6.1-Crescimento Linear.

(Progressão aritmética, razão, expressão geral, gráfico, crescimento linear, juro simples, regressão linear, ...)

Introdução

Aqui pretendemos estudar a evolução do número de indivíduos de uma população.

Crescimento populacional **positivo**: a dimensão da população aumenta ao longo do tempo.

Crescimento populacional **negativo**: a dimensão da população diminui ao longo do tempo.

Crescimento discreto: as mudanças acontecem de tempos a tempos.(exemplo: nascimento de crianças numa vila.)

Crescimento contínuo: as mudanças acontecem a todo o instante.(exemplo: o crescimento de uma planta.

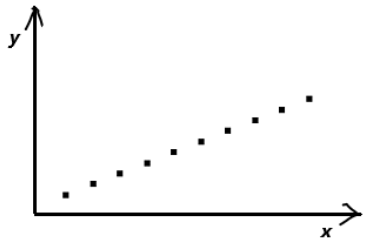
Vamos analisar quatro modelos populacionais:

Linear; Exponencial; Logístico e Logarítmico.

Crescimento linear

Em cada transição, aumentamos sempre o mesmo valor.

O gráfico é formado por pontos em linha reta.



Exemplo 1

Suponhamos que já temos 1000 euros e todos os meses vamos poupar mais 50 euros.
Daqui a um mês teremos: 1000+50=1050 € ou C_1=1050

Daqui a 2 meses: 1000+2×50=1100 € ou C_2=1100

Daqui a 3 meses: 1000+3×50=1150 € C_3=1150

Daqui a 4 meses: 1000+4×50=1200 € C_4=1200

Daqui a 10 meses: 1000+10×50=1500 € ou C_{10}=1500

Daqui a n meses: 1000+n×50 ou C_n=1000+50n

Nota: No exemplo anterior, verificamos que, na transição de um mês para o outro, há sempre um aumento de 50 euros. Temos uma Progressão aritmética de razão 50.

Sucessão é uma sequência infinita de números que podem respeitar uma determinada ordem.

progressão aritmética(p.a.) é uma sucessão em que é constante a diferença entre duas transições consecutivas.

A essa constante chamamos **razão**, r, da progressão. No caso de crescimento populacional, a razão representa a **taxa de crescimento** da população.

Exemplo (extra) de progressão aritmética (p.a.):

Considere a sequência: 7; 10; 13; 16; 19; 22, …….

P.a. U_0=7 (valor inicial) r=3 (Razão)

Expressão geral: Un= 7+ 3n

Exemplo:

De uma progressão aritmética, sabe-se que U_2= 63 e a razão é 3. Determine os valores de U_0 e de U_{10}. Apresente também o termo geral da progressão aritmética.

Resolução:

Progressão aritmética, U_2= 63 a razão é 3.

$63=U_0+2\times3 \Leftrightarrow U_0= 63-6 \Leftrightarrow U_0= 57$ Un=57+3n $U_{10}=57+3\times10=87$

Modelo de Crescimento Linear discreto é um modelo em que a evolução da população é descrita por uma progressão aritmética de razão r, que pode ser definida por:

$$\mathbf{P_n = P_0 + n.r}, \text{ com n natural.}$$

Onde

$$\mathbf{r = P_{n+1} - P_n}\ .$$

Exemplo(*extra*) Considere a seguinte sequência de números:

3; 5; 7; 9; 11; 13; … estão de acordo com o modelo de crescimento linear e igualmente formam uma progressão aritmética em que:

P_0=3 ***r*** =2 P_n= 3+2n

Recordar: **Juro simples**- O juro é depositado numa conta à ordem. O valor do juro ganho em cada período de tempo é sempre o mesmo.

Exemplo Juro simples. Capital inicial C_0=500 € taxa anual 10%

Repare que 10% de 500 é 50. Assim, todos os anos o juro ganho será sempre 50 euros.

