Exercise 1 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com menos de 80% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia superior a 80%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 80% (valor exacto)?*

Resolução

Estamos a supor que a eficácia está a ser considerada relativamente a toda a carreira, embora isso se possa aplicar a qualquer período.

Suponhamos que o jogador em causa tinha uma eficácia inferior a 80%, quando ia tentar acertar e, após a tentativa, a sua eficácia passou a ser superior a 80%. É claro que o jogador acertou, pois um falhanço não melhora a média (qualquer que ela seja). Se considerarmos que l representa o número de lançamentos (desde o início da carreira) e que a_l é o número de vezes que acertou (até ao lançamento l), temos que

$$\frac{a_l}{l} < \frac{80}{100} < \frac{a_{l+1}}{l+1}$$

Mas, $a_{l+1} = a_l + 1 = 1 + a_l$, pelo que obtemos

$$\frac{a_l}{l} < \frac{4}{5} < \frac{1 + a_l}{l+1}$$

Das desigualdades anteriores, obtemos

$$5a_l < 4l \wedge 4l + 4 < 5 + 5a_l$$

Então,

$$5a_l < 4l < 1 + 5a_l$$

A condição anterior é impossível para números naturais, pelo que é absurdo supor que o jogador passou de menos de 80% para mais de 80% (de eficácia), com um só lançamento. Então, ele tem de passar por 80% e no lançamento seguinte, ao acertar, melhora a média e a eficácia (passando para mais de 80%).

Note-se que o resultado anterior não depende de quantos lançamentos o jogador fez: podem ser algumas dezenas ou alguns milhares!

Exercise 2 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com mais de 80% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia inferior a 80%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 80% (valor exacto)?*

Resolução

Esta questão pode parecer igual à anterior, mas há uma diferença enorme: para piorar a eficácia, o jogador tem de falhar o lançamento livre. Neste caso, teremos

$$\frac{a_l}{l} > \frac{80}{100} > \frac{a_{l+1}}{l+1} \implies \frac{a_l}{l} > \frac{4}{5} > \frac{a_l}{l+1}$$

Note-se que, ao falhar, continuamos a ter o mesmo número de acertos, ou seja, $a_{l+1} = a_l$. Logo,

$$\frac{l}{a_l} < \frac{5}{4} < \frac{l+1}{a_l} \implies 4l < 5a_l < 4l + 4$$

Ora, é possível que um dos números $4l+1$, $4l+2$ e $4l+3$ seja múltiplo de 5. Assim, se fizermos $l = 11$, temos $4l + 1 = 45$, pelo que vem $a_l = 9$.

Verifiquemos:

Ao fim de 11 lançamentos, o jogador tem 9 lançamentos em que acertou. Isso corresponde a $81,818\,181\,82\%$. Quando falha o 12^o lançamento a eficácia passa para 75%, pelo que não é obrigatório passar pelos 80% (embora isso possa acontecer).

Exercise 3 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com menos de 90% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia superior a 90%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 90% (valor exacto)?*

Resolução

Esta questão é muito semelhante à questão inicial (onde tínhamos 80%). Utilizando a mesma notação, temos

$$\begin{aligned} \frac{a_l}{l} < \frac{90}{100} < \frac{a_{l+1}}{l+1} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a_l}{l} < \frac{9}{10} < \frac{1+a_l}{l+1} \\ &\Longrightarrow \quad 10a_l < 9l \wedge 9l + 9 < 10 + 10a_l \\ &\Longrightarrow \quad 10a_l < 9l \wedge 9l < 1 + 10a_l \\ &\Longrightarrow \quad 10a_l < 9l < 1 + 10a_l \end{aligned}$$

A inequação anterior não tem soluções inteiras, pelo que é absurdo supor que o jogador passa de menos 90% para mais de 90%, com um só lançamento. Ou seja, precisa de conseguir 90%, para, depois, aumentar a eficácia para mais de 90%.

Exercise 4 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com mais de 90% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia inferior a 90%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 90% (valor exacto)?*

Resolução

Esta questão é semelhante à que resolvemos (com 80%).

$$\begin{aligned} \frac{a_l}{l} > \frac{90}{100} > \frac{a_{l+1}}{l+1} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a_l}{l} > \frac{9}{10} > \frac{a_l}{l+1} \Longrightarrow \frac{l}{a_l} < \frac{10}{9} < \frac{l+1}{a_l} \\ &\Longrightarrow \quad 9l < 10a_l \wedge 10a_l < 9l + 9 \\ &\Longrightarrow \quad 9l < 10a_l < 9l + 9 \end{aligned}$$

Ora, entre $9l$ e $9l + 9$, há vários números naturais, pelo que podemos escolher l, de modo que haja um valor inteiro (e positivo) para a_l.

Então, se fizermos $l = 5$ (por exemplo), temos $45 < 10a_l < 54$, pelo que podemos escolher $10a_l = 50$, ou seja, temos $a_5 = 5$. Note-se que, para $l = 9$, temos $81 < 10a_l < 90$ e não há solução inteira para a_l.

