

6.1-Crescimento Linear.

(Progressão aritmética, razão, expressão geral, gráfico, crescimento linear, juro simples, regressão linear, ...)

Introdução

Aqui pretendemos estudar a evolução do número de indivíduos de uma população.

Crescimento populacional positivo: a dimensão da população aumenta ao longo do tempo.

Crescimento populacional negativo: a dimensão da população diminui ao longo do tempo.

Crescimento discreto: as mudanças acontecem de tempos a tempos.(exemplo: nascimento de crianças numa vila.)

Crescimento contínuo: as mudanças acontecem a todo o instante.(exemplo: o crescimento de uma planta.

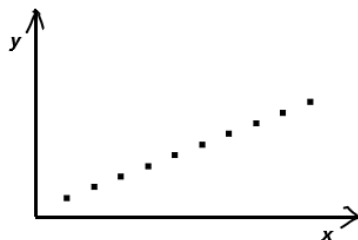
Vamos analisar quatro modelos populacionais:

Linear; Exponencial; Logístico e Logarítmico.

Crescimento linear

Em cada transição, aumentamos sempre o mesmo valor.

O gráfico é formado por pontos em linha reta.



Exemplo 1

Suponhamos que já temos 1000 euros e todos os meses vamos poupar mais 50 euros.

Daqui a um mês teremos: $1000+50=1050$ € ou $C_1=1050$

Daqui a 2 meses: $1000+2\times 50=1100$ € ou $C_2=1100$

Daqui a 3 meses: $1000+3\times 50=1150$ € $C_3=1150$

Daqui a 4 meses: $1000+4\times 50=1200$ € $C_4=1200$

Daqui a 10 meses: $1000+10\times 50=1500$ € ou $C_{10}=1500$

Daqui a n meses: $1000+n\times 50$ ou $C_n=1000+50n$

Nota: No exemplo anterior, verificamos que, na transição de um mês para o outro, há sempre um aumento de 50 euros. Temos uma Progressão aritmética de razão 50.

Sucessão é uma sequência infinita de números que podem respeitar uma determinada ordem.

progressão aritmética(p.a.) é uma sucessão em que é constante a diferença entre duas transições consecutivas.

A essa constante chamamos **razão**, r , da progressão. No caso de crescimento populacional, a razão representa a **taxa de crescimento** da população.

Exemplo (extra) de progressão aritmética (p.a.):

Considere a sequência: 7; 10; 13; 16; 19; 22;

P.a. $U_0=7$ (valor inicial) $r=3$ (Razão)

Expressão geral: $U_n = 7 + 3n$

Exemplo:

De uma progressão aritmética, sabe-se que $U_2 = 63$ e a razão é 3. Determine os valores de U_0 e de U_{10} . Apresente também o termo geral da progressão aritmética.

Resolução:

Progressão aritmética, $U_2 = 63$ a razão é 3.

$$63 = U_0 + 2 \times 3 \Leftrightarrow U_0 = 63 - 6 \Leftrightarrow U_0 = 57 \quad U_n = 57 + 3n \quad U_{10} = 57 + 3 \times 10 = 87$$

Modelo de Crescimento Linear discreto é um modelo em que a evolução da população é descrita por uma progressão aritmética de razão r , que pode ser definida por:

$$P_n = P_0 + n.r, \text{ com } n \text{ natural.}$$

Onde

$$r = P_{n+1} - P_n.$$

Exemplo(extra) Considere a seguinte sequência de números:

3; 5; 7; 9; 11; 13; ... estão de acordo com o modelo de crescimento linear e igualmente formam uma progressão aritmética em que:

$$U_0=3 \quad r=2 \quad U_n = 3+2n$$

Recordar: Juro simples- O juro é depositado numa conta à ordem. O valor do juro ganho em cada período de tempo é sempre o mesmo.

Exemplo Juro simples. Capital inicial $C_0=500$ € taxa anual 10%

Repare que 10% de 500 é 50. Assim, todos os anos o juro ganho será sempre 50 euros.

