4.2-Atividade bancária.

(Juros simples, juros compostos, poupança, crédito, cartão de crédito, aluguer:ALD, leasing)

Depósitos e juros.

Nota: sobre o dinheiro depositado, costuma incidir uma taxa de juro ganho pelo depositante. Também é frequente ser aplicado um imposto sobre os juros ganhos.

Capitalização de juros- quando se juntam os juros ganhos ao capital.

Taxa de juro pode ser anual, semestral, trimestral, …

Nota: Para os cálculos exatos dos juros, muitas vezes consideramos um ano com 360 dias e um mês com 30 dias.

Exemplo

A Dona Ana depositou 8 000 euros num banco, com uma taxa *anual* de 2,6%.

.1) Se mantiver o depósito durante um ano, quanto ganhará de juro no final desse período?

Resposta:

Primeiro, passamos de percentagem para dízima: 2.6%=2.6/100 = 0.026

$8000\times 0.026 = 208$

Ao fim de um ano, o juro ganho será de 208 euros.

.2) se apenas mantiver o depósito durante 3 meses, quanto ganhará de juro no final desse período?

Resposta:

3 meses corresponde a $3\times 30 = 90$ dias.

Neste caso, o juro será $8000 \times \frac{90}{360} \times 0.026 = 52$

Ao fim de 3 meses, o juro ganho será de 52 euros.

Exemplo:

A Dona Rita depositou 4 000 euros num banco, com uma taxa *anual* de 2,3%.

.1) se mantiver o depósito durante um ano, qual será o seu capital no final desse período?

Resposta:

.1) Terá o capital 4 000 euros e mais o juro ganho, que corresponde a

$4000 \times 0.023 = 92$ somando, temos $4000 + 92 = 4\,092$ €

Ao fim de um ano, o seu capital será de 4092€

.2) Admitindo que existe um imposto de 28% sobre o juro ganho, qual será o seu capital líquido ao fim de um ano?

$0.28 \times 92 = 25.76$ (imposto a pagar).

$4092 - 25.76 = 4\,066.24$

O capital líquido ao fim de um ano será 4 066.24 euros.

Juro simples.

Juro simples: o juro produzido é sempre o mesmo e não é adicionado ao capital.
O juro é calculado multiplicando o capital inicial pela taxa e pelo número de anos.

Cálculo do juro (ao fim de n anos).

$$J_n = C_0 \times n \times i$$

onde **n** é o número de anos, C_0 é o capital inicial e **i** é a taxa de juro na forma decimal.

Exemplo:

Depositámos 2400 euros durante 22 anos, numa conta a uma taxa anual de 5 %. Qual será o nosso capital no final do tempo indicado, admitindo que este foi depositado em regime de Juro simples.

Resposta:

$C_{22} = 2400 + 22 \times 2400 \times 0.05 = 5040$ euros

Exemplo 1

Suponhamos que eu deposito 5000 euros em regime de juro simples a uma taxa de 2.6% ao ano.

.1) Quanto ganharei de juro ao fim de 1 ano?

.2) Quanto ganharei de juro ao fim de 5 anos?

Resolução

.1) $J_1 = 5000 \times 1 \times 0.026 =$ Ganharei 130 € de juro.

.2) $J_5 = 5000 \times 5 \times 0.026 = 650$ Ganharei 650 € de juro.

Para calcular o **capital total**, basta somar o capital inicial ao juro ganho:

Capital ao fim de n anos:

$$C_n = C_0 + C_0 \times n \times i$$

[ou $C_n = C_0 \times (1 + n \times i)$]

onde **n** é o número de anos, C_0 é o capital inicial e **i** é a taxa de juro na forma decimal.

Exemplo 2
Suponhamos que eu deposito 5000 euros em regime de juro simples a uma taxa de 2.6% ao ano.
.1) Qual será o meu capital ao fim de 8 anos?

Resolução

.**1)**Para calcular o capital ao fim de 8 anos, basta somar o capital inicial com o juro ganho, isto é,

(1º processo)

$$C_8=5000 + 5000\times8\times0.026=6040$$

Ao fim de 8 anos o meu capital será 6040€.

