

2.2 Partilha no caso contínuo.

(Divisor selecionador, divisor único, selecionador único, último a diminuir, livre de inveja.)

Nota 1: No caso contínuo, o conjunto é formado por objetos que podem ser divididos de infinitas maneiras. Ex: terrenos, Bolos, pizzas, ...

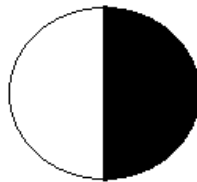
Nota 2: Consideremos que, muitas vezes a divisão destes objetos não é uma divisão geométrica, em que ambos ficam com áreas iguais. Pode haver partes que sejam mais valiosas do que outras. Também os gostos ou preferências dos intervenientes podem não ser iguais.

Método do divisor-selecionador.

ou «*eu corto, tu escolhes*». Válido para dois jogadores.

Divisor-selecionador.

- 1º) O divisor é escolhido aleatoriamente (por exemplo, atirando uma moeda ao ar).
- 2º) O divisor efetua a divisão do objeto em duas partes que considera serem iguais.
- 3º) O selecionador escolhe uma das partes e o divisor fica com a que sobra.

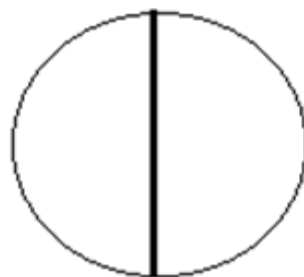


Exemplo

A Ana e a Beatriz tinham um bolo para dividir entre si. Como o bolo tinha partes com diferentes tipos de recheio, ambas perceberam que não era apenas uma questão de dividir geometricamente a meio para que a divisão fosse justa.

Assim, sortearam entre si, qual das duas cortaria o bolo. O sorteio ditou que seria a Ana a cortar.

A Ana cortou o bolo em duas partes, que lhe pareciam ter o mesmo valor.



A Beatriz foi a primeira a escolher. Escolheu o pedaço da esquerda porque lhe parecia melhor. A Ana ficou com o outro.

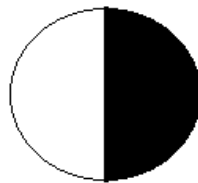


Repare que nenhuma tem razão de queixa. A Ana cortou o bolo bem cortado, garantindo que ambas as partes teriam exatamente o mesmo valor, por isso, a parte que recebeu é tão boa como a outra.

A Beatriz só pode estar satisfeita, pois teve a possibilidade de escolher a parte que lhe parecia melhor.

Exemplo

Suponha que agora temos um bolo com metade coco e metade chocolate:



Admita que a Ana gosta igualmente de coco e de chocolate e a Beatriz gosta duas vezes mais de coco do que de chocolate. O bolo vale ao todo 12 euros

.1) Quanto valerá cada uma das partes para cada uma das amigas?

Resolução:

Para a Ana, facilmente compreendemos que a parte de coco vale 6 euros e a parte de chocolate vale igualmente 6 euros.

Para a Beatriz, representando a parte de coco por c e a parte de chocolate por x , fazemos: $c=2x$ e $c+x=12 \Leftrightarrow 2x+x=12 \Leftrightarrow 3x=12 \Leftrightarrow x=4$ $c=2 \times 4=8$

assim, para a Beatriz, a parte de coco vale 8 e a parte de chocolate vale 4.

Resumindo:

	Coco	Chocolate	Total(€)
Ana	6	6	12
Beatriz	8	4	12

.2) Se o bolo estivesse cortado em duas partes como na figura:



Quanto valeria cada uma das partes para cada uma das amigas?

Resolução:

Para a Ana, cada uma das partes valeria 6 euros.

Para a Beatriz, o valor de P1 seria $0.5 \times 8 + 0.5 \times 4 = 6$ e o mesmo para P2.

Nota: Vejamos agora alguns métodos válidos para três ou mais intervenientes (ou jogadores).

Método do divisor único.(Para três ou mais jogadores.)

Seja n o número de jogadores.

1º) Um dos jogadores é escolhido, aleatoriamente, para ser o divisor, ficando os restantes com o papel de selecionadores.

2º) O divisor divide o objeto a partilhar em n partes que considera terem o mesmo valor.

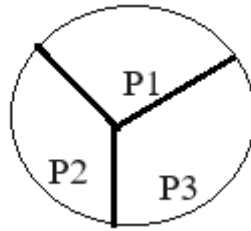
3º) Cada selecionador elabora secretamente uma lista, atribuindo um valor que considera adequado a cada uma das partes resultantes da divisão.

