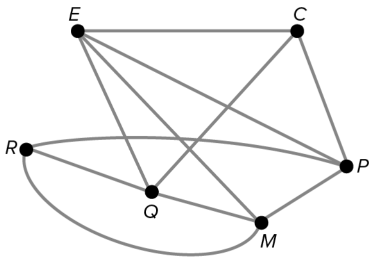
Capítulo 1

1. I: Existem 8 percursos possíveis:
ABCEDA, *ADECBA*, *ABDECA*, *ACEDBA*, *ACBEDA*,
ADEBCA, *ACEBDA*, *ADBECA*
II: Existem 4 percursos em que aparece o *B* antes do *E*.
ABCEDA, *ABDECA*, *ACBEDA*, *ADBECA*
IV: *ADECBA*
Resposta: I – a), II – c), III – c) e IV – b)

2. O grafo obtido é:



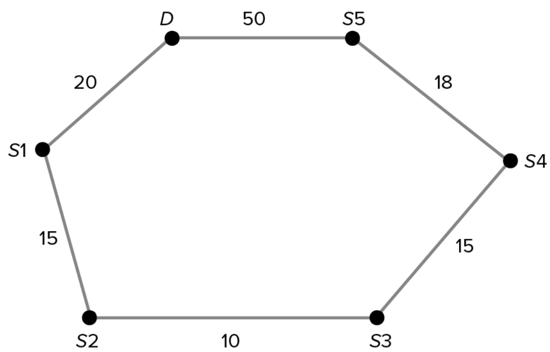
Vértice	*E*	*C*	*P*	*M*	*Q*	*R*
Grau	4	3	4	4	4	3

Apesar do grafo ser conexo, o grafo não é euleriano, pois existem 2 vértices que não têm grau par, assim, não é possível fazer um percurso que comece e termine em *E*, passando por todas as arestas sem as repetir. O inspetor tem razão, terá de repetir os trilhos *CQ* e *QR* e obtém-se o circuito:
ECPMQRMEPRQCQE, com comprimento 13 unidades de medida.

3. Ponto de Partida: Base (*B*)
Refúgios a visitar: *P*, *Q*, *R*, *S*
Passo 1: Escolher o refúgio mais próximo da Base (*B*).
As distâncias mínimas são 5 km, para os refúgios *P* e *R*.
O algoritmo diz que a escolha é aleatória neste caso.
Temos de analisar as duas possibilidades.
Possibilidade 1: Escolha aleatória é ir para *P* primeiro.
B → *P*: Distância: 5 km
Localização atual: *P*. Visitados: {*P*}. Por visitar: {*Q*, *R*, *S*}.
De *P*, encontrar o mais próximo não visitado.
O mais próximo é *Q* (4 km).
Localização atual: *Q*. Visitados: {*P*, *Q*}. Por visitar: {*R*, *S*}.
De *Q*, encontrar o mais próximo não visitado.
O mais próximo é *R* (3 km).
Localização atual: *R*. Visitados: {*P*, *Q*, *R*}. Por visitar: {*S*}.
Só resta *S*.
R para *S*: 4 km
Localização atual: *S*. Visitados: {*P*, *Q*, *R*, *S*}. Todos visitados.
Regressar à Base (*B*) a partir do último refúgio (*S*):
Percurso 1: *B* → *P* → *Q* → *R* → *S* → *B*
Distância Total 1: 5 + 4 + 3 + 4 + 8 = 24 km
Possibilidade 2: Escolha aleatória é ir para *R* primeiro.
B → *R*: Distância: 5 km
Localização atual: *R*. Visitados: {*R*}. Por visitar: {*P*, *Q*, *S*}.
De *R*, encontrar o mais próximo não visitado.
O mais próximo é *Q* (3 km).
Localização atual: *Q*. Visitados: {*R*, *Q*}. Por visitar: {*P*, *S*}.
De *Q*, encontrar o mais próximo não visitado.
O mais próximo é *P* (4 km).
Localização atual: *P*. Visitados: {*R*, *Q*, *P*}. Por visitar: {*S*}.
Só resta *S*.
P para *S*: 9 km
Localização atual: *S*. Visitados: {*R*, *Q*, *P*, *S*}. Todos visitados.
Regressar à Base (*B*) a partir do último refúgio (*S*):
Percurso 2: *B* → *R* → *Q* → *P* → *S* → *B*
Distância Total 2: 5 + 3 + 4 + 9 + 8 = 29 km
Conclusão:
Aplicando o algoritmo, verificamos que existem duas possibilidades de percurso devido à escolha aleatória inicial entre *P* e *R* (ambos a 5 km da Base *B*):
O percurso *B* → *P* → *Q* → *R* → *S* → *B* tem uma distância total de 24 km.
O percurso *B* → R → *Q* → *P* → *S* → *B* tem uma distância total de 29 km.
Como 29 km é maior do que 24 km, fica demonstrado que a escolha aleatória permitida pelo algoritmo (neste caso, escolher ir para *R* em vez de *P* na primeira etapa) pode levar a Sofia a percorrer uma distância total maior do que outra escolha possível dentro das regras do mesmo algoritmo.

4.1. Sim, o grafo é completo, mas não é euleriano. O grafo é completo, pois todos os vértices estão ligados aos outros vértices diretamente através de uma aresta. Neste caso é um grafo completo com 6 vértices, $K6$. Apesar do grafo ser conexo, todos os vértices têm grau ímpar (grau 5) logo não é euleriano.