2º processo: podemos fazer diretamente

$$C_8=5000\times(1 + 8\times0.026)=6040€$$

Repare que, a soma do valor inicial corresponde ao número 1 que fica dentro do parenteses:

.2) ao fim de quantos anos, o meu capital será 6820 euros?

Resolução

.2)

$$C_n=6820 \Leftrightarrow 5000 + 5000\times n\times0.026=6820 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5000\times n\times0.026=6820 - 5000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 130\times n=6820 - 5000 \Leftrightarrow 130\times n=1820$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{1820}{130} \Leftrightarrow n=14$$

Ao fim de 14 anos o meu capital será 6820 euros.

Juros compostos.

Juros compostos: o juro produzido em cada período é adicionado ao capital.

Nota: Admitimos que o juro é **capitalizado anualmente**, isto é, adicionado ao capital, no fim de cada ano.

Capital ao fim de n anos:

$$\mathbf{C_n=C_0\times(1+i)^n}$$

Se quisermos apenas o juro, temos de subtrair o valor inicial:

Cálculo do **juro** (ao fim de n anos).

$$\mathbf{J_n= C_n - C_0.}$$

onde **n** é o número de anos, $\mathbf{C_0}$ é o capital inicial e **i** é a taxa de juro na forma decimal.

Exemplo

Depositámos 2400 euros durante 22 anos, numa conta a uma taxa anual de 5 %. Qual será o nosso capital no final do tempo indicado, admitindo que este foi depositado em regime de Juro composto

Resposta:

C_{22}= 2400×1.05^{22}=7020,626 euros

Mais exemplos

Exemplo 1

Suponhamos que eu deposito 5000 euros em regime de juro composto a uma taxa de 2.2% ao ano. Qual será o meu capital ao fim de 8 anos? E qual é o valor do juro ganho?

Resolução

$$C_8=5000\times(1+0.022)^8 = 5000\times(1.022)^8\approx5950.82$$

Ao fim de 8 anos o capital é de 5950.82€

O juro ganho é:

5950.82 - 5000= 950.82 euros.

Exemplo 2

A Dona Maria depositou 6 000 euros num banco, em regime de juro composto, com uma taxa *anual* de 2,3 %. Qual será o juro líquido que irá ganhar ao fim de 7 anos, sabendo que o juro ganho está sujeito a um imposto com uma taxa de 28%.

Resolução:

Capital ao fim de 7 anos:

$$C_7=6000\times1.023^7\approx 7035.268654 \text{ €}$$

Juro ganho:

7035.268654 – 6000 = 1035.268654

Imposto a aplicar 28% sobre o juro ganho.

$$0.28\times1035.268654= 289.8752231$$

Juro líquido:

$$1035.268654 - 289.8752231=745.3934309\approx 745.39 \text{ €}$$

O juro líquido será 745.39 euros.

Exemplo 3

Quantos anos são necessários para duplicar, em regime de juro composto, um capital de 20 000 € a uma taxa anual de 2.6% ?

Resolução:

$2 \times 20\,000 = 40\,000.$

$$40000 = 20000\,(1 + 0{,}026)^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{40000}{20000} = (1 + 0.026)^n$$

$$\Leftrightarrow 2 = (1 + 0{,}026)^n$$

$$\Leftrightarrow 2 = (1{,}026)^n$$

Para resolver a equação com a incógnita em expoente, vamos fazer por *tentativa e erro.*

$$\text{Se } n = 10,\ (1{,}026)^{10} \approx 1.29\ ;$$

$$\text{Se } n = 20,\ (1{,}026)^{20} \approx 1{,}67\ ;$$

$$\text{Se } n = 30,\ (1{,}026)^{30} \approx 2{,}1598\ .$$

$$\text{Se } n = 28,\ (1{,}026)^{28} \approx 2{,}05\ .$$

$$\text{Se } n = 27,\ (1{,}026)^{27} \approx 1{,}99976 \approx 2$$

Logo, são necessários 27 anos para duplicar o capital a uma taxa anual de 2.6%

Exemplo- Com a calculadora gráfica.

