1.2-Distribuição de mandatos.(ou Divisão proporcional).

*(**H**ondt, Saint Lague, **H**amilton, Lowndes, , **J**efferson, **A**dams, **W**ebster, **H**untington Hill, Dean)*

Nota: O tipo de problema que será abordado nos métodos de divisão proporcional é mostrado no exemplo seguinte:

Exemplo

Na eleição para uma assembleia com 10 lugares para distribuir, concorreram 3 partidos A, B e C. O número de votos obtidos por cada um dos partidos foram:

A-1250 B-1280 C- 300.

Nessa assembleia, quantos lugares deverão ser atribuídos a cada um dos partidos?

Vejamos alguns métodos para a resolução deste tipo de problema.

Nota: O método de Hondt, que se segue, é utilizado nas eleições oficiais portuguesas para as assembleias da república, regional, municipal, freguesia,…

Método de Hondt.

1º) Contabiliza-se o número de votos recebidos por cada lista.

2º) O número de votos obtido por cada lista é dividido sucessivamente por 1, 2, 3, 4, 5, ..., n , onde n é o número de mandatos a atribuir (pode não ser necessário efetuar todas as divisões).

3º) Escrevem-se os n maiores quocientes obtidos por ordem decrescente.

4º) Associam-se os n maiores quocientes às respetivas listas, obtendo-se assim a distribuição dos mandatos pelas diferentes listas.

5º) No caso de restar apenas um mandato para atribuir e havendo quocientes iguais em diferentes listas, o mandato é atribuído à lista com menor número de votos.

Exemplo

Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Dividimos os números de votos de cada um dos partidos por 1, 2, …7 e colocamos na tabela. Depois assinalamos os 7 maiores valores, que serão contados e atribuídos aos vários partidos.

	A	B	C	D
:1	**1250**	**2300**	**1400**	**800**
:2	625	**1150**	**700**	400
:3	416.67	**766.67**	466.67	266.67
:4	312.5	575	350	200
:5	250	460	280	160
:6	208.33	383.33	233.33	133.33
:7	178.57	328.57	200	114.29

A distribuição final é: A 1 B 3 C 2 D 1

Nota: para obter mais rapidamente os quocientes, podemos utilizar a calculadora gráfica.

Sugestão: Calculadora gráfica.

Podemos usar a **calculadora gráfica** para facilitar a construção da tabela.

Casio/Texas:

A ideia é usar secção de Estatística/ Editar.

A lista 1 (L1) é será os números 1,2,3,4,5,6,7.

A lista 2 será 1250/L1 (…).e o mesmo para os restantes.

Na calculadora Texas também é fácil.

Numworks:

Estatística. V1: 1 2 3 …7. Enter.

V2 (enter) "preencher com uma fórmula" 1250/V1 e o mesmo para os restantes.

Método Saint Lague.

O método de Sainte-Laguë tem uma aplicação semelhante à do método de Hondt, mas em que a série de divisores é 1, 3, 5, 7, etc. Números ímpares.

Exemplo: Método de Saint Lague.

Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Para o método de Saint Lague, completamos a tabela com números ímpares:

	A	B	C	D
:1	**<u>1250</u>**	**<u>2300</u>**	**<u>1400</u>**	**<u>800</u>**
:3	416.67	**<u>766.67</u>**	**<u>466.67</u>**	266.67
:5	250	**<u>460</u>**	280	160
:7	178.57	328.57	200	114.29
:9	138.89	255.56	155.56	88.89
:11	113.64	209.09	127.27	72.73
:13	96.15	176.92	107.69	61.54

O procedimento é muito parecido ao método anterior, e obtemos:

A distribuição final: A: 1 B: 3 C: 2 D: 1

Nota: Por vezes, o método de Hondt favorece ligeiramente os maiores partidos. O método de Saint Lague pode favorecer os partidos pequenos.

