

2.1-Partilhas caso discreto.

(Ajuste na partilha, Licitação Secreta, Marcadores)

Questão 1: Se tivermos de dividir 100 euros igualmente por 4 pessoas, basta fazer $100/4$ e obtemos 25 euros para cada pessoa.

Questão 2: Se tivermos de dividir uma herança familiar, que inclua objetos de estimação tais como quadros, estatuetas, instrumentos musicais, objetos antigos de coleção, e outros, pode ser difícil proceder à partilha se houver valor sentimental em relação a esses objetos. Se os herdeiros não atribuírem todos o mesmo valor a cada objeto, e também não os quiserem vender para distribuírem o dinheiro em partes iguais, a partilha pode tornar-se complexa.

Partilha é o processo pelo qual se repartem de igual modo objetos, indivisíveis ou não, por sujeitos com direito a partes equivalentes.

→ **Caso discreto:** o conjunto C é formado por objetos indivisíveis. EX: Carros, barcos...

→ **Caso contínuo:** o conjunto C é formado por objetos que podem ser divididos de infinitas maneiras. Ex: terrenos, Bolos, pizzas, ...

→ **Caso misto-** Inclui os dois casos discreto e contínuo.

Métodos de divisão justa.

Exemplo: Herdeiros que receberam uma herança constituída por uma casa, um carro, e outros objetos valiosos.

→ Ajuste na partilha

→ Licitação secreta.

→ Marcadores.

Método de ajuste na partilha.

Nota: Este método pode aplicar-se à divisão de um certo número finito de itens entre **dois** intervenientes da forma mais justa possível.

Ajuste na partilha.

1º) Cada um dos intervenientes tem 100 pontos para distribuir secretamente pelos itens.

2º) Cada item é atribuído temporariamente ao interveniente que mais o valorizou. Em caso de empate, é atribuído ao que tiver menos pontos no final.

3º) Faz-se um balanço:

- se ambos tiverem o mesmo número de pontos, a partilha está feita;
- se não tiverem o mesmo número de pontos, o que tiver mais transfere itens (ou parte) para o outro até igualar o número de pontos, de acordo com os passos seguinte.

4º) Calculam-se os quocientes referentes a cada um dos itens atribuídos ao interveniente que ficou com mais pontos:

$$\frac{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo vencedor inicial}}{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo perdedor inicial}}$$

e colocam – se por ordem decrescente.

5º) Faz-se a transferência do item a que corresponde o menor quociente e contabilizam-se novamente os pontos.

6º) Se a transferência total de um item der vantagem à parte que o recebe, terá de se efetuar a transferência apenas de uma percentagem do item, de forma a igualar o número de pontos.

Exemplo

A Ana e a Benvinda herdaram 5 carros de luxo e decidiram efetuar a divisão dos mesmos utilizando o método do ajuste na partilha. Deste modo atribuíram as seguintes pontuações:

	Lancia	Mercedes	BMW	Jaguar	Audi
Ana	15	25	20	30	10
Benvinda	10	30	25	20	15

Vamos efetuar a partilha e determine o número de pontos com que ficará cada uma.

A Ana é quem mais valoriza o Lancia(15) e o O jaguar(30)

Total de pontos: 15+30=45

A Benvinda é quem mais valoriza o Mercedes(30), o BMW(25) e o Audi(15)

Total de pontos 30+25+15=70.

Ana: 45 pontos Benvinda 70 pontos.

Como não têm igualdade de pontos, será necessário transferir parte dos bens da Benvinda para a Ana.

Para decidir a ordem de transferência dos bens, pegamos nos bens da Benvinda(que tem mais pontos) e fazemos os quocientes da valorização da Benvinda em relação à valorização da Ana.

Por exemplo, a Benvinda atribui 30 pontos pelo Mercedes e a Ana, apenas 25, pelo que temos o quociente:

$$\text{Mercedes: } \frac{30}{25} = \mathbf{1.2}$$

O mesmo raciocínio para o BMW e para o Audi:

$$\text{BMW: } \frac{25}{20} = \mathbf{1.25} \quad \text{Audi } \frac{15}{10} = \mathbf{1.5}$$

O quociente que der um número mais pequeno será a primeiro a transferir.

