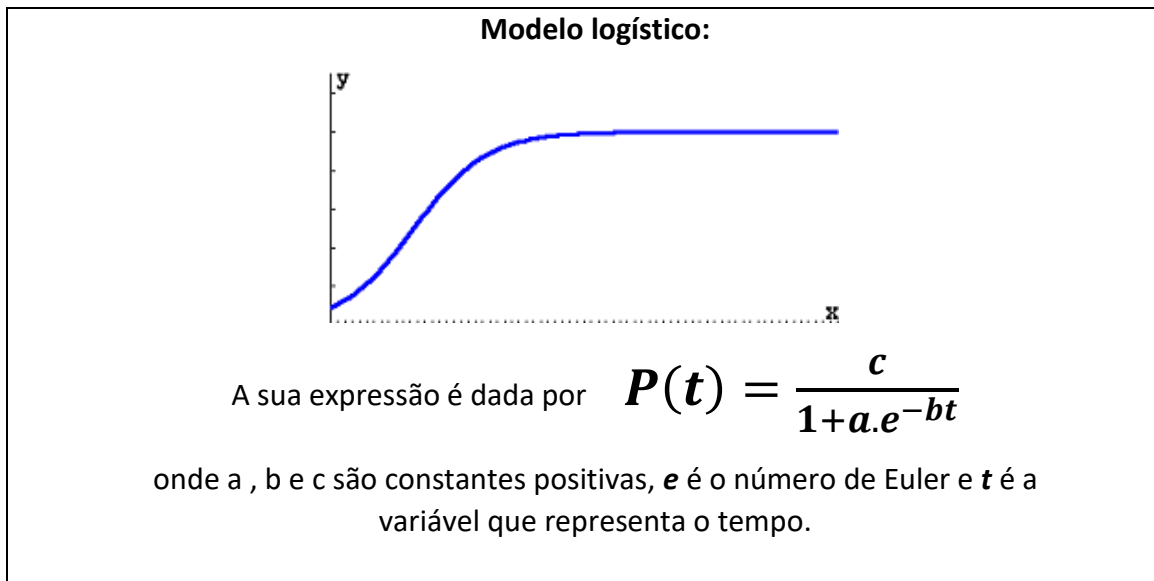


6.3-Crescimento Logístico.

(Fórmula, gráfico, exemplos, regressão logística, ...)

Este modelo tem algumas semelhanças com o modelo exponencial. Aqui começamos com um crescimento lento, seguido de um crescimento rápido e de um crescimento lento, até estabilizar. É um modelo mais realista sobre os modelos de crescimento populacional.



O gráfico de um **modelo de crescimento logístico** tem aproximadamente a forma de «S» e contempla três fases distintas:

- crescimento **lento** (inicialmente): fase de adaptação;
- crescimento **rápido**: fase de reprodução, ou de propagação;
- crescimento **muito lento**: fase de **estabilização**, ou de equilíbrio.

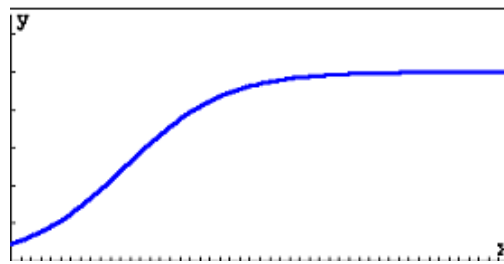
Exemplo Consideremos o modelo dado por:

$$\text{por } f(x) = \frac{50}{1+10 \times e^{-0.2x}}$$

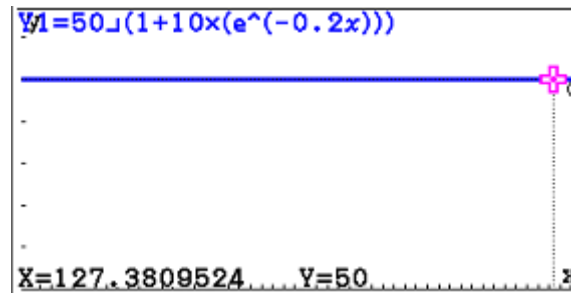
neste caso, temos $a=10$, $b=0.2$ e $c=50$

Para compreendermos melhor este modelo populacional, vamos analisar a sua tabela e o seu gráfico com a ajuda da calculadora gráfica:

X entre 0 e 50



Usando o trace e a seta para a direita, obtemos:



A partir de $x = 127$, temos os valores de y iguais a 50 e fica sempre neste valor

Tabela:

$$f(0) = \frac{50}{1 + 10 \times e^{-0.2 \times 0}} = \frac{50}{1 + 10} \approx 4.545$$

Mas

X	Y1
0	4.5454
1	5.4422
2	6.4908
3	7.7063

Para valores de x acima de 125:

X	Y1
125	49.999
126	49.999
127	50
128	50

Realmente, a função estabiliza no 50.

Podemos assim constatar que o modelo logístico começa com um crescimento lento, seguido de um crescimento rápido e de um crescimento lento, até estabilizar.

Questão: e se quisermos saber para que valor de x é que o y deu 40?