Nota: Nos métodos que se seguem, utilizaremos os conceitos: Divisor padrão(DP); Quota padrão(QP); Quota inferior(QI) e Quota superior(QS). Vejamos as suas definições.

Divisor padrão (DP): é o quociente entre o número de votos válidos e o número de lugares a atribuir.

$$DP = \frac{Número\ de\ votos\ válidos.}{Número\ de\ lugares.}$$

Quota padrão (QP): é o quociente entre o número de votos de cada lista e o divisor padrão.

$$QP = \frac{Número\ de\ votos\ da\ lista.}{DP}$$

Nota: Uma quota pode sofrer dois tipos de **arredondamento**:

Quota inferior (QI), se o arredondamento for feito por defeito (ao maior número inteiro inferior ou igual à quota padrão).

Quota superior (QS), se o arredondamento for feito por excesso (ao menor número inteiro superior ou igual à quota padrão).

Exemplo:

Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Determinemos o divisor padrão, a quota padrão e as quotas inferior e superior para cada partido.

<u>Total de votos:</u> 1250+2300+1400+800= 5750 Número de <u>mandatos</u>: 7

<u>Divisor padrão:</u> **DP**=5750/7 =821.43

Quota padrão(**QP**):

Para A: $\frac{1250}{821.43} \approx 1.52$, para B: $\frac{2300}{821.43} \approx 2.80$

Do mesmo modo para C: 1400/821.43 e para D: 1400/821.43.

Obtemos:

Partido	QuotaPadrão(**QP**)
A	1.52
B	2.80
C	1.70
D	0.97
Total:	6.99 ≈7

Nota: A soma das quotas padrão é sempre igual ao número total de lugares a atribuir. No exemplo acima, a soma não deu um valor exato devido aos arredondamentos efetuados anteriormente. 1.52+2.8.+1.70+0.97=6.99 ≈7

Para obter a <u>quota inferior</u> (**QI**), basta ignorar a parte decimal.

Para obter a <u>quota Superior</u> (**QS**), basta somar 1 à quota inferior.

Partido	QP	QI	QS
A	1.52	1	**2**
B	2.80	2	**3**
C	1.70	1	**2**
D	0.97	0	**1**

Método de Hamilton.

1º) Calcula-se o divisor padrão(DP).

2º) Calcular a quota padrão(QP) de cada lista.

3º) Atribuir a cada estado a sua quota inferior(QI) (que é o número de lugares provisórios a que cada um tem direito).

4º) Se sobrarem lugares, estes devem atribuir-se, um a um, às listas por ordem decrescente da parte decimal da respetiva quota padrão.

Exemplo

Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Começamos por calcular o divisor padrão, DP, as quotas padrão e as quotas inferiores, tal como foi indicado no exemplo anterior.

Total: 5750 **DP**=5750/7 =821.43

Quotas padrão:

A: 1250/821.43≈1.52 B: 2300/821.43≈2.80 C: 1400/821.43≈1.70

D: 800/821.43≈0.97

Partido	QP	QI
A	1.52	1
B	2.80	2
C	1.70	1
D	0.97	0
Total		4 (Faltam3)

Somamos as quotas inferiores e obtemos 4, o que significa que ainda faltam 3 lugares para atribuir.

Olhando para a parte decimal de cada um dos valores das quotas padrão, organizamos por ordem decrescente, isto é, do maior para o mais pequeno:

D- parte decimal .97 B- parte decimal .80

C- parte decimal .70 A- parte decimal .52

Escolhemos os 3 maiores: 1ºD, 2ºB, 3ºC.

Assim, vamos atribuir mais um mandato a D, B e C.

Partido	QP	QI	Acrescentar	Final
A	1.52	1	0	1
B	2.80	2	+1	3
C	1.70	1	+1	2
D	0.97	0	+1	1
Total	6.99≈7	4 (faltam3)		7

Final: A-1 B-3 C-2 D-1

Nota:

Por vezes, pode acontecer no método de Hamilton, que o aumento de um novo lugar no total, faça com que um dos partidos perca um mandato. **Paradoxo** do **Alabama.**

***Exemplo* (** Com **paradoxo)**

Nas eleições para uma assembleia com 30 deputados, concorreram 3 partidos, que representaremos pelas letras A, B e C. Os resultados foram os seguintes:

A- 416 B- 746 C-56.