4.2. Aplicando o algoritmo temos:
1.º: Ordenar o peso das arestas por ordem crescente e 2.º: escolher as arestas de acordo com o algoritmo.
*S*2 *S*3: 10 min
O grafo obtido é o seguinte:



*S*3 *S*4: 15 min ✓
*S*1 *S*2: 15 min ✓
*S*4 *S*5: 18 min ✓
*S*2 *S*4: 20 min ✗
D *S*1: 20 min ✓

*S*3 *S*5: 25 min ✗

*S*1 *S*3: 25 min ✗

D *S*3: 30 min ✗

*S*1 *S*4: 30 min ✗

*S*2 *S*5: 35 min ✗

D *S*2: 35 min ✗

D *S*4: 40 min ✗

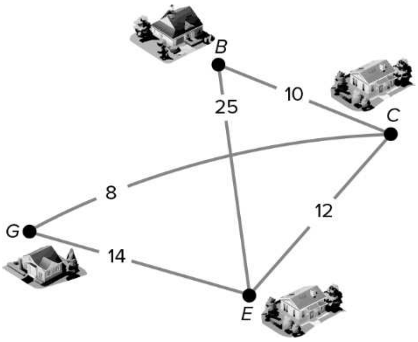
*S*1 *S*5: 45 min ✗

D *S*5: 50 min ✓

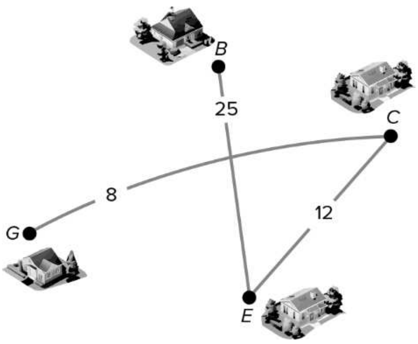
O percurso pode ser, por exemplo:
D, *S*1, *S*2, *S*3, *S*4, *S*5, *D* com duração de 128 minutos.

5. Temos 4 vértices de grau ímpar (*C*, *M*, *L* e *T*), assim temos de adicionar no mínimo 2 novos trilhos. Neste caso vamos adicionar o trilho *CT* e o trilho *LM*. Deste modo é possível a equipa de manutenção iniciar o seu percurso num dos locais, percorrer todos os trilhos (existentes e novos) exatamente uma vez, e terminar no mesmo local onde começou.

6. O critério para instalação dos equipamentos é um IPA Médio Anual superior a 40.
Logo, as cidades selecionadas são: *B*, *C*, *E* e *G*.



Precisamos encontrar a combinação de ligações diretas que possibilite visitá-las todas com o menor custo total.
Recorrendo ao algoritmo dado, vamos obter uma árvore com 4 vértices e $4-1=3$ arestas.



$8+12+25=45$

O custo mínimo total das deslocações para ligar as 4 cidades selecionadas é 45 u.m..

Capítulo 2

1.1. Vamos inserir no menu estatístico ou de regressão da calculadora gráfica os seguintes valores:

Lista 1	0	1	2	3	4	5
Lista 2	150	185	210	255	290	320

De seguida vamos procurar a expressão do modelo de regressão linear e obtém-se:

O modelo encontrado é $C(T)=34{,}57t+148{,}57$

Em novembro temos $t=10$.

Vamos determinar $C(10)=34{,}57\times10+148{,}57\approx494$

De acordo com o modelo linear encontrado estima-se que o número de cadeiras a produzir no mês de novembro de 2025 foi de 494.

1.2. O modelo $C(t)=at+b$, com $a>0$, prevê um crescimento constante e ilimitado na produção de cadeiras ao longo do tempo.
A fábrica tem uma capacidade máxima de produção e o mercado pode ficar saturado.
Esta opção aborda as duas principais limitações do mundo real que um modelo linear ignora a longo prazo. Nenhuma fábrica pode aumentar a produção indefinidamente (limites físicos, de equipamento, de mão-de-obra) e nenhum mercado pode absorver um produto indefinidamente (saturação, concorrência, mudança de preferências).
Resposta certa: **(D)**

2.1. Quantidade de vitamina C após 4 horas:

Pretendemos calcular $V(4)$.

Substituímos t = 4 na fórmula:

$V(4)=450e^{-0{,}21\times4}\approx194$

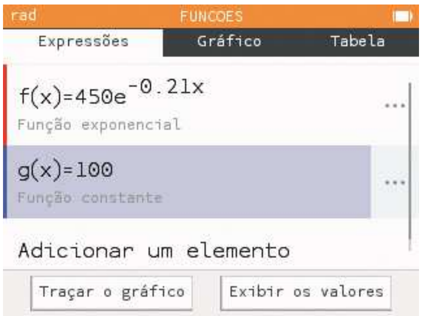
Estima-se que, 4 horas após a ingestão, estejam presentes aproximadamente 194 mg de vitamina C na corrente sanguínea.

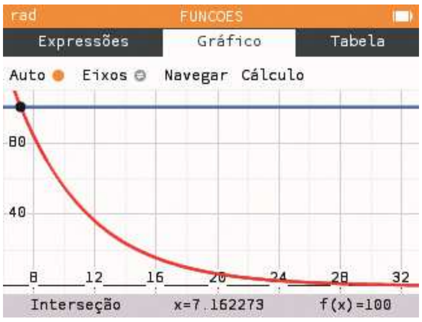
2.2. Tempo durante o qual $V(t)>100$ mg:

Pretendemos encontrar o valor de t para o qual V deixa de ser superior a 100 mg.

Vamos recorrer ao menu gráfico da calculadora para determinar a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das duas expressões.

Janela de visualização: Xmin=0, Xmax=20, Ymin=0, Ymax=120





$t \approx 7{,}162$

Este valor de t é o instante em que a quantidade atinge exatamente 100 mg.

Como a função V é decrescente, a quantidade será superior a 100 mg para valores de t inferiores a este.

O tempo durante o qual o efeito se mantém relevante é desde $t = 0$ até $t \approx 7{,}162$ horas .

Arredondamos o resultado às unidades:

$t \approx 7$ horas .

O efeito antioxidante relevante (quantidade superior a 100 mg) mantém-se durante aproximadamente 7 horas após a ingestão.

3.1. $N(t) = 2 + 5e^{-0{,}04t}$

2027 corresponde a $t = 7$ e 2032 corresponde a $t = 12$

$N(7) = 2 + 5e^{-0{,}04\times 7} \approx 5{,}7789$

$N(12) = 2 + 5e^{-0{,}04\times 12} \approx 5{,}0939$

Diminuição = $5{,}7789 - 5{,}0939 = 0{,}685$ (milhares)

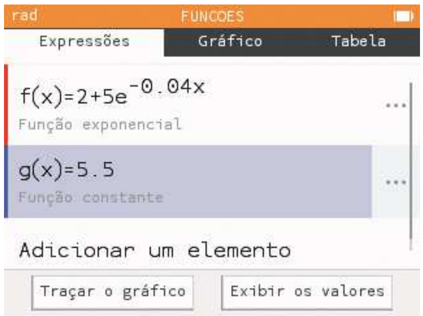
Percentagem da diminuição =

$$\frac{\text{Diminuição}}{\text{Valor Inicial}} \times 100 = \frac{0{,}685}{5{,}7789} \times 100 \approx 12\%$$

3.2. Pretendemos encontrar o valor de t para o qual N deixa de ser superior a 5,5 mil.

Vamos recorrer ao menu gráfico da calculadora para determinar a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das duas expressões.