Foi feito um investimento em regime de juro composto no valor de 1 020 000€.

A taxa de juro anual foi de 10% e produziu um capital acumulado de 2 186 460.59 €.

Qual terá sido o tempo de duração deste investimento?

Resolução:

1º processo- Tentativa e erro:

Colocamos $2186460.59 = 1020000 \times 1.1^n$

E experimentamos vários valores para o n.

Podemos concluir que $2186460.59 = 1020000 \times 1.1^8 = 2186460.586 \approx 2186460.59$

Resposta: 8 anos.

2º processo: Calculadora gráfica-Tabela.

Colocar na calculadora gráfica a função $Y_1 = 1020000 \times 1.1^x$ e pedir uma tabela com valores para x a varia entre 0 e 20. Colocar o cursor sobre a tabela para procurar o número.

Casio:

Menu/ tabela (ou table)/

Se houver alguma função escrita, apague (Delete).

Introduzir $Y_1 = 1020000 \times 1.1^x$. (EXE).

Nota: o x é com a tecla: [X,θ, T] e o "elevado a" é com [^].

Use o [SET] para definir: Start:1 | End: 10 | e Step: 1. (EXE).

[TABLE]

Coloque o cursor sobre os valores da tabela e para ler os números ...

Texas:

Tecla [Y=]

Se houver alguma função escrita, apague [CLEAR].

Introduzir $Y1 = 1020000 \times 1.1^x$. (ENTER).

Nota: o x é com a tecla: [X,θ, T,n] e o "elevado a" é com [^].

Use o [TBLSET](por cima de Window) para definir: TblStart:1 ΔTBL=1 (ENTER).

[TABLE] (por cima de [GRAPH])

Coloque o cursor sobre os valores da tabela e para ler os números ...

TI-Nspire:

Utilizar os materiais sobre tabelas. Por exemplo, pode adaptar de:

https://pedronoia.net/nspire/10li197ex5.pdf

ou procurar nas instruções.

NumWorks:

https://www.numworks.com/pt/professores/tutoriais/

funções/

https://www.numworks.com/pt/professores/tutoriais/funcoes/

"obter a tabela de valores de uma função"

https://youtu.be/UofH2hQ0uik?si=xuR-vDrFVa555-NF

Nota: Em algumas calculadoras, existe uma secção específica para matemática financeira. Para conhecer o seu funcionamento, pode aceder ao modelo da sua calculadora e entrar em "Juros simples" e/ou "juros compostos".

Período de capitalização.

Exemplo

Se eu depositar 50 000 euros num banco, em regime de juro composto, quanto terei ao fim de um ano, se a taxa for:

.1) 4% ao ano? **.2)** 1% por trimestre?

Nota: Um trimestre são três meses. Um ano tem quatro trimestres.

Resolução:

.1) $50\,000 \times 1.04 = 52\,000$ €

.2) $50000 \times 1.01^4 = 52030.2005$

Curiosamente, no segundo caso deu um maior capital ao fim de um ano porque, apesar de a taxa de juro ser semelhante, isto é, 4 trimestres a 1%, devia corresponder a 4% ao ano.

Nota: Vamos agora apresentar uma fórmula que permite calcular o capital, mesmo quando o **período de capitalização** não é um ano.

$$\boldsymbol{C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn}}$$

Onde **i** é a taxa de juro anual na forma decimal e **k** é o número de capitalizações anuais.

Exemplo

Na segunda parte do exemplo acima seria:

$$C_1 = 50000 \times \left(1 + \frac{0.04}{4}\right)^{4\times 1} = 50000 \times (1.01)^4 = \\ = 52030.2005$$

Exemplo

Se eu depositar 40 000 euros num banco, em regime de juro composto, a uma taxa de 2.8 % ao ano, determinemos o valor acumulado, se os juros forem capitalizados:

.1) anualmente. **2)** semestralmente. **3)** trimestralmente **4)** mensalmente.

5) diariamente **6)** hora a hora.

