

6.4-Crescimento Logarítmico.

(Noção de logaritmo e regras, fórmula, gráfico, regressão logarítmica.)

Noção de logaritmo:

$$a^x=y \Leftrightarrow x=\log_a y$$

X é o logaritmo de y na base “a”

Exemplos:

1) $2^5=32 \Leftrightarrow 5=\log_2 32$

2) $3^4=81 \Leftrightarrow 4=\log_3 81$

C.G. $\boxed{\text{Log}}$ significa logaritmo de base 10. $\boxed{\text{Ln}}$ Logaritmo de base e.

Importante!!! algumas calculadoras têm apenas as bases “e” e “10”.

Verifique a sua.

Por exemplo: Logaritmo de 64 na base 2: **$\text{Log}_2 64$** (dá 6, pois $2^6=64$).

Casio CG 50 (...e outras...) CATALOG/ “L” / logab(logab(2,64)

Texas Nspire $\log_a b$

Texas 84 MATH A log Base (64, 2)...

Experimente na sua calculadora!...

Questão : se a calculadora tem apenas as bases “e” e “10”, como fazemos para calcular os outros logaritmos?

Resposta: fazemos uma mudança de base de acordo com a fórmula seguinte:

Conversão ou mudança de base:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad (\text{ou } \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a})$$

Exemplo de aplicação: $\log_2 64 = \frac{\log 64}{\log 2}$.

Exemplos: (utilize a sua calculadora)

1) $\log_2 32 = 5$ 2) $\log_3 81 = 4$

3) $\log_{10} 1 = 0$ 4) $\log_2 1 = 0$ 5) $\log_{10} 10 = 1$ 6) $\log_5 5 = 1$ 7) $\log_5 5^4 = 4$

8) $\log_6 6^7 = 7$ 9) $\log_{10} 10^2 = 2$

Propriedades importantes dos logaritmos

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$\log_a a^b = b$
----------------	----------------	------------------

Exemplos: Determinar o valor de x

1) $\log_5 X = 3 \Leftrightarrow x = 5^3 \Leftrightarrow x = 125$

2) $\log_2 X = 8 \Leftrightarrow x = 2^8 \Leftrightarrow x = 256$

3) $2^x = 120 \Leftrightarrow x = \log_2 120$

4) $3^{1+2x} = 2187 \Leftrightarrow 1+2x = \log_3 2187 \Leftrightarrow x = (7 - 1)/2 \Leftrightarrow x = 3$

Exemplo

Suponha que a altura A(em metros) de uma pessoa do sexo masculino pode ser definida, em função do seu peso p(em quilogramas), pela seguinte expressão:

$$A(p) = 0,57 \ln(p) - 0,52$$

Recorrendo à expressão, determine:

.1- A altura do Rafael, sabendo que o seu peso é de 46 kg

.2 - O peso do David, sabendo que tem 1,76 m de altura. Resolva esta questão analiticamente, isto é indicando todos os cálculos.

Resolução:

.1) $A(46) = 0,57 \ln(46) - 0,52 = 1.662$

.2) $1.76 = 0.57 \ln(p) - 0.52 \Leftrightarrow 1.76 + 0.52 = 0.57 \ln(p) \Leftrightarrow \ln(p) = (1.76 + 0.52)/0.57$

$$\ln(p) = 4 \Leftrightarrow p = e^4 \Leftrightarrow p \approx 54.598$$

Exemplo

Para obter o povoamento de coelhos em certa região, libertaram-se nela alguns casais desta espécie. Sabe-se que o número de coelhos existente t meses após o povoamento é dado pela fórmula $C(t)=500 \times 1.012^t$

Ao fim de quantos meses, o número de coelhos atingiu os 1700? Resolva esta questão analiticamente, isto é, indicando todos os cálculos. Apresente o resultado em anos, meses e dias, arredondado às unidades. (Nota: considere que 1 mês tem 30 dias).

Resolução:

$$C(t)=500 \times 1.012^t \quad C(0) = 500 \quad \text{queremos } t \text{ de tal modo que } C(t)=1700.$$

$$500 \times 1.012^x = 1700$$

$$\Leftrightarrow 1.012^x = 1700/500$$

$$\Leftrightarrow 1.012^x = 3.4$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{1.012} 3.4$$

$$\Leftrightarrow x = (\log 3.4)/(\log 1.012)$$

$$\Leftrightarrow x = 102.5919572 \text{ meses} \quad 102 = 12 \times 8 + 6 \quad \text{e } 0.5919572 \times 30 \approx 18$$

R: são 8 anos, 6 meses e 18 dias.

