Capítulo 1

Ficha 1

1.1.

a) *GH* e *HG* .
b) A dimensão do grafo é 12.
c) Por exemplo, *A* e *D*.
d) Por exemplo, *B* e *H*.
e) Por exemplo, *AE* e *ED*.
f) Por exemplo, *CF* e *BE*.

1.2.

Vértice	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
N.º de arestas incidentes	4	3	1	3	3	4	3	3

2.

Vértice	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Grau	2	4	4	5	5	4	5	3

3.1. $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

3.2. $A = \{AB, AD, DA, BC, BE, DE, DF, FD, FF\}$

3.3. $\{G, H\}$

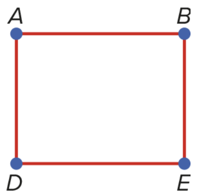
3.4. *FF*

3.5. *AD* e *DA*; *DF* e *FD*

3.6.

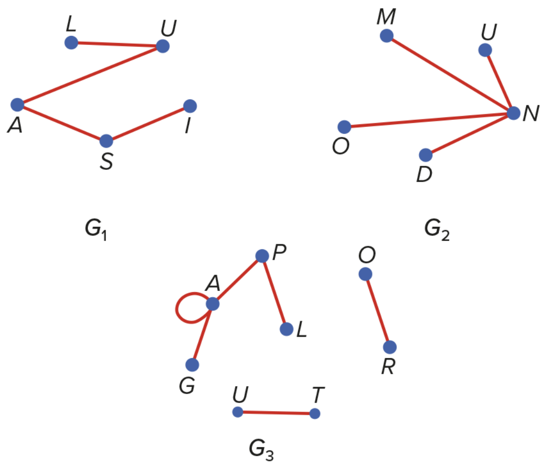
Vértice	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Grau	3	3	1	5	2	4	0	0

3.7. Por exemplo,



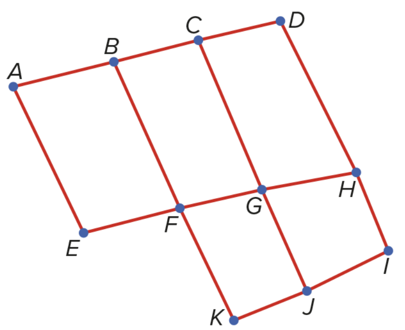
3.8. A ordem do grafo é 8.

4.1.

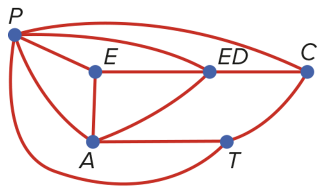


4.2. Os grafos simples são o G_1 e o G_2.

5.



6.1.



6.2. A ordem é 6 e a dimensão é 11.

7. Resposta certa: **(C)**

Ficha 2

1.1. $\{AB, AD, BC, BE, CD, CE, DC, DF, FF\}$

1.2. 6

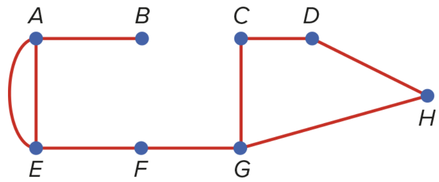
1.3. Por exemplo, *A B E*.

1.4. Por exemplo, *F D A B*.

1.5. *C D A B C*

1.6. *B E C B*

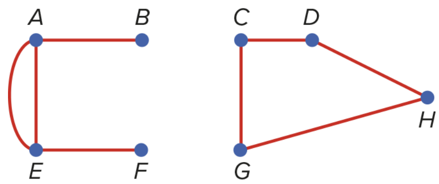
2.1.



2.2. Não é completo, pois não é um grafo simples, tem uma aresta paralela *AE*.

2.3. Sim. Qualquer vértice está ligado por uma aresta ou por uma sequência de arestas a qualquer um dos outros vértices do grafo.

2.4.



Retirou-se a aresta *FG*. Uma parte da casa (as divisões *A*, *B*, *E* e *F*) ficariam isoladas da outra parte da casa.

2.5.