Neste caso é o Mercedes: (1.2).

Vamos tentar passar o Mercedes da Benvinda para a Ana.

Nesse caso a Ana ficaria com $45+25=70$ pontos, mas a Benvinda ficaria apenas com $25+15=40$.

A situação inverteu-se, pelo que não podemos passar a totalidade do Mercedes para a Ana, mas apenas uma parte.

Considerando o Mercedes como 1 (ou 100%), vamos atribuir à Benvinda uma porção x e o restante para a Ana, " $1 - x$ ", isto é,

$$\text{Benvinda: } 40 + 30x \quad \text{Ana: } 45 + 25(1-x).$$

Para determinar a porção x , que ficará para a Benvinda, e admitindo que, no final, ambas deverão ter o mesmo número de pontos, devemos resolver a equação:

$$40 + 30x = 45 + 25(1-x) \Leftrightarrow 40 + 30x = 45 + 25 - 25x \Leftrightarrow 55x = 30 \Leftrightarrow x \approx 0.55.$$

Ou seja, a Benvinda ficará com 0.55 ou seja, 55% do Mercedes.

A Ana ficará com $1-0.55=0.45$ ou 45% do Mercedes.

Distribuição:

Benvinda: BMW, Audi e 55% do Mercedes.

Ana : Lancia, Jaguar e 45% do Mercedes.

Pontuação:

Pontos: Ana: $45 + 25 \times 0.45 = 56.25$ pontos

Benvinda: $40 + 30 \times 0.55 = 56.5$ pontos.

Nota: Em relação à partilha do Mercedes, nestes casos, é frequente vender o carro e entregar 55% do dinheiro à Benvinda e 45% do dinheiro à Ana

Nota muito importante: por vezes, nos exames nacionais, os passos do método do ajuste na partilha surgem ligeiramente diferentes dos que aqui apresentámos. Nesse caso, é necessário adaptar-se à nova descrição antes de resolver o exercício, e resolver de acordo com as indicações.

Método das Licitações Secretas.

Nota: Este método pode aplicar-se à divisão de um certo número finito de itens entre **dois ou mais** intervenientes da forma mais justa possível.

Licitação Secreta.

1º) Cada um dos intervenientes atribui, secretamente, um valor em dinheiro a cada um dos itens a dividir. A parte que cada um dos intervenientes considera ser justa receber — valor justo — será igual ao quociente entre o valor total que atribuiu aos itens e o número de intervenientes.

2º) Cada um dos itens é **atribuído** ao interveniente que mais o valorizou.

Se o valor total dos itens recebidos por um interveniente ultrapassa o que considerou como valor justo a receber, terá de pagar aos outros a diferença. Se, pelo contrário, o valor dos itens for inferior ao valor justo, serão os outros intervenientes a pagar-lhe a diferença.

3º) O dinheiro excedente — montante disponível — é dividido igualmente por todos os intervenientes.

Exemplo

A Rita, o Paulo e a Sónia são os únicos herdeiros dos seguintes bens: uma casa, um barco e um quadro, e vão efetuar a divisão dos bens pelo método da Licitação Secreta. Admitimos que todos têm direito a partes iguais na herança.

Cada um atribui valores(em euros) aos bens conforme a tabela seguinte:

	Rita	Paulo	Sónia
Casa	225 000	270 000	200 000
Barco	40 000	35 000	32 000
Quadro	47 500	40 000	50 000

Vamos proceder à distribuição, usando a Licitação Secreta.

Começamos por calcular o total das licitações de cada um dos herdeiros:

	Rita	Paulo	Sónia
Casa	225 000	270 000	200 000
Barco	40 000	35 000	32 000
Quadro	47 500	40 000	50 000
Total:	312 500	345 000	282 000

Admitimos que estes três herdeiros têm direito a partes iguais da herança, por isso, a **parte justa(J)** de cada um corresponde a dividir o total por 3.

