RESOLUÇÕES
manual

Pág. 14

1. Como a percentagem de votantes é 39,4%, então abstiveram-se $100\% - 39{,}24\% \approx 61\%$ dos eleitores.

2. Marcelo Rebelo de Sousa com $0{,}607 \times 4\,175\,591 \approx 2\,534\,584$ votos.
Votos validamente expressos:
$4\,262\,672 - 47\,055 - 40\,026 = 4\,175\,591$

3. Sim, pois o vencedor tinha maioria absoluta logo a soma dos outros votos nunca ultrapassaria o número de votos do vencedor.

4. $\frac{47\,055 + 40\,026}{4\,262\,672} \times 100 \approx 2{,}04\%$, ou seja, $2{,}04\%$ dos votos foram brancos ou nulos.

Pág. 18

1.1. Número total de votos: $1250 + 760 + 910 = 2920$
Proposta A: $\frac{1250}{2920} \approx 42{,}8\%$; proposta B: $\frac{760}{2920} \approx 26{,}0\%$; proposta C: $\frac{910}{2920} \approx 31{,}2\%$

1.2. Maioria simples (a proposta A vence com maioria simples, pois não conseguiu, pelo menos, 1461 votos).

Pág. 19

2.1. Não faz referência às condições para eleger o vencedor nas voltas seguintes (nem quantas voltas são necessárias).

2.2. Por exemplo:
5.º passo: Vence o candidato que obtiver maioria absoluta. Caso isso não aconteça, repete-se a eleição apenas com os dois candidatos mais votados e ganha o que obtiver mais votos.

Pág. 20

1.1. O candidato Aníbal Cavaco Silva com 2 231 566 votos.
Votaram $46{,}52\%$ de 9656797 eleitores, isto é, aproximadamente $4\,492\,342$ eleitores.
Votos validamente expressos:
$4\,492\,342 - 191\,284 - 86\,581 = 4\,214\,477$
$0{,}5295 \times 4\,214\,477 \approx 2\,231\,566$ votos

1.2. Sim, pois o vencedor tinha maioria absoluta logo a soma dos outros votos nunca ultrapassaria o número de votos do vencedor.

1.3. $\frac{191\,284 + 86\,581}{4\,492\,342} \times 100 \approx 6{,}19\%$, ou seja, $6{,}19\%$ dos votos foram brancos ou nulos.

1.4. $\frac{2\,231\,566}{9\,656\,797} \times 100 \approx 23{,}11\%$, ou seja, o candidato com mais votos obteve cerca de $23{,}11\%$ dos votos possíveis.

2.1. votos validamente expressos: $220 + 56 + 206 + 234 + 118 = 834$
A: $\frac{220}{834} \times 100 \approx 26{,}4\%$; B: $\frac{56}{834} \times 100 \approx 6{,}7\%$
De modo análogo: C: $24{,}7\%$; D: $28{,}1\%$; E: $14{,}1\%$
Passam os candidatos A, C e D.

2.2. Não, pois na segunda votação as intenções de voto podem alterar-se e os votos daqueles que votam nos candidatos que não passam à segunda volta podem ser decisivos.

Pág. 21

1.1. Bruno: 251 ; Sandra: 249

1.2. Opção correta: **(C)**
$\frac{249}{500} \times 100 \approx 49{,}8\%$

2.1. Opção correta: **(B)**
$380 + 124 + 764 = 1268$
$1760 - 1268 = 492$

2.2. I – b); II – b); III – c); IV – b)
IV: $\frac{764}{1268} \times 100 \approx 60{,}3\%$

3. Opção correta: **(D)**

Pág. 22

1. Lista 2: $22 \times 2 = 44$; Lista 3: $12 \times 1 = 12$; Lista 4: $20 \times 3 = 60$; Lista 5: $16 \times 1 = 16$

2. A: $48 + 44 + 12 + 60 + 16 = 180$
B: $32 + 66 + 36 + 20 + 32 = 186$
C: $16 + 22 + 24 + 40 + 48 = 150$

3. Candidato B, com 186 pontos.

4. Sim, acrescentando 3 votos aos 20 criaria um empate entre os candidatos A e B (ambos com 189 pontos).
Acrescentando 4 votos, o candidato A passa ser o vencedor.
A: $48 + 44 + 12 + 69 + 16 = 189$
B: $32 + 66 + 36 + 23 + 32 = 189$

5. A: $16 + 20 = 36$ votos
B: $22 + 12 = 34$ votos
C: 16 votos
Eliminado: C
A: $16 + 20 = 36$ votos
B: $22 + 12 + 16 = 50$ votos
Vencedor: Candidato B

Pág. 27

3. Aplicando o método obtemos a seguinte tabela:

Candidata		Total
Rita	$30 \times 3 + 20 \times 1 + 24 \times 1 + 20 \times 3 + 16 \times 2$	226
Sara	$30 \times 2 + 20 \times 2 + 24 \times 3 + 20 \times 1 + 16 \times 3$	240
Tânia	$30 \times 1 + 20 \times 3 + 24 \times 2 + 20 \times 2 + 16 \times 1$	194

A bailarina vencedora foi a Sara.

Pág. 28

4.

Candidato		Total
G	$22 \times 3 + 12 \times 11 + 16 \times 3 + 30 \times 5 + 20 \times 5$	496
M	$22 \times 11 + 12 \times 7 + 16 \times 5 + 30 \times 7 + 20 \times 3$	676
T	$22 \times 5 + 12 \times 3 + 16 \times 7 + 30 \times 11 + 20 \times 7$	728
C	$22 \times 7 + 12 \times 5 + 16 \times 11 + 30 \times 3 + 20 \times 11$	700

Animal eleito: Tigre

Pág. 29

5.1. Número total de votos: 30
Percentagem de votos na última preferência:
Tunísia: $\frac{11}{30} \times 100\% \approx 37\%$ Itália: $\frac{9+6}{30} \times 100\% = 50\%$
China: $\frac{4}{30} \times 100\% \approx 13\%$ Japão: 0%

5.2. Segundo o método da maioria simples o vencedor é quem tiver mais votos na primeira preferência.
Itália: $11 + 4 = 15$
China: 9
Tunísia: 6
Japão: 0
Neste caso seria a Itália: Não é muito justo visto este país ter obtido o mesmo número de votos como última escolha.

5.3. X – Itália ; Y – Japão
Método de Borda:

Candidato		Total
Itália	$11 \times 4 + 9 \times 1 + 4 \times 4 + 6 \times 1$	75
China	$11 \times 2 + 9 \times 4 + 4 \times 1 + 6 \times 2$	74
Tunísia	$11 \times 1 + 9 \times 3 + 4 \times 2 + 6 \times 4$	70
Japão	$11 \times 3 + 9 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times 3$	81

Pág. 30

1.

Candidato		**Total**
Eduardo	$40\times10+55\times5+30\times8$	915
Constança	$40\times8+55\times10+30\times5$	1020
Henrique	$40\times5+55\times8+30\times10$	940

Grão-mestre: Constança; Grão-chanceler: Henrique; Grão-cancelário: Eduardo

2.1.

Trabalho de Projeto		**Total**
TP1	$25\times1+23\times3+5\times2$	104
TP2	$25\times3+23\times2+5\times1$	126
TP3	$25\times2+23\times1+5\times3$	88

1.º – TP2 ; 2.º – TP1 ; 3.º – TP3

2.2. TP1: $25\times1+23\times2+5\times2=81$ pontos;

TP2: $25\times2+23\times1+5\times1=78$ pontos;

Vencedor: TP1

2.3. O grupo de trabalho que elaborou o TP2 pode sentir-se injustiçado pois numa eleição a três vencia a competição. Já o grupo que elaborou o TP1 pode argumentar que numa "final" entre os dois melhores trabalhos vence de forma justa.