Exercise 5 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com menos de 50% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia superior a 50%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 50% (valor exacto)?*

Resolução

Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_l}{l} < \frac{50}{100} < \frac{a_{l+1}}{l+1} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a_l}{l} < \frac{1}{2} < \frac{1+a_l}{l+1} \\
&\Longrightarrow \quad 2a_l < l \wedge l+1 < 2+2a_l \\
&\Longrightarrow \quad 2a_l < l \wedge l < 1+2a_l \\
&\Longrightarrow \quad 2a_l < l < 1+2a_l
\end{aligned}$$

Obtivemos uma condição impossível (com números naturais), pelo que é absurdo supor que o jogador passou de menos de 50% para mais de 50%, sem ter passado por 50%.

Exercise 6 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com mais de 50% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia inferior a 50%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 50% (valor exacto)?*

Resolução

$$\begin{aligned}
\frac{a_l}{l} > \frac{50}{100} > \frac{a_{l+1}}{l+1} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a_l}{l} > \frac{1}{2} > \frac{a_l}{l+1} \Longrightarrow \frac{l}{a_l} < 2 < \frac{l+1}{a_l} \\
&\Longrightarrow \quad l < 2a_l \wedge 2a_l < l+1 \\
&\Longrightarrow \quad l < 2a_l < l+1
\end{aligned}$$

Obtivemos uma condição impossível, pelo que é absurdo supor que o jogador não passou pelos 50% de eficácia.

Exercise 7 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com menos de 75% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia superior a 75%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 75% (valor exacto)?*

Resolução
Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_l}{l} < \frac{75}{100} < \frac{a_{l+1}}{l+1} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a_l}{l} < \frac{3}{4} < \frac{1+a_l}{l+1} \\
&\Longrightarrow \quad 4a_l < 3l \wedge 3l+3 < 4+4a_l \\
&\Longrightarrow \quad 4a_l < 3l \wedge 3l < 1+4a_l \\
&\Longrightarrow \quad 4a_l < 3l < 1+4a_l
\end{aligned}$$

Impossível, pois não há nenhum número inteiro entre $4a_l$ e $1+4a_l$. Logo, o jogador tem de passar por 75%.

Exercise 8 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com mais de 75% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia inferior a 75%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 75% (valor exacto)?*

Resolução

$$\begin{aligned}
\frac{a_l}{l} > \frac{75}{100} > \frac{a_{l+1}}{l+1} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a_l}{l} > \frac{3}{4} > \frac{a_l}{l+1} \Longrightarrow \frac{l}{a_l} < \frac{4}{3} < \frac{l+1}{a_l} \\
&\Longrightarrow \quad 3l < 4a_l \wedge 4a_l < 3l+3 \\
&\Longrightarrow \quad 3l < 4a_l < 3l+3
\end{aligned}$$

Logo, podemos $4a_l = 3l + 1$ ou $4a_l = 3l + 2$. Fazendo $l = 21$, temos $4a_l = 3 \times 21 + 1 = 64$, pelo que temos $a_l = 16$.

No início, tínhamos 16 lançamentos acertados em 21, o que corresponde a uma percentagem de $76,19\%$. Falhado o 22^o lançamento, a percentagem desceu para $72,727\%$, sem termos passado por 75%.

Exercise 9 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com menos de 95% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia superior a 95%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 95% (valor exacto)?*

Resolução

Neste caso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_l}{l} < \frac{95}{100} < \frac{a_{l+1}}{l+1} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a_l}{l} < \frac{19}{20} < \frac{1+a_l}{l+1} \\
&\Longrightarrow \quad 20a_l < 19l \wedge 19l + 19 < 20 + 20a_l \\
&\Longrightarrow \quad 20a_l < 19l \wedge 19l < 1 + 20a_l \\
&\Longrightarrow \quad 20a_l < 19l < 1 + 20a_l
\end{aligned}$$

Obtivemos uma condição impossível, pelo que é absurdo supor que não se passa por 95%.

Exercise 10 *Consideremos que um jogador da NBA começou a época com mais de 95% de eficácia nos lançamentos livres e terminou a mesma época com uma eficácia inferior a 95%. Houve um lançamento em que ele atingiu a eficácia de 95% (valor exacto)?*

Resolução

$$\begin{aligned}
\frac{a_l}{l} > \frac{95}{100} > \frac{a_{l+1}}{l+1} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a_l}{l} > \frac{19}{20} > \frac{a_l}{l+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{l}{a_l} < \frac{20}{19} < \frac{l+1}{a_l} \\
&\Longrightarrow \quad 19l < 20a_l \wedge 20a_l < 19l + 19 \\
&\Longrightarrow \quad 19l < 20a_l < 19l + 19
\end{aligned}$$

Se escolhermos $l = 12$, temos $228 = 19 \times 12 < 20a_l < 19 \times 12 + 19 = 247$

Agora, escolhemos $20a_l = 240$, pelo que temos $a_l = 12$.

Verificação: percentagem inicial: 100%.

Percentagem após falhar o 13^o lançamento livre: $92,301\%$. Logo, é possível não passar por 95%.