# 1.2-Distribuição de mandatos.(ou Divisão proporcional).

*(**H**ondt, Saint Lague, **H**amilton, Lowndes, , **J**efferson, **A**dams, **W**ebster, **H**untington Hill, Dean)*

***Nota:*** O tipo de problema que será abordado nos métodos de divisão proporcional é mostrado no exemplo seguinte:

***Exemplo***

Na eleição para uma assembleia com 10 lugares para distribuir, concorreram 3 partidos A, B e C. O número de votos obtidos por cada um dos partidos foram:

A-1250 B-1280 C- 300.

Nessa assembleia, quantos lugares deverão ser atribuídos a cada um dos partidos?

Vejamos alguns métodos para a resolução deste tipo de problema.

***Nota:*** O método de Hondt, que se segue, é utilizado nas eleições oficiais portuguesas para as assembleias da república, regional, municipal, freguesia,…

## Método de Hondt.

**1º)** Contabiliza-se o número de votos recebidos por cada lista.

**2º)** O número de votos obtido por cada lista é dividido sucessivamente por 1, 2, 3, 4, 5, ..., n , onde n é o número de mandatos a atribuir (pode não ser necessário efetuar todas as divisões).

**3º)** Escrevem-se os n maiores quocientes obtidos por ordem decrescente.

**4º)** Associam-se os n maiores quocientes às respetivas listas, obtendo-se assim a distribuição dos mandatos pelas diferentes listas.

**5º)** No caso de restar apenas um mandato para atribuir e havendo quocientes iguais em diferentes listas, o mandato é atribuído à lista com menor número de votos.

***Exemplo***

Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Dividimos os números de votos de cada um dos partidos por 1, 2, …7 e colocamos na tabela. Depois assinalamos os 7 maiores valores, que serão contados e atribuídos aos vários partidos.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| :1 | **1250** | **2300** | **1400** | **800** |
| :2 | 625 | **1150** | **700** | 400 |
| :3 | 416.67 | **766.67** | 466.67 | 266.67 |
| :4 | 312.5 | 575 | 350 | 200 |
| :5 | 250 | 460 | 280 | 160 |
| :6 | 208.33 | 383.33 | 233.33 | 133.33 |
| :7 | 178.57 | 328.57 | 200 | 114.29 |

A distribuição final é: A 1 B 3 C 2 D 1

Nota: para obter mais rapidamente os quocientes, podemos utilizar a calculadora gráfica.

## **Sugestão:** Calculadora gráfica.

Podemos usar a **calculadora gráfica** para facilitar a construção da tabela.

***Casio/Texas:***

A ideia é usar secção de Estatística/ Editar.

A lista 1 (L1) é será os números 1,2,3,4,5,6,7.

A lista 2 será 1250/L1 (…).e o mesmo para os restantes.

Na calculadora Texas também é fácil.

***Numworks:***

Estatística. V1: 1 2 3 …7. Enter.

V2 (enter) "preencher com uma fórmula" 1250/V1 e o mesmo para os restantes.

## Método Saint Lague.

O método de Sainte-Laguë tem uma aplicação semelhante à do método de Hondt, mas em que a série de divisores é 1, 3, 5, 7, etc. Números ímpares.

***Exemplo:*** Método de Saint Lague***.***

Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Para o método de Saint Lague, completamos a tabela com números ímpares:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| :1 | **1250** | **2300** | **1400** | **800** |
| :3 | 416.67 | **766.67** | **466.67** | 266.67 |
| :5 | 250 | **460** | 280 | 160 |
| :7 | 178.57 | 328.57 | 200 | 114.29 |
| :9 | 138.89 | 255.56 | 155.56 | 88.89 |
| :11 | 113.64 | 209.09 | 127.27 | 72.73 |
| :13 | 96.15 | 176.92 | 107.69 | 61.54 |

O procedimento é muito parecido ao método anterior, e obtemos:

A distribuição final: A: 1 B: 3 C: 2 D: 1

***Nota:*** Por vezes, o método de Hondt favorece ligeiramente os maiores partidos. O método de Saint Lague pode favorecer os partidos pequenos.