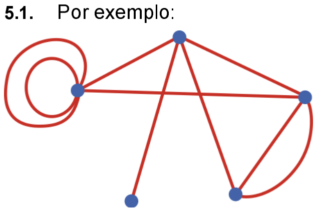
Vértice	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Grau	3	1	2	2	3	2	3	2

2.6. Tem dimensão 9.

3. Resposta certa: **(C)**, pois se o grafo é completo e tem 4 vértices, todos os vértices estão ligados entre si, logo, todos têm o mesmo grau, neste caso grau 3.

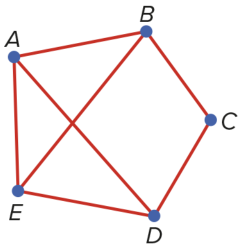
4. I: Falsa, o grafo é conexo pois não existem vértices isolados ou conjuntos de arestas isoladas, ou ainda, se existir um caminho entre qualquer par de vértices.
II: Verdadeira, pois para ser completo todos os vértices teriam de ter grau igual à ordem –1, ou seja, grau 3.
III: Verdadeira, os vértices *B* e *D* têm grau par e os vértices *A* e *C* têm grau ímpar.
IV: Verdadeira, por exemplo *ABCDA* ou *ADCBA*.
V: Falsa, teríamos de repetir sempre pelo menos uma aresta.

5.1. Por exemplo:



5.2. Não, para passar por todos os vértices sem os repetir teria de existir, por exemplo, uma aresta a ligar os vértices de grau ímpar.

6.

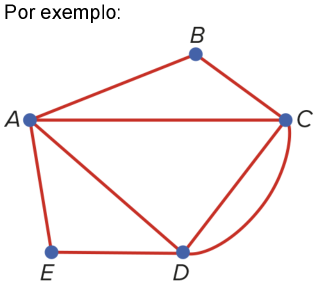


Percursos com a alternativa I:
BEADCB ou *BCDEAB*
Percursos com a alternativa II:
BAEDCB ou *BEADCB*
O Sr. Gonçalves tem razão, pois ambas as alternativas permitem definir dois percursos.

Ficha 3

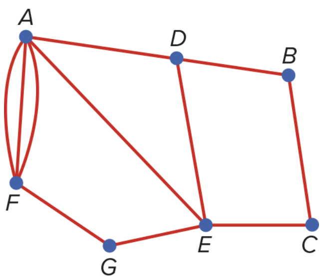
1. Grafos *A* e *E*, são os únicos grafos conexos em que todos os vértices têm grau par.

2. Por exemplo:



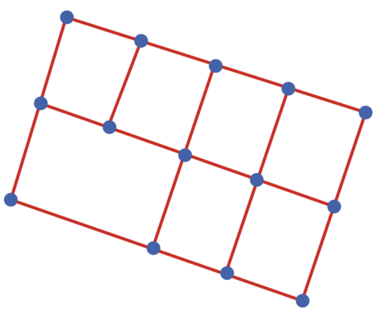
3. Grafo *G*: *AADCEBAGDCFDEA* e grafo *F*: *AECABCDA*

4.1.



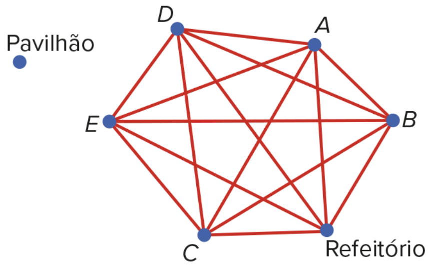
4.2. A Joana tem razão pois o grafo não admite circuitos Eulerianos, ou seja, apesar de ser conexo nem todos os vértices têm grau par (vértices *A* e *D*), portanto teria de repetir o caminho *AD*.

5.1.



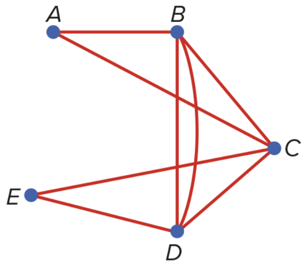
5.2. O grafo não é euleriano, pois tem vértices de grau ímpar.

6.1.



6.2. Não, pois não é conexo (tem um vértice isolado).

7.1.



7.2. O grafo é euleriano, pois é conexo e todos os vértices tem grau par.
Circuito: *EDBDCBACE*

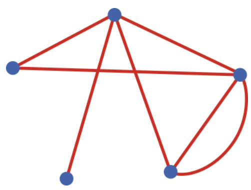
Ficha 4

1.1. Grafos: *G*, *I*, *J*, *K* e *L*

1.2. Grafo *K*

2. Resposta certa: **(B)**
A opção (A) é excluída pois o grafo não é conexo.
As opções (C) e (D) são excluídas pois os grafos têm mais que dois vértices de grau ímpar.