Por exemplo. A parte justa da Rita será $312500/3 = 104\ 166.67$

O mesmo raciocínio para os restantes:

Paulo: $345\ 000/3 = 115\ 000$ Sónia $282\ 000/3 = 94\ 000$.

Na tabela escrevemos:

	Rita	Paulo	Sónia
Casa	225 000	270 000	200 000
Barco	40 000	35 000	32 000
Quadro	47 500	40 000	50 000
Total:	312 500	345 000	282 000
Parte Justa(J)	104 166.67	115 000	94 000

Cada um dos bens será atribuído a quem mais o valoriza.

Assim, a casa irá para o Paulo que é o herdeiro que mais a valoriza, 270 000 €.

Do mesmo modo, o Barco irá para a Rita, por 40 000 € e o quadro será para a Sónia por 50 000€.

Depois desta etapa, é preciso ver como estão as contas de cada herdeiro, isto é, se ainda tem dinheiro a receber ou a pagar.

Por exemplo,

A **Rita** tinha uma parte justa de 104 166.67 € e ficou com o barco que custa 40 000 €.

Descontando o valor(J-B):

$104\ 166.67 - 40\ 000 = 64\ 166.67$ ainda tem a receber **64 166.67 € (J-B)**

O Paulo tinha direito a uma parte justa de 115 000 € mas ficou com a casa no valor de 270 000€.

Descontando o valor(J-B):

$115\ 000 - 270\ 000 = -155\ 000$ € terá de pagar **155 000€.(J-B)**

A Sónia tinha direito a uma parte justa de 94 000€ e ficou com o quadro no valor de 50 000€.

Descontando o valor (J-B):

$94\ 000 - 50\ 000 = 44\ 000$ €. **(J-B)**.

Na tabela, indicamos:

	Rita	Paulo	Sónia
Casa	225 000	270 000	200 000
Barco	40 000	35 000	32 000
Quadro	47 500	40 000	50 000
Total:	312 500	345 000	282 000
Parte Justa(J)	104 166.67	115 000	94 000
Bens	Barco	Casa	Quadro
Valor Bens (B)	40 000	270 000	50 000
J-B	64 166.67	- 155 000	44 000

Passamos agora à fase dos **pagamentos**.

Primeiro, quem tem dinheiro a pagar, paga. Neste caso, o Paulo paga 155 000 euros.

Com esse dinheiro, pagamos à Rita e à Sónia os valores os valores que têm a receber:

$$155\,000 - 64\,166.67 - 44\,000 = 46\,833.33 \text{ (sobra)}$$

Vamos agora pegar no valor da sobra e dividir igualmente pelos três herdeiros:

$$\frac{46\,833.33}{3} = 15\,611.11 \text{ a cada um.}$$

Vamos entregar 15 611.11 a cada um dos herdeiros, proveniente da sobra.

Vejamos como ficará a **distribuição final**:

Rita: Barco e 79 777.78 €

$$(64\,166.67 + 15\,611.11 = 79\,777.78 \text{ €})$$

Paulo: Casa e paga 139 388.89 €

$$(-155\,000 + 15\,611.11 = -139\,388.89)$$

Sónia: quadro e 59 611.11€

$$(44\,000 + 15\,611.11 = 59\,611.11)$$

Nota: se somarmos os valores a receber pela Rita e pela Sónia,

$$79\,777.78 + 59\,611.11 = 139\,388.89$$

Obtemos exatamente o valor que o Paulo paga, como seria de esperar!|

Nota importante: Partes diferentes- se os intervenientes não tiverem todos direito a partes iguais, a parte justa e as sobras serão atribuídas de acordo com a respetiva proporção.

Exemplo - Partes diferentes na herança.

A Rita e o Paulo são os únicos herdeiros de uma casa e um barco e vão efetuar a divisão dos bens pelo método da Licitação Secreta.

Cada um atribui valores(em euros) aos bens conforme a tabela seguinte:

	Rita	Paulo
Casa	225 000	270 000
Barco	40 000	35 000

Admita que a Rita tem direito a $\frac{3}{5}$ quintos da herança e o Paulo tem direito ao restante.