Começamos por calcular o divisor padrão, DP, as quotas padrão e as quotas inferiores, tal como foi indicado no exemplo anterior.

Total: 1218 DP=1218/30 =40.6

Partido	QP	QI	Final
A	10.2463	10	10
B	18.3744	18	18
C	1.3793	1	2
Total		29(Falta 1)	30

Somamos as quotas inferiores e obtemos 29, o que significa que ainda falta 1 lugar para atribuir. Olhando para a parte decimal de cada um dos valores das quotas padrão, vemos que a maior parte decimal é a correspondente ao C, pelo que terá mais um mandato.

Distribuição final: A:10 B:18 C:2

Suponhamos agora que, em vez de 30 deputados, seriam 31. Vejamos a nova distribuição:

Total: 1218 DP=1218/31 ≈39.2903

Partido	QP	QI	Final
A	10.10.5879	10	11
B	18.9869	18	19
C	1.4253	1	1
Total		29(Faltam 2)	31

Somamos as quotas inferiores e obtemos 29, o que significa que ainda faltam 2 lugares para atribuir. Olhando para a parte decimal de cada um dos valores das quotas padrão, vemos que as maiores partes decimais correspondem ao B e ao A, pelo que estes terão mais um mandato cada.

Distribuição final: A:11 B:19 C:1

Reparemos que, comparando com a distribuição no caso anterior, em que o total eram apenas 30 mandatos, o partido C perdeu um mandato, o que é estanho!

Paradoxo do Alabama.

Método de Lowndes.

1º) Calcula-se o divisor padrão(DP).
2º) Calcular a quota padrão(QP) de cada lista.
3º) Atribuir a cada estado a sua quota inferior(QI) (que é o número de lugares provisórios a que cada um tem direito).
4º) Divide-se o número de votos de cada lista pela quota inferior.(Se der zero, dividimos por 1).
5º) Se sobrarem lugares, estes devem atribuir-se, um a um, às listas por ordem decrescente dos valores encontrados no passo anterior.

Exemplo -Método de Lowndes
Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Começamos por calcular o divisor padrão, DP, as quotas padrão e as quotas inferiores, tal como foi indicado no exemplo anterior.

Total: 5750 DP=5750/7 =821.43

Partido	QP	QI
A	1.52	1
B	2.80	2
C	1.70	1
D	0.97	0
Total		4 (faltam3)

Atribuímos provisoriamente as quotas inferiores, mas faltam 3 mandatos para distribuir.
Vamos agora dividir o número de votos de cada partido pela quota inferior e atribuir mais um mandato a cada um dos 3 que obtenham os maiores quocientes.

	QP	QI	Quocientes		Final
A	1.52	1	$\frac{1250}{1} = 1250$	+1	2
B	2.80	2	$\frac{2300}{2} = 1150$	+1	3
C	1.70	1	$\frac{1400}{1} = 1400$	+1	2
D	0.97	0	$\frac{800}{1} = 800$		0
Total	6.9≈7	4			7

Assim, vamos atribuir mais um mandato a C, A e B.

Final: A-2 B-3 C-2 D-0

Nota: Nos métodos que se seguem, quando não conseguimos obter a distribuição exata na primeira etapa, é necessário modificar o divisor padrão. A esse novo divisor chamamos Divisor Modificado(DM).

Método de Jefferson.

1º) Calcula-se o divisor padrão(DP).

2º) Calcula-se a quota padrão de cada lista(QP).

3º) Atribuir a cada lista a sua quota inferior(QI).