Podemos resolver graficamente fazendo $y1 = \frac{50}{1+10 \times e^{-0.2x}}$ $Y2=40$

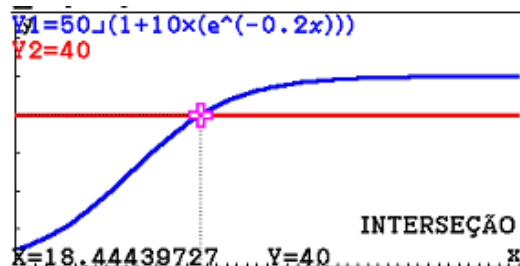
Funç. Tabela: Y=

$$Y1 = \frac{50}{1 + 10 \times e^{-0.2x}} \quad [-]$$

$$Y2 = 40 \quad [-]$$

Y3 = [-]

E pedir o gráfico e a interseção:



Resposta: aproximadamente para x igual a 18.44

Exemplo:

Um economista estudou, durante 24 meses, o número de desempregados inscritos numa delegação do Instituto do Emprego e Formação Profissional (IEFP). Concluiu que o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, no início do estudo e no final de cada mês, t , é bem aproximado pelo modelo seguinte, com

arredondamento às unidades:
$$P(t) = \frac{5000}{2 + 23e^{-0.8t}} \quad t = 0, 1, 2, \dots, 24$$

Considera-se $t = 0$ como o início do estudo.

.1) Determine, a partir do modelo P, ao fim de quantos meses após o início do estudo o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP é aproximadamente 2453.

.2) Ao longo dos 24 meses em que decorreu o estudo, o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP não foi constante.

Num pequeno texto, analise a evolução do número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, com base na representação gráfica do modelo P.

Na sua resposta, deve:

- *reproduzir, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora;
- *reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- *indicar o número máximo de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, nos 24 meses em que decorreu o estudo;
- *apresentar a diferença entre os números de desempregados inscritos no início e no final do estudo;
- *descrever a forma como evoluiu o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, nos 24 meses em que decorreu o estudo.

Resolução:

.1)

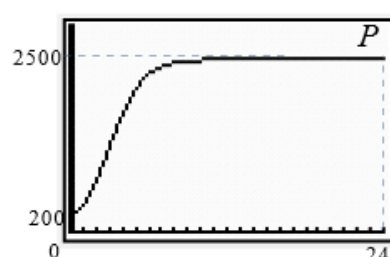
Inserindo o modelo no editor de funções da calculadora gráfica e consultando a respectiva tabela de valores, temos:

X	Y1	
6	2283.9	
7	2398	
8	2453.1	
9	2478.7	
10	2490.4	
11	2495.7	
12	2498.1	
Y1=2453.12589452		

Assim, podemos concluir que ao fim de 8 meses, o número de desempregados inscritos na delegação em causa é de 2453.

.2)

Representação gráfica



Janela de visualização

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=24
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=3000
Yscl=1
Xres=1
```

Pela observação conjunta da representação gráfica e da tabela de valores de $P(t)$, é possível observar que:

- o número de desempregados inscritos na delegação em causa, no início do estudo era de 200;
- o número máximo de desempregados inscritos no período de tempo considerado, é dado

por $P(24) = \frac{5000}{2 + 23e^{-0,8 \times 24}} \approx 2499,9999$, donde se conclui que o número máximo de

desempregados inscritos é de 2500,

- verifica-se, assim, um aumento bruto de 2300 desempregados registados ($2500 - 200$) neste período;

- pela observação do gráfico podemos que, no início, o aumento mensal do número de desempregados inscritos foi mais acentuado, tendo esse aumento começado a diminuir a partir do 4º mês e estabilizando-se o número de desempregados inscrito no valor 2500 a partir do 14º mês.

Exemplo: Regressão logística (Reg: logistic ou lgst. Não: ~~log~~)

Uma empresa de marketing analisa dados relativos às vendas mensais computadores.

Na tabela seguinte apresenta-se o número V de computadores vendidos, em milhares, t meses após o início das vendas.

t (meses)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V (milhares)	0.541	2.532	13.163	14.204	15.105	16.236	16.257	16.288	16.290

Um modelo que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao número V de computadores vendidos, em função de t, é da forma $V(t) = \frac{c}{1+a \times e^{-bt}}$.

Determine as constantes **a**, **b** e **c**, recorrendo à calculadora.

Apresente os valores de a, b e c, com arredondamento às centésimas.

Utilizando a fórmula obtida, estime o número de computadores vendidos ao fim de 14 meses. Apresente ao valor arredondado às unidades.

Resolução:

Começamos por lançar na calculadora gráfica as listas:

Lista 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lista 2	0.541	2.532	13.163	14.204	15.105	16.236	16.257	16.288	16.290

E pedimos o modelo de regressão logística da forma $V(t) = \frac{c}{1+a \times e^{-bt}}$.

O obtemos a= 2415.66 b= 3.10 C= 15.79

(ou, consoante a calculadora, podemos obter

a=2307.26 b= 3.09 c= 15.79) .

Para calcular o valor ao fim de 14 meses, substituímos t por 14:

$$V(14) = \frac{15.79}{1+2415.66 \times e^{-3.10 \times 14}} = 15.79 \text{ milhares.}$$

(na outra situação o resultado é igual)

R: ao fim de 14 meses, estimamos vender 15 790 computadores