***Nota:*** Nos métodos que se seguem, utilizaremos os conceitos: Divisor padrão(DP); Quota padrão(QP); Quota inferior(QI) e Quota superior(QS). Vejamos as suas definições.

**Divisor padrão (DP)**: é o quociente entre o número de votos válidos e o número de lugares a atribuir.

$$DP = \frac{Número\ de\ votos\ válidos.}{Número\ de\ lugares.}$$

**Quota padrão (QP):** é o quociente entre o número de votos de cada lista e o divisor padrão.

$$QP = \frac{Número\ de\ votos\ da\ lista.}{DP}$$

***Nota:*** Uma quota pode sofrer dois tipos de **arredondamento**:

**Quota inferior (QI)**, se o arredondamento for feito por defeito (ao maior número inteiro inferior ou igual à quota padrão).

**Quota inferior (QS)**, se o arredondamento for feito por excesso (ao menor número inteiro superior ou igual à quota padrão).

***Exemplo:***

Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Determinemos o divisor padrão, a quota padrão e as quotas inferior e superior para cada partido.

Total de votos: 1250+2300+1400+800= 5750 Número de mandatos: 7

Divisor padrão: **DP**=5750/7 =821.43

Quota padrão(**QP**):

Para A: $\frac{1250}{821.43} \approx 1.52$ , para B: $\frac{2300}{821.43} \approx 2.80$

Do mesmo modo para C: 1400/821.43 e para D: 1400/821.43.

Obtemos:

| Partido | QuotaPadrão(**QP**) |
|---|---|
| A | 1.52 |
| B | 2.80 |
| C | 1.70 |
| D | 0.97 |
| **Total:** | 6.99 ≈7 |

***Nota:*** A soma das quotas padrão é sempre igual ao número total de lugares a atribuir. No exemplo acima, a soma não deu um valor exato devido aos arredondamentos efetuados anteriormente. 1.52+2.8.+1.70+0.97=6.99 ≈7

Para obter a quota inferior (**QI**), basta ignorar a parte decimal.

Para obter a quota Superior (**QS**), basta somar 1 à quota inferior.

| Partido | QP | QI | QS |
|---|---|---|---|
| A | 1.52 | 1 | **2** |
| B | 2.80 | 2 | **3** |
| C | 1.70 | 1 | **2** |
| D | 0.97 | 0 | **1** |

## Método de Hamilton.

**1º)** Calcula-se o divisor padrão(DP).

**2º)** Calcular a quota padrão(QP) de cada lista.

**3º)** Atribuir a cada estado a sua quota inferior(QI) (que é o número de lugares provisórios a que cada um tem direito).

**4º)** Se sobrarem lugares, estes devem atribuir-se, um a um, às listas por ordem decrescente da parte decimal da respetiva quota padrão.

***Exemplo***

Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Começamos por calcular o divisor padrão, DP, as quotas padrão e as quotas inferiores, tal como foi indicado no exemplo anterior.

Total: 5750 DP=5750/7 =821.43

| Partido | QP | QI |
|---|---|---|
| A | 1.52 | 1 |
| B | 2.80 | 2 |
| C | 1.70 | 1 |
| D | 0.97 | 0 |
| Total | | 4 (Faltam3) |

Somamos as quotas inferiores e obtemos 4, o que significa que ainda faltam 3 lugares para atribuir.

Olhando para a parte decimal de cada um dos valores das quotas padrão, organizamos por ordem decrescente, isto é, do maior para o mais pequeno:

D- parte decimal .97
B- parte decimal .80
C- parte decimal .70
A- parte decimal .52

Escolhemos os 3 maiores: 1ºD, 2ºB, 3ºC.

