

## 6.2-Crescimento Exponencial.

(Juro composto, progressão geométrica, razão, Modelo exponencial, expressão geral, número “e”, juros e capitalizações, Crescimento exponencial contínuo, gráficos, regressão exponencial, ...)

**Exemplo:** Considere a seguinte sequência de números:

4, 8, 16, 32, 64, 128, 256,...

4;  $4 \times 2 = 8$ ;  $4 \times 2 \times 2 = 16$ ;  $4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ ;  $4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

$4 \times 2^5 = 128$ ;  $4 \times 2^6 = 256$ ; ...geral:  $4 \times 2^n$

Em cada transição, multiplicando sempre o mesmo número. Na expressão geral aparece um expoente.

Trata-se de uma progressão geométrica de razão 2

**Recordar:** No **juro composto** o juro produzido em cada período de tempo é adicionado ao capital. No período seguinte, o valor do juro aumenta por ter aumentado o capital.

Para um depósito inicial  $C_0$ , a uma taxa de juro  $i$ , o capital  $C_n$  ao fim de  $n$  anos é dado por:

(EX:  $C_0=500$  taxa=10%...)

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

**Exemplo:**  $C_0=500$  euros taxa 10%  $C_1=500 \times 1.1^1$   $C_{10}=500 \times 1.1^{10}$  ...  $C_n=500 \times 1.1^n$

Trata-se de uma progressão geométrica de razão 1.1, pois estamos sempre a multiplicar por 1.1.

### Exemplo

Imagine que deposita 15 000 euros num banco que lhe paga 9% de juros anuais em regime de juro composto.

- .1) Qual o valor acumulado por esse capital ao fim de 4 anos?
- .2) Qual é o número mínimo de anos para que o seu capital ultrapasse os 60 000 euros? Explique como obteve o resultado. (Sugestão: Utilize a Tabela da Calculadora Gráfica.)

### Resolução:

.1)  $C_4 = 15\,000 \times 1.09^4 \approx 21\,173,724$

.2) Colocamos da calculadora gráfica  $Y_1 = 15\,000 \times 1.09^x$  e pedimos a tabela.

Obtemos:

|       |        |
|-------|--------|
| ..... | .....  |
| 16    | 59 555 |
| 17    | 64 915 |

R: Ao fim de 17 anos, o capital ultrapassa os 60 000 euros.

**Progressão Geométrica** (p.g.) é uma sucessão em que é constante o quociente entre duas transições. A essa constante, que é a **Taxa de crescimento**, chamamos **razão** da progressão.

**Exemplo** – Progressão geométrica (p.g).

Consideremos a sequência: 3; 6; 12; 24; 48; 96,....

Podemos verificar que  $\frac{6}{3} = 2$ ;  $\frac{12}{6} = 2$ ;  $\frac{24}{12} = 2$ ;  $\frac{48}{24} = 2$ ;  $\frac{96}{48} = 2$

Temos uma progressão geométrica de razão 2, isto é:

$U_n$  é uma p.g. com  $U_0=3$  e  $r=2$ . O termo geral será  $U_n=3 \times 2^n$

**Exemplo**

De uma progressão geométrica, sabe-se que  $U_2=63$  e a razão é 3. Determine os valores de  $U_0$  e de  $U_{10}$ . Apresente também o termo geral da progressão.

**Resolução**

Progressão geométrica,  $U_2=63$  a razão é 3.

$$63=U_0 \times 3^2 \Leftrightarrow U_0 = 63/3^2 \Leftrightarrow U_0=7 \quad U_n = 7 \times 3^n \quad U_{10} = 7 \times 3^{10}=413\,343$$

Modelo de **crescimento Exponencial discreto** é um modelo em que a evolução da população é descrita por uma progressão geométrica de razão  $r$ . Pode ser definida por:

$$P_n=P_0 \cdot r^n, \text{ com } n \text{ natural}$$

E onde:

$$r = \frac{P_{n+1}}{P_n}$$

**Exemplo**

Uma população aumenta a uma taxa de 5 % por mês. Sabemos que inicialmente existiam 1200 elementos.

Apresente a fórmula do modelo de crescimento desta população e o número de elementos ao fim de 5 anos. Apresente o resultado arredondado às unidades.

**Resolução:**

$$P_n=P_0 \times r^n \quad P_n=1200 \times 1.05^n \quad P_5=1200 \times 1.05^5 \approx 1532$$

### Exemplo

Uma população de coelhos aumenta a uma taxa de 5 % por mês. Assumindo que esta taxa se mantém constante, determine o número de coelhos esperado ao fim de um ano, sabendo que ao fim de 2 meses tínhamos 1 323 coelhos. Apresente o resultado arredondado às unidades.