4º) Se a soma das quotas inferiores for igual ao número de lugares, a partilha está feita; caso contrário, é necessário encontrar por tentativas um número— **o divisor modificado (DM)** — para substituir o divisor padrão, de modo que, quando procedermos ao arredondamento das quotas modificadas (QM), a soma de todas as quotas, arredondadas por defeito(QMI), seja exatamente o número de lugares a atribuir.

Exemplo.

Nas eleições para uma assembleia concorreram quatro partidos A, B, C, D. Estavam previstos a distribuição de 25 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:

A-54 600   B-24 300 C-13 500 D- 9 600

Obtenha a distribuição dos 25 mandatos utilizando o método de Jefferson.

Resolução:

Tal como nos métodos de Hamilton e Lowndes, começamos por somar todos os votos e dividir pelo número de mandatos:

54600+24300+13500+9600 =102 000

(DP) 102000/25= 4080

As quotas padrão são obtidas dividindo o número de votos de cada partido pelo divisor padrão. Por exemplo, para o A, obtemos 54600/4080≈ 13.38. O mesmo para os restantes.

Também indicamos uma coluna com as quotas inferiores (QI).

Partido	**QP**	**QI**
A	13.38	13
B	5.96	5
C	3.31	3
D	2.35	2
Total:	///////////////////	23

Como a soma das quotas inferiores é 23, inferior ao número de lugares a distribuir, 25, vamos procurar um divisor modificado que seja menor que 4080. Fazemos por tentativa e erro. Seja, por exemplo, DM=3900.

Voltamos a fazer as quotas. Por exemplo, para o partido A ficará 54600/3900 =14. A quota modificada inferior QMI será 14. O mesmo para os restantes.

Somando novamente as quotas inferiores, agora temos exatamente 25, como se pretendia. Obtemos:

Partido	**QM**	**QMI**	**Final**
A	14	14	14
B	6.23	6	6
C	3.46	3	3
D	2.46	2	2
Total:	///////////////////	25	25

Distribuição final: A-14 B-6 C-3 D-2

Nota: Neste método, como o total de lugares inicial costuma ser inferior ao número de lugares a distribuir, o **divisor modificado** (DM)deverá ser **menor** que o divisor padrão.

Sugestão: Calculadora gráfica.

Podemos usar a **calculadora gráfica** para facilitar a construção da tabela.

Começamos com o DP=4080.

Depois vamos experimentando vários valores para DM.

A ideia é usar secção de estatística/ Editar

L1=(54600, 24300, 13500, 9600) e L2=L1/4080

(Obter L2: Casio-SHIFT 1 ou OPTN/LIST. Texas 2^{nd} 1.)

Também pode fazer L3 como a parte inteira de L2. L3=Int(L2).

Casio-Optn/F2/Numeric/Int.

Texas-Math/Num/Int.

Sugestão **Numworks:**

V1: 54600, 24300, 13500, 9600

V2 “preencher com uma fórmula” V2=V1/4080

(Aqui poderá experimentar vários valores para DM.)

Método de Adams.

Este método é idêntico ao método de Jefferson, mas utiliza quotas superiores (em vez de quotas inferiores).

Exemplo:

Nas eleições para uma assembleia concorreram quatro partidos A, B, C, D. Estavam previstos a distribuição de 25 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:

A-54 600 B-24 300 C-13 500 D- 9 600

Obtenha a distribuição dos 25 mandatos utilizando o método Adams.

Resolução:

Tal como nos métodos anteriores, somar todos os votos e dividir pelo número de mandatos: 54600+24300+13500+9600 =102 000 (DP) 102000/25= 4080

As quotas padrão são obtidas dividindo o número de votos de cada partido pelo divisor padrão. Por exemplo, para o A, obtemos 54600/4080≈ 13.38. O mesmo para os restantes. Também indicamos uma coluna com as quotas superiores (QS).