Resolução:

.1) Anualmente

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{1}\right)^{1\times1} = 40000 \times 1.028 = 41\ 120\ €$$

.2) Semestralmente.

Um semestre são seis meses, logo, um ano tem dois semestres.

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{2}\right)^{2\times1} = 41\ 127.84€$$

Nota: Obtivemos um valor ligeiramente superior ao anterior.

.3) Trimestralmente.

Um trimestre são três meses, logo, um ano tem quatro trimestres.

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{4}\right)^{4\times1} = 41\ 131.81498€$$

Nota: Obtivemos um valor ligeiramente superior ao anterior.

.4) Mensalmente

Um ano tem doze meses.

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{12}\right)^{12\times1} = 41\ 134.485712€$$

Nota: Obtivemos um valor ligeiramente superior ao anterior.

.5) Diariamente.

Nota: Apesar de sabermos que um ano tem 365 ou 366 dias, consoante seja comum ou bissexto, nestes cálculos financeiros, é costume considerar um ano com 360 dias e um mês com 30 dias para que se obtenha $12\times30=360$.

$$C_1 = 40000 \times \left(1 + \frac{0.028}{360}\right)^{360\times1} = 41\ 135.78259€$$

Obtivemos um valor ligeiramente superior ao anterior.

Nota: Como pudemos constatar ao longo das alíneas do exemplo apresentado, quanto mais capitalizações anuais, maior é o capital acumulado.

Conta poupança habitação:

Aqui usamos um raciocínio semelhante ao juro composto, mas vamos fazendo novos depósitos, aumentando ainda mais o capital.

Exemplo - Poupança habitação

Tenho um capital de 50 000 euros e recebo anualmente 2,5% sobre o meu capital. No entanto, no final de cada ano deposito a quantia de 5 000 euros, para juntar ao meu capital.

Descreva a evolução do meu capital ao longo dos 3 primeiros anos.

Resolução:

No final do primeiro ano, o meu capital será:
50 000×1.025= 51 250€. E acrescento 5000,
O meu capital passará a ser:
51 250+5000=56250

No final do segundo ano, o meu capital será:
56 250×1.025= 57656.25€. E acrescento 5000,
O meu capital passará a ser:
57656.25€+5000=62656.25

No final do terceiro ano, o meu capital será:
62656.25×1.025= 64222.65625€. E acrescento 5000,
O meu capital passará a ser
64222.65625€ + 5000= 69 222.65625€

E assim sucessivamente ao longo dos anos seguintes.

Crédito.

Quando um banco nos empresta dinheiro, somos obrigados a devolvê-lo numa ou em várias contraprestações, acrescido de um juro.

Crédito à habitação.

Exemplo

A Fernanda e o Manuel dirigiram-se a um banco com o intuito de contrair um empréstimo para a compra de um apartamento. O capital pretendido era de 125 200 euros por um período de 25 anos, a uma taxa de juro de 3,3% ao ano.

.1) Qual será o valor da prestação mensal?

Resolução

Vamos fazer dos cálculos, primeiro da amortização que corresponde a dividir o valor total da dívida pelo número total de meses (25×12), e depois o juro mensal.

<u>Amortização:</u>

$$\frac{125\ 200}{25 \times 12} \approx 417.33$$

<u>Juro mensal</u>

(é o juro anual a dividir por 12)

$$J = \frac{125\ 200 \times 0.033}{12} \approx 344.3$$

O valor da prestação mensal é 417.33+344.3=761.63.
A prestação mensal será de 761.63 euros.

.2) Quanto pagará ao todo, ao fim de 25 anos?

Resolução

Basta multiplicar o valor mensal pelo número total de prestações:

$$761.63\times25\times12= 228489$$

Pagará ao todo 228 489 euros.

.3) Quanto pagou só de juros?

Resolução

Só de juros pagou

228 489-125 200 = 103289.

Só de juros, pagou 103289.

2º processo

Pode multiplicar o juro mensal pelo total de meses:

$$344.3\times25\times12= 103290 \text{ euros}$$

Nota: A pequena diferença de um euro deve-se aos arredondamentos feitos.