Assim, vamos atribuir mais um mandato a D, B e C.

| Partido | QP | QI | Acrescentar | Final |
|---|---|---|---|---|
| A | 1.52 | 1 | 0 | 1 |
| B | 2.80 | 2 | +1 | 3 |
| C | 1.70 | 1 | +1 | 2 |
| D | 0.97 | 0 | +1 | 1 |
| Total | 6.99≈7 | 4 (faltam3) | | 7 |

Final: A-1 B-3 C-2 D-

# Método de Lowndes.

**1º)** Calcula-se o divisor padrão(DP).
**2º)** Calcular a quota padrão(QP) de cada lista.
**3º)** Atribuir a cada estado a sua quota inferior(QI) (que é o número de lugares provisórios a que cada um tem direito).
**4º)** Divide-se o número de votos de cada lista pela quota inferior.

**5º)** Se sobrarem lugares, estes devem atribuir-se, um a um, às listas por ordem decrescente dos valores encontrados no passo anterior.

***Exemplo*** -Método de Lowndes
Nas eleições para uma assembleia com 7 deputados, concorreram 4 partidos, que representaremos pelas letras A, B, C e D. Os resultados foram os seguintes:

A- 1 250 B- 2 300 C-1 400 D- 800.

Começamos por calcular o divisor padrão, DP, as quotas padrão e as quotas inferiores, tal como foi indicado no exemplo anterior.

Total: 5750 DP=5750/7 =821.43

| Partido | QP | QI |
|---|---|---|
| A | 1.52 | 1 |
| B | 2.80 | 2 |
| C | 1.70 | 1 |
| D | 0.97 | 0 |
| Total | | 4 (faltam3) |

Atribuímos provisoriamente as quotas inferiores, mas faltam 3 mandatos para distribuir.
Vamos agora dividir o número de votos de cada partido pela quota inferior e atribuir mais um mandato a cada um dos 3 que obtenham os maiores quocientes.

| | QP | QI | Quocientes | | Final |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1.52 | 1 | $\frac{1250}{1}=1250$ | +1 | 2 |
| B | 2.80 | 2 | $\frac{2300}{2}=1150$ | +1 | 3 |
| C | 1.70 | 1 | $\frac{1400}{1}=1400$ | +1 | 2 |
| D | 0.97 | 0 | $\frac{800}{1}=800$ | | 0 |
| Total | 6.9≈7 | 4 | | | 7 |

Assim, vamos atribuir mais um mandato a C, A e B.

Final: A-2 B-3 C-2 D-0

**Nota:** Por vezes, pode acontecer no método de Hamilton, que o aumento de um novo lugar faça com que um dos partidos perca um mandato. **Paradoxo** do Alabama.

***Nota:*** Nos métodos que se seguem, quando não conseguimos obter a distribuição exata na primeira etapa, é necessário modificar o divisor padrão. A esse novo divisor chamamos Divisor Modificado(DM).

## Método de Jefferson.

**1º)** Calcula-se o divisor padrão(DP).

**2º)** Calcula-se a quota padrão de cada lista(QP).

**3º)** Atribuir a cada lista a sua quota inferior(QI).

**4º)** Se a soma das quotas inferiores for igual ao número de lugares, a partilha está feita; caso contrário, é necessário encontrar por tentativas um número— **o divisor modificado ( DM)** — para substituir o divisor padrão, de modo que, quando procedermos ao arredondamento das quotas modificadas (QM), a soma de todas as quotas, arredondadas por defeito(QMI), seja exatamente o número de lugares a atribuir.

***Exemplo.***

Nas eleições para uma assembleia concorreram quatro partidos A, B, C, D. Estavam previstos a distribuição de 25 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:

A-54 600   B-24 300  C-13 500 D- 9 600

Obtenha a distribuição dos 25 mandatos utilizando o método de Jefferson.

***Resolução:***

Tal como nos métodos de Hamilton e Lowndes, começamos por somar todos os votos e dividir pelo número de mandatos:

54600+24300+13500+9600 =102 000

(DP) 102000/25= 4080

As quotas padrão são obtidas dividindo o número de votos de cada partido pelo divisor padrão. Por exemplo, para o A, obtemos 54600/4080≈ 13.38. O mesmo para os restantes.