Partido	**QP**	**QS**
A	13.38	14
B	5.96	6
C	3.31	4
D	2.35	3
Total:	//////////////////////////	27

Como a soma das quotas superiores é 27, superior ao número de lugares a distribuir, 25, vamos procurar um divisor modificado que seja maior que 4080. Seja DM=4550

Calculamos novamente as quotas e as quotas superiores, para o novo divisor (DM)

Obtemos:

Partido	**QM**	**QMS**	**Final**
A	12	13	13
B	5.34	6	6
C	2.97	3	3
D	2.11	3	3
Total:	////////////////////	25	25

Obtemos exatamente o total 25, como pretendíamos.

Nota: Neste método, como o total de lugares inicial costuma ser superior ao número de lugares a distribuir, o **divisor modificado** (DM)deverá ser **maior** que o divisor padrão.

Método de Webster.

Parecido aos dois anteriores, mas com o arredondamento habitual às unidades, isto é, com a regra dos arredondamentos.

Exemplos- Regra dos arredondamentos:
a) 3.5 arredondamos para 4.
b) 3.1 arredondamos para 3.

c) 3.7 arredondamos para 4.

Exemplo -Webster
Nas eleições para uma assembleia concorreram quatro partidos A, B, C, D. Estavam previstos a distribuição de 12 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:
A-25 B-39 C-16 D- 50.
Faça a distribuição dos mandatos pelos vários partidos utilizando o método de Webster.

Resolução:

Tal como nos métodos anteriores, começamos por calcular o divisor padrão e a quota padrão de cada partido.

25+39+16+50=130 Número de lugares: 12.

DP=130/12 $\approx$10.83

Depois fazemos a quota arredondada pelo arredondamento habitual, isto é, atribuir a quota inferior se a parte decimal for inferior a 0.5 e a parte superior se a parte decimal for maior ou igual a 0.5.

	QP	**QArred**	**Final**
A	2.31	2	**2**
B	3.60	4	**4**
C	1.48	1	**1**
D	4.62	5	**5**
Total:		**12**	**12**

Como o total é igual ao número de lugares a distribuir, está concluída a distribuição.

Se por acaso o total não fosse igual ao número pretendido seria necessário modificar o divisor, tal como vimos nos dois métodos anteriores.

Método de Huntington-Hill.

Média geométrica (M_G) de dois números "a" e "b".

$$\mathbf{M_G(a,b)} = \sqrt{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}$$

Exemplo:

$M_G(2, 8)=\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

Método de Huntington Hill.

1º) Calcular o **D.P.**

2º) Calcular a **Q.P.** de cada lista.

3º) Se a quota padrão é um número inteiro, atribuímos esse número, caso contrário, vamos para o passo seguinte.

4º) Atribuímos a cada lista um número de lugares igual:

● à sua **quota inferior** (**Q.I.)**, se a sua quota padrão for inferior à média geométrica entre a sua quota inferior e a sua quota superior.

● à sua **quota superior** (**Q.S.)**, se a sua quota padrão for maior ou igual à média geométrica entre a sua quota inferior e a sua quota superior.

5º) Se a soma das quotas arredondadas for igual ao número de lugares a atribuir, a distribuição está encontrada; caso contrário, é necessário encontrar, por tentativas, um divisor modificado (para substituir o divisor padrão), de modo a calcular
a quota modificada de cada lista.

6º) As quotas modificadas são de acordo com o 3º e 4º passos acima referidos.

Exemplo
Nas eleições para uma assembleia concorreram três partidos A, B, C. Estavam previstos a distribuição de 10 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:

A-150 B-120 C-70

Faça a distribuição dos mandatos pelos vários partidos utilizando o método de Huntington-Hill.

Resolução:

Como nos métodos anteriores, começamos por calcular o divisor padrão e a quota padrão de cada partido. Preenchemos ainda a quota inferior(QI) e a quota superior(QS) de cada um.

