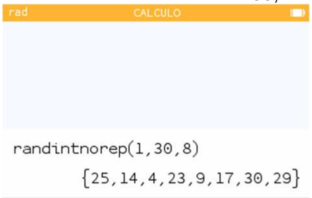
Capítulo 4

Ficha 23

1.1. Usando a calculadora para gerar aleatoriamente 8 números inteiros diferentes entre 1 e 30, vamos obter, por exemplo:



1.2.

a) Recorrendo ao menu estatística da calculadora, obtém-se:

Média amostral: $\bar{x} = 56,75\,\text{kg}$

Valor médio: $\mu \approx 55,23\,\text{kg}$

Erro amostral: $|55,23 - 56,75| = 1,52\,\text{kg}$

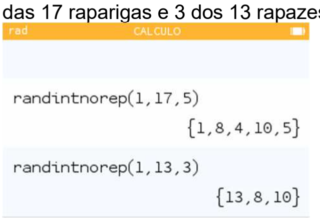
b) Proporção amostral: $\hat{p} = \frac{5}{8} \approx 63\%$

Proporção populacional: $p = \frac{23}{30} \approx 77\%$

Erro amostral: $|77 - 63| = 4$ pontos percentuais.

1.3. Na população temos aproximadamente $57\% \left(\frac{17}{30}\right)$ de raparigas e 43% de rapazes. Na amostra estratificada vamos ter $0,57 \times 8 \approx 5$ alunas e $0,43 \times 8 \approx 3$ alunos .

Vamos usar a calculadora para selecionar aleatoriamente 5 das 17 raparigas e 3 dos 13 rapazes.



Assim, vamos selecionar a 1.ª, 4.ª, 5.ª, 8.ª e 10.ª rapariga da lista e o 8.º, 10.º e 13.º rapaz da lista.
A amostra será constituída pelos alunos números: 1, 4, 7, 12, 17, 18, 23 e o 28.

1.4. Neste caso obtiveram-se amostras distintas. Isto acontece, não só devido à aleatoriedade, mas também pode acontecer devido à restrição dos estratos. Neste caso, o número de raparigas em cada amostra foi igual, mas poderia ser diferente.

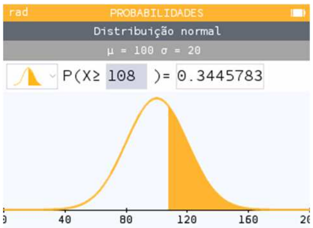
2.1. Todos os jogadores de hóquei em patins que competem na 1.ª divisão.

2.2. O parâmetro *peso* médio (ou valor médio do *peso*).

2.3. Utiliza-se a média dos pesos dos 50 jogadores da amostra, ou seja, $\bar{x} = 77\,\text{kg}$.

3. $X \sim N(100, 20)$

3.1. Recorrendo à calculadora obtém-se:



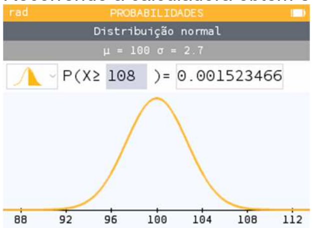
Assim, temos $P(X > 108) \approx 34,5\%$

A probabilidade de uma sardinha aleatória pesar mais de 108 gramas é, aproximadamente, 34,5%.

3.2. $n = 55 \geq 30$, pelo TLC temos que $\bar{X} \sim \left(100, \frac{20}{\sqrt{55}}\right)$

Ou seja, $\bar{X} \sim N(100; 2,7)$.

3.3. Recorrendo à calculadora obtém-se:



Assim, temos $P(\bar{X} > 108) \approx 0,2\%$

A probabilidade de a média dos *pesos* das sardinhas no cardume ser superior a 108 gramas é, aproximadamente, 0,2%.