Janela de visualização: Xmin=0, Xmax=18, Ymin=0, Ymax=7



A abcissa do ponto relevante é $t \approx 8{,}92$.

Como $t = 0$ é final de 2020 ,$t = 8$ é final de 2028, $t = 9$ é final de 2029.

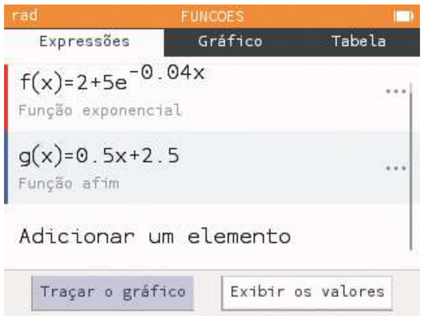
O valor torna-se inferior a 5,5 mil durante o 9.º ano após 2020, ou seja, durante 2029.

3.3. I. $N(0) = 2 + 5e^{-0{,}04\times 0} = 7$

II. $F(0) = 0{,}5\times 0 + 2{,}5 = 2{,}5$

$F(0) < N(0)$

III. Inserindo as duas expressões no menu tabela da calculadora



obtém-se:

x	f(x)	g(x)
4	6.260718945	
5	6.093653765	
6	5.933139305	
7	5.778918707	
8	5.630745185	
9	5.48838163	
10	5.35160023	

$t = 6$: Invasora < Pombo.

$t = 7$: Invasora > Pombo.

A ultrapassagem ocorre durante o 7.º ano. Decorridos 7 anos a população da planta invasora é superior.

$F(7) > N(7)$

IV. $F(5) < N(5)$

Respostas certas: I – c), II – c), III – b) e IV – a)

4.1. Quantidade total absorvida após 6 horas:

Pretendemos calcular $Q(6)$.

Substituímos $t = 6$ na fórmula:

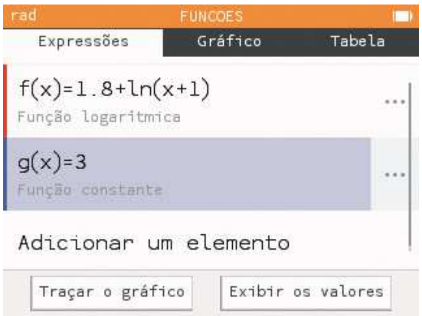
$Q(6)=1{,}8\times ln(6+1)\approx 4$

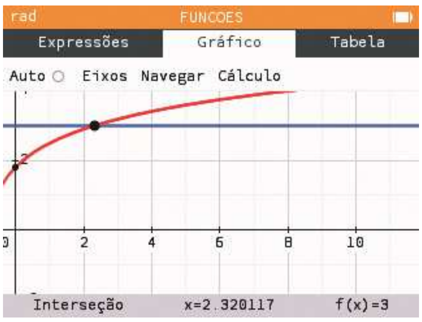
Estima-se que, 6 horas após a administração, tenham sido absorvidas aproximadamente 4 μg de vitamina B12.

4.2. Pretendemos encontrar o valor de t para o qual $Q(t) = 3$.

Vamos recorrer ao menu gráfico da calculadora para determinar a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das duas expressões.

Janela de visualização: Xmin=0, Xmax=18, Ymin=0, Ymax=5





$t\approx 2{,}320$

Este é o instante exato em que a quantidade absorvida atinge 3 μg. O limiar é atingido neste instante.

Arredondamos o resultado às unidades:

$t\approx 2$ horas.

O limiar de eficácia de 3 μg de Vitamina B12 absorvida é atingido aproximadamente às 4 horas após a administração.

5.1. $N(t)$ representa o número de habitantes em milhares.

$t=0$ corresponde ao dia 1 de janeiro de 1900.

Como t está em décadas, $t=10$ significa 10 décadas: 100 anos.

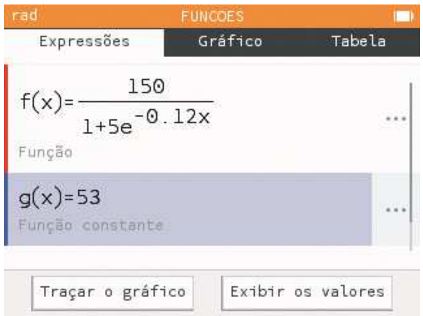
O tempo inicial é 1 de janeiro de 1900.

100 anos depois de 1 de janeiro de 1900 é 1 de janeiro de 2000.

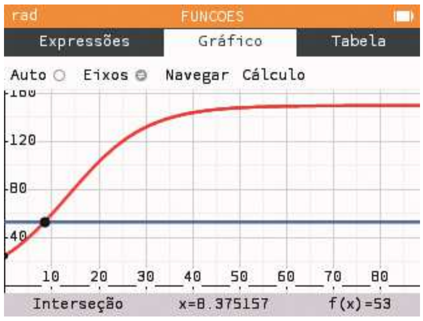
$N(10)\approx 79{,}809$ milhares de habitantes ≈ 80 mil habitantes

Resposta certa: **(B)**

5.2. Recorrendo à calculadora gráfica vamos inserir as expressões das duas funções:



Janela de visualização: Xmin=0, Xmax=40, Ymin=0, Ymax=160



A abcissa do ponto de interseção, arredondada às centésimas é $t\approx 8{,}38$.

O valor $t\approx 8{,}38$ representa 8,38 décadas após o dia 1 de janeiro de 1900.