4º) As partes são atribuídas aos selecionadores de acordo com as escolhas de cada um. Em caso de empate, juntam-se as duas partes e utiliza-se o método do divisor-selecionador.

Exemplo:

Três irmãs, a Ana, a Beatriz e a Carla tinham um bolo para dividir entre si. Como o bolo tinha partes com diferentes tipos de recheio, todas perceberam que não se tratava apenas de dividir geometricamente em três partes, para que a divisão fosse justa. Assim, sortearam entre si, qual das três cortaria o bolo. O sorteio ditou que seria a Ana a cortar.

A Ana cortou o bolo em três partes, P1, P2 e P3, que lhe pareciam ter o mesmo valor.

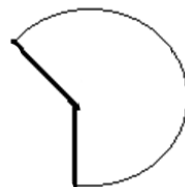


A Beatriz e a Carla avaliaram os três pedaços exatamente da mesma maneira. Ambas escolheram como parte preferida o P3 e ambas acharam a segunda melhor era P1.

Assim, decidiram que a Ana ficaria com a parte P2, por ser, para elas, a menos valiosa.



De seguida, juntaram as partes P3 e P1:



e dividiram pelo método do divisor seccionador. Uma cortou e a outra escolheu primeiro.

No final da divisão, todas consideraram ter recebido uma parte justa.

A Ana ficou com parte P2, que para ela, valia exatamente um terço do bolo.

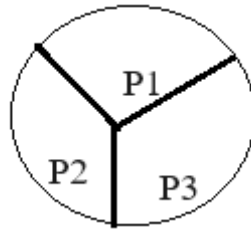
A Beatriz e a Carla, dividiram entre si uma parte que considerava “mais valiosa” do bolo, pelo que consideraram ter recebido uma parte justa.

Nota : Se um interveniente recebe, pelo menos o que é justo receber, não pode reclamar. No entanto, por vezes pode ser feita uma partilha diferente que beneficie o maior número possível de jogadores.

Outro Exemplo

Sejam J1, J2 e J3 os jogadores.

Suponhamos que, por exemplo J1 corta um bolo em três partes, que para ele valem 33.33% cada.



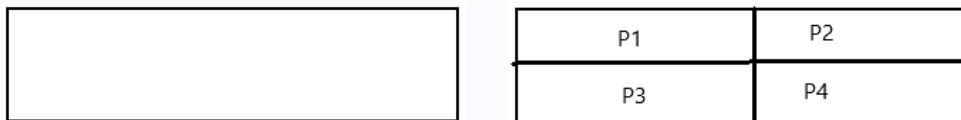
Se J2 avaliar: da seguinte forma: P1-55%, P2-25% e P3-20% e

se J3 avaliar exatamente igual, P1-55%, P2-25% e P3-20%,

Deveriam juntar as partes P1 e P2 e novamente e dividir pelo método do divisor-selecionador. J1 ficaria com a parte restante, P3.

Exemplo:

Suponhamos agora que 4 herdeiros, que representamos por A, B, C, D dividem entre si um terreno.



Vamos admitir que o herdeiro “A” corta o terreno nessas 4 partes, que representamos por P1, P2, P3, P4.

Para o herdeiro “A” que cortou, cada uma destas 4 partes vale exatamente o mesmo, isto é 25% do total. Os restantes herdeiros avaliam cada uma das partes, em percentagem de acordo com a tabela seguinte:

Herdeiros/Objetos	P1	P2	P3	P4
A	25	25	25	25
B	30	20	10	40
C	10	15	20	55
D	25	35	20	20

Tenhamos em conta que cada herdeiro terá de ficar com uma parte que, para ele, tenha um valor maior ou igual a 25%. Uma possível distribuição:

P4 fica para C, pois é quem mais a valoriza, e a única com avaliação não inferior a 25%.

P1 fica para B, pois é quem mais a valoriza e é não inferior a 25%.

P2 fica para D que é quem mais a valoriza, e é não inferior a 25%

Por fim, a que resta, P3 é atribuída a “A”, que para ele vale 25%.

Todos ficaram com parcelas não inferiores a 25%, pelo que nenhum pode reclamar.

Selecionador único. (Três ou mais jogadores).

Seja n o número de jogadores.