Pág. 31

1.1. Opção correta: **(B)**

Candidato		**Total**
W	$8\times4+24\times1+10\times3+22\times2$	130
X	$8\times3+24\times3+10\times1+22\times4$	194
Y	$8\times2+24\times4+10\times2+22\times1$	154
Z	$8\times1+24\times2+10\times4+22\times3$	162

1.2. Opção correta: **(B)**

Candidato		**Total**
W	$8\times4+24\times1+10\times3+22\times2+20\times4$	210
X	$8\times3+24\times3+10\times1+22\times4+20\times1$	214
Y	$8\times2+24\times4+10\times2+22\times1+20\times2$	194
Z	$8\times1+24\times2+10\times4+22\times3+20\times3$	222

2.1. Bali: $20\times3+14\times1+16\times3=122$ pontos.

2.2. **a)** Maldivas > Bali > Riviera-Maya

b) Bali > Riviera-Maya > Maldivas

Maldivas: $16\times1+20\times2+14\times3=98$ pontos

Riviera Maya: $16\times2+20\times1+14\times2=80$ pontos

Bali: $16\times3+20\times3+14\times1=122$ pontos

3. A : $5+5+4+1+2+3=20$

B : $1+4+2+5+4+1=17$

C : $4+3+3+3+5+4=22$

D : $3+2+5+4+3+2=19$

E : $2+1+1+2+1+5=12$

Vencedor: Jogo C

Pág. 32

1. Afirmação verdadeira, pois Frango assado fica no terceiro lugar com $45+10=55$ votos.

2. Maioria absoluta: 101 votos

Frango assado (F): $45+20=65$

Arroz de marisco (A): 56

Lasanha (L): 80

Bacalhau com natas (B): 0

Eliminado: Bacalhau com natas

Nova tabela:

45	56	80	20
F	A	L	F
A	F	F	L
L	L	A	A

Frango assado (F): $45+20=65$

Arroz de marisco (A): 56

Lasanha (L): 80

Eliminado: Arroz de marisco

Nova tabela:

45	56	80	20
F	F	L	F
L	L	F	L

Frango assado (F): $45+56+20=121$

Lasanha (L): 80

Prato escolhido: Frango assado

Pág. 34

6.1. Número de votos na primeira preferência de cada lista candidata.

$A\to180+150=330$ $B\to375$

$C\to195+165=360$ $D\to225$

Número total de votos: $330+375+360+225=1290$

Logo, a lista vencedora (lista B) obteve, aproximadamente, $\frac{375}{1290}\approx29\%$ dos votos nas primeiras preferências.

6.2. Não, porque se a disputa fosse apenas entre a lista B e a lista C ou entre a lista B e a lista A, a lista vencedora pelo método da pluralidade (a lista B) seria derrotada em ambos os casos, como se pode ver nos cálculos seguintes.

A *versus* B na 1.ª preferência

$A\to180+150+195+225+165=915$ vencedora: A

$B\to375$

B *versus* C na 1.ª preferência

$B\to375+225=600$

$C\to180+150+195+165=690$ vencedora: C

Pág. 35

7. O número de votos na primeira preferência do futebolista a votação é:

$M\to5$ $L\to10+3=13$

$C\to12$

Número total de votos: 30

Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta na primeira preferência (mais de 15 votos) portanto eliminamos o candidato menos votado, M, e reordena-se a tabela.

N.º de votos	5	12	10	3
1.º	C	C	L	L
2.º	L	L	C	C

Faz-se nova contagem do número de primeiras preferências de cada candidato.

$L\to10+3=13$

$C\to5+12=17$

O futebolista eleito como futebolista do ano 2023 foi o Cristiano.

Pág. 37

8. Contagem do número de votos de primeiras preferências de cada candidato.

$A\to140+10=150$ $B\to40$

$C\to100$ $D\to80$

Número total de votos: 370

$370:2=185$

Nenhum candidato obteve mais de 185 votos na primeira preferência, logo, não existe maioria absoluta.

Elimina-se o candidato menos votado na primeira preferência, o B, e volta-se a fazer a contagem do número de primeiras preferências de cada candidato.

$A\to150$

$C\to100$

$D\to80+40=120$

Novamente, nenhum candidato obteve maioria absoluta na primeira preferência.

Elimina-se o candidato C.

Nova contagem:

$A\to150$

$D\to120+100=220$

O vencedor é o candidato D.

1.1. Número de votos de cada destino de vigem, proposto a votação, na primeira preferência.

$B \to 10$

$P \to 7+9=16$

$R \to 8$

$L \to 2+4=6$

Pelo método da pluralidade o destino vencedor é Paris.

1.2. Não ficaram satisfeitos pois o destino vencedor é o menos preferido desses oito alunos.
Alteração: $B > R > L > P$, ou seja, como Roma não tinha hipótese de ganhar, trocavam a sua posição com Barcelona que assim seria o destino vencedor (com 18 votos).

1.3. Vencedor: Paris

Candidato		Total
B	$10\times4+7\times2+4\times2+8\times3+2\times3+9\times1$	101
P	$10\times3+7\times4+4\times3+8\times1+2\times1+9\times4$	116
R	$10\times2+7\times3+4\times1+8\times4+2\times2+9\times3$	108
L	$10\times1+7\times1+4\times4+8\times2+2\times4+9\times2$	75

2. ***Run-off standard***

	6	8	2	8
1.º	B	C	C	H
2.º	C	H	B	B
3.º	H	B	H	C

$6\times1+8\times2+2\times1+8\times2$ $C: \ 6+8+2=16$

$H: \ 8$

Borda

Museu		Total
B	$6\times3+8\times1+2\times2+8\times2$	46
C	$6\times2+8\times3+2\times3+8\times1$	50
H	$6\times1+8\times2+2\times1+8\times3$	48

Pluralidade

O museu C é o vencedor com $8+2=10$ primeiras preferências.

Run-off standard	Borda	Pluralidade
C	C	C

1.1. Opção correta: **(B)**

$M: \ 18+5=23$ votos em primeiro lugar

1.2. Opção correta: **(C)**

Candidato		Total
C	$14\times3+18\times2+9\times2+5\times1+12\times1$	113
D	$14\times2+18\times1+9\times3+5\times2+12\times3$	119
M	$14\times1+18\times3+9\times1+5\times3+12\times2$	116

1.3. O vencedor pelo método de Borda e pelo método de eliminação *run-off* é ***igual***.

***Run-off* (*standard* e sequencial)**

$M: \ 23$; $C: \ 14$; $D: \ 21$

Eliminado: C

Nova contagem: $M: \ 23$; $D: \ 21+14=35$

Vencedor: D

2.1. Total: $70+22+50+44=186$

$A: \ \frac{70}{186}\times100\approx37{,}6\%$

$B: \ \frac{22+50}{186}\times100\approx38{,}7\%$

$C: \ \frac{44}{186}\times100\approx23{,}7\%$

$D: \ 0\%$

2.2. 1.º Eliminado: D

2.º Eliminado: C

A *vs* B

$A: \ 70+44=114$

$B: \ 22+50=72$

Vencedor: Lista A

2.3. Opção correta: **(A)**

1. $\frac{54}{79}\times100\approx68\%$

Aproximadamente 68%.

2.

$A: \ 25$; $B: \ 11$; $C: \ 20$; $D: \ 23$ (eliminado: B)

$A: \ 25$; $C: \ 20+11=31$; $D: \ 23$ (eliminado: C)

$A: \ 25$; $C: \ 20+11+23=54$

Não, o vencedor é o candidato C.

3.

Candidato		Total
A	$25\times4+11\times1+20\times1+23\times1$	154
B	$25\times3+11\times4+20\times3+23\times3$	248
C	$25\times2+11\times3+20\times4+23\times2$	209
D	$25\times1+11\times2+20\times2+23\times4$	179

Sim, o vencedor é o candidato B.