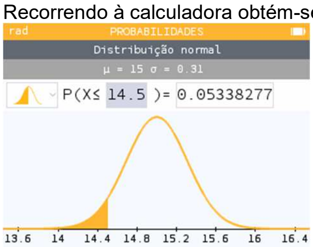
3.4. A probabilidade de uma única sardinha pesar mais de 108 gramas é aproximadamente 34,5%.
A probabilidade de a média dos *pesos* das sardinhas no cardume ser superior a 108 gramas é aproximadamente 0,2%.
É muito mais provável encontrar uma sardinha individual com *peso* elevado do que encontrar um cardume com um *peso* médio elevado. Isto demonstra o efeito do Teorema do Limite Central: a média de uma amostra grande tem uma variabilidade muito menor do que os valores individuais da população. A média de uma amostra grande tende a estar muito mais perto da média da população, diminuindo a probabilidade de se encontrar uma média distante.

4.1. $X \sim N(15, 3)$

$n = 96 \geq 30$, pelo TLC temos que $\bar{X} \sim \left(15, \frac{3}{\sqrt{96}}\right)$

Ou seja, $\bar{X} \sim N(15; 0,31)$.

4.2. Recorrendo à calculadora obtém-se:



Assim, temos $P(\bar{X} < 14,5) \approx 5,34\%$

A probabilidade da média dos tempos de produção de um lote de 96 calças ser inferior a 14 minutos e meio é aproximadamente 5,34%.

Ficha 24

1.1. $z = 2,576$

$\left[28 - 2,576\frac{6,5}{\sqrt{50}}; 28 + 2,576\frac{6,5}{\sqrt{50}}\right]$, ou seja, $[25,6; 30,4]$.

1.2. Significa que, com uma confiança de 99%, estima-se que o intervalo $[25,6; 30,4]$, contenha o *peso* médio dos bolos confecionados.

2.1. Média da amostra $(\bar{x}) = 28$ cm .

Desvio padrão populacional $(\sigma) = 5$ cm .

Tamanho da amostra $(n) = 36$.

Nível de confiança: 95% $(z = 1{,}960)$

Nível de confiança: 99% $(z = 2{,}576)$

O intervalo pedido é do tipo: $\left[\bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{36}}; \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\right]$

Para um nível de confiança de 95% temos:

$$\left[28 - 1{,}960\frac{5}{\sqrt{36}}; 28 + 1{,}960\frac{5}{\sqrt{36}}\right] = [26{,}37; 29{,}63]$$

Para um nível de confiança de 99% temos:

$$\left[28 - 2{,}576\frac{5}{\sqrt{36}}; 28 + 2{,}576\frac{5}{\sqrt{36}}\right] = [25{,}85; 30{,}15]$$

2.2. Intervalo de confiança de 95%: Estamos 95% confiantes de que o intervalo $[26{,}37; 29{,}63]$, contenha o valor médio da altura das tulipas dessa variedade.
Intervalo de confiança de 99%: Estamos 99% confiantes de que o intervalo $[25{,}85; 30{,}15]$, contenha o valor médio da altura das tulipas dessa variedade.
O intervalo de confiança de 99% é maior que o de 95%, o que reflete uma maior confiança na estimativa intervalar.

3.1. **a)** $\left[150 - 1{,}645\frac{4{,}5}{\sqrt{70}}; 150 + 1{,}645\frac{4{,}5}{\sqrt{70}}\right]$, ou seja,

$[149{,}115; 150{,}885]$.

b) $\left[150 - 1{,}96\frac{4{,}5}{\sqrt{70}}; 150 + 1{,}96\frac{4{,}5}{\sqrt{70}}\right]$, ou seja,

$[148{,}946; 151{,}054]$.

3.2. Intervalo de confiança de 90%:
Amplitude: $150{,}885 - 149{,}115 = 1{,}77$
Intervalo de confiança de 95%:
Amplitude: $151{,}054 - 148{,}946 = 2{,}108$
Quanto maior for o nível de confiança, maior é a amplitude.

4. Como a dimensão da mostra é $324 > 30$, podemos determinar o intervalo de confiança, do tipo:

$$\left[\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Em que,
$n = 324$; $\bar{x} = 19$; $s = 4{,}75$; $z = 1{,}645$

A margem de erro é igual a metade da amplitude do intervalo de confiança, ou seja: $z\frac{s}{\sqrt{n}}$

Portanto, a margem de erro é $1{,}645 \times \frac{4{,}75}{\sqrt{324}} \approx 0{,}43$.