A parte do Paulo será $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ tem direito a $\frac{2}{5}$ da herança.

A Rita tem direito a $\frac{3}{5}$ e herança e o Paulo tem direito a $\frac{2}{5}$.

1º) O total das licitações Rita: 265 000 Paulo: 305 000

Parte justa (J) de cada um

$$\text{Rita: } 265\,000 \times \frac{3}{5} = 159\,000 \quad \text{Paulo: } 305\,000 \times \frac{2}{5} = 122\,000$$

	Rita (3/5)	Paulo (2/5)
Casa	225 000	270 000
Barco	40 000	35 000
Total:	265 000	305 000
Parte Justa(J)	159 000	122 000

2ª) Distribuição:

De acordo com as licitações, (**Bens**)

a Rita fica com o barco (paga 40 000€)

e o Paulo fica com a casa (Paga 270 000€)

pois foram os valores mais altos das licitações de cada um dos bens.

Como a **Rita** tinha direito a uma parte justa de 159 000 e fica com o barco que custa 40 000, o seu saldo é $159\ 000 - 40\ 000 = 119\ 000\text{€}$. Tem a receber 119 000€ (**J-B**)

Como o **Paulo** tinha direito a uma parte justa de 122 000€ e fica com a casa que custa 270 000€, o seu saldo é $122\ 000 - 270\ 000 = -148\ 000$ deverá pagar: 148 000€ (**J-B**)

	Rita (3/5)	Paulo (2/5)
Casa	225 000	270 000
Barco	40 000	35 000
Total:	265 000	305 000
Parte Justa(J)	159 000	122 000
Bens	Barco	Casa
Valor Bens (B)	40 000	270 000
J-B	119 000	- 148 000

Pagamento: (O Paulo Paga. A Rita recebe) $148\ 000 - 119\ 000 = 29\ 000$ (Sobra).

3ª) Divisão monetária.

Os 29 000 € que sobraram serão divididos por ambos na proporção dos direitos à herança de cada um.

$$\text{Rita: } 29\ 000 \times \frac{3}{5} = 17\ 400\text{€} \quad \text{Paulo } 29\ 000 \times \frac{2}{5} = 11\ 600\text{€}$$

Mas a Rita já tinha o barco e 119 000€. Agora recebeu mais 17400€. Total monetário: $119\ 000 + 17\ 400 = 136\ 400\text{€}$.

O Paulo Já tinha a casa e tinha pago 148 000€. Como agora recebeu 11 600€, o valor a pagar será apenas $148\ 000 - 11\ 600 = 136\ 400\text{€}$

Distribuição final:

Rita: Barco e recebe 136 400€

Paulo: Casa e paga 136 400€.

Nota muito importante: por vezes, nos exames nacionais, os passos do método da Licitação Secreta surgem ligeiramente diferentes. Nesse caso, é necessário adaptar-se à nova descrição antes de resolver o exercício, e resolver de acordo com a nova descrição.

Método dos marcadores.

Nota: Este método é muito útil para partilhas em que temos uma grande quantidade de objetos a partilhar. Sobretudo para pequenos objetos. O número de itens deve exceder substancialmente o número de interessados.

Marcadores

1º) Alinham-se os objetos a dividir, da esquerda para a direita, e atribui-se um número a cada um deles, ficando o objeto mais à esquerda com o número 1.

2º) Com o auxílio de **marcadores**, cada interveniente divide (secretamente) a fila de objetos num número de segmentos igual ao número de intervenientes, de um modo que considere justo.

3º) Da esquerda para a direita, procura-se o primeiro marcador. O dono do primeiro marcador a aparecer fica com os objetos à esquerda desse marcador, e retiram-se os restantes marcadores desse interveniente.

4º) Observamos de novo a fila de objetos, procurando agora os segundos marcadores de cada interveniente. O primeiro a aparecer determina que o segmento entre o primeiro e o segundo marcador desse interveniente lhe seja atribuído.

5º) Repete-se o processo até que todos os intervenientes tenham uma parte.