4. Confrontos diretos:

A *vs* B	A	25	Vence B
	B	$11+20+23=54$	
B *vs* C	B	$25+11+23=59$	Vence B
	C	20	
A *vs* C	A	25	Vence C
	C	$11+20+23=54$	
B *vs* D	B	$25+11+20=56$	Vence B
	D	23	
A *vs* D	A	25	Vence D
	D	$11+20+23=54$	
C *vs* D	C	$25+11+20=56$	Vence C
	D	23	

Vencedor: B

9.1.

N.º de votos	170	120	110	100	50	30
1.º	A	B	A	D	E	A
2.º	D	E	B	C	B	D
3.º	E	D	E	E	D	C
4.º	C	A	D	B	C	B
5.º	B	C	C	A	A	E

9.2. O vencedor é o André, que é um vencedor de Condorcet.
Confrontos diretos:

A *vs* B	A	$170+110+30=310$	Vence A
	B	$120+100+50=270$	
A *vs* C	A	$170+120+110+30=430$	Vence A
	C	$100+50=150$	
A *vs* D	A	$170+110+30=310$	Vence A
	D	$120+100+50=270$	
A *vs* E	A	$170+110+30=310$	Vence A
	E	$120+100+50=270$	
B *vs* C	B	Não é necessário terminar a tabela pois o vencedor é o A, ganhou a maioria dos confrontos diretos. Além disso pode-se dizer que é um Vencedor de Condorcet pois ganhou diretamente a todos os outros adversários.	
	C		
B *vs* D	B		
	D		
B *vs* E	B		
	E		
E *vs* D	E		
	D		
D *vs* E	D		
	E		

10.1. Contagem de votos nas primeiras preferências.

$A \to 27$ $F \to 30$ $T \to 6+3=9$

$C \to 18$ $M \to 15$

Número total de votos: 99 $\quad 99 : 2 = 49{,}5$

Nenhuma das árvores obteve a maioria dos votos, ou seja, pelo menos 50 votos.

a) Vamos escolher as duas candidatas mais votadas e eliminar as restantes $(T,\ C\ \text{e}\ M)$.

$A \to 27$

$F \to 18 + 15 + 6 + 3 + 30 = 72$

A árvore vencedora é a Figueira.

b) Vamos eliminar a árvore menos votada (T) e reorganizar a tabela.

Preferência	Número de votos					
	27	**18**	**15**	**6**	**3**	**30**
1.ª	A	C	M	C	F	F
2.ª	M	M	F	M	M	C
3.ª	F	F	C	F	A	M
4.ª	C	A	A	A	C	A

Votos nas primeiras preferências:

$A \to 27$ $\qquad M \to 15$

$C \to 18 + 6 = 24$ $\qquad F \to 3 + 30 = 33$

Como nenhuma árvore obteve maioria absoluta, vamos eliminar a menos votada (M) e reorganizar a tabela.

Preferência	Número de votos					
	27	**18**	**15**	**6**	**3**	**30**
1.ª	A	C	F	C	F	F
2.ª	F	F	C	F	A	C
3.ª	C	A	A	A	C	A

Votos nas primeiras preferências:

$A \to 27$

$C \to 18 + 6 = 24$

$F \to 15 + 3 + 30 = 48$

Nenhuma das candidatas obteve maioria absoluta, vamos eliminar a C.

A e F vão obter a seguinte votação:

$A \to 27$

$F \to 18 + 15 + 6 + 3 + 30 = 72$

Logo, a árvore vencedora é a Figueira.

c) Aplicando o método de Borda obtém-se a seguinte tabela:

Candidata	
Ameixoeira	$27 \times 5 + 18 \times 1 + 15 \times 1 + 6 \times 1 + 3 \times 2 + 30 \times 1 = 210$
Cerejeira	$27 \times 1 + 18 \times 5 + 15 \times 2 + 6 \times 4 + 3 \times 1 + 30 \times 4 = 294$
Figueira	$27 \times 2 + 18 \times 2 + 15 \times 4 + 6 \times 2 + 3 \times 4 + 30 \times 5 = 324$
Macieira	$27 \times 4 + 18 \times 3 + 15 \times 5 + 6 \times 3 + 3 \times 3 + 30 \times 2 = 324$
Tangerina	$27 \times 3 + 18 \times 4 + 15 \times 3 + 6 \times 5 + 3 \times 5 + 30 \times 3 = 333$

A árvore vencedora é a Tangerineira.

d) Confrontos diretos:

A *vs* C	A	$27 + 3 = 30$	Vence C
	C	$18 + 15 + 6 + 30 = 69$	
A *vs* F	A	27	Vence F
	F	$18 + 15 + 6 + 3 + 30 = 72$	
A *vs* M	A	27	Vence M
	M	$18 + 15 + 6 + 3 + 30 = 72$	
A *vs* T	A	27	Vence T
	T	$18 + 15 + 6 + 3 + 30 = 72$	
C *vs* F	C	$18 + 6 = 24$	Vence F
	F	$27 + 15 + 3 + 30 = 75$	
C *vs* M	C	$18 + 6 + 30 = 54$	Vence C
	M	$27 + 15 + 3 = 45$	
C *vs* T	C	$18 + 30 = 48$	Vence T
	T	$27 + 15 + 6 + 3 = 51$	
F *vs* M	F	3	Vence M
	M	$27 + 18 + 15 + 6 + 30 = 96$	
F *vs* T	F	$15 + 30 = 45$	Vence T
	T	$27 + 18 + 6 + 3 = 54$	
M *vs* T	M	$17 + 15 = 42$	Vence T
	T	$18 + 6 + 3 + 30 = 57$	

A Tangerineira é a vencedora e é uma Vencedora de Condorcet pois ganhou em confronto direto a todos os adversários.

10.2. Dependendo do método preferencial que utilizamos, o vencedor pode ser diferente. De facto, a figueira vence pela aplicação dos métodos *run-off* e a tangerineira vence pelos métodos de Borda e de Condorcet. Podemos, ainda, observar que a tangerineira é eliminada logo à primeira nos métodos *run-off*, apesar de ser vencedor segundo Borda e ser Vencedor de Condorcet.

Pág. 46

1.1.

N.º de votos	**6**	**12**	**4**	**10**	**12**	**8**
1.º	C	V	M	V	C	M
2.º	V	C	V	M	M	C
3.º	M	M	C	C	V	V

1.2. Confrontos diretos:

C *vs* V	C	$6 + 12 + 8 = 26$	Empate
	V	$12 + 4 + 10 = 26$	
C *vs* M	C	$6 + 12 + 12 = 30$	Vence C
	M	$4 + 10 + 8 = 22$	
V *vs* M	V	$6 + 12 + 10 = 28$	Vence V
	M	$4 + 12 + 8 = 24$	

Não, pois existe um empate entre C e V.

2.

A *vs* B	A	$50 + 36 + x$	Vence A
	B	54	
A *vs* C	A	$50 + 36 = 86$	Para vencer A tem-se: $86 > 54 + x$, ou seja $32 > x$.
	C	$54 + x$	

No máximo 31.

Pág. 47

1. I – b) ; II – c); III – a) ; IV – a)

A *vs* B	A	$44 + 68 = 112$	Vence A
	B	95	
A *vs* C	A	44	Vence C
	C	$68 + 95 = 163$	
B *vs* C	B	$44 + 95 = 139$	Vence B
	C	68	

2.1. Opção correta: **(A)**

N *vs* C	N	36	Vence C
	C	$16 + 20 + 28 = 64$	
N *vs* M	N	36	Vence M
	M	$16 + 20 + 28 = 64$	
N *vs* A	N	36	Vence A
	A	64	

2.2. Restaurante Astrolábio

C *vs* M	C	$16 + 36 = 52$	Vence C
	M	$20 + 28 = 48$	
C *vs* A	C	$16 + 20 = 36$	Vence A
	A	$28 + 36 = 64$	
M *vs* A	M	$16 + 20 = 36$	Vence A
	A	$28 + 36 = 64$	

Restaurante	**n.º de vitórias**
N	0
C	2
M	1
A	3

Pág. 48

1. $5+12+11+8=36$ votos

2. $5+11=16$ votos

3.