Cálculo do Ano:

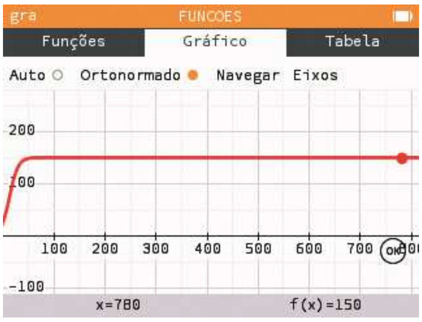
8,38 décadas: 83,8 anos.

1900 + 83,8 anos: 1983,8.

O valor 1983,8 significa que 0,8 (ou 80%) do ano 1983 já tinha passado quando a população atingiu 53 mil. Portanto, isso aconteceu durante o ano de 1983.

A população atingiu 53 mil habitantes durante o ano de 1983.

5.3. Observando o gráfico da função, por exemplo, vemos que estabiliza nos 150.



Resposta certa: **(A)**

6.1. $B(8)=\dfrac{8000}{1+79e^{-0,25\times 10}}\approx 684$

$B(12)=\dfrac{8000}{1+79e^{-0,25\times 12}}\approx 1622$

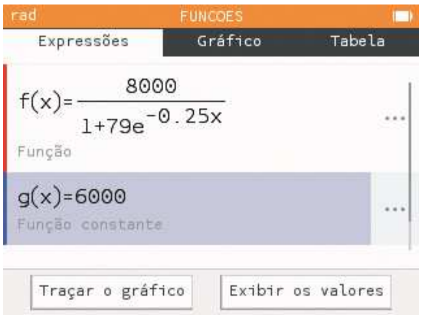
$B(16)=\dfrac{8000}{1+79e^{-0,25\times 16}}\approx 3269$

$B(20)=\dfrac{8000}{1+79e^{-0,25\times 20}}\approx 5220$

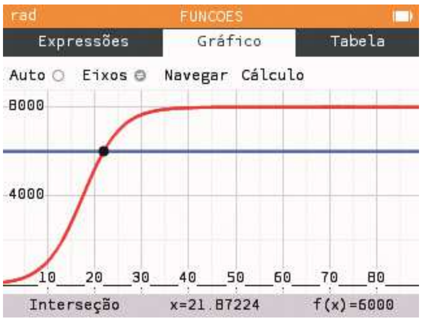
$B(20)-B(16)=1951$

Resposta certa: **(C)**

6.2. Recorrendo à calculadora gráfica vamos inserir as expressões das duas funções:



Janela de visualização: Xmin=0, Xmax=70, Ymin=0, Ymax=8500

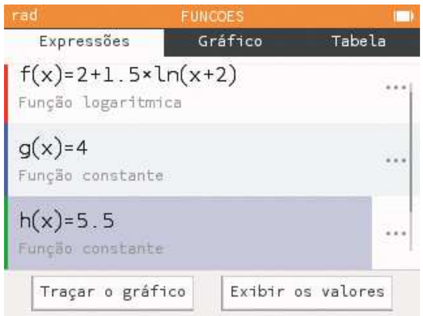


A abcissa do ponto de interseção, arredondada às centésimas é $t\approx 21,87$.

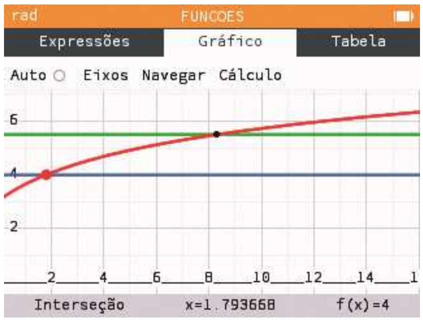
O valor 21,87 significa que 0,87 (ou 87%) da 21.ª semana já tinha passado quando a população atingiu 6000 kg.
A exploração começou os procedimentos após a 21.º primeira semana de cultivo.

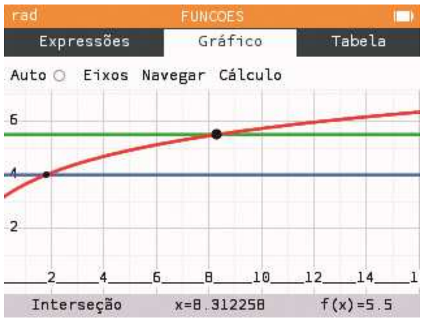
7.1. Pretende-se determinar o intervalo de tempo t para o qual $4<P(t)<5,5$.

Recorrendo à calculadora gráfica vamos inserir as expressões das três funções:



Janela de visualização: Xmin=0, Xmax=16, Ymin=0, Ymax=8





A abcissa do primeiro ponto de interseção, arredondada às centésimas é $t\approx 1,79$.

A abcissa do seguindo ponto de interseção, arredondada às centésimas é $t\approx 8,31$.

O intervalo é $1,79<t<8,31$.

Os anos completos neste intervalo são aqueles que começam após $t=1,79$ e terminam antes de $t=8,31$.

Correspondem aos anos $t=2,3,4,5,6,7$.

Durante 6 anos completos.

7.2. $P(0)=2+1,5\ln(0+2)\approx 2+1,0397=3,0397(\text{centenas})$.

$P(1)=2+1,5\ln(1+2)\approx 2+1,6479=3,6479(\text{centenas})$.

Aumento: $P(1)-P(0)\approx 3,6479-3,0397=0,6082(\text{centenas})$.

Percentagem de aumento: $\dfrac{0,6082}{3,0397}\times 100\approx 20,009\%$.

Valor aproximado às unidades: 20%.
Resposta certa: **(B)**

7.3. Análise das funções:

$P(t)=2+1,5\ln(t+2)$: Crescimento logarítmico (aumenta sempre, mas cada vez mais devagar).

$P(5)=2+1{,}5\ln(7)\approx 4{,}92$.

$L(t)=0{,}2t+2{,}5$: Crescimento linear (aumento constante).

L tem coeficiente $a=0{,}2$ (centenas por ano), ou seja, aumenta 20 alunos por ano.

$L(15)=0{,}2\times 15+2{,}5=3+2{,}5=5{,}5$ (550 alunos).

$R(t)=5e^{-0{,}15t}+1$: Crescimento exponencial negativo.