Também indicamos uma coluna com as quotas inferiores (QI).

| Partido | QP | QI |
|---|---|---|
| A | 13.38 | 13 |
| B | 5.96 | 5 |
| C | 3.31 | 3 |
| D | 2.35 | 2 |
| Total: | /////////////////// | 23 |

Como a soma das quotas inferiores é 23, inferior ao número de lugares a distribuir, 25, vamos procurar um divisor modificado que seja menor que 4080. Fazemos por tentativa e erro. Seja DM=3900.

Voltamos a fazer as quotas. Por exemplo, para o partido A ficará 54600/3900 =14. A quota modificada inferior QMI será 14. O mesmo para os restantes.

Somando novamente as quotas inferiores, agora temos exatamente 25, como se pretendia. Obtemos:

| Partido | QM | QMI | Final |
|---|---|---|---|
| A | 14 | 14 | 14 |
| B | 6.23 | 6 | 6 |
| C | 3.46 | 3 | 3 |
| D | 2.46 | 2 | 2 |
| Total: | ////////////////// | 25 | 25 |

Distribuição final: A-14 B-6 C-3 D-2

**Nota:** Neste método, como o total de lugares inicial costuma ser inferior ao número de lugares a distribuir, o **divisor modificado** (DM)deverá ser **menor** que o divisor padrão.

## **Sugestão:** Calculadora gráfica.

Podemos usar a **calculadora gráfica** para facilitar a construção da tabela.

Começamos com o DP=4080.

Depois vamos experimentando vários valores para DM.

A ideia é usar secção de estatística/ Editar

L1=(54600, 24300, 13500, 9600) e L2=L1/4080

(Obter L2: Casio-SHIFT 1 ou OPTN/LIST. Texas 2$^{nd}$ 1.)

Também pode fazer L3 como a parte inteira de L2.

L3=Int(L2).

Casio-Optn/F2/Numeric/Int.

Texas-Math/Num/Int.

Sugestão **Numworks:**

V1: 54600, 24300, 13500, 9600

V2 “preencher com uma fórmula”   V2=V1/4080

(Aqui poderá experimentar vários valores para DM.)

## Método de Adams.

Este método é idêntico ao método de Jefferson, mas utiliza quotas superiores (em vez de quotas inferiores).

***Exemplo:***

Nas eleições para uma assembleia concorreram quatro partidos A, B, C, D. Estavam previstos a distribuição de 25 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:

A-54 600   B-24 300  C-13 500 D- 9 600

Obtenha a distribuição dos  25 mandatos utilizando o método Adams.

***Resolução:***

Tal como nos métodos anteriores, somar todos os votos e dividir pelo número de mandatos:

54600+24300+13500+9600 =102 000

(DP)   102000/25= 4080

As quotas padrão são obtidas dividindo o número de votos de cada partido pelo divisor padrão. Por exemplo, para o A, obtemos 54600/4080≈ 13.38. O mesmo para os restantes.

Também indicamos uma coluna com as quotas superiores (QS).

| **Partido** | **QP** | **QS** |
|---|---|---|
| A | 13.38 | 14 |
| B | 5.96 | 6 |
| C | 3.31 | 4 |
| D | 2.35 | 3 |
| Total: | ////////////////////// | 27 |

Como a soma das quotas superiores é 27, superior ao número de lugares a distribuir, 25, vamos procurar um divisor modificado  que seja maior que 4080.

Seja DM=4550

Calculamos novamente as quotas e as quotas superiores, para o novo divisor (DM)

Obtemos:

| Partido | QM | QMS | Final |
|---|---|---|---|
| A | 12 | 13 | 13 |
| B | 5.34 | 6 | 6 |
| C | 2.97 | 3 | 3 |
| D | 2.11 | 3 | 3 |
| Total: | ///////////////// | 25 | 25 |

Obtemos exatamente o total 25, como pretendíamos.

**Nota:** Neste método, como o total de lugares inicial costuma ser superior ao número de lugares a distribuir, o **divisor modificado** (DM)deverá ser **maior** que o divisor padrão.