Número de votos	Abel	Bárbara	Constança	Diogo
5	☺		☺	
12		☺		☺
11	☺			☺
8		☺	☺	
Total de votos	16	20	13	23

4. Diogo (com 23 aprovações)

5. $\frac{13}{36}\times 100\approx 36\%$

Aproximadamente 36% .

Pág. 51

11.1.

Tipo de piza	N.º de votos
Quatro estações	$12+4=16$
Calzone	$12+6+4=22$
Camponesa	$10+4=14$
Bolonhesa	6

Calzone	Quatro estações	Camponesa	Bolonhesa
22	16	14	6

11.2. A piza vencedora foi a *calzone* com 22 aprovações.

11.3. *Calzone* (não há alteração nos resultados)

Pág. 52

1.1. Router: $25+14+52=91$

Ecrã: 25 + 14 + 48 = 87

Matraquilhos: 30 + 14 + 52 = 96

Recurso escolhido: Matraquilhos

1.2. Opção correta: **(C)**

Router: $\frac{91}{274}\times 100\approx 33{,}2\%$

Ecrã: $\frac{87}{274}\times 100\approx 31{,}8\%$

Matraquilhos: $\frac{96}{274}\times 100\approx 35{,}0\%$

2.1. Ganha quem tiver o maior número ou percentagem de votos, neste caso, a Renata.

2.2. Número total de votantes: 1250

Número de votos de cada candidato:

Renata: $1250\times 0{,}48=600$

Matias: $1250\times 0{,}36=450$

Diogo: $1250\times 0{,}46=575$

Número total de votos: 1625

O número de votos é superior ao número de votantes, pois cada pessoa pode votar em mais do que um candidato.

Pág. 53

1.1. Opção correta: **(C)**

M_1-5 aprovações; M_2-4 aprovações; M_3-4 aprovações; M_4-6 aprovações; M_5-2 aprovações; M_6- 3 aprovações

1.2. N.º total de aprovações: $5+4+4+6+2+3=24$

$M_2:\ \frac{4}{24}\times 100\approx 16{,}7\%$

$M_4:\ \frac{6}{24}\times 100=25\%$ $\qquad M_6:\ \frac{3}{24}\times 100\approx 12{,}5\%$

1.3. $\frac{5}{8}\times 100=62{,}5\%$

2.1. Opção correta: **(D)**

Repare que uma pessoa pode ter votado em mais do que uma opção.

2.2. Opção correta: **(C)**

$120+210=330$ aprovações

Pág. 54

1. A: $0{,}622$; B: $1{,}526$; C: $2{,}183$; D: $5{,}291$; E: $3{,}898$; F: $4{,}482$

Lista A

N.º de votos — N.º de mandatos

$$\begin{array}{rcl} 15\,174 & — & 18 \\ 524 & — & x \end{array}$$

$$x=\frac{524\times 18}{15174}\approx 0{,}622$$

Lista B

N.º de votos — N.º de mandatos

$$\begin{array}{rcl} 15\,174 & — & 18 \\ 1286 & — & x \end{array}$$

$$x=\frac{1286\times 18}{15174}\approx 1{,}526$$

Lista C

N.º de votos — N.º de mandatos

$$\begin{array}{rcl} 15\,174 & — & 18 \\ 1840 & — & x \end{array}$$

$$x=\frac{1840\times 18}{15174}\approx 2{,}183$$

Lista E

N.º de votos — N.º de mandatos

$$\begin{array}{rcl} 15\,174 & — & 18 \\ 3286 & — & x \end{array}$$

$$x=\frac{3286\times 18}{15174}\approx 3{,}898$$

Lista F

N.º de votos — N.º de mandatos

$$\begin{array}{rcl} 15\,174 & — & 18 \\ 3778 & — & x \end{array}$$

$$x=\frac{3778\times 18}{15174}\approx 4{,}482$$

2. Não, pois

$0{,}622+1{,}526+2{,}183+5{,}291+3{,}898+4{,}482=18{,}002>18$.

Pág. 59

12. O distrito de Aveiro elege 16 deputados.

Vamos então dividir os votos de cada lista por 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , $\cdots$, 16 até encontrar os 16 maiores quocientes.

Lista / Divisor	PS	PPD-PSD	BE	CDS-PP	CDU	PAN	IL
1	120 839	118 141	35 068	20 045	10 738	10 424	3582
2	60 420	59 071	47534	10 023	5369		
3	40280	39380	11689				
4	30 210	29535	8767				
5	24 168	23 628					
6	20 140	19 690					
7	17 263	16 877					
8	15 105						
⋮							
16							

Não é necessário terminar a tabela pois já foram encontrados os 16 maiores quocientes.
Distribuição final dos mandatos de deputado:
PS: 7
PPD-PSD: 6
BE: 2
CDS-PP: 1
Os restantes partidos não elegeram nenhum deputado.

13. Como $p = 7$ o último divisor é o $13 = 7 \times 2 - 1$. Temos de dividir o número de funcionários de cada fábrica por 1, 3, 5, 7, 9, 11 e 13, até encontrar os 7 maiores quocientes.

Divisores	Quocientes		
1	1800,00	1200,00	480,00
3	600,00	400,00	160,00
5	360,00	240,00	96,00
7	257,14	171,43	68,57
9	200,00	133,33	53,33
11	163,64	109,09	43,64
13	138,46	92,31	36,92

Distribuição final:
Fábrica A: 4 engenheiros; Fábrica B: 2 engenheiros; Fábrica C: 1 engenheiro

1. Na tabela estão assinalados os 24 maiores quocientes.

Divisores	PPD/PSD	PS	CDS	CDU	PRD	PPM	UDP
1	2111828,0	1267672,0	868718,0	648700,0	250158	155990	52835
2	1055914,0	633836,0	434359,0	324350,0	125079	77995	26417,5
3	703942,7	422557,3	289572,7	216233,3	83386	51996,67	17611,67
4	527957,0	316918,0	217179,5	162175,0	62539,5	38997,5	13208,75
5	422365,6	253534,4	173743,6	129740,0	50031,6	31198	10567
6	351971,3	211278,7	144786,3	108116,7	41693	25998,33	8805,833
7	301689,7	181096,0	124102,6	92671,4	35736,86	22284,29	7547,857
8	263978,5	158459,0	108589,8	81087,5	31269,75	19498,75	6604,375
9	234647,6	140852,4	96524,2	72077,8	27795,33	17332,22	5870,556
10	211182,8	126767,2	86871,8	64870,0	25015,8	15599	5283,5
11	191984,4	115242,9	78974,4	58972,7	22741,64	14180,91	4803,182
12	175985,7	105639,3	72393,2	54058,3	20846,5	12999,17	4402,917

Distribuição: PPD/PSD: 10; PS: 6; CDS: 4; CDU: 3; PRD: 1; PPM: 0; UDP: 0

2. Na tabela estão assinalados os 32 maiores quocientes.

Divisores	PPD/PSD	PS	CDS	CDU	PRD	PPM	UDP
1	2111828,0	1267672,0	868718,0	648700,0	250158	155990	52835
2	1055914,0	633836,0	434359,0	324350,0	125079	77995	26417,5
3	703942,7	422557,3	289572,7	216233,3	83386	51996,67	17611,67
4	527957,0	316918,0	217179,5	162175,0	62539,5	38997,5	13208,75
5	422365,6	253534,4	173743,6	129740,0	50031,6	31198	10567
6	351971,3	211278,7	144786,3	108116,7	41693	25998,33	8805,833
7	301689,7	181096,0	124102,6	92671,4	35736,86	22284,29	7547,857
8	263978,5	158459,0	108589,8	81087,5	31269,75	19498,75	6604,375
9	234647,6	140852,4	96524,2	72077,8	27795,33	17332,22	5870,556
10	211182,8	126767,2	86871,8	64870,0	25015,8	15599	5283,5
11	191984,4	115242,9	78974,4	58972,7	22741,64	14180,91	4803,182
12	175985,7	105639,3	72393,2	54058,3	20846,5	12999,17	4402,917
13	162448,308	97513,231	66824,4615	49900	19242,92	11999,23	4064,231

Repare que se fossem 31 mandatos, o PPM ainda não teria direito a qualquer um. O quociente 155990 (que permite ao PPM ter 1 mandato) é o 32.º maior quociente da tabela. Serão então necessários mais 8 mandatos.