1º) Um dos jogadores é escolhido, aleatoriamente, para ser o selecionador, ficando os restantes com o papel de divisores.

2º) Os divisores procedem à divisão do item a partilhar entre si usando, por exemplo:

- o método do divisor-selecionador, no caso de serem dois divisores;
- o método do divisor único, no caso de serem mais do que dois divisores.

3º) Cada divisor divide a sua parte em n parcelas, considerando cada uma delas uma parte justa.

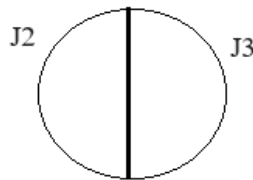
4º) O selecionador escolhe uma parcela de cada um dos divisores, ficando cada divisor com as parcelas que o selecionador não escolheu.

Exemplo (3 Jogadores)

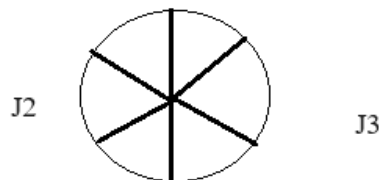
Sejam J_1 , J_2 e J_3 os jogadores.

Começamos com dois jogadores, sejam J_2 e J_3 .

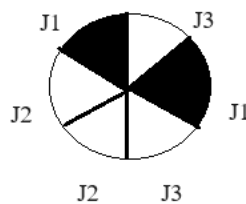
Um deles corta a meio e o outro escolhe. Suponhamos que ficou:



Cada um divide a sua parte em três, que considera iguais. Por exemplo:



Finalmente o J_1 escolhe uma parte de J_2 e uma parte de J_3 .



Sugestão: analise agora a situação de cada um dos jogadores.

Se J_2 e J_3 dividiram bem na etapa inicial, as metades da primeira etapa ficaram divididas de forma justa.

Se cada um (J_2 e J_3) dividiu bem a sua metade em três partes com o mesmo valor, as escolhas do J_1 não irão prejudicar J_2 nem J_3 .

O jogador J_1 também não pode ter razões de queixa, pois ele próprio pode escolher o melhor pedaço de J_2 e o melhor pedaço de J_3 . Assim, este método é justo para todos os jogadores.

Exemplo - Partilha no caso contínuo.

Avaliação das partes de um bolo por 3 pessoas com gostos diferentes.

Três amigas, a Ana, a Sandra, e a Joana, compraram um bolo com morango, chocolate e nata.

Cada terça parte do bolo é constituído por um dos sabores. (figura).

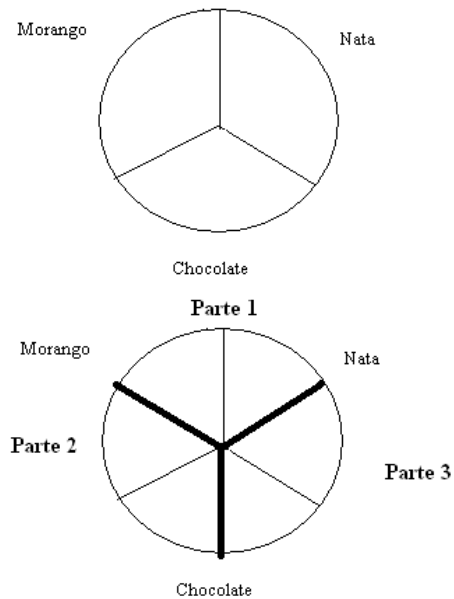
Na pastelaria, o funcionário cortou o bolo em três partes do mesmo tamanho, de modo que cada um dos sabores ficasse dividido a meio, como podemos ver na segunda figura.

A Ana gosta igualmente de chocolate e morango e gosta 5 vezes mais morango do que nata.

A Sandra gosta duas vezes mais morango que nata e não gosta de chocolate. A Joana gosta igualmente de chocolate, de nata e de morango. Sabendo que o bolo custou ao todo 33 euros, quanto valerá cada uma das partes em que foi cortado, para cada uma delas?

Apresente todos os cálculos e todas as justificações.

Se apresentar resultados sem qualquer cálculo ou justificação, estes poderão ser considerados errados.



Resolução:

Atendendo aos gostos da Ana, e admitindo que a soma dá 33, isto é , o chocolate (Ch), o morango(M) e a nata(N), $Ch+M+N=33$.

Como $Ch=M$ e $M=5N$, podemos escrever todos em função de N, pelo que ficará:

$$Ch+M+N=5N+5N+N=33.$$

Pelo que teremos $11N=33$ que equivale a $N=3$ e fica $M=5 \times 3=15$ e $Ch=15$.