Sempre a diminuir.

$R(0)=5\times 1+1=6$ (600 alunos).

$R(100)=5\times e^{-0{,}15\times 100}+1\approx 1$ (100 alunos), ou ver no gráfico da função.

Resposta:

(a) – (4) e (6);

(b) – (2) e (5);

(c) – (1), (3) e (7)

Capítulo 3

1. Vamos definir os seguintes acontecimentos:

S: "O aluno frequenta o ensino secundário".

A: "O aluno requisitou livros de aventura no último período letivo".

Com base nos dados do problema, temos as seguintes probabilidades:

$P(S)=0{,}70$

$P\left(S\cap\bar{A}\right)=0{,}40$

$P\left(\bar{A}|\bar{S}\right)=0{,}50$, logo, $P\left(\bar{A}\cap\bar{S}\right)=P(\bar{A}\,|\bar{S})\times P\left(\bar{S}\right)=0{,}50\times 0{,}30=0{,}15$

Queremos calcular a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter requisitado livros de aventura, ou seja, P(A).

Vamos usar uma tabela de contingência

	A	$\bar{A}$	Total
S	0,30	0,40	0,70
$\bar{S}$	0,15	0,15	0,30
Total	0,45	0,55	1

$P(A)=P(S\cap A)+P\left(\bar{S}\cap A\right)=0{,}30+0{,}15=0{,}45$

A probabilidade de o aluno ter requisitado livros de aventura no último período letivo é 0,45.

2. Vamos definir os seguintes acontecimentos:

P: "O aluno frequentou aulas de preparação".

A: "O aluno obteve aprovação no exame".

A informação dada no enunciado pode ser traduzida em probabilidades:

$P(P)=0{,}40$; $P\left(\bar{P}\cap A\right)=0{,}50$; $P(A\,|P)=0{,}85$

Agora, vamos calcular o valor para cada espaço:

I. $P\left(\bar{P}\right)=1-P(P)$

$P\left(\bar{P}\right)=1-0{,}40$

$P\left(\bar{P}\right)=0{,}60$

II. $P(A\,|P)=\dfrac{P(P\cap A)}{P(P)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(P\cap A)=P(A\,|P)\times P(P)$

$\Leftrightarrow P(P\cap A)=0{,}85\times 0{,}40$

$\Leftrightarrow P(P\cap A)=0{,}34$

III. Queremos $P(A\,|\bar{P})=\dfrac{P\left(A\cap\bar{P}\right)}{P\left(\bar{P}\right)}$

Já conhecemos $P\left(A\cap\bar{P}\right)=0{,}50$ (dado no enunciado) e

$P\left(\bar{P}\right)=0{,}60$ (calculado em I).

$P(A\,|\bar{P})=\dfrac{0{,}50}{0{,}60}\Leftrightarrow P(A\,|\bar{P})=\dfrac{50}{60}=\dfrac{5}{6}$

$\Leftrightarrow P(A\,|\bar{P})\approx 0{,}8333...$

Arredondando para duas casas decimais, obtém-se 0,83.

IV. Queremos determinar $P(A)$

Pela Lei da Probabilidade Total:

$P(A)=P(A\cap C)+P\left(A\cap\bar{P}\right)$

Já calculámos $P(A\cap P)=0{,}34$ (em II) e foi dado

$P\left(A\cap\bar{P}\right)=0{,}50$.

$P(A)=0{,}34+0{,}50\Leftrightarrow P(A)=0{,}84$

Para expressar como percentagem: $0{,}84\times 100\%=84\%$

Resposta: I – b), II – b), III – c) e IV – b)

3. Vamos definir os seguintes acontecimentos:

D: "O lançamento é uma tentativa de 2 pontos".

T: "O lançamento é uma tentativa de 3 pontos".

C: "O lançamento é concretizado (o Correia marca cesto)".

Pelas informações dadas, temos as seguintes probabilidades:

$P(D)=0{,}60$ (Probabilidade de tentar um lançamento de 2 pontos)

$P(T)=0{,}40$ (Probabilidade de tentar um lançamento de 3 pontos)

$P(C\,|\,D)=0{,}55$ (Probabilidade de concretizar, dado que foi um lançamento de 2 pontos)

$P(C\,|\,T)=0{,}30$ (Probabilidade de concretizar, dado que foi um lançamento de 3 pontos)

3.1. A probabilidade de o Correia concretizar um lançamento é o mesmo que concretizar um lançamento de 2 pontos ou um lançamento de 3 pontos.

$P(C)=P(C\cap D)+P(C\cap T)\Leftrightarrow$

$P(C)=P(C\mid D)\times P(D)+P(C\mid T)\times P(T)\Leftrightarrow$

$P(C)=(0{,}55\times 0{,}60)+(0{,}30\times 0{,}40)\Leftrightarrow$

$P(C)=0{,}330+0{,}120\Leftrightarrow$

$P(C)=0{,}45$

Resposta certa: **(A)**

3.2. Queremos determinar a probabilidade de o lançamento ter sido de 3 pontos, sabendo que foi concretizado, ou seja, $P(T\mid C)$.

$P(T\mid C)=P(T\cap C)\,/P(C)$

Sabemos que $P(T\cap C)=P(C\mid T)\times P(T)=0{,}30\times 0{,}40=0{,}120$

Portanto:

$P(T|C)=\dfrac{0{,}120}{0{,}450}=\dfrac{4}{15}\Leftrightarrow$

$P(T\mid C)\approx 0{,}27$

A probabilidade de o lançamento ter sido uma tentativa de 3 pontos, sabendo que o João concretizou o lançamento, é aproximadamente $0{,}27$.