3. Na tabela estão assinalados os 24 maiores quocientes.

Divisores	PPD/PSD	PS	CDS	CDU	PRD	PPM	UDP
1	2111828	1267672	868718	648700	250158	155990	52835
3	703942,7	422557,3	289572,7	216233,3	83386	51996,67	17611,67
5	422365,6	253534,4	173743,6	129740	50031,6	31198	10567
7	301689,7	181096	124102,6	92671,43	35736,86	22284,29	7547,857
9	234647,6	140852,4	96524,22	72077,78	27795,33	17332,22	5870,556
11	191984,4	115242,9	78974,36	58972,73	22741,64	14180,91	4803,182
13	162448,3	97513,23	66824,46	49900	19242,92	11999,23	4064,231
15	140788,5	84511,47	57914,53	43246,67	16677,2	10399,33	3522,333
17	124225,2	74568,94	51101,06	38158,82	14715,18	9175,882	3107,941
19	111148,8	66719,58	45722	34142,11	13166,21	8210	2780,789
21	100563,2	60365,33	41367,52	30890,48	11912,29	7428,095	2515,952

Distribuição: PPD/PSD: 9; PS: 6; CDS: 4; CDU: 3; PRD: 1; PPM: 1; UDP: 0

4. Os métodos produzem resultados diferentes. Com o método de Sainte-Laguë, o PPM consegue um deputado (este método, comparativamente com o de Hondt, favorece os partidos mais pequenos).

1.1.

	A	B	C	D	E
1	23400	17600	14950	12200	5500
3	7800	5866,7	4983,3	4066,7	1833,3
5	4680	3520	2990	2440	1100
7	3342,9	2514,3	2135,7	1742,9	785,7

1.2. Na tabela estão assinalados os 10 maiores quocientes.

	A	B	C	D	E
1	23400	17600	14950	12200	5500
3	7800	5866,7	4983,3	4066,7	1833,3
5	4680	3520	2990	2440	1100
7	3342,9	2514,3	2135,7	1742,9	785,7

I – a); II – b); III – a); IV – a)

2.1. Opção correta: **(C)**

$$\frac{200}{90+200+130} \times 5 = 2{,}38$$

2.2. Na tabela estão assinalados os 5 maiores quocientes.

Divisores	X	Y	Z
1	90,0	200,0	130,0
2	45,0	100,0	65,0
3	30,0	66,7	43,3
4	22,5	50,0	32,5

Distribuição: X: 1; Y: 3; Z: 1

1. $120 + 100 + 94 + 146 = 460$

Divisor-padrão $= \frac{460}{12} \approx 38{,}3$

2. Lista A: $\frac{120}{38{,}3} \approx 3{,}133$; Lista B: $\frac{100}{38{,}3} \approx 2{,}611$; Lista C: $\frac{94}{38{,}3} \approx 2{,}454$; Lista D: $\frac{146}{38{,}3} \approx 3{,}812$

3.

Lista	Quota inferior	Quota superior
A	3	4
B	2	3
C	2	3
D	3	4

Pág. 68

14. Representantes para distribuir = 200

Divisor-padrão = 0,1203

País	Número de habitantes (em milhões)	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º representantes
A	10,5	87,28	87	0,28	87
B	8,8	73,15	73	0,15	73
C	4,76	39,57	39	0,57	39 + 1 = 40
Total	**24,06**		**199** (sobra 1 representante)		**200**

Distribuição final

País A: 87 representantes; país B: 73 representantes; país C: 40 representantes

Pág. 69

15. Lugares para distribuir = 20

Divisor-padrão = 36,5

De acordo com o método vamos obter a seguinte tabela:

Nível de ensino	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º lugares
1.º ciclo	1,10	1	0,10	1
2.º ciclo	3,29	3	0,29	3
3.º ciclo	6,03	6	0,03	6
Secundário	9,59	9	0,59	9 + 1 = 10
Total		**19** (sobra 1 lugar)		**20**

Distribuição final

1.º ciclo: 1 representante; 2.º ciclo: 3 representantes; 3.º ciclo: 6 representantes; Ensino Secundário: 10 representantes

Pág. 70

1.

	Norte	Centro	Vale do Tejo	Sul	Ilhas
1	**1262,0**	**810,0**	**946,0**	**588,0**	**465**
2	**631,0**	**405,0**	**473,0**	294,0	232,5
3	**420,7**	270,0	**315,3**	196,0	155
4	**315,5**	202,5	236,5	147,0	116,25
5	252,4	162,0	189,2	117,6	93
6	210,3	135,0	157,7	98,0	77,5

Hondt

Distribuição: Norte: 4; Centro: 2; Vale do Tejo: 3; Sul: 1; Ilhas: 1

Hamilton:

Divisor-padrão	370,0909

Lista	Número de votos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
Norte	1262	3,4100	3	0,4100		3
Centro	810	2,1887	2	0,1887		2
Vale do Tejo	946	2,5561	2	0,5561	1	3
Sul	588	1,5888	1	0,5888	1	2
Ilhas	465	1,2564	1	0,2564		1
Total	**4071**		**9**			

Sobram 2 lugares

Distribuição: Norte: 3; Centro: 2; Vale do Tejo: 3; Sul: 2; Ilhas: 1

Conclusão:

Lista mais beneficiada: Sul

Lista mais prejudicada: Norte

Pág. 71

1. Opção correta: **(B)**

$30 + 12 + 8 + 18 + 22 = 90$

$90 : 80 = 1,125$

2.

26,667	26
10,667	10
7,111	7
16	16
19,556	19

3. Opção correta: **(C)**

$26 + 10 + 7 + 16 + 19 = 78$

$80 - 78 = 2$

4. I – c) ; II – a); III – a) ; IV – a)

Departamento	Número de professores	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de *tablets* extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
Ciências Experimentais	30	26,6667	26	0,6667	1	27
Ciências Sociais e Humanas	12	10,6667	10	0,6667	1	11
Expressões	8	7,1111	7	0,1111		7
Línguas	18	16,0000	16	0,0000		16
Matemática e Informática	22	19,5556	19	0,5556		19
Total	**90**		**78**			**80**

Sobram 2 *tablets*

5. Ciências experimentais: 27; Ciências sociais e humanas: 11; Expressões: 7; Línguas: 16; Matemática e Informática: 19

Pág. 72

1. Divisor-padrão = $\frac{13\,996}{10} = 1399,6$

Quotas-padrão:

Belos Ares: $\frac{6010}{1399,6} \approx 4,294$; Planar: $\frac{5980}{1399,6} \approx 4,273$;

Voar Air: $\frac{2006}{1399,6} \approx 1,433$

2.

Companhia aérea	Número de passageiros	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de *slots* extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
Belos Ares	6010	4,7235	4	0,7235	1	5
Planar	5980	4,6999	4	0,6999	1	5
Voar Air	2006	1,5766	1	0,5766		1
Total	**13996**		**9**			

Sobram 2 *slots*

Distribuição: Belos Ares: 5 *slots*; Planar: 5 *slots*; Voar Air: 1 *slot*

Com o aumento do número total de slots, a companhia Voar Air perde um *slot* (situação paradoxal).