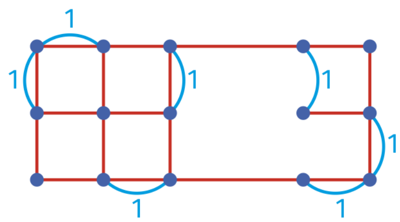
3.1. Por exemplo:



3.2. O grafo admite um caminho euleriano, pois é conexo e tem apenas dois vértices de grau ímpar.

4. O grafo não é **regular**, pois apresenta um vértice de grau 2, no entanto, relativamente ao grau dos vértices podemos afirmar que é um grafo **euleriano**, pois é **conexo** e todos os vértices têm grau **par**.
Todos os circuitos eulerianos terão **nove** arestas.

5.



É necessário acrescentar 7 metros.

6.1. A opção IV.

6.2. Os grafos que poderiam ser eulerizados seriam os grafos das I e IV, cada um com a repetição de duas arestas. Na opção I repetiam-se as arestas *AB* e *CD*, na opção IV repetiam-se as arestas *BE* e *CE*.

Revisão geral 1

1. Resposta certa: **(A)**, pois se o grafo é completo e tem dimensão 6, como todos os vértices estão ligados entre si, logo só pode ter ordem 4. Portanto, o grau de cada vértice é 3, ímpar.

2.1. Resposta certa: **(B)**, o grafo não admite circuitos eulerianos pois tem vértices de grau ímpar.

2.2. O grafo não é um subgrafo de *G*, pois tem uma aresta que não pertence a *G*, a aresta *AE*.

2.3. É possível começar em *A* e terminar em *D*, passando uma única vez por todas as arestas sem as repetir, pois o grafo admite caminhos eulerianos. Dado que é conexo e somente esses dois vértices têm grau ímpar.

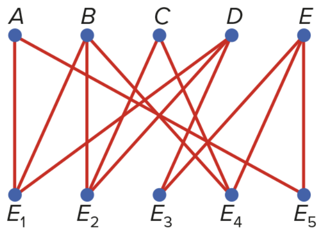
2.4. Um caminho possível é *ABCDEBFAD*.

3.1. Resposta certa: **(A)**

3.2. Não é possível começar e terminar em *A*, passando uma única vez por todas as arestas sem as repetir, pois o grafo não é euleriano. Para o ser teria de ser conexo e todos os vértices teriam de ter grau par. O que não se verifica nos vértices *B*, *D*, *E* e *F*.

3.3. Um circuito possível é *ABCDEFDFACEBEA*, repetindo duas arestas, *BE* e *DF*.

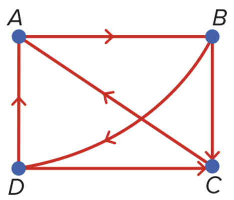
4.1.



4.2. Quatro dias.
Um possível calendário poderia ser:

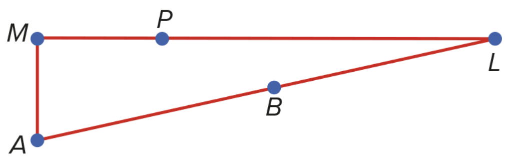
Dia	1	2	3	4
Exames	E1	E2 e E5	E3	E4

5.

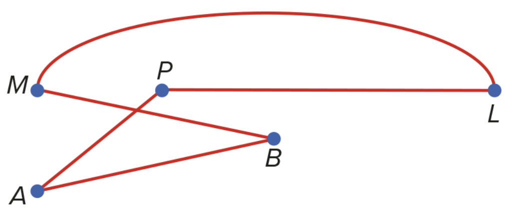


Ficha 5

1.1.



1.2.



2.1. $1\times 4\times 3\times 2\times 1 = 24$ possíveis percursos, $24:2=12$ percursos distintos.

2.2. *CAEBDC*. Distância: 3600 metros.