4.1. Ao calcular uma probabilidade condicionada como $P(\quad\mid Y)$, o nosso "universo" de casos possíveis restringe-se aos casos onde Y ocorreu.
Observando a tabela temos:
O número total de observações no Prado (P) é 28. Este será o denominador da nossa probabilidade.
Dentro da coluna "Prado (P)", queremos saber quantas observações são da espécie X (Almirante-vermelho (V)). O valor da interseção da linha "Almirante-vermelho (V)" e a coluna "Prado (P)" é 7. Este será o numerador.
A probabilidade pedida é:

$P(X\mid Y)=\dfrac{\text{Número de observações de V no Prado(P)}}{\text{Número total de observações no Prado(P)}}$

$\Leftrightarrow P(X|Y)=\dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}$

Resposta certa: **(D)**

4.2. Dois acontecimentos são independentes se e só se $P(A\cap R)=P(A)\times P(R)$

Observando a tabela temos:

$P(A)\times P(R)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{10}=P(A\cap R)$

Portanto, os acontecimentos A e R são independentes.
Vamos calcular a probabilidade de a primeira observação ser do Bosque, a segunda ser do Bosque (dado que a primeira foi) e a terceira ser do Bosque (dado que as duas primeiras foram).
Número total de observações: 60
Número de observações do Bosque: 14

$p=\dfrac{14}{60}\times\dfrac{13}{59}\times\dfrac{14}{58}=\dfrac{91}{8555}$

A probabilidade de as três observações selecionadas serem todas de borboletas do bosque é $\dfrac{91}{8555}$.

5.1. Vamos definir os seguintes acontecimentos:
E: "O visitante comprou uma espada de madeira".
A: "O visitante é um adulto".
Pelas informações dadas, temos as seguintes probabilidades:

$P(E)=0{,}60$

$P(\bar{E})=1-P(E)=1-0{,}60=0{,}40$

$P(A\mid E)=0{,}30$

$P(A\mid \bar{E})=0{,}70$

Queremos determinar a probabilidade de o visitante ter comprado uma espada, sabendo que é um adulto, ou seja, $P(E\mid A)$.

$P(E|A)=\dfrac{P(E\cap A)}{P(A)}$

$P(A)=P(E\cap A)+P(B\cap A)$

$P(E\cap A)=P(A\mid E)\times P(E)=0{,}30\times 0{,}60=0{,}18$

$P(\bar{E}\cap A)=P(A\mid \bar{E})\times P(\bar{E})=0{,}70\times 0{,}40=0{,}28$

Logo, $P(A)=0{,}18+0{,}28=0{,}46$

Portanto, $P(E|A)=\dfrac{0{,}18}{0{,}46}\approx 0{,}39$

A probabilidade de o visitante ter comprado uma espada de madeira, sabendo-se que é um adulto, é $0{,}39$.

5.2. Número de adultos: $0{,}46\times 150=69$

Número de crianças: $150-69=81$

Queremos a probabilidade de que, em dois visitantes escolhidos, que exatamente um seja criança. Existem dois cenários possíveis para que isto aconteça, pois interessa a ordem.
Assim temos:

$P(\text{Exatamente um não ser adulto})=$

$\dfrac{69}{150}\times\dfrac{81}{149}+\dfrac{81}{150}\times\dfrac{69}{149}=\dfrac{11178}{22350}\approx 0{,}50$

A probabilidade de apenas um dos visitantes escolhidos não ser adulto é, aproximadamente, 50%.

6.1. $P(T|A)=\dfrac{\text{número de tulipas amarelas}}{\text{número de flores amarelas}}=\dfrac{8}{31}$

Resposta certa: **(B)**

6.2. Só existem tulipas e jacintos vermelhos, num total de 19 flores.

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,227	0,477	0,260	0,036

Não sair nenhum jacinto, significa que saíram 3 tulipas.

$P(X=0)=\frac{12}{19}\times\frac{11}{18}\times\frac{10}{17}=\frac{1320}{5814}=\frac{220}{969}\approx 0,227$

Sair exatamente 1 jacinto, significa que vão sair duas tulipas, existem 3 casos diferentes, pois interessa a ordem.

$P(X=1)=\frac{12}{19}\times\frac{11}{18}\times\frac{7}{17}\times 3=\frac{2772}{5814}=\frac{153}{323}\approx 0,477$

Saírem exatamente 2 jacintos, significa que vai sair uma tulipa, existem 3 casos diferentes, pois interessa a ordem.

$P(X=2)=\frac{12}{19}\times\frac{7}{18}\times\frac{6}{17}\times 3=\frac{1512}{5814}=\frac{84}{323}\approx 0,260$

Saírem exatamente 3 jacintos, significa que não vai sair uma tulipa.

$P(X=3)=\frac{7}{19}\times\frac{6}{18}\times\frac{5}{17}=\frac{210}{5814}=\frac{35}{969}\approx 0,036$

7. Se $c=28$, então $d=150-134=16$.

Número de membros que viram exatamente um filme: 67
Número de membros que não viram exatamente um filme:
$150-67=83$

Nenhum ter visto exatamente 1 filme.

$P(X=0)=\frac{83}{150}\times\frac{82}{149}=\frac{6808}{22350}=\frac{3403}{11175}\approx 0,30$

Apenas um ver exatamente um filme, é um que vê exatamente um filme e o outro não vê.
Existem duas formas diferentes, pois interessa a ordem.

$P(X=1)=\frac{67}{150}\times\frac{83}{149}\times 2=\frac{11122}{22350}=\frac{5561}{11175}\approx 0,50$

Os dois verem exatamente um filme.

$P(X=2)=\frac{67}{150}\times\frac{66}{149}=\frac{4422}{22350}=\frac{737}{3725}\approx 0,20$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,30	0,50	0,20

8. $X \sim N(18,2)$

A distribuição Normal é simétrica em relação à média. A probabilidade de encontrar um valor a uma certa distância acima do valor médio é igual à probabilidade de encontrar um valor à mesma distância abaixo do valor médio.
A distância de 21 ao valor médio (3 cm) é a mesma que a distância de 15 ao valor médio (3 cm).

Logo, $P(X<15)=P(X>21)$.

$P(16<X<22)=\frac{68,27\%}{2}+\frac{95,45\%}{2}=81,86\%$

$P(X>24)=100\%-50\%-\frac{99,73\%}{2}=0,135\%$.

Resposta: I – b), II – a) e III – c)

9. Seja X a variável aleatória que representa o nível da água em metros.
Sabemos que:

$P(X<3,0)=0,25$

$P(X<2,8)=0,15$

Queremos encontrar a probabilidade de o nível estar compreendido entre 2,8 e 3,0 metros, ou seja, $P(2,8<X<3,0)$.