16.1.

Divisor-padrão	140,0000

Expositor	Número de livros	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	Metros quadrados extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
L	600	4,2857	4	0,2857		4
F	200	1,4286	1	0,4286	1	2
P	600	4,2857	4	0,2857		4
Total	1400		9			10

Sobram 1 m.q.

Distribuição: L : 4 ; F : 2 ; P : 4

16.2.

Divisor-padrão	127,2727

Expositor	Número de livros	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	Metros quadrados extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
L	600	4,7143	4	0,7143	1	5
F	200	1,5714	1	0,5714		1
P	600	4,7143	4	0,7143	1	5
Total	1400		9			11

Sobram 2 m.q.

Distribuição: L : 5 ; F : 1 ; P : 5
Com o aumento da área, o expositor "A Folha" perde 1 metro quadrado (paradoxo de Alabama).

17. Antes do aumento:

Divisor-padrão	18,0000

Auditório	Capacidade	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de computadores extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
Pitágoras	150	8,3333	8	0,3333		8
Leibniz	175	9,7222	9	0,7222	1	10
Euclides	78	4,3333	4	0,3333		4
Newton	295	16,3889	16	0,3889	1	17
Al-Khwarizmi	202	11,2222	11	0,2222		11
Total	900		48			

Sobram 2 computadores

Depois do aumento:

Divisor-padrão	18,2000

Auditório	Capacidade	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de computadores extra (a atribuir à maior parte decimal) 1	Total a atribuir
Pitágoras	150	8,2418	8	0,2418		8
Leibniz	184	10,1099	10	0,1099		10
Euclides	78	4,2857	4	0,2857	1	5
Newton	296	16,2637	16	0,2637		16
Al-Khwarizmi	202	11,0989	11	0,0989		11
Total	910		49			

Sobra 1 computadores

O auditório Newton aumentou a sua capacidade mas perdeu 1 computador para o auditório Euclides, embora este não tenha aumentado a sua capacidade (paradoxo da População).

18. Sem a filial C :

Divisor-padrão	116,2500

Filial	Número de votos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares extra (a atribuir à maior parte decimal) 1	Total a atribuir
A	520	4,4731	4	0,4731		4
B	1340	11,5269	11	0,5269	1	12
Total	1860		15			

Sobra 1 lugares

Com a filial C :

Divisor-padrão	118,4211

Filial	Número de votos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares extra (a atribuir à maior parte decimal) 1	Total a atribuir
A	520	4,3911	4	0,3911	1	5
B		11,3156	11	0,3156		11
C	1340	3,2933	3	0,2933		3
Total	2250		18			

Sobra 1 lugares

Conclusão: A filial B perde um lugar e a filial A ganha um lugar (paradoxo do Novo Estado).

1.

Divisor-padrão	186,3333

Centro	Lotação	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de desfibrilhadores extra (a atribuir à maior parte decimal) 2	Total a atribuir
A	1650	8,8551	8	0,8551	1	9
B	1226	6,5796	6	0,5796	1	7
C	478	2,5653	2	0,5653		2
Total	3354		16			

Sobram 2 desfibrilhadores

Distribuição: Centro A : 9 ; Centro B : 7 ; Centro C : 2

2.1. Centro A: $\frac{1760-1650}{1650}\times 100 \approx 6{,}7\%$;

Centro B: $\frac{1522-1226}{1226}\times 100 \approx 24{,}1\%$;

Centro C: $\frac{500-478}{478}\times 100 \approx 4{,}6\%$

2.2.

Divisor-padrão	210,1111

Centro	Lotação	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de desfibrilhadores extra (a atribuir à maior parte decimal)	Total a atribuir
					1	
A	1760	8,3765	8	0,3765		8
B	1522	7,2438	7	0,2438		7
C	500	2,3797	2	0,3797	1	3
Total	3782		17			

Sobra 1 desfibrilhador

Distribuição: Centro A: 8; Centro B: 7; Centro C: 3
O Centro A teve uma maior percentagem de aumento da lotação do que o Centro C, mas perde 1 desfibrilhador para este.

1. Opção correta: **(B)**
$\frac{101+85+10}{30}\approx 6{,}5$

2. Opção correta: **(C)**
$\frac{108+86+11}{30}\approx 6{,}8$

3. Ortopedia (n.º de lugares: 12 ; quota-padrão: $\frac{86}{6{,}8}\approx 12{,}6$)

4. Medicina geral: $\frac{108-101}{101}\times 100 \approx 6{,}9\%$

Ortopedia: $\frac{86-85}{85}\times 100 \approx 1{,}2\%$

Obstetrícia: $\frac{11-10}{10}\times 100 = 10\%$

5. Opção correta: **(D)**
Ortopedia perde um lugar para Medicina Geral, mas o seu crescimento relativo também foi inferior. Esta situação não se enquadra em nenhum dos três paradoxos estudados.

1. Divisor-padrão: $\frac{400+800+104+96}{10}=140$

Quotas-padrão:
A: $\frac{400}{140}\approx 2{,}857$; B: $\frac{800}{140}\approx 5{,}714$; C: $\frac{104}{140}\approx 0{,}743$; D: $\frac{96}{140}\approx 0{,}686$

Quotas arredondadas:
A: $2+1=3$; B: $5+1=6$; C: $0+1=1$; D: $0+1=1$
Total: $3+6+1+1=11$ (superior ao número de mandatos)

1.º divisor modificado: $140+10=150$

Quotas-padrão:
A: $\frac{400}{150}\approx 2{,}667$; B: $\frac{800}{150}\approx 5{,}333$; C: $\frac{104}{150}\approx 0{,}693$;
D: $\frac{96}{150}=0{,}64$

Quotas arredondadas:
A: $2+1=3$; B: $5+1=6$; C: $0+1=1$; D: $0+1=1$
Total: $3+6+1+1=11$ (superior ao número de mandatos)

2.º divisor modificado: $140+10+10=160$

Quotas-padrão:
A: $\frac{400}{160}=2{,}5$; B: $\frac{800}{160}=5$; C: $\frac{104}{160}=0{,}65$; D: $\frac{96}{160}=0{,}6$

Quotas arredondadas:
A: $2+1=3$; B: $4+1=5$; C: $0+1=1$; D: $0+1=1$
Total: $3+5+1+1=10$ (igual ao número de mandatos)

Distribuição final: A: 3; B: 5; C: 1; D: 1

19. Lugares para distribuir = 20
Divisor-padrão = 36,5

Nível de ensino	Número de alunos	Quota-padrão	Quota inferior
1.º Ciclo	40	1,0959	1
2.º Ciclo	120	3,2877	3
3.º Ciclo	220	6,0274	6
Secundário	350	9,5890	9
Total	730		19

Temos de procurar um divisor de modo a que o total seja igual a 20. Neste método, o divisor modificado é sempre menor que o divisor-padrão.

Por exemplo:
Divisor modificado = 35

Nível de ensino	Número de alunos	Quota modificada	Quota modificada inferior
1.º Ciclo	40	1,1429	1
2.º Ciclo	120	3,4286	3
3.º Ciclo	220	6,2857	6
Secundário	350	10,0000	10
Total	730		20

Distribuição final
1.º ciclo: 1 representante; 2.º ciclo: 3 representantes; 3.º ciclo: 6 representantes; Ensino Secundário: 10 representantes. Os resultados produzidos pelos dois métodos são iguais.

20. Aplicando o método temos:
Dinheiro para distribuir = 200
Divisor-padrão = 6,45

Instituição	Número de pessoas	Quota-padrão	Quota superior
Centro de dia para a 3.ª idade	480	74,4186	75
Apoio a crianças carenciadas	500	77,5194	78
Apoio a jovens desempregados	310	48,0620	49
Total	1290		202

Temos de procurar um divisor de modo a que o total seja igual a 200 . Neste método, o divisor modificado é sempre maior do que o divisor-padrão.