.4) Suponha agora que o casal Fernanda e Manuel, precisavam de cobrir mais algumas despesas da sua casa e, como tal, nos dois primeiros anos de pagamentos não queriam pagar a prestação total de 761.63 euros, mas apenas o valor de juro, 344,3€. Mais tarde, pagariam uma prestação mais alta.

Resolução

Normalmente, o banco aceita que, nos dois primeiros anos, o casal apenas pague o valor do juro. Para compensar, nos anos restantes, a sua prestação será um pouco mais alta.

Nos dois primeiros anos, o valor a pagar será apenas o valor do juro:

344.3€ (este período é habitualmente designado ***período de carência***).

Questão: Qual será o valor da prestação durante os meses dos restantes 23 anos?

Resolução

A amortização será:

$$\frac{125\ 200}{23 \times 12} \approx 453.62$$

Juntando ao juro,

453.62 + 344.3= 797.92

Depois dos dois primeiros anos, a prestação mensal a pagar será de 797.92 euros.

Nota: na prática, ao exemplo anterior ainda falta adicionar algumas taxas tais como imposto, seguro, etc. A taxa anual de encargos efetiva global (**TAEG**), inclui todas as taxas que recaem sobre o nosso empréstimo.

Nota: quando o cliente tem alguma dificuldade temporária em suportar a totalidade do valor de cada prestação, pode negociar com o banco um período de carência.
Empréstimo com carência- Durante um determinado período, o cliente paga apenas os juros.

Crédito pessoal.

É um crédito a curto ou médio prazo, em que, na generalidade, o prazo de pagamento não ultrapassa os cinco anos.

Nota: Neste tipo de empréstimo, a forma de cálculo é semelhante à do crédito à habitação, mas a taxa de juro costuma ser mais alta.

Exemplo
O Francisco comprou um carro em segunda mão, que custava 10 000 euros e pretende pagar durante 4 anos. O juro a pagar, que já inclui imposto e taxas, corresponde a 9.5% ao ano. Qual será a prestação mensal a pagar pelo Francisco?

Resolução:

Vamos fazer dos cálculos, primeiro da amortização que corresponde a dividir o valor total da dívida pelo número total de meses(4×12), e depois o juro mensal.

Amortização:

$$\frac{10\ 000}{4\times 12}\approx 208.33€$$

Juro mensal(é o juro anual a dividir por 12)

$$J=\frac{10000\times 0.095}{12}\approx 79.17$$

O valor da prestação mensal é
208.33+79.17=287.5€

A prestação mensal será de 287.5 euros.

Questão: quanto pagará ao todo pelo carro?

Resposta:

Pagará $4\times12\times287.5$= 13 800.

Ao todo pagará 13 800 euros

Cartão de crédito.

Neste tipo de crédito existem duas possibilidades:

1-Pagarmos toda a dívida dentro do prazo (normalmente 30 dias), e nesse caso a dívida fica paga. Não são acrescentados juros.

2-Pagamos apenas uma parte da dívida no final do mês e vamos pagando o restante mensalmente. Neste caso, são acrescentados juros ao valor em dívida.

Nota: No caso 2, a percentagem da dívida a pagar em cada mês pode ter uma das modalidades:

15%; 30% ou 50%.

Outra alternativa é o número de prestações:

3; 6 ou 12.

Quando o valor em dívida é muito reduzido, costuma ser cobrado todo de uma vez.

Exemplo
A Regina possui um cartão de crédito e escolheu a modalidade de 30% à taxa de 13.2% ao ano, com pagamentos mensais.
Sabemos que fez várias compras em que utilizou o seu cartão de crédito.

No primeiro mês fez compras no valor de 160 euros.
No segundo mês, as compras custaram 180 euros e
no terceiro mês depois fez compras no valor de 100 euros.

Determine o valor a pagar no final do primeiro mês; no final do segundo mês e no final do terceiro mês.

Resolução:

Como os pagamentos são mensais, comecemos por calcular a taxa de juro mensal.

$$\frac{0.132}{12} = 0.011$$

A taxa de juro mensal será de 1.1%.