Podemos calcular esta probabilidade usando a propriedade da função de distribuição acumulada:

$P(a<X<b)=P(X<b)-P(X<a)$

Portanto, $P(2,8<X<3,0)=P(X<3,0)-P(X<2,8)$

$P(2,8<X<3,0)=0,25-0,15=0,10$

Número esperado = $0,10\times 300$

Número esperado = 30
É de esperar que 30 das 300 medições tenham registado um nível de água compreendido entre 2,8 e 3,0 metros.

Capítulo 4

1.1. Como o desvio-padrão populacional é conhecido e a distribuição é Normal, então o intervalo pedido é do tipo:

$\left[\bar{x}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Com: $\sigma=6,50$; $n=144$; $z=1,960$; $\bar{x}=22,80$

Obtém-se:

$\left[22,80-1,960\frac{6,50}{\sqrt{144}};22,80+1,960\frac{6,50}{\sqrt{144}}\right]\approx[21,74;23,86]$

Significa que, com uma confiança de 95%, estima-se que o intervalo $[21,74\text{ €};23,86\text{€}]$, contenha o valor médio gasto em *merchandising* por todos os espectadores da digressão que compraram estes artigos.

1.2. A margem de erro é igual à diferença entre o limite superior e $\bar{x}$.

$E=23,69\text{ €}-22,80\text{ €}=0,89\text{ €}$

O limite inferior é igual à diferença de $\bar{x}$ com a margem de erro do intervalo, logo:

Limite inferior $=22,80\text{ €}-0,89\text{ €}=21,91\text{ €}$

Queremos que $E=0,50\text{ €}$ e sabemos que $E=z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Logo, $n=\left(z\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1,645\times\frac{6,50}{0,50}\right)^2\approx 457,32$

Para que a margem de erro seja 0,50 €, com um nível de confiança de 90%, a dimensão da amostra teria de ser igual a 458 espetadores.
Resposta certa: I – a), II – c) e III – c)

2.1. O intervalo pedido é do tipo:

$\left[\bar{x}-z\frac{s}{\sqrt{n}};\bar{x}+z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Com: $s=12$; $n=100>30$; $z=2,576$; $\bar{x}=28,50$

Obtém-se:

$\left[28,50-2,576\frac{12}{\sqrt{100}};28,50+2,576\frac{12}{\sqrt{100}}\right]\approx[25,41;31,59]$

2.2. Significa que, com uma confiança de 99%, estima-se que o intervalo [25,41 minutos; 31,59 minutos] contenha o valor médio da duração (μ) de um aluguer de trotinete por todos os utilizadores da empresa em Lisboa.

3.1. **a)** Sabemos que $n = 600 > 30$

$$\hat{p} = \frac{258}{600} = 0,43$$

Nível de confiança de 90%: $z = 1,645$

O intervalo de confiança pedido é do tipo:

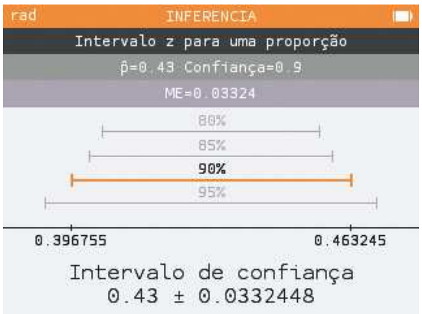
$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Assim temos:

$$\left[0,43 - 1,645\sqrt{\frac{0,43(1-0,43)}{600}}; 0,43 - 1,645\sqrt{\frac{0,43(1-0,43)}{600}}\right] \approx$$

$$\approx [0,397; 0,463]$$

Na calculadora:



O intervalo pedido é $[0,397; 0,463]$.

b) **(I)** O intervalo calculado contém, com uma probabilidade de 90%, a proporção amostral de adultos que consideram que a desflorestação aumentou.

Falsa. A proporção amostral ($\hat{p} = 0,43$) está sempre no centro do intervalo por definição. O intervalo destina-se a estimar a proporção populacional (p), não a amostral. A probabilidade refere-se à confiança no método, não à localização da proporção amostral neste intervalo específico.

(II) Existe uma probabilidade de 90% de que qualquer outra amostra aleatória de 600 adultos produza uma proporção amostral que caia dentro do intervalo calculado na alínea a).

Falsa. O intervalo [0,397; 0,463] é fixo, baseado nesta amostra em particular. Proporções amostrais de outras amostras irão variar. A confiança de 90% aplica-se à probabilidade de que o método de construção do intervalo capture a verdadeira proporção populacional, não onde futuras proporções amostrais cairão em relação a este intervalo específico.

(III) Com base neste estudo, temos 90% de confiança que a verdadeira proporção de adultos na população portuguesa que consideram que a desflorestação aumentou se encontra entre os limites do intervalo calculado.

Verdadeira. Esta é a interpretação padrão e correta de um intervalo de confiança. Expressa o nível de confiança (associado à fiabilidade do método a longo prazo) de que o intervalo calculado a partir da amostra contenha o verdadeiro valor do parâmetro populacional (p).

(IV) Se repetíssemos este estudo muitas vezes, 90% dos intervalos de confiança assim calculados conteriam a proporção amostral igual a 0,43 (258/600).

Falsa. A interpretação frequencista correta é que, se repetíssemos o procedimento de amostragem e cálculo do intervalo muitas vezes, aproximadamente 90% dos intervalos assim gerados conteriam a verdadeira proporção populacional (p), não a proporção amostral específica deste estudo (0,43)

3.2. Sabemos que $n = 850 > 30$

A proporção amostral é igual ao valor médio do intervalo de confiança, ou seja,

$$\hat{p} = \frac{0,808 + 0,872}{2} = 0,84$$

O valor do número de ações distintas iguais ou inferiores a 2, $N_{\leq 2}$, é dado por:

$$\hat{p} \times n = 0,84 \times 850 = 714$$

Por outro lado $N_{\leq 2} = N_0 + N_1 + N_2$

Logo, $714 = 215 + 330 + a_2 \Leftrightarrow a_2 = 714 - 215 - 330 = 169$

O número de adultos que realizaram exatamente duas ações é 169.