Por exemplo:
Divisor modificado = 6,49

Instituição	Número de pessoas	Quota modificada	Quota modificada superior
Centro de dia para a 3.ª idade	480	73,9599	74
Apoio a crianças carenciadas	500	77,0416	78
Apoio a jovens desempregados	310	47,7658	48
Total	1290		200

Distribuição final
Centro de dia para a 3.ª idade: 74 000 euros; apoio a crianças carenciadas: 78 000 euros; apoio a jovens desempregados: 48 000 euros.

1.1. Leila: 10 prémios; Daniela: 6 prémios; Mateus: 5 prémios; Rafaela: 1 prémio

Método de Hamilton
Prémios para distribuir = 22
Divisor-padrão = 40,3636

Aluno	Número de pontos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de prémios
Leila	400	9,91	9	0,910	9 + 1 = 10
Daniela	225	5,57	5	0,574	5 + 1 = 6
Mateus	200	4,95	4	0,955	4 + 1 = 5
Rafaela	63	1,56	1	0,561	1
Total	**888**		**19**		**22**

sobram 3 prémios

1.2. Leila: 10 prémios; Daniela: 6 prémios; Mateus: 5 prémios; Rafaela: 1 prémio

Método de Jefferson
Prémios para distribuir = 22
Divisor-padrão = 40,364

Aluno	Número de pontos	Quota-padrão	Quota inferior
Leila	400	9,9099	9
Daniela	225	5,5743	5
Mateus	200	4,9550	4
Rafaela	63	1,5608	1
Total	**888**		**19**

Temos de procurar um divisor de modo a que o total seja igual a 22 . Neste método, o divisor modificado é sempre menor do que o divisor-padrão. Por exemplo:
Divisor modificado = 37

Aluno	Número de pontos	Quota modificada	Quota modificada inferior
Leila	400	10,8108	10
Daniela	225	6,0811	6
Mateus	200	5,4054	5
Rafaela	63	1,7027	1
Total	**888**		**22**

2. Pelo método de Hamilton:
Prémios para distribuir = 22
Divisor-padrão = 40,6

Aluno	Número de pontos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota padrão	N.º de prémios
Leila	400	9,85	9	0,854	9 + 1 = 10
Daniela	225	5,54	5	0,543	5
Mateus	205	5,05	5	0,050	5
Rafaela	63	1,55	1	0,552	1 + 1 = 2
Total	**893**		**20**		**22**

sobram 2 prémios

Distribuição final
Leila: 10 prémios; Daniela: 5 prémios; Mateus: 5 prémios; Rafaela: 2 prémios
O aumento da pontuação do Mateus fez com que a Daniela "perdesse" um prémio para a Rafaela. Isto acontece pois os valores das quotas-padrão são alterados e, consequentemente, também as suas partes decimais (o que influencia a distribuição dos prémios que sobram).
Voltando a aplicar o método de Jefferson, obtém-se:

Divisor-padrão = 40,6

Aluno	Número de pontos	Quota-padrão	Quota inferior
Leila	400	9,85	9
Daniela	225	5,54	5
Mateus	205	5,05	5
Rafaela	63	1,55	1
Total	**893**		**20**

Temos de procurar um divisor de modo a que o total seja igual a 22 . O divisor modificado é sempre menor que o divisor-padrão. Por exemplo:
Divisor modificado = 37

Aluno	Número de pontos	Quota modificada	Quota modificada inferior
Leila	400	10,81	10
Daniela	225	6,08	6
Mateus	205	5,54	5
Rafaela	63	1,70	1
Total	**893**		**22**

Como podemos observar, utilizando o método de Jefferson, a distribuição permaneceu inalterada.

3. Utilizando o método de Hamilton, o aumento da pontuação do Mateus fez com que a Daniela perdesse um prémio para a Rafaela. Utilizando o método de Jefferson, a distribuição permaneceu inalterada.

4.

Divisor-padrão	40,3636

Aluno	Número de pontos	Quota-padrão	Quota superior
Leila	400	9,9099	10
Daniela	225	5,5743	6
Mateus	200	4,9550	5
Rafaela	63	1,5608	2
Total	**888**		**23**

Excesso de 1 prémio

Com o divisor modificado 44,5:

Aluno	Número de pontos	Quota modificada	Quota modificada superior
Leila	400	8,9888	9
Daniela	225	5,0562	6
Mateus	200	4,4944	5
Rafaela	63	1,4157	2
Total	**888**		**22**

Distribuição: Leila: 9 prémios; Daniela: 6 prémios; Mateus: 5 prémios; Rafaela: 2 prémios
Mais beneficiado: Rafaela (pois recebe mais um prémio)
Mais prejudicado: Leila (pois recebe menos um prémio)

1. Opção correta: **(D)**

$$\frac{1040+700+250}{53} \approx 37,55$$

2. **Jefferson:**

Escola	Número de alunos	Quota-padrão	Quota inferior
A	1040	27,6985	27
B	700	18,6432	18
C	250	6,6583	6
Total	**1990**		**51**

Ficam 2 por atribuir.

Adams:

Escola	Número de alunos	Quota-padrão	Quota superior
A	1040	27,6985	28
B	700	18,6432	19
C	250	6,6583	7
Total	**1990**		**54**

Há excesso de 1 videoprojetor.

3. **Método de Adams**
Temos de procurar um divisor de modo a que o total seja igual a 53. O divisor modificado é sempre maior do que o divisor-padrão. Por exemplo:
Divisor modificado $= 38{,}8$

Escola	Número de alunos	Quota modificada	Quota modificada superior
A	1040	26,8041	27
B	700	18,0412	19
C	250	6,4433	7
Total	**1990**		**53**

Distribuição final
Escola A: 27 videoprojetores; escola B: 19 videoprojetores; escola C: 7 videoprojetores

4. I – b) ; II – b) ; III – a)
Método de Jefferson:
Temos de procurar um divisor de modo a que o total seja igual a 53. O divisor modificado é sempre menor que o divisor-padrão. Por exemplo:
Divisor modificado $= 36$

Escola	Número de alunos	Quota modificada	Quota modificada inferior
A	1040	28,8889	28
B	700	19,4444	19
C	250	6,9444	6
Total	**1990**		**53**

Distribuição final
Escola A: 28 videoprojetores; Escola B: 19 videoprojetores; Escola C: 6 videoprojetores

Pág. 88

1. A: 3; B: 3; C: 2; D: 4

2. Não, $3+3+2+4=12$.

3.

	Quota inferior	Quota superior
A	2	3
B	3	4
C	2	3
D	3	4

4.

A	2,449
B	3,464
C	2,449
D	3,464

5. Lista A, B e D

6. Lista A: 3; Lista B: 4; Lista C: 2; Lista D: 4

Pág. 90

21. **Aplicando o método de Webster temos:**
Dinheiro para distribuir $= 200$
Divisor-padrão $= 6{,}45$

Instituição	Número de pessoas	Quota-padrão	Quota arredondada
Centro de dia para a 3.ª idade	480	74,42	74
Apoio a crianças carenciadas	500	77,52	78
Apoio a jovens desempregados	310	48,06	48
Total	**1290**		**200**

Distribuição:
Centro de dia para a 3.ª idade: 74 000 euros; Apoio a crianças carenciadas: 78 000 euros; Apoio a jovens desempregados: 48 000 euros.
Aplicando os métodos de Adams de Webster obtivemos os mesmos resultados.