## Método de Webster.

Parecido aos dois anteriores, mas com o arredondamento habitual às unidades, isto é, com a regra dos arredondamentos.

***Exemplos-*** Regra dos arredondamentos:
a) 3.5 arredondamos para 4.
b) 3.1 arredondamos para 3.

c) 3.7 arredondamos para 4.

***Exemplo*** -Webster
Nas eleições para uma assembleia concorreram quatro partidos A, B, C, D. Estavam previstos a distribuição de 12 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:
A-25 B-39 C-16 D- 50.
Faça a distribuição dos mandatos pelos vários partidos utilizando o método de Webster.

**Resolução:**

Tal como nos métodos anteriores, começamos por calcular o divisor padrão e a quota padrão de cada partido.

25+39+16+50=130 Número de lugares: 12.

$$DP=130/12 \approx 10.83$$

Depois fazemos a quota arredondada pelo arredondamento habitual, isto é, atribuir a quota inferior se a parte decimal for inferior a 0.5 e a parte superior se a parte decimal for maior ou igual a 0.5.

| | QP | QArred | Final |
|---|---|---|---|
| **A** | 2.31 | 2 | **2** |
| **B** | 3.60 | 4 | **4** |
| **C** | 1.48 | 1 | **1** |
| **D** | 4.62 | 5 | **5** |
| **Total:** | | **12** | **12** |

Como o total é igual ao número de lugares a distribuir, está concluída a distribuição.

Se por acaso o total não fosse igual ao número pretendido seria necessário modificar o divisor, tal como vimos nos dois métodos anteriores.

## Método de Huntington-Hill.

**Média geométrica ($M_G$)** de dois números "a" e "b".

$$M_G(a,b) = \sqrt{a \times b}$$

**Exemplo:**

$M_G(2, 8)=\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

**Método de Huntington Hill.**

**1º)** Calcular o **D.P.**

**2º)** Calcular a **Q.P.** de cada lista.

**3º)** Se a quota padrão é um número inteiro, atribuímos esse número, caso contrário, vamos para o passo seguinte.

**4º)** Atribuímos a cada lista um número de lugares igual:

● à sua **quota inferior** (**Q.I.)**, se a sua quota padrão for inferior à média geométrica entre a sua quota inferior e a sua quota superior.

● à sua **quota superior** (**Q.S.)**, se a sua quota padrão for maior ou igual à média geométrica entre a sua quota inferior e a sua quota superior.

**5º)** Se a soma das quotas arredondadas for igual ao número de lugares a atribuir, a distribuição está encontrada; caso contrário, é necessário encontrar, por tentativas, um divisor modificado (para substituir o divisor padrão), de modo a calcular a quota modificada de cada lista.

**6º)** As quotas modificadas são de acordo com o 3º e 4º passos acima referidos.

***Exemplo***

Nas eleições para uma assembleia concorreram três partidos A, B, C. Estavam previstos a distribuição de 10 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:

A-150 B-120 C-70

Faça a distribuição dos mandatos pelos vários partidos utilizando o método de Huntington-Hill.

***Resolução:***

Como nos métodos anteriores, começamos por calcular o divisor padrão e a quota padrão de cada partido. Preenchemos ainda a quota inferior(QI) e a quota superior(QS) de cada um.

Total: 150+120+170=340 DP=340/10=34

| | QP | QI | QS |
|---|---|---|---|
| A | 4.41 | 4 | 5 |
| B | 3.53 | 3 | 4 |
| C | 2.06 | 2 | 3 |
| Total | | | |

De seguida vamos fazer a média geométrica entre as quotas inferior a superior de cada partido, isto é. $M_G(QI, QS)=\sqrt{QI \times QS}$

| | QP | QI | QS | MGeo. $\sqrt{QI \times QS}$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 4.41 | 4 | 5 | $\sqrt{4 \times 5} \approx 4.47$ |
| B | 3.53 | 3 | 4 | $\sqrt{3 \times 4} \approx 3.46$ |
| C | 2.06 | 2 | 3 | $\sqrt{2 \times 3} \approx 2.45$ |
| Total | | | | |

A partir de agora, comparamos a quota padrão com a média geométrica.

