utilizemos a equação obtida para estimar um valor aproximado para o número de animais aos fim de 7 meses:

Y= -4.846 + 29.156lnx.

Y(7)= -4.846 + 29.156ln7≈52

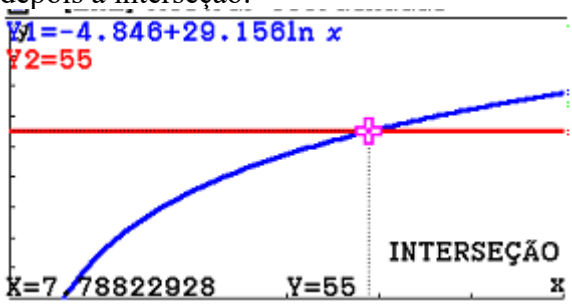
Questão:

Utilizando a expressão da regressão obtida, Y= -4.846 + 29.156lnx.

estimemos ao fim de quantos meses seria de esperar o valor 55 animais, isto é, para que valor de x teremos y=55.

Vamos resolver graficamente com y_1= - 4.846 + 29.156lnx. e y_2=55

Pedimos o gráfico de depois a interseção:



Obtemos x≈ 7.788

Resposta: ao fim de aproximadamente 8 meses, o número de animais será igual a 55.