Capital ao fim de 1 ano C_1= 500+ 0.1×500=500+50=550

Dois anos: C_2= 500+ 2×0.1×500=500+2×50=600

Três anos: C_3= 500+ 3×0.1×500=500+3×50=650

Expressão geral, isto é, n anos: C_n= 500+ n×0.1×500=500+50n

Exemplo- Modelo de regressão linear.
Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existente numa área reservada desde a sua criação:

Número de meses decorridos desde a criação da área reservada(x)	Número de animais existentes na área reservada(y)	Com o auxílio da calculadora, determine o modelo de regressão linear (***y=ax+b***), que se ajusta a estes valores. Apresente os valores dos coeficientes com arredondamento às décimas. De seguida, utilize a equação obtida para estimar quantos animais existiam ao fim de 7 meses. Apresente o resultado arredondado às unidades.
0	20	
2	24	
4	28	
6	32	
8	35	

Resolução:

Colocamos na calculadora gráfica as listas:

0	20
2	24
4	28
6	32
8	35

E pedimos a equação do modelo de regressão linear (y=ax+b). Obtemos Y= 1,9x+20,2
De seguida, substituímos o valor de *x* por 7 Y= 1.9×*7*+20.2 =33.5 aproximadamente 34. R: Ao fim de 7 meses existiam 34 animais.

Instruções para a calculadora-Regressão linear:

<table>
<tr><td>Tarefa</td><td>Casio 9850</td><td>Texas Ti-83</td></tr>
<tr><td>Trabalhar em Estatística.</td><td>MENU / STAT / EXE</td><td>STAT / 1:Edit / ENTER</td></tr>
<tr><td>Se as listas não estiverem vazias, apague.</td><td>►(F6) / DEL-A /YES (F1)</td><td>L1/ CLEAR/ ENTER</td></tr>
<tr><td>Introduzir os dados na calculadora.
Colocar na lista 1(L1).
1, 2, 3, 4
E na lista 2(L2)
10, 12, 15, 17</td><td>Cada vez que lançar um valor faça EXE .</td><td>Cada vez que lançar um valor faça ENTER .</td></tr>
<tr><td>Introduzir os valores:
Na lista 1_ valores de x.
<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>10</td><td>12</td><td>15</td><td>17</td></tr></table>Na lista2_ Valores de y.</td><td>Uma vez lançados os dados nas duas listas, avançamos para a regressão linear.</td><td>Uma vez lançados os dados nas duas listas, avançamos para a regressão linear.</td></tr>
<tr><td>Obter a equação da reta de regressão e o coeficiente de correlação.</td><td>CALC/ REG(F3)/ X(F1)
Faça:
SET(F6)
2Var Xlist: List1
2Var Ylist: List2
2Var Freq: 1
EXE.
REG./X</td><td>STAT/ CALC
4- Lin reg(ax+b) ENTER
L1, L2.
(Nota: se não aparecer o valor de “r”, faça:
Catalog:Diagnostic On)</td></tr>
</table>

Modelo de crescimento linear contínuo é dado por

$$P(t)= at + b$$

Onde a e b são números reais e t é a variável que representa o tempo.

Exemplo:

Uma planta mede 10 cm de altura e cresce 3cm por mês.

.1) Qual é a expressão que nos dá a altura da planta ao logo do tempo?

.2) qual será a altura da planta ao fim de 10 meses?

.3) ao fim de quanto tempo, a planta atingirá 52 centímetros?

Resposta:

.1) Seja A a altura em cm e t o tempo em meses.

A expressão será A(t)=10+3t

.2) $A(10)=10+3\times10= 40$ R: ao fim de de meses a altura da planta será 40 cm.

.3) $10+3t=52 \Leftrightarrow 3t=52 -10 \Leftrightarrow 3t=42 \Leftrightarrow t= 42/3 \Leftrightarrow t= 14$ R: a planta atingirá 52 centímetros ao fim de 14 meses.