1º) 1º mês: não paga juro, apenas 30% do valor da compra:

$$160 \times 0.3 = 48$$

ao fim de um mês terá de pagar 48 euros.

2º) 2º mês:
Falta: 160-48=112 euros.

No segundo mês pagará 30 por cento do valor em dívida:
$0.3\times112=33.6$ €

Também pagará um mês de juro sobre os 112 euros à taxa mensal de 1.1%.
$112\times0.011=1.232$ €

Como fez uma nova compra no valor de 180 euros, também terá de pagar 30 por cento desse valor $180\times0.3=54$ €

Ao todo, pagará no final do 2º mês:
$33.6+1.232+54=88.8323$ €

3º) 3º mês:

Relativamente à primeira compra de 160 euros, já foram pagas duas amortizações de 30%,

160-48= 112 (no primeiro mês)

e 112-33.6= 78.4. (no segundo mês).

Resta pagar 78.4€

Vamos pagar mais um mês de juro sobre este capital em dívida:

$78.4\times0.011= 0.86245$

e temos mais uma prestação de 30%

$0.3\times78.4=$**23.52**.

Relativamente à segunda compra de 180 euros, já foi paga uma prestação de 54 euros. Agora a dívida é 180-54=126.

Vamos pagar um mês de juro sobre este capital em dívida:

$123\times0.011=1.353$€

e temos mais uma prestação de 30% $0.3\times126=$**37.8**.

sobre a última despesa, de 100 euros, apenas vamos pagar a prestação de 30%

$100\times0.3=$**30**.

Em termos totais, temos de pagar no 3º mês 2 juros e 3 prestações:

0.86245+ **23.52**.+ 1.353 + **37.8 + 30 = 93.53545**

Resposta: terá de pagar aproximadamente 93.54 euros.

Aluguer e compra.

Aquisição de um automóvel:
Pronto pagamento; Crédito automóvel; *leasing*; ALD; *renting*.
Crédito automóvel- semelhante ao crédito pessoal.

Leasing- O cliente utiliza o automóvel e paga uma renda mensal. No final do contrato pode comprar o automóvel se pagar o valor residual.
Geralmente, o prazo mínimo de pagamento é de 18 meses.

ALD- Aluguer de Longa Duração-Parecido ao leasing. O cliente deve pagar um seguro contra todos os riscos. O cliente compromete-se a comprar o carro no final do contrato. A vantagem deste contrato é ter taxas de juro mais baixas.

Exemplo

Consideremos a simulação de um contrato de leasing de um carro.
Valor do carro: 15 962 euros.

1ª renda (10%): 1 596.2 euros.

Pagamento: mensal.

Duração: 12 meses Valor residual: 1308.39 euros.

Rendas	Valor da renda (€)	Capital amortizado (€)	Juros (€)	Valor em dívida (€)
1.ª	1596,20	1596,20	0,00	14 365,80
2.ª	1247,43	1146,87	100,56	13 218,93
3.ª	1247,43	1154,90	92,53	12 064,03
4.ª	1247,43	1162,98	84,45	10 901,05
5.ª	1247,43	1171,12	76,31	9 729,93
6.ª	1247,43	1179,32	68,11	8 550,61
7.ª	1247,43	1187,58	59,85	7 363,03
8.ª	1247,43	1195,89	51,54	6 167,14
9.ª	1247,43	1204,26	43,17	4 962,88
10.ª	1247,43	1212,69	34,74	3 750,19
11.ª	1247,43	1221,18	26,25	2 529,02
12.ª	1247,43	1229,73	17,70	1 299,28
Valor residual	**1308,39**	**1299,29**	**9,10**	**0,00**

Nota1: No final do contrato de 12 meses, se o cliente quiser ficar com o carro terá de pagar apenas o valor residual: 1308.39 euros.

Nota 2: Se somarmos o total de juros pagos, este totaliza 664,31 euros.

Nota 3: O valor total pago efetivamente pelo carro foi de 15962 + 664,31 = 16 626,31€

Nota: reparemos ainda que, no exemplo anterior, o valor do juro vai diminuindo à medida que o valor em dívida diminui.