### Resolução:

$$P_n = P_0 \times 1.05^n \quad P_{12} = P_2 \times 1.05^{10} = 1323 \times 1.05^{10} = 2155.027591 \approx 2155$$

### Exemplo

Uma população diminui a uma taxa de 15 % ao ano. Sabemos que inicialmente existiam 100 000 elementos, quantos existirão passados 8 anos? Apresente o resultado arredondado às unidades.

### Resolução:

100%-15%=85% ou seja  $r=0.85$ .

$$P_n = P_0 \times r^n \quad P_n = 100000 \times 0.85^n \quad P_8 = 100000 \times 0.85^8 \approx 27249$$

**Exemplo:** Qual é o menor valor de  $n$ , para o qual  $2^n$  é maior que 2000?

Sugestão 1: experimente por tentativas. ( $2^{10}=1024$ ;  $2^{11}=2048$ ...)

Sugestão 2: Faça uma tabela (table) com  $y_1=2^x$ . peça  $x$  de zero a 20. (Set)

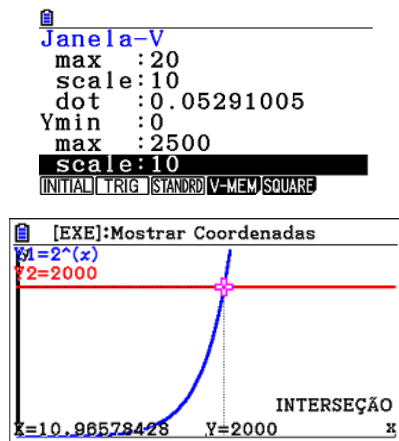
| Funç. Tabela: Y=                               |       |
|------------------------------------------------|-------|
| Y1=2 <sup>x</sup>                              | [ — ] |
| Y2:                                            | [ — ] |
| Y3:                                            | [ — ] |
| Y4:                                            | [ — ] |
| Y5:                                            | [ — ] |
| Y6:                                            | [ — ] |
| [SELECT] [DELETE] [TYPE] [STYLE] [SET] [TABLE] |       |

| X  | Y1   |
|----|------|
| 9  | 512  |
| 10 | 1024 |
| 11 | 2048 |
| 12 | 4096 |

Sugestão 3: faça um gráfico com  $Y_1=2^x$   $Y_2=2000$  e no window  $x(0 \text{ a } 20)$   $y(0 \text{ a } 2500)$

| [Math] [Rad] [NormI] [Real]                     |       |
|-------------------------------------------------|-------|
| Funç Gráf. : Y=                                 |       |
| Y1=2 <sup>x</sup>                               | [ — ] |
| Y2=2000                                         | [ — ] |
| Y3:                                             | [ — ] |
| Y4:                                             | [ — ] |
| Y5:                                             | [ — ] |
| Y6:                                             | [ — ] |
| [SELECT] [DELETE] [TYPE] [TOOL] [MODIFY] [DRAW] |       |



Depois peça **intersect** em **Gsolv** (Casio) ou **Calc/ intersect** (Texas).

R:  $n=11$

**Exemplo:** Repita o que foi feito no exemplo anterior.

Uma população cresce de acordo com o modelo  $Y_n = 5 \times 1,12^n$  com  $n$  em anos.

Ao fim de quantos anos atingimos os 1100 elementos?

1º processo: Tentativas. Vamos experimentando vários valores para  $n$

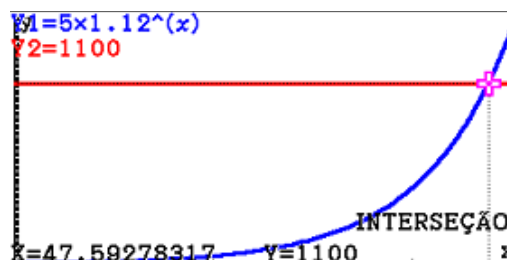
(tente resolver R:  $n=48$ )

2º processo: Tabela. Fazemos  $Y_1 = 5 \times 1,12^x$  e pedimos a tabela. (tente! ...)

3º processo: Gráfico Usando o trace e as setas. (window:  $0 < x < 50$   $0 < y < 1500$ )

(tente resolver)

4º processo: usar a interseção fazendo  $Y_1 = 5 \times 1,12^x$  e  $Y_2 = 1100$  pedimos o gráfico e depois: **Calc/ intersect** ou **isct**.



Comentário: o valor é 47.59278317..... se for arredondado às unidades é 48

R: ao fim de 48 anos,

## Juros, capitalizações e O número “e” .

**Sugestão:** experimente na sua calculadora: substituir n por valores cada vez maiores:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Para n=1

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$$

Para n=2

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

Para n=3; n=4; n=10; n=100; n=5000; n=1000 ; n=1000000

Os valores começam em 2 e vão aumentando, mas nunca chegam a 3. Estabilizam em 2.718 (Número **e**, ou número de Neper. Por vezes também designado por número de Euler)

A sucessão  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  Tende para “e”.