Total: 150+120+170=340 DP=340/10=34

	QP	QI	QS
A	4.41	4	5
B	3.53	3	4
C	2.06	2	3
Total			

De seguida vamos fazer a média geométrica entre as quotas inferior a superior de cada partido, isto é. $M_G(QI, QS)=\sqrt{QI \times QS}$

	QP	QI	QS	MGeo. $\sqrt{QI \times QS}$
A	4.41	4	5	$\sqrt{4 \times 5} \approx 4.47$
B	3.53	3	4	$\sqrt{3 \times 4} \approx 3.46$
C	2.06	2	3	$\sqrt{2 \times 3} \approx 2.45$
Total				

A partir de agora, comparamos a quota padrão com a média geométrica.

Para o partido A, a quota padrão (4.41) é inferior à média geométrica(4.47), como tal vamos atribuir a quota inferior: 4.

Para o B, 3.53 é maior que 3.46. Vamos atribuir a quota superior: 4

Para o C, 2.06 é menor que 2.45. Vamos atribuir a quota inferior: 2

	QP	QI	QS	MGeo.	Quota
A	4.41	4	5	4.47	4
B	3.53	3	4	3.46	4
C	2.06	2	3	2.45	2
Total					10

Como a soma deu 10, consideramos terminada a distribuição.

Distribuição final: C-4 P-4 R-2

Se por acaso o total não fosse igual ao número pretendido seria necessário modificar o divisor, tal como vimos anteriormente nos métodos Jefferson e Adams.

Método de Dean

Média Harmónica (M_H) de dois números “a” e “b”. $\mathbf{M_H(a,b)} = \frac{2\times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$

Exemplo- Média harmónica

$$M_H(2, 8) = \frac{2\times2\times8}{2+8} = \frac{32}{10} \approx 3.2$$

O **método de Dean** é semelhante ao método de Huntington Hill, mas utiliza a **média harmónica** em vez da média geométrica.

Exemplo- Método de Dean

Nas eleições para uma assembleia concorreram três partidos A, B, C. Estavam previstos a distribuição de 10 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:

A-150 B-120 C-70

Faça a distribuição dos mandatos pelos vários partidos utilizando o método de Dean.

Resolução:

Como nos métodos anteriores, começamos por calcular o divisor padrão e a quota padrão de cada partido. Preenchemos ainda a quota inferior(QI) e a quota superior(QS) de cada um. Total: 150+120+170=340 DP=340/10=34

	QP	QI	QS
A	4.41	4	5
B	3.53	3	4
C	2.06	2	3
Total			

De seguida, vamos fazer a média harmónica entre as quotas inferior a superior de cada partido, isto é,

$$M_H(QI, QS)=\frac{2\times QI\times QS}{QI+QS}$$

	QP	QI	QS	$\mathbf{M_H(QI, QS)=\frac{2\times QI\times QS}{QI+QS}}$
A	4.41	4	5	$M_H(4, 5)=\frac{2\times4\times5}{4+5}\approx 4.44$
B	3.53	3	4	$M_H(3, 4)=\frac{2\times3\times4}{3+4}\approx 3.43$
C	2.06	2	3	$M_H(2, 3)=\frac{2\times2\times3}{2+3}= 2.4$
Total				

A partir de agora, comparamos a quota padrão com a média harmónica.

Para o partido A, a quota padrão (4.41) é inferior à média harmónica(4.44), como tal vamos atribuir a quota inferior: 4.

Para o B, 3.53 é maior que 3.43. Vamos atribuir a quota superior: 4

Para o C, 2.06 é menor que 2.4. Vamos atribuir a quota inferior: 2

	QP	QI	QS	MHarm.	Quota
A	4.41	4	5	4.47	4
B	3.53	3	4	3.46	4
C	2.06	2	3	2.45	2
Total					10

Como a soma deu 10, consideramos terminada a distribuição.

Distribuição final: C-4 P-4 R-2

Se por acaso o total não fosse igual ao número pretendido seria necessário modificar o divisor, tal como vimos anteriormente nos métodos Jefferson e Adams.

Nota: É impossível encontrar um método de distribuição de mandatos sem falhas.