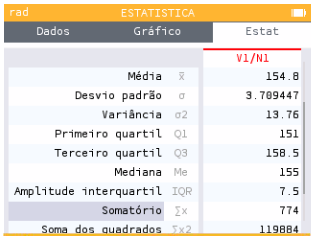
Na calculadora gráfica: Menu estatística

5.1. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se:
$\bar{x} = 154{,}8$ e $s \approx 4{,}15$

$$1{,}54{,}8 + z \times \frac{4{,}15}{\sqrt{5}} = 158{,}44 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3{,}64 \times \sqrt{5}}{4{,}15}$$

Logo, $z = 1{,}96$



O nível de confiança é 95%.

5.2. Não, pois as provas efetuadas em apenas um ano não são representativas da população, ou seja, de todas as provas da carreira. Para melhor seleção da amostra dever-se-ia começar por selecionar provas de vários anos da carreira.

6. A média amostral é $796{,}13 - 1{,}96 \times \frac{246{,}41}{\sqrt{32}} \approx 710{,}75$.

O erro da amostra é $1{,}96 \times \frac{246{,}41}{\sqrt{32}} \approx 85{,}38$.

A dimensão da amostra é $\left(1{,}96 \times \frac{246{,}41}{50}\right)^2 \approx 93{,}3$, no entanto se for 93 é ligeiramente inferior, não há garantia que o erro seja de 50 €, assim terá de ser 94.
Resposta: I – a), II – c) e III – b)

Ficha 25

1.1. $\hat{p} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 0{,}45$

1.2. Utilizamos a proporção amostral como estimativa pontual para a proporção populacional. Assim, estima-se que a proporção populacional seja igual a 0,45.

1.3.

a) $\bar{x} = \frac{18 \times 1 + 22 \times 0}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 0{,}45$

b) $s = \sqrt{\frac{18(1 - 0{,}45)^2 + 22(0 - 0{,}45)^2}{39}} \approx 0{,}50$

c) Pelas alíneas 1.1. e 1.3. a) e c) podemos concluir que

$\hat{p} = \bar{x} = 0,45$ e $\sqrt{0,45(1-0,45)} \approx 0,50$, ou seja, $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = s$

2. Como a dimensão da mostra é $85 > 30$, podemos determinar o intervalo de confiança, do tipo:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Em que:

$n = 85$; $\hat{p} = \frac{23}{85}$; $z = 2,576$

$$\approx \left[\frac{23}{85} - 2,576\sqrt{\frac{\frac{23}{85}\times\frac{62}{85}}{85}}; \frac{23}{85} + 2,576\sqrt{\frac{\frac{23}{85}\times\frac{62}{85}}{85}}\right]$$

$$\approx \left[\frac{23}{85} - 2,576\times 0,04819; \frac{23}{85} + 2,576\times 0,04819\right] \approx$$

$\approx [0,14645; 0,39473]$

Resposta: $[14,65\%; 39,47\%]$

3. $\hat{p} = \frac{42}{80} = 0,525$; $n = 80$; $z = 1,645$

Assim:

$$\left[0,525 - 1,645\sqrt{\frac{0,525(1-0,525)}{80}}; 0,525 + 1,645\sqrt{\frac{0,525(1-0,525)}{80}}\right] \approx$$

$\approx [0,4332 \;;\; 0,6168]$,

ou seja, aproximadamente, $[43,3\% \;;\; 61,7\%]$.

Com um nível de confiança de 90%, podemos afirmar que o intervalo $[43,3\% \;;\; 61,7\%]$, contém a proporção populacional de concessionários com bandeira azul.

Seja $\hat{p} = 0,48$ e $z = 1,960$

A amplitude do intervalo é dada por limite superior – limite inferior.

Assim temos:

$$2\times 1,960\times\sqrt{\frac{0,48\times(1-0,48)}{n}} = 0,3 \Leftrightarrow \frac{0,48\times 0,52}{n} = \left(\frac{0,15}{1,960}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{0,48\times 0,52}{\left(\frac{0,15}{1,960}\right)^2} \approx 43 \text{ participantes}$$

5.1. $p = \frac{180}{240} = 0,75$

75% dos habitantes da aldeia cultiva os seus terrenos.