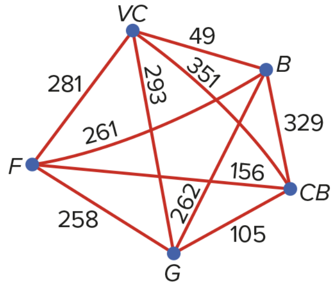
2.3. *CEDABC*. Distância: 10 300 metros.

3. Recorrendo ao algoritmo obtém-se:

A		*C*		*B*		*D*		*A*		
	5	+	6	+	15	+	8	=	34	

Resposta: 34 km

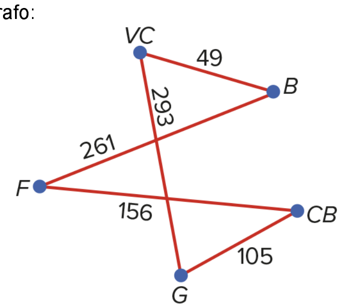
4.1.



4.2. Distâncias ordenadas:

$\overline{VC-B}=49$ ✓
$\overline{G-CB}=105$ ✓
$\overline{CB-F}=156$ ✓
$\overline{F-G}=258$ ✗
$\overline{B-F}=261$ ✓
$\overline{B-G}=262$ ✗
$\overline{VC-F}=281$ ✗
$\overline{VC-G}=293$ ✓
$\overline{CB-VC}=351$ ✗

Grafo:



Percurso final, começando em Braga e terminando em Braga:
B-VC-G-CB-F-B ou B-F-CB-G-VC-B.
Comprimento: 864 km.

5.1. $1\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$ possíveis percursos, $120:2=60$ percursos distintos.

5.2.

a) *AEBFCDA*

b)

BE – 10	*AD* – 21	*BF* – 12
DF – 22	*CE* – 12	*BC* – 25
CF – 17	*AC* – 30	*AE* – 18
DE – 30	*BD* – 19	*AF* – 50
AB – 20	*CD* – 80	*EF* – 20

Arestas selecionadas:

BE – 10	*AD* – 21
BF – 12	*DF* – 22
CE – 12	*AC* – 30

ACEBFDA

5.3. Algoritmo da cidade mais próxima:
$18+10+12+17+80+21=158$ km

Algoritmo do peso das arestas:
$30+12+10+12+22+21=107$ km

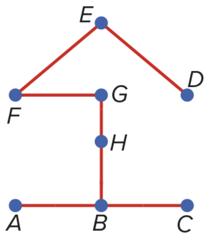
Neste caso, a melhor opção é utilizar o percurso obtido com o algoritmo do peso das arestas.

Ficha 6

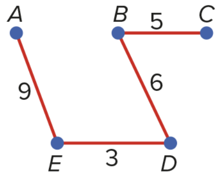
1. Não representam árvores:
O grafo *A*, porque é desconexo;
Grafos *C* e *D*, porque contêm circuitos.

2.

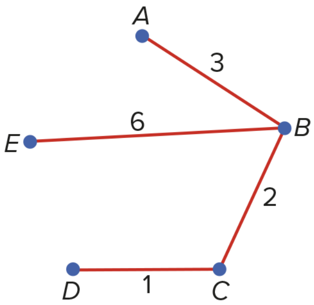
Grafo *G*



Grafo *F*

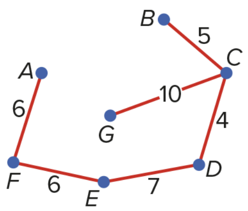


3. Aplicando o algoritmo de Kruskal, obtém-se a árvore abrangente mínima do grafo dado:

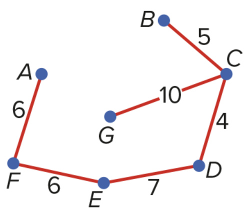


O número mínimo de metros que serão necessários para fazer a iluminação exterior entre todos os pavilhões é 12 metros.

4.1.

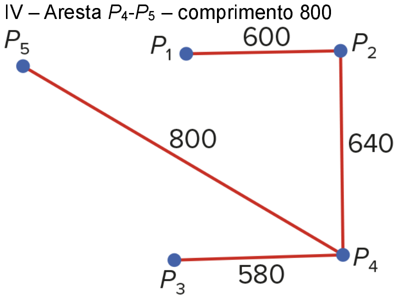


4.2.



5. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, escolhendo inicialmente o posto P_1 e aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo ponderado da figura:

I – Aresta P_1-P_2 – comprimento 600
II – Aresta P_2-P_4 – comprimento 640
III – Aresta P_4-P_3 – comprimento 580
IV – Aresta P_4-P_5 – comprimento 800



Assim, o comprimento mínimo previsto, em metros, do cabo é:
$600 + 640 + 580 + 800 = 2620$ metros

Custo: $2620 \times 2,40 = 6288$ €

6. Resposta certa: **(B)**
A árvore geradora mínima deste grafo, tem o mesmo número de vértices do grafo, neste caso, 5 vértices e $n-1$ arestas, ou seja, 4 arestas, sendo estas as de menor peso, desde que não se forme um circuito.

Revisão geral 2

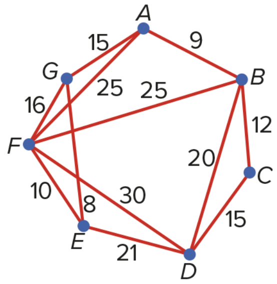
1.1. Resposta certa: **(D)**

1.2.

a) Resposta certa: **(C)**

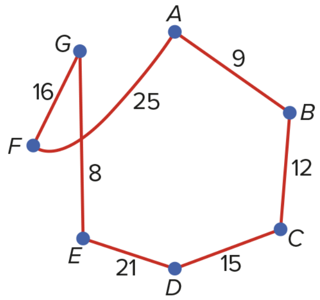
b) Não é possível, pois, para cumprir simultaneamente as duas condições dos circuitos eulerianos, o grafo teria de ter todos os vértices de grau par (os vértices *B* e *F* têm grau 3).

2.1. O grafo que representa a tabela é o seguinte:

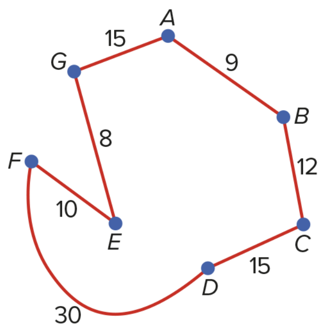


2.2. A presidente tem razão pois o grafo não admite circuitos eulerianos, ou seja, apesar de ser conexo nem todos os vértices têm grau par (vértices *A*, *E*, *F* e *G*), portanto teria de repetir as estradas *AG* e *EF*.

2.3. Recorrendo ao algoritmo da cidade mais próxima, o grafo obtido é o seguinte:

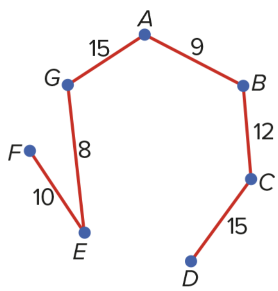


O percurso seria: *ABCDEGFA* com comprimento 106 km.
Após a aplicação do algoritmo do peso das arestas, obtém-se o seguinte grafo:



Um possível percurso seria: *ABCDFEGA* com comprimento 99 km.

2.4. Aplicando o algoritmo de Kruskal, a árvore abrangente mínima obtida é:

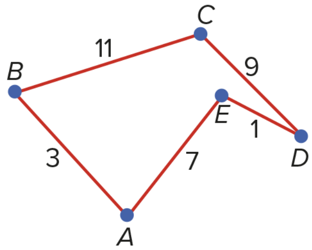


Cujo comprimento é de 69 km.

3.1. O grafo não é euleriano, pois apesar de ser conexo tem vértices de grau ímpar, neste caso o *B* e o *D*.
O grafo tem cinco vértices, isto é, tem ordem 5 e dimensão 9 (tem 9 arestas).
Resposta: I – c), II – b) e III – c)

3.2. Aplicando o algoritmo obtemos o seguinte grafo:
1.º ordenar o peso das arestas por ordem crescente.

$ED \rightarrow 1$ ✓	$CE \rightarrow 14$ ✗
$AB \rightarrow 3$ ✓	$BE \rightarrow 16$ ✗
$AE \rightarrow 7$ ✓	$AC \rightarrow 19$ ✗
$CD \rightarrow 9$ ✓	$AD \rightarrow 28$ ✗
$BC \rightarrow 11$ ✓	



$1 + 3 + 7 + 9 + 11 = 31$

O percurso pode ser, por exemplo, *EDCBAE* com comprimento 31.