A sucessão  $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$  Tende para “e<sup>k</sup>”

e ≈ 2,718 Número de Euler ( também conhecido por número de Neper).

## Juros e capitalizações

Juro composto durante **1 ano**.

Vamos capitalizar os juros uma ou mais vezes por ano.

### **Exemplo**

Se eu depositar 40 000 euros num banco, em regime de juro composto, a uma taxa de 2.8 % ao ano, determinemos o valor acumulado ao fim de um ano, se os juros forem capitalizados:

**.1)** anualmente. **2)** semestralmente. **3)** trimestralmente **4)** mensalmente.

**5)** diariamente **6)** hora a hora.

### **Resolução:**

**.1)** Anualmente

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{1}\right)^1 = 40000 \times 1.028 = 41\,120 \text{ €}$$

**.2) Semestralmente.**

Um semestre são seis meses, logo, um ano tem dois semestres.

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{2}\right)^2 = 41\,127.84\text{€}$$

Nota: Obtivemos um valor ligeiramente superior ao anterior.

**.3) Trimestralmente.**

Um trimestre são três meses, logo, um ano tem quatro trimestres.

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{4}\right)^4 = 41\,131.81498\text{€}$$

Nota: Obtivemos um valor ligeiramente superior ao anterior.

**.4) Mensalmente**

Um ano tem doze meses.

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{12}\right)^{12} = 41\,134.485712\text{€}$$

Nota: Obtivemos um valor ligeiramente superior ao anterior.

**.5) Diariamente.**

**Nota:** Apesar de sabermos que um ano tem 365 ou 366 dias, consoante seja comum ou bissexto, nestes cálculos financeiros, é costume considerar um ano com 360 dias e um mês com 30 dias para que se obtenha  $12 \times 30 = 360$ .

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{360}\right)^{360} = 41\,135.78259\text{€}$$

Nota: Obtivemos um valor ligeiramente superior ao anterior.

**Nota:** Como pudemos constatar ao longo das alíneas do exemplo apresentado, quanto mais capitalizações anuais, maior é o capital acumulado.

Com o passar do tempo, isto é, à medida que  $n$  aumenta,

$$\left(1 + \frac{0.028}{n}\right)^n \text{ tende para } e^{0.028}$$

$$e^{0.028} \approx 1.028395684$$

Dizemos que capitaliza **continuamente**.

**Nota:**

Para o cálculo do capital, quando temos o juro para 1 ano, o capital é dado por uma expressão do tipo:  $C_1 = C_0 \times \left(1 + \frac{tx}{k}\right)^k$  em que k representa o número de capitalizações anuais.

Se o juro capitalizar **continuamente**, isto é, a cada instante, será a expressão:  $C = e^{tx}$ .

**Exemplo.**

Imagine que deposita 15 000 euros num banco que lhe paga 9% de juros anuais.

Calcule quanto dinheiro terá na conta ao fim de 1 ano supondo que o banco capitaliza os juros: **.1)** anualmente. **.2)** mensalmente. **.3)** continuamente.

**Resolução:**

Capital inicial: 15 000 euros Taxa 9% ao ano

período de um ano

**.1)** Anualmente:  $C = 15000 \times (1 + 0.09)^1 = 16\,350$ .

**.2)** Mensalmente:  $C = 15000 \times \left(1 + \frac{0.09}{12}\right)^{12} \approx 16\,407,103$

**.3)** Continuamente.  $C = 15000 \times e^{0.09 \times 1} \approx 16\,412,614$

**Modelo de Crescimento Exponencial contínuo (pág. 114)**

$$P(t) = P_0 \times e^{kt} \quad \text{sendo } k \text{ constante.}$$

**Exemplo**

A altura de uma planta, em milímetros é dada pela expressão  $P(t) = 120 \times e^{0.5t}$ , onde t representa o tempo em meses e t=0 representa o primeiro momento que a planta foi medida.