5.2. Uma estatística.

6.1. $\hat{p} = \frac{290}{500} = 0,58$

$$\left[0,58 - 1,960\sqrt{\frac{0,58(1-0,58)}{1100}} \;;\; 0,58 + 1,960\sqrt{\frac{0,58(1-0,58)}{1100}}\right] \approx$$

$\approx [0,551 \;;\; 0,609]$

Intervalo de confiança pedido: $[55,1\% \;;\; 60,9\%]$

$$E = 1,960\sqrt{\frac{0,58(1-0,58)}{1100}} \approx 0,029$$

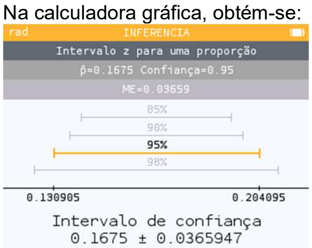
A margem de erro é de, aproximadamente, 0,029.

Resposta: I – c), II – a) e III – b)

6.2. $n = \left(\frac{1,960}{0,01}\right)^2 \times 0,58\times(1-0,58) \approx 9358,1$

A dimensão da amostra terá de ser 9358.

7. Na calculadora gráfica, obtém-se:



A margem de erro indica a variação máxima esperada da proporção amostral em relação à proporção populacional, visto que esta reconhece que a proporção amostral é apenas uma estimativa da proporção populacional.

A margem de erro fornece uma medida da precisão dessa estimativa, indicando o quão longe a proporção amostral pode estar da proporção populacional real.

Resposta: I – c); II – b); III – a) e IV – a)

Ficha 26

1. Como a amplitude deve ser no máximo 0,20 então $E \le 0,10$.

$$n = \left(\frac{1,960}{0,10}\right)^2 \times 0,15\times(1-0,15) \approx 48,98$$

Devem ser inquiridos 49 alunos.

2. $n = \left(\frac{2,576\times 60}{20}\right)^2 \approx 59,7$

Devem ser inquiridos, pelo menos, 60 pessoas.

3.1. $n = \left(\frac{1,960\times 55}{1}\right)^2 = 11620,84$

A dimensão da amostra terá de ser, no mínimo, igual a 11 621.

3.2. $E = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$9,05 = z\frac{55}{\sqrt{100}} \Leftrightarrow z = \frac{9,05\times 10}{55}$, logo $z \approx 1,645$.

O grau de confiança deverá ser de 90%.

4.1. $\hat{p} = \frac{175}{200} = \frac{7}{8} = 87,5\%$

Estima-se que 87,5% das pessoas vão comprar o perfume.

$$\left[0,875 - 1,960\sqrt{\frac{0,875(1-0,875)}{200}} \;;\; 0,875 + 1,960\sqrt{\frac{0,875(1-0,875)}{200}}\right]$$

, ou seja, $[0,83 \;;\; 0,92]$.

Isto significa que, com uma confiança de 95%, estima-se que a percentagem de pessoas que vão comprar o perfume está compreendida entre 83% e 92%, aproximadamente.

$\left[7,5 - 2,576\times\frac{0,5}{\sqrt{200}} \;;\; 7,5 + 2,576\times\frac{0,5}{\sqrt{200}}\right]$, ou seja,

$[7,41 \;;\; 7,59]$.

$$E = 1,960\times\frac{0,5}{\sqrt{200}} \approx 0,07$$

Resposta: I – c); II – a); III – b) e IV – b)

4.2. $n = \left(\frac{2,576}{0,10}\right)^2 \times 0,875\times(1-0,875) \approx 72,6$

Teriam de testar o perfume 73 clientes.

5.1. Como a dimensão da mostra é $36 > 30$, podemos determinar o intervalo de confiança, do tipo:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Em que:

$n = 36$; $\hat{p} = \frac{24}{30} = \frac{2}{3}$; $z = 1,960$

$$\left[\frac{2}{3} - 1,960\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{36}}; \frac{2}{3} + 1,960\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{36}}\right] \approx [0,513; 0,821] = [51,3\%; 82,1\%]$$

Na calculadora:

Resposta: Significa que, com uma confiança de 95%, estima-se que o intervalo encontrado contenha a proporção de damascos maduros.