O **Modelo de Crescimento logarítmico** é dado por:

$$P(t) = a + \log_c t$$

Onde a , b são constantes, t é positivo e c é positivo diferente de 1.

Exemplo

A altura de uma planta, em milímetros é dada pela expressão

$P(t) = 10 + \log(t+1)$ onde $\log$ representa o logaritmo de base 10, t representa o tempo em meses e $t=0$ representa o primeiro momento que a planta foi medida.

.1) Qual o comprimento da planta no primeiro momento em foi medida ($t=0$)?

Resposta:

$P(0) = 10 + \log(0+1)=10$ R: No primeiro momento em que foi medida, a planta media **10 mm.**

.2) Qual o comprimento da planta, 3 meses depois do primeiro momento em foi medida ?

Resposta:

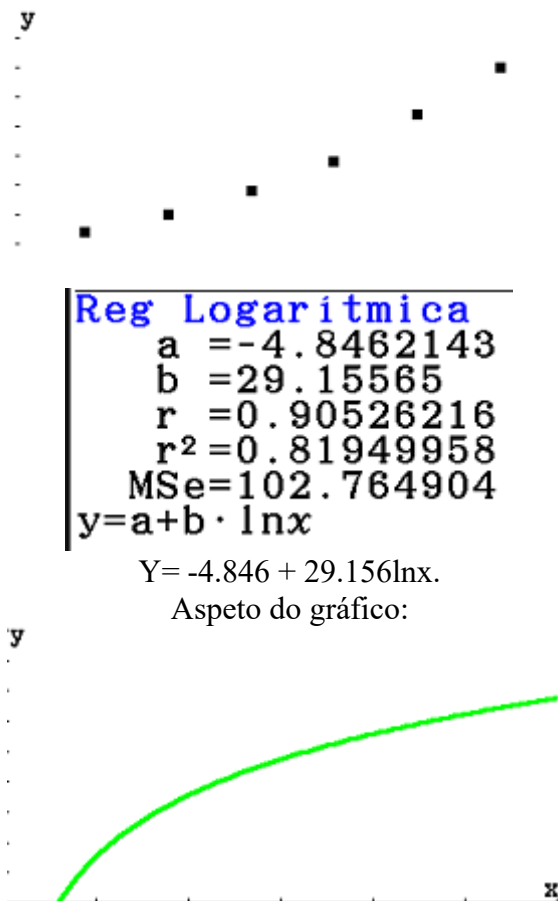
$P(3) = 10 + \log(3+1) \approx 10.6$ R: três meses depois do primeiro momento em que foi medida, a planta media 10.6 mm.

Exemplo - Regressão logarítmica.

Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existente numa área reservada desde a sua criação:

Número de meses decorridos desde a criação da área reservada(x)	Número de animais existentes na área reservada(y)
2	24
4	30
6	38
8	48
10	64
12	80

Com o auxílio da calculadora, determine o modelo de regressão logarítmica (log ou ln, consoante a calculadora.) ($y = a + b \cdot \ln x$), que se ajusta a estes valores. Apresente os valores dos coeficientes com arredondamento às milésimas.



Utilizemos a equação obtida para estimar um valor aproximado para o número de animais aos fim de 7 meses:

$$Y = -4.846 + 29.156 \ln x.$$

$$Y(7) = -4.846 + 29.156 \ln 7 \approx 52$$

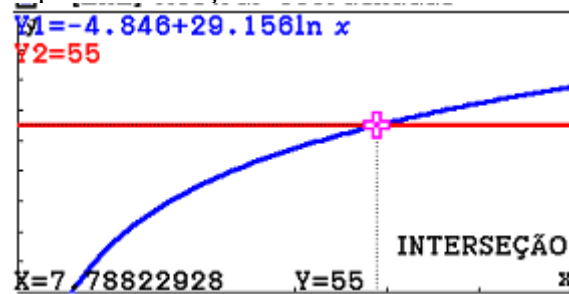
Questão:

Utilizando a expressão da regressão obtida, $Y = -4.846 + 29.156 \ln x$.

estimemos ao fim de quantos meses seria de esperar o valor 55 animais, isto é, para que valor de x teremos $y=55$.

Vamos resolver graficamente com $y_1 = -4.846 + 29.156 \ln x$ e $y_2 = 55$

Pedimos o gráfico de depois a interseção:



Obtemos $x \approx 7.788$

Resposta: ao fim de aproximadamente 8 meses, o número de animais será igual a 55.