4. Sabemos que $n = 1150 > 30$

$$\hat{p} = \frac{414}{1150} = 0,36$$

A amplitude do intervalo é igual a 0,0555.

Sabemos ainda que a margem de erro do intervalo de confiança é igual a metade da sua amplitude, assim, temos que $E = 0,0555 \div 2 = 0,02775$.

Por outro lado, $E = z\sqrt{\frac{0,36 \times 0,64}{1150}}$

Logo, $z \approx \frac{0,02775}{0,01415} \approx 1,96\ 052$

O nível de confiança do intervalo é de 95%.

5.1. Sabemos que: $\sigma = 12\text{kg}$; amplitude: 5kg ; $z = 1,960$

A amplitude é igual ao dobro da margem de erro, logo,

$$E = \frac{5}{2} = 2,5\text{kg}$$

Sabemos ainda que $E = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Logo, $n = \left(z\frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,960 \times \frac{12}{2,5}\right)^2 \approx 88,51046 \approx 89$

Para que a amplitude do intervalo de confiança de 95% não exceda 5 kg, a dimensão mínima da amostra deverá ser de 89 pandas.

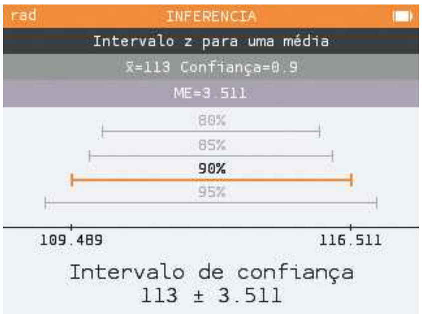
5.2. O intervalo pedido é do tipo: $\left[\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Com: $s = 13{,}5\text{kg}$; $n = 40 > 30$; $z = 1{,}645$; $\bar{x} = 113$ kg

Obtém-se:

$$\left[113 - 1{,}645 \times \frac{13{,}5}{\sqrt{40}}; 113 + 1{,}645 \times \frac{13{,}5}{\sqrt{40}}\right] \approx [109{,}5; 116{,}5]$$

Na calculadora



Significa que, com uma confiança de 90%, estima-se que o intervalo [109,5 kg; 116,5 kg] contenha o peso médio (μ) de todos os pandas adultos na reserva natural estudada.

5.3. Nível de confiança: 90%, $z \approx 1{,}645$

Margem de Erro máxima desejada: $\text{E} = 3$ kg

Desvio-padrão amostral: $s = 13{,}5$ kg

Sabemos que: $E = z\frac{s}{\sqrt{n}}$

Logo, $n = \left(z\frac{s}{E}\right)^2 = \left(1{,}645 \times \frac{13{,}5}{2}\right)^2 \approx 123{,}27075 \approx 124$

Arredondar para cima: A dimensão da amostra deve ser um número inteiro. Como não podemos ter uma fração de um panda e precisamos garantir que a margem de erro não exceda 2 kg, devemos sempre arredondar o resultado para cima para o próximo número inteiro.

Para garantir que a margem de erro de um intervalo de confiança de 90% para o peso médio dos pandas machos adultos não exceda 2 kg, utilizando a estimativa de desvio-padrão $s = 13{,}5$ kg, a dimensão mínima total da amostra necessária é de 124 pandas.

6.1. Consideremos $\hat{p} = 0{,}75$

Queremos determinar n tal que $n > 30$

$z = 1{,}960$; amplitude: 0,10

A amplitude é igual ao dobro da margem de erro, logo,

$$E = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05$$

$$E = z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Logo,

$$n = \left(\frac{z}{E}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\right)^2 = \left(\frac{1{,}960}{0{,}05}\sqrt{0{,}75(0{,}25)}\right)^2 = 288{,}12 \approx 289$$

O número mínimo de tabletes de chocolate que devem ser incluídas é 289.

6.2. Resposta certa: **(B)**

6.3. A fórmula para o tamanho da amostra para uma proporção, dependente da margem de erro, é:

$$n = \left(\frac{z}{E}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\right)^2$$

Para uma dada confiança (z) e margem de erro (E), n é maximizado quando o termo $\hat{p}(1-\hat{p})$ é maximizado.

Análise do termo $\hat{p}(1-\hat{p})$, se:

$\hat{p} = 0{,}10 \to \hat{p}(1-\hat{p}) = 0{,}10 \times 0{,}90 = 0{,}09$

$\hat{p} = 0{,}75 \to \hat{p}(1-\hat{p}) = 0{,}75 \times 0.25 = 0{,}1875$

$\hat{p} = 1{,}00 \to \hat{p}(1-\hat{p}) = 1{,}00 \times 0{,}00 = 0{,}00$

$\hat{p} = 0{,}50 \to \hat{p}(1-\hat{p}) = 0{,}50 \times 0{,}50 = 0{,}25$

Conclusão: O valor máximo de $\hat{p}(1-\hat{p})$ ocorre quando $\hat{p} = 0{,}50$. Usar $\hat{p} = 0{,}50$ no cálculo do tamanho da amostra resulta no maior n possível para a confiança e margem de erro desejadas.

Resposta certa: **(D)**

6.4. A fórmula para o tamanho da amostra para uma proporção, dependente da margem de erro, é:

$$n = \left(\frac{z}{E}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\right)^2 ; \hat{p} = 0{,}75 ; E = 0{,}05$$

O z passou a ser $z = 1{,}645$.

$$n = \left(\frac{z}{E}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\right)^2 = \left(\frac{1{,}645}{0{,}05}\sqrt{0{,}75(0{,}25)}\right)^2 \approx 202{,}951875 \approx 203 < 289$$

ou

Analisando o tamanho da amostra n relativamente ao valor de z podemos verificar que este é diretamente proporcional ao quadrado de z

$$n = z^2 \times \left(\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{E}\right)^2$$

Como o z para 90% (1,645) é menor que o z para 95% (1,960), o seu quadrado também será menor.

Conclusão: Se z diminui, e todos os outros termos na fórmula se mantêm constantes, o tamanho da amostra n necessário também diminuirá. Exigir um nível de confiança menor permite uma amostra menor para atingir a mesma precisão (margem de erro/amplitude).

Resposta certa: **(A)**