A parte 1 do bolo que contém metade morango e metade nata, valerá para a Ana $0.5 \times 15 + 0.5 \times 3 = 9$.

O raciocínio é semelhante relativamente às avaliações da Ana para outras partes do bolo.

As avaliações da Sandra e da Joana são feitas de forma semelhante, atendendo às suas preferências, de acordo com o enunciado.

Admitindo que já entendemos como se processam estas avaliações, passemos à resolução formal do problema.

Os vários sabores, chocolate, morango e nata valerão para cada uma:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Ana:} & Ch=M & M=5N & Ch+M+N=33 \\
 & 5N+5N+N=33 & \Leftrightarrow 11N=33 & \Leftrightarrow N=3 \\
 & & & M=5 \times 3=15 \\
 & & & Ch=5 \times 3=15 \\
 \\
 \text{Sandra:} & M=2N & Ch=0 & M+N=33 \\
 & & & \Leftrightarrow 2N+N=33 \\
 & & & \Leftrightarrow N=11 \\
 & M=22 & Ch=0 & \\
 \\
 \text{Joana:} & N=M=Ch & N=11 & M=11 \quad Ch=11
 \end{array}$$

Agora, as partes do bolo valerão para cada uma delas:

	Parte 1	Parte 2	Parte 3
	$\left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N\right)$	$\left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}Ch\right)$	$\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}Ch\right)$
Ana	$7,5+1,5=9$	$7,5+7,5=15$	$1,5+7,5=9$
Sandra	$11+5,5=16,5$	$11+0=11$	$5,5+0=5,5$
Joana	$5,5+5,5=11$	$5,5+5,5=11$	$5,5+5,5=11$

Resposta:

Para a Ana, a parte 1 vale 9 euros, a parte 2 vale 15 euros e a parte 3 vale 9 euros.

Para a Sandra, a parte 1 vale 16.5 euros, a parte 2 vale 11 euros e a parte 3 vale 5.5 euros.

Para a Joana, a parte 1 vale 11 euros, a parte 2 vale 11 euros e a parte 3 vale 11 euros.

Método do último a diminuir.



Último a diminuir

- 1º) Os jogadores são ordenados de forma aleatória.
- 2º) O primeiro jogador escolhe uma parte que considera justa.
- 3º) Quanto aos restantes jogadores, e seguindo a ordem definida, se um jogador achar que a parte em questão tem um valor superior ao valor justo, diminui essa parte, de modo que fique uma parte justa; caso contrário, passa a sua vez.
- 4º) Se nenhum jogador diminuir a parte escolhida pelo primeiro jogador, este fica com ela e sai do jogo; caso contrário, o último jogador a diminuir essa parte, fica com ela e sai do jogo. A ordem inicialmente definida é preservada entre os jogadores que se mantêm em jogo. Repete-se o processo a partir do 2.º passo, sem o jogador e a respetiva parte excluída, até que restem apenas dois jogadores. Aí, a divisão é feita pelo método do divisor-selecionador.

Exemplo

Sete amigos Abel(A), Berto(B), Carlos(C), Dário(D), Evaristo(E), Fábio(F) e Gustavo(G) dividem entre si um bolo pelo método do último a diminuir, seguindo esta ordem. Na 1ª e 4ª voltas, apenas o primeiro a receber a fatia já cortada, a diminui. Na 2ª e 5ª voltas ninguém a diminui. Na terceira volta, todos os que recebem a fatia a diminuem. (Para responder às alíneas que se seguem, indique todas as justificações ou esquemas que ache apropriados.

Resolução:

Vamos representar por: **P**-Passa **D**-Diminui

Admitindo que o "A" corta a primeira fatia, e atendendo a que apenas o "B" a diminui, e os restantes "passam", a primeira fatia ficará para o último a diminuir, isto é, para B.

1ª volta	A	B	C	D	E	F	G		Fatia:
	"Corta"	D	P	P	P	P	P		B

Na segunda volta, o "A" volta a cortar e ninguém corta, por isso fica para o "A":

2ª volta	A	C	D	E	F	G		Fatia:
	"Corta"	P	P	P	P	P		A

Na terceira volta, é o C que corta, pois é agora o primeiro da lista, uma vez que o A e o B já saíram. Como todos diminuem a fatia, o último a diminuir fica com ela, isto é, o G

3ª volta	C	D	E	F	G		Fatia:
	"Corta"	D	D	D	D		G

Na quarta volta o C volta a cortar e apenas o D a diminuir. O D fica com a fatia.