5.2. Como a dimensão da mostra é $36 > 30$, podemos determinar o intervalo de confiança, do tipo:

$$\left[\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Em que,

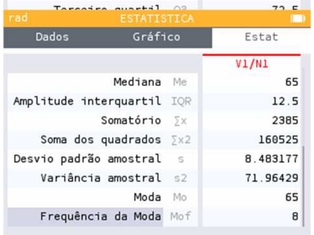
$n = 36$; $z = 2{,}576$

Para determinar a média e o desvio-padrão da amostra temos de os calcular com os dados da tabela.

Recorrendo à calculadora gráfica, colocamos as marcas da classe na lista 1 e a frequência absoluta simples correspondente na lista 2.

Marca da classe	Frequência absoluta simples
50	2
55	4
60	6
65	8
70	7
75	5
80	4

E obtém-se:

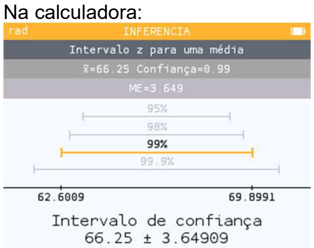


$\bar{x} \approx 66{,}25$; $s \approx 8{,}4832$

Substituindo na fórmula, temos:

$$\left[66{,}25 - 2{,}576 \times \frac{8{,}5}{\sqrt{36}} ; 66{,}25 + 2{,}576 \times \frac{8{,}5}{\sqrt{36}}\right] = [62{,}6;69{,}9]$$

Na calculadora:



Resposta: Significa que, com uma confiança de 99%, estima-se que o intervalo encontrado contenha o *peso* médio dos damascos da colheita.

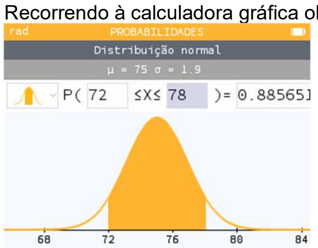
Revisão geral 1

1.1. $n = 64 > 30$ e $\sigma = 15$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{15}{\sqrt{64}} \approx 1{,}9$$

$$\bar{X} \sim N(75;1{,}9)$$

1.2. Recorrendo à calculadora gráfica obtém-se



Assim, $P\left(72 \leq \bar{X} \leq 78\right) \approx 89\%$

2.1. A população são todas as futebolistas do campeonato nacional feminino da Ilha da Esperança e a amostra são as 100 futebolistas selecionadas.

2.2. Pretende-se estimar o valor médio dos golos marcados por todas as futebolistas da população. Vai-se utilizar a média dos golos marcados pelas 100 futebolistas da amostra, neste caso, 4,3 golos.

2.3. A estimativa pontual para o valor médio dos golos marcados é a media amostral, 4,3 golos.

Resposta certa: **(B)**

2.4. Como a dimensão da mostra é 100>30, podemos determinar o intervalo de confiança, do tipo: $\left[\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Em que,

$n = 100 > 30$

$z = 1{,}960$; $\bar{x} = 4{,}3$; $s = 0{,}5$

Substituindo na fórmula, temos:

$$\left[4{,}3 - 1{,}960 \times \frac{0{,}5}{\sqrt{100}} ; 4{,}3 + 1{,}960 \times \frac{0{,}5}{\sqrt{100}}\right] = [4{,}2;4{,}4]$$

Na calculadora:

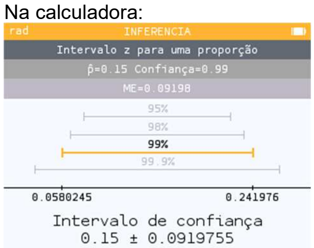
2.5.

a) $\hat{p} = \frac{15}{100} = 0{,}15$

$$\left[0{,}15 - 2{,}576 \times \sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{100}} ; 0{,}15 + 2{,}576 \times \sqrt{\frac{0{,}15(1-0{,}15)}{100}}\right],$$

ou seja, $[0{,}06;0{,}24]$

Na calculadora:

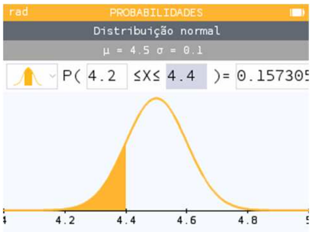


Isto significa que, com uma confiança de 99%, estima-se que o intervalo encontrado contenha a percentagem populacional de avançados nas equipas desse campeonato.

b) $E = \frac{0{,}24 - 0{,}06}{2} = 0{,}09$ ou 9 pontos percentuais.

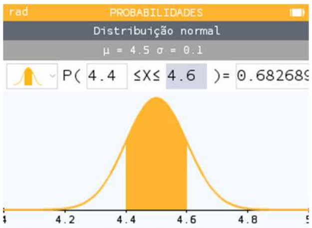
Resposta certa: **(D)**

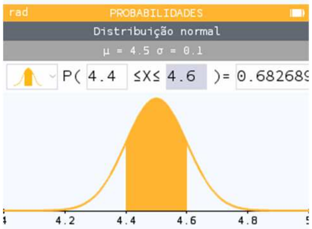
2.6. O valor médio da distribuição da amostragem da média de golos marcados é 4,5 golos.
Verdadeira
O desvio-padrão da distribuição de amostragem da média de golos marcados é 0,1 golo.
Verdadeira
$P\left(4{,}2 \le \bar{X} \le 4{,}4\right) \approx 16\%$
Verdadeira



$P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \le 0{,}1\right) \approx 68{,}27\%$
Verdadeira
Sabemos que $P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \le 0{,}1\right) = P\left(-0{,}1 \le \bar{X} - 4{,}5 \le 0{,}1\right) =$

$P\left(-0{,}1 + 4{,}5 \le \bar{X} \le 0{,}1 + 4{,}5\right) = P\left(4{,}4 \le \bar{X} \le 4{,}6\right) \approx 68{,}27$





Resposta certa: **(D)**

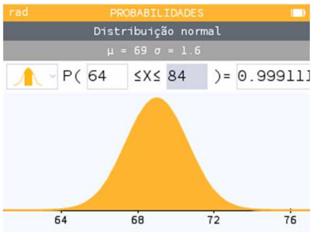
3.1. A melhor estimativa pontual para o valor médio é a média amostral, que é 62,6 km/h.
O desvio-padrão amostral calculado a partir dos dados é aproximadamente 11 km/h.

A distribuição de amostragem da média é uma distribuição normal com valor médio 69 km/h e desvio-padrão igual a $\frac{10}{\sqrt{39}} \approx 1{,}6\text{km/h}$, ou seja, $\bar{X} \sim N(69;1{,}6)$.

Sabemos que $P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \le 5\right) = P\left(-5 \le \bar{X} - 69 \le 5\right) =$

$P\left(-5 + 69 \le \bar{X} \le 5 + 69\right) = P\left(64 \le \bar{X} \le 74\right)$

Na calculadora obtém-se:



Ou seja, a probabilidade da diferença entre a média das velocidades das amostras e o valor médio das velocidades de todos os ciclistas que realizaram a prova no sábado, ser inferior a 5 km/h é, aproximadamente, 0,9991.
Resposta: I – a), II – b), III – c) e IV – c)

3.2. $\hat{p} = \frac{11}{39} \approx 0{,}28$

3.3. Queremos um intervalo do tipo:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}};\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Em que:
$n = 39$; $\hat{p} \approx 0{,}28$; $z = 1{,}645$

$$\left[0{,}28 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{39}};0{,}28 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}28 \times 0{,}72}{39}}\right] \approx$$

$\approx \left[0{,}164;0{,}401\right] = \left[16{,}4\%;40{,}1\%\right]$

Na calculadora:

Resposta: Com 90% de confiança, estima-se que o intervalo encontrado contenha a percentagem populacional de ciclistas que circulam a mais de 70 km/h.