Capital ao fim de 1 ano $C_1= 500+ 0.1 \times 500=500+50=550$

Dois anos: $C_2= 500+ 2 \times 0.1 \times 500=500+2 \times 50=600$

Três anos: $C_3= 500+ 3 \times 0.1 \times 500=500+3 \times 50=650$

Expressão geral, isto é, n anos: $C_n= 500+ n \times 0.1 \times 500=500+50n$

Exemplo- Modelo de regressão linear.

Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existente numa área reservada desde a sua criação:

Número de meses decorridos desde a criação da área reservada(x)	Número de animais existentes na área reservada(y)	Com o auxílio da calculadora, determine o modelo de regressão linear ($y=ax+b$), que se ajusta a estes valores. Apresente os valores dos coeficientes com arredondamento às décimas. De seguida, utilize a equação obtida para estimar quantos animais existiam ao fim de 7 meses. Apresente o resultado arredondado às unidades.
0	20	
2	24	
4	28	
6	32	
8	35	

Resolução:

Colocamos na calculadora gráfica as listas:

0	20
2	24
4	28
6	32
8	35

E pedimos a equação do modelo de regressão linear ($y=ax+b$). Obtemos $Y= 1,9x+20,2$
De seguida, substituímos o valor de x por 7 $Y= 1.9 \times 7+20.2 =33.5$ aproximadamente 34. R: Ao fim de 7 meses existiam 34 animais.

Instruções para a calculadora-Regressão linear:

Tarefa	Casio 9850	Texas Ti-83										
Trabalhar em Estatística.	<u>MENU</u> / STAT / <u>EXE</u>	<u>STAT</u> / 1:Edit / <u>ENTER</u>										
Se as listas não estiverem vazias, apague.	► (F6) / DEL-A /YES (F1)	L1/ <u>CLEAR</u> / <u>ENTER</u>										
Introduzir os dados na calculadora. Colocar na lista 1(L1). 1, 2, 3, 4 E na lista 2(L2) 10, 12, 15, 17	Cada vez que lançar um valor faça <u>EXE</u> .	Cada vez que lançar um valor faça <u>ENTER</u> .										
Introduzir os valores: Na lista 1_ valores de x. <table border="1"><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>10</td><td>12</td><td>15</td><td>17</td></tr></table> Na lista2_ Valores de y.	X	1	2	3	4	y	10	12	15	17	<i>Uma vez lançados os dados nas duas listas, avançamos para a regressão linear.</i>	<i>Uma vez lançados os dados nas duas listas, avançamos para a regressão linear.</i>
X	1	2	3	4								
y	10	12	15	17								
Obter a equação da reta de regressão e o coeficiente de correlação.	CALC/ REG(F3)/ X(<u>F1</u>) Faça: SET(F6) 2Var Xlist: List1 2Var Ylist: List2 2Var Freq: 1 <u>EXE</u> . REG./X	<u>STAT</u> / CALC 4- Lin reg(ax+b) <u>ENTER</u> L1, L2. (Nota: se não aparecer o valor de “r”, faça: <u>Catalog</u> :Diagnostic On)										

Modelo de crescimento linear contínuo é dado por

$$P(t) = at + b$$

Onde a e b são números reais e t é a variável que representa o tempo.

Exemplo:

Uma planta mede 10 cm de altura e cresce 3cm por mês.

- .1) Qual é a expressão que nos dá a altura da planta ao longo do tempo?
- .2) qual será a altura da planta ao fim de 10 meses?
- .3) ao fim de quanto tempo, a planta atingirá 52 centímetros?

Resposta:

- .1) Seja A a altura em cm e t o tempo em meses.

A expressão será $A(t) = 10 + 3t$

- .2) $A(10) = 10 + 3 \times 10 = 40$ R: ao fim de 10 meses a altura da planta será 40 cm.

- .3) $10 + 3t = 52 \Leftrightarrow 3t = 52 - 10 \Leftrightarrow 3t = 42 \Leftrightarrow t = 42/3 \Leftrightarrow t = 14$ R: a planta atingirá 52 centímetros ao fim de 14 meses.