4ª volta	C	D	E	F		Fatia:
	"Corta"	D	P	P		D

Na quinta volta o C volta a cortar e ninguém diminui. C fica com a fatia.

5ª volta	C	E	F			Fatia:
	"Corta"	P	P			C

Por fim, restam apenas E e F. Para estes, será usado o método do divisor-selecionador, isto é, um corta e o outro escolhe.

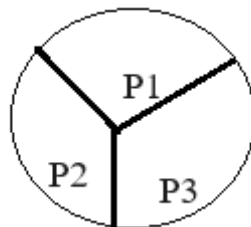
Nota: Nos exames nacionais, por vezes, este método apresenta pequenas alterações que deverão ser tidas em conta.

Método livre de inveja.

Nota: Na partilha, invejar é achar que a parte do outro é melhor do que a nossa. Até aqui, apenas o método do divisor selecionador, com dois intervenientes, era livre de inveja.

Um método de partilha diz-se **livre de inveja** se cada um dos n jogadores considera não só que recebeu $1/n$ do valor total, mas também que nenhum dos outros jogadores tem uma parcela mais valiosa do que a sua.

Algoritmo (livre de inveja para três jogadores):



1º) O divisor, jogador A, divide o bolo em três partes que considera terem o mesmo valor.

2º) O jogador B, avalia as três fatias e se, na sua opinião, uma fatia vale mais do que qualquer uma das outras duas, apar-a, de modo que haja pelo menos duas fatias com o maior valor; caso contrário, não apar nenhuma fatia. Essa apar, se houver, é colocada de parte e dividida posteriormente.

3º) O selecionador, jogador C, escolhe, de entre as três fatias, a que considera mais valiosa.

4º) O jogador B escolhe a seguir e, se aparou, terá de ficar com essa fatia se a mesma ainda estiver entre as duas disponíveis; caso contrário, retira a que considera ser mais valiosa.

5º) O jogador "A" retira a fatia que ainda resta.

Nota: É importante reconhecer que nenhum jogador tem razão para invejar a parte do outro.

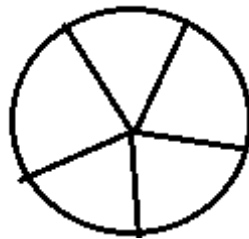
O “A”, porque fez a divisão inicial e teve a possibilidade de ficar com uma fatia cortada por si.

O “C”, porque foi o primeiro a escolher.

O “B”, porque tem disponíveis para escolha duas fatias, sendo que pelo menos uma delas foi considerada, por si, como mais valiosa.

Nota: Se existir uma “apara” com tamanho relevante, esta deve ser novamente dividida. Se for irrelevante, pode ser sorteada.

Método livre de inveja por quatro jogadores.



Algoritmo: Livre de inveja por quatro jogadores.

- 1º)** Estabelecer a ordem de jogada de forma aleatória, suponhamos A (divisor), B, C e, por fim, D.
- 2º)** O jogador A divide o bolo em cinco fatias que considera terem o mesmo valor.
- 3º)** O jogador B “apara”, no máximo, duas fatias de entre as cinco, de modo a garantir que haja, pelo menos, três fatias com o maior valor. Havendo aparas, são colocadas de parte.
- 4º)** O jogador C “apara”, no máximo, uma fatia de entre as cinco, para que haja pelo menos duas fatias que, na sua opinião, têm o maior valor. A apara, se houver, é colocada de parte.
- 5º)** O jogador D escolhe a fatia que mais valoriza.
- 6º)** O jogador C escolhe, de entre as quatro fatias restantes, a que, para si, tem mais valor; se aparou uma fatia e esta não foi escolhida por D, tem de ficar com ela.
- 7º)** O jogador B escolhe uma das três fatias que ainda restam, tendo de ficar com uma das que aparou, caso tenha aparado alguma e se ainda estiver entre as três fatias à escolha.
- 8º)** O jogador A escolhe, de entre as duas últimas fatias, uma não aparada, que foi cortada por si.

Nota: No final, sobrar uma fatia e, eventualmente algumas aparas. Para essas sobras, pode ser repetido o mesmo processo até que as sobras se tornem insignificantes e sejam sorteadas.