**.1)** Qual o comprimento da planta no primeiro momento em foi medida (t=0)?

**Resposta:**

$$P(0) = 1200 \times e^{0.5 \times 0} = 1200 \text{ mm.}$$

**.2)** Qual o comprimento da planta, 3 meses depois do primeiro momento em foi medida ?

**Resposta:**

$$P(3) = 1200 \times e^{0.5 \times 3} \approx 5378 \text{ mm.}$$

**Exemplo-** Regressão exponencial. (...podem existir duas fórmulas....)

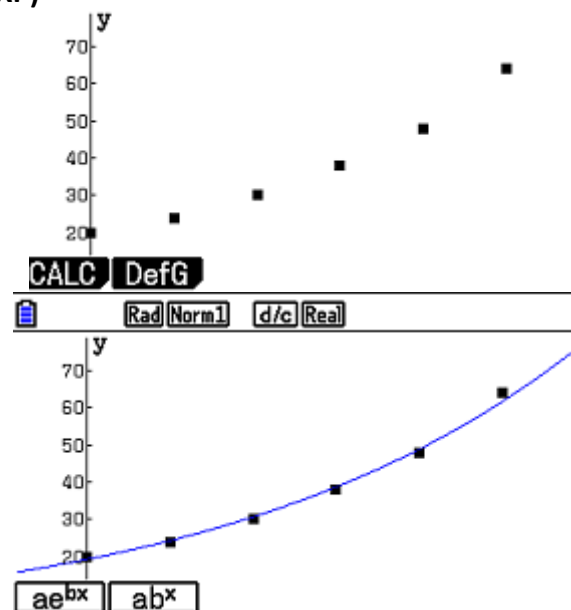
Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existente numa área reservada desde a sua criação:

| Número de meses decorridos desde a criação da área reservada(x) | Número de animais existentes na área reservada(y) |
|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 0                                                               | 20                                                |
| 2                                                               | 24                                                |
| 4                                                               | 30                                                |
| 6                                                               | 38                                                |
| 8                                                               | 48                                                |
| 10                                                              | 64                                                |

Com o auxílio da calculadora, determine o modelo de regressão exponencial ( $y=a.b^x$  ou  $y=a.e^{bx}$ ), que se ajusta a estes valores. Apresente os valores dos coeficientes com arredondamento às milésimas.

**Resolução:**

Fazemos p procedimento parecido ao da regressão linear, mas escolhemos a regressão exponencial (REG/ EXP)



Escolhemos  $y=a.b^x$

```

RegExp(a · b^x)
a =19.2905402
b =1.12318173
r =0.99782561
r²=0.99565595
MSe=1.0303×10⁰³
y=a · b^x
  
```

Que corresponde a  $y= 19.291 \times 1.123^x$ .

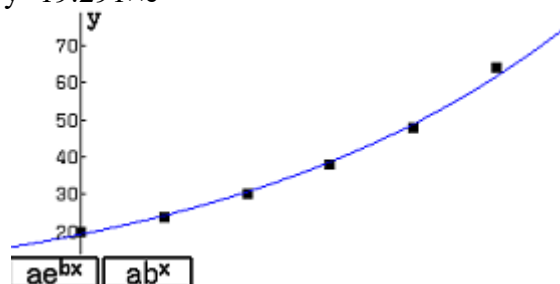
Alternativamente, poderíamos ter feito a outra opção:  $y=a.e^{bx}$

```

RegExp(a · e^bx)
a =19.2905402
b =0.11616549
r =0.99782561
r² =0.99565595
MSe=1.0303×10⁰³
y=a · e^bx

```

Que corresponderia a  $y=19.291 \times e^{0.116x}$



Sugestão: Utilizemos a equação obtida para estimar um valor aproximado para o número de animais ao fim de 5 meses:

Basta substituir na fórmula  $t$  por 5:

$$y = 19.291 \times 1.123^x \quad y = 19.291 \times 1.123^5 \approx 35$$

pela outra fórmula:

$$y = 19.291 \times e^{0.116x} \quad y = 19.291 \times e^{0.116 \times 5} \approx 34$$

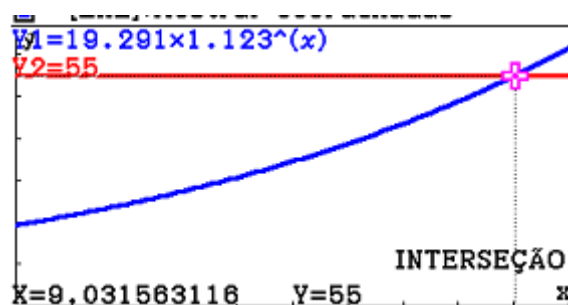
os valores são muito próximos apesar de não coincidirem.

Sugestão:

Utilizando a primeira expressão da regressão obtida,  $y = 19.291 \times 1.123^x$ , estimemos ao fim de quantos meses seria de esperar o valor 55 animais, isto é, para que valor de  $x$  teremos  $y=55$ .

Vamos resolver graficamente com  $y_1 = 19.291 \times 1.123^x$  e  $y_2 = 55$

Pedimos o gráfico de depois a interseção:



Obtemos  $x \approx 9$ .

Resposta: ao fim de aproximadamente 9 meses, o número de animais será igual a 55.

**Nota Importante:** Na regressão exponencial, consoante a calculadora utilizada, a função pode ser apresentada de dois tipos: ( $y=a.b^x$  ou  $a.e^{bx}$ )

Ambos estão matematicamente corretos, mas, se pudermos optar, vamos escolher o primeiro:  $y=a.b^x$