6º) Se sobrarem objetos, podem dividir-se por sorteio ou, se forem mais do que os intervenientes, aplica-se novamente o método.

Exemplo

Quatro amigas, Ana(A), Bela(B), Carla(C) e Daniela (D), pretendem dividir entre si 15 caixas de doces que ganharam num sorteio. As caixas são todas diferentes e as quatro amigas decidem fazer a divisão usando o método dos marcadores.

Após a colocação dos marcadores, obtiveram o esquema seguinte:

1		2		3		4	5	6		7		8		9		10		11	12		13		14		15	
		D1		C1A1		B1				C2		B2		D2		A2				A3		B3		C3D3		

Vamos organizar os vários segmentos numa tabela. Começamos pelo "A".

Reparemos que o primeiro marcador de A, A1, está entre 2 e 3, o que significa que o 1º segmento para A é formado por "1 e 2".

O segundo marcador de A, A2 está entre 10 e 11, o que significa que o 2º segmento de A corresponde a “3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10”, que representaremos por “3-10”. O terceiro marcador de A, A3, está entre 12 e 13, o que significa que o 3º segmento de A é “11, 12”. O 4º segmento de A será o que resta para a direita, “13, 14, 15”, ou 13-15.

Estamos em condições de completar a primeira linha da tabela:

	1º segmento	2º segmento	3º segmento	4º segmento
A	1-2	3-10	11-12	13-15
B				
C				
D				

Do mesmo modo completamos as restantes linhas da tabela com a partir dos marcadores de B, C e D.

	1º segmento	2º segmento	3º segmento	4º segmento
A	1-2	3-10	11-12	13-15
B	1-3	4-8	9-13	14-15
C	1-2	3-7	8-14	15
D	1	2-9	10-14	15

Para a distribuição, vamos começar pelo 1º segmento.

O primeiro marcador da esquerda para a direita é D1, pelo que D ficará com o primeiro segmento.

1 | 2 | 3 | 4 5 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 12 | 13 | 14 | 15
 D1 C1A1 B1 C2 B2 D2 A2 A3 B3 C3D3

Também podemos ver na própria tabela que é o valor mais baixo.

Agora que D recebeu a sua parte, retiramos todos os marcadores de D:

1 | 2 | 3 | 4 5 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 12 | 13 | 14 | 15
 C1A1 B1 C2 B2 A2 A3 B3 C3

Na tabela assinalamos:

	1º segmento	2º segmento	3º segmento	4º segmento
A	1-2	3-10	11-12	13-15
B	1-3	4-8	9-13	14-15
C	1-2	3-7	8-14	15
D	<u>1</u>	2-9	10-14	15

De seguida, olhamos para os segundos segmentos, o que aparece primeiro é o C2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C1A1	B1		C2	B2		A2	A3	B3	C3					

Na tabela, corresponde ao segmento que acaba num valor mais baixo.

	1º segmento	2º segmento	3º segmento	4º segmento
A	1-2	3-10	11-12	13-15
B	1-3	4-8	9-13	14-15
C	1-2	<u>3-7</u>	8-14	15
D	<u>1</u>	2-9	10-14	15

C ficará com os segmentos 2, ("3-7") e será retirado da tabela.

Do mesmo modo, o segmento 3 será atribuído a "A". Faltando apenas o 4º segmento, este ficará para "B"

Teremos então:

	1º segmento	2º segmento	3º segmento	4º segmento
A	1-2	3-10	<u>11-12</u>	13-15
B	1-3	4-8	9-13	<u>14-15</u>
C	1-2	<u>3-7</u>	8-14	15
D	<u>1</u>	2-9	10-14	15

Se olharmos para todas as distribuições das caixas 1 a 15, podemos verificar que algumas não forma atribuídas a nenhum dos intervenientes. São elas: "2, 8, 9, 10, 13". Estas irão para as sobras.

Distribuição final:

A: 11, 12 B: 14, 15 C: 3, 4, 5, 6, 7. D: 1.

Sobras: 2, 8, 9, 10, 13.