Para o partido A, a quota padrão (4.41) é inferior à média geométrica(4.47), como tal vamos atribuir a quota inferior: 4.

Para o B, 3.53 é maior que 3.46. Vamos atribuir a quota superior: 4

Para o C, 2.06 é menor que 2.45. Vamos atribuir a quota inferior: 2

| | QP | QI | QS | MGeo. | Quota |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 4.41 | 4 | 5 | 4.47 | 4 |
| B | 3.53 | 3 | 4 | 3.46 | 4 |
| C | 2.06 | 2 | 3 | 2.45 | 2 |
| Total | | | | | 10 |

Como a soma deu 10, consideramos terminada a distribuição.

Distribuição final: C-4 P-4 R-2

Se por acaso o total não fosse igual ao número pretendido seria necessário modificar o divisor, tal como vimos anteriormente nos métodos Jefferson e Adams.

## Método de Dean

**Média Harmónica ($M_H$)** de dois números "a" e "b".

$$\mathbf{M_H(a,b)} = \frac{2\times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}$$

***Exemplo-*** Média harmónica

$$M_H(2, 8) = \frac{2\times2\times8}{2+8} = \frac{32}{10} \approx 3.2$$

O **método de Dean** é semelhante ao método de Huntington Hill, mas utiliza a **média harmónica** em vez da média geométrica.

***Exemplo-*** Método de Dean

Nas eleições para uma assembleia concorreram três partidos A, B, C. Estavam previstos a distribuição de 10 mandatos. Os resultados da eleição foram os seguintes:

A-150 B-120 C-70

Faça a distribuição dos mandatos pelos vários partidos utilizando o método de Dean.

***Resolução:***

Como nos métodos anteriores, começamos por calcular o divisor padrão e a quota padrão de cada partido. Preenchemos ainda a quota inferior(QI) e a quota superior(QS) de cada um.

Total: 150+120+170=340

DP=340/10=34

| | QP | QI | QS |
|---|---|---|---|
| A | 4.41 | 4 | 5 |
| B | 3.53 | 3 | 4 |
| C | 2.06 | 2 | 3 |
| Total | | | |

De seguida, vamos fazer a média harmónica entre as quotas inferior a superior de cada partido, isto é,

$$M_H(QI, QS)=\frac{2\times QI\times QS}{QI+QS}$$

| | QP | QI | QS | **$M_H$(QI, QS)=$\frac{2\times QI\times QS}{QI+QS}$** |
|---|---|---|---|---|
| A | 4.41 | 4 | 5 | $M_H$(4, 5)=$\frac{2\times4\times5}{4+5}\approx 4.44$ |
| B | 3.53 | 3 | 4 | $M_H$(3, 4)=$\frac{2\times3\times4}{3+4}\approx 3.43$ |
| C | 2.06 | 2 | 3 | $M_H$(2, 3)=$\frac{2\times2\times3}{2+3}= 2.4$ |
| Total | | | | |

A partir de agora, comparamos a quota padrão com a média harmónica.

Para o partido A, a quota padrão (4.41) é inferior à média harmónica(4.44), como tal vamos atribuir a quota inferior: 4.

Para o B, 3.53 é maior que 3.43. Vamos atribuir a quota superior: 4

Para o C, 2.06 é menor que 2.4. Vamos atribuir a quota inferior: 2

| | QP | QI | QS | MHarm. | Quota |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 4.41 | 4 | 5 | 4.47 | 4 |
| B | 3.53 | 3 | 4 | 3.46 | 4 |
| C | 2.06 | 2 | 3 | 2.45 | 2 |
| Total | | | | | 10 |

Como a soma deu 10, consideramos terminada a distribuição.

Distribuição final: C-4 P-4 R-2

Se por acaso o total não fosse igual ao número pretendido seria necessário modificar o divisor, tal como vimos anteriormente nos métodos Jefferson e Adams.

***Nota:*** É impossível encontrar um método de distribuição de mandatos sem falhas.