Pág. 93

22. Aplicando o método de Hill-Huntington para a situação descrita, temos:
Lugares para distribuir $= 10$
Divisor-padrão $= 15{,}4$

Escalão	Número de futebolistas	Quota-padrão	*M*	Quota arredondada pela regra H-H
Petizes	30	1,95	1,41	2
Traquinas	52	3,38	3,46	3
Benjamins	32	2,08	2,45	2
Infantis	40	2,60	2,45	3
Total	**154**			**10**

Distribuição: Petizes: 2; Traquinas: 3; Benjamins: 2; Infantis: 3

Pág. 94

1.1. O divisor-padrão é 400. Significa que existe um elemento/representante por cada 400 produtores de cacau.
$\frac{360+4610+5030}{25}=400$

1.2. **a)** Aplicando o método de Hill-Huntington temos:
Lugares para distribuir $= 25$
Divisor-padrão $= 400$

País	Número de produtores	Quota-padrão	*M*	Quota arredondada pela regra H-H
Alfa	360	0,9000	0,0000	1
Beta	4610	11,5250	11,4891	12
Ómega	5030	12,5750	12,4900	13
Total	**10 000**			**26**

Como há excesso de lugares temos de encontrar um divisor modificado maior do que o divisor-padrão, por exemplo:
Divisor modificado $= 401{,}5$

País	Número de produtores	Quota modificada	*M*	Quota modificada arredondada pela regra H-H
Alfa	360	0,8966	0,0000	1
Beta	4610	11,4819	11,4891	11
Ómega	5030	12,5280	12,4900	13
Total	**10 000**			**25**

Distribuição final
Alfa: 1 representante; Beta: 11 representantes; Ómega: 13 representantes.

b) Aplicando o método de Jefferson
Lugares para distribuir $= 25$
Divisor-padrão $= 400$

País	Número de produtores	Quota-padrão	Quota inferior
Alfa	360	0,9000	0
Beta	4610	11,5250	11
Ómega	5030	12,5750	12
Total	**10 000**		**23**

Temos de encontrar um divisor modificado, por exemplo:
Divisor modificado $= 380$

País	Número de produtores	Quota modificada	Quota modificada inferior
Alfa	360	0,9474	0
Beta	4610	12,1316	12
Ómega	5030	13,2368	13
Total	**10 000**		**25**

Distribuição final
Alfa: 0 representantes; Beta: 12 representantes; Ómega: 13 representantes.

1.3. Com a aplicação do método de Jefferson, o país Alfa fica sem qualquer representante no corpo administrativo. Nesta situação, a aplicação do método de Hill-Huntington seria mais benéfica para o país Alfa e, de certa forma, até mais justa, pois o número de produtores deste país está "próximo" do valor do divisor-padrão, que nos indica que, teoricamente, deveria existir um representante por cada 400 produtores.

2.1. $\frac{80+200+130+100}{5}=102$

2.2.

Lista	Número de votos	Quota-padrão	Quota inferior	Quota superior	Média geométrica	Distribuição
M	80	0,7843	0	1	0,0000	1
A	200	1,9608	1	2	1,4142	2
X	130	1,2745	1	2	1,4142	1
I	100	0,9804	0	1	0,0000	1
Total	**510**					**5**

Distribuição: M : 1 ; A : 2 ; X : 1 ; I : 1

2.3. Não, pois o número de lugares fica logo distribuído com o divisor-padrão 102 .

Pág. 95

1. divisor-padrão: $\frac{386}{16}=24,125$

Quotas-padrão:

Sub-13: $\frac{34}{24,125}=1,409$; Sub-15: 4,062 ; Sub-17: 4,560 ;

Sub-19: 5,969

2.

1	2	1,414
4	5	4,472
4	5	4,472
5	6	5,477

3. Sub-13: 1 ; Sub-15: 4 ; Sub-17: 5 ; Sub-19: 6

4. Afirmação falsa.
Webster

Divisor-padrão	24,1250

Escalão	Número de praticantes	Quota-padrão	Quota arredondada
Sub-13	34	1,4093	1
Sub-15	98	4,0622	4
Sub-17	110	4,5596	5
Sub-19	144	5,9689	6
Total	**386**		**16**

Tarefas Complementares

Pág. 100-109

1.1. **a)** Maioria simples

b) Elina Fraga com aproximadamente 34% .

$\frac{6\,510}{19\,245}\times 100\approx 34\%$

1.2. **a)** Sim. Listas A e F .

b) 10360

$\frac{20\,719}{2}+1=10360,5$

c) Fernando de Almeida Pinheiro

2.1.

Pratos	N.º de votos na primeira preferência
P_1	1
P_2	1
P_3	1
P_4	2
P_5	1

O prato P_4 (rojões à minhota).

2.2. Dois elementos do júri escolheram P_1 como terceira preferência.

$\frac{2}{6}\approx 0,333$

Aproximadamente, 33,3% .

2.3.

Pratos	Número de pontos
P_1	$5+4+1+3+3+1=17$
P_2	$2+2+3+2+4+5=18$
P_3	$4+5+2+4+1+4=20$
P_4	$1+3+5+1+5+3=18$
P_5	$3+1+4+5+2+2=17$

O vencedor pelo método de Borda é o prato P_3 (tripas à moda do Porto), com 20 pontos.
Resposta correta: **(B)**

2.4.

Pratos	Número de pontos
P_1	$4+3+1+2+2+1=13$
P_2	$2+2+2+2+3+4=15$
P_4	$1+3+4+1+4+3=16$
P_5	$3+1+3+4+1+2=14$

O vencedor pelo Método de Borda é o prato P_4 (rojões à minhota), com 16 pontos.

3.1. $700+1100+250+1345=3395$
Votaram 3395 associados.

3.2. $\frac{5200-3395}{5200}=\frac{1805}{5200}\approx 0,347$

Abstenção: aproximadamente, 34,7%
Resposta correta**:** **(D)**

3.3.

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
A	1100
B	$700+250=950$
C	1345

Como nenhum dos candidatos obteve mais de 50% dos votos, ninguém obteve maioria absoluta. Vamos ficar só com os dois mais votados (A e C).

Distribuição dos votos
A : $700+1100=1800$
C : $250+1345=1595$
O candidato vencedor foi o A com 1800 votos.

3.4.

A *vs* B	A	$1100+1345=2445$	Vence A
	B	$700+250=950$	
A *vs* C	A	$700+1100=1800$	Vence A
	C	$250+1345=1595$	
B *vs* C	B	$700+250=950$	Vence C
	C	$1100+1345=2445$	

Candidato A: 2 vitórias; candidato B: nenhuma vitória; candidato C: 1 vitória
Vencedor: candidato A (e é um Vencedor de Condorcet).

4.1. $25+16+18+20+12=111$ alunos

4.2. Pavlova com aproximadamente 36,9%.
$\frac{25+16}{111}\times 100\approx 36,9\%$

4.3. **a)** Empate entre Pavlova e Cheesecake
P: $25\times3+16\times3+18\times2+20\times1+12\times2+20\times1=223$ pontos
C: $25\times1+16\times2+18\times3+20\times3+12\times1+20\times2=223$ pontos
M: $25\times2+16\times1+18\times1+20\times2+12\times3+20\times3=220$ pontos

b) Não há vencedor

P *vs* M	P	$25+16+18=59$	Vence P
	M	$20+12+20=52$	
P *vs* C	P	$25+16+12=53$	Vence C
	C	$18+20+20=58$	
C *vs* M	C	$16+18+20=54$	Vence M
	M	$25+12+20=57$	

c) Afirmação falsa (P vence M e M vence C, mas P não vence C)

5.1. $40+68+81=189$

Joana: $\frac{40}{189}\times100\approx21,2\%$; Marisa: $\frac{68}{189}\times100\approx36,0\%$;

Clara: $\frac{81}{189}\times100\approx42,9\%$

5.2. Opção correta: **(B)**

6.1. $2+8+17+20+27=74$
Resposta correta: **(C)**

6.2.

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
A	$2+20=22$
B	27
C	17
D	8

$\frac{27}{74}\approx0,365$

Candidato B com, aproximadamente, 36,5% de primeiras preferências.

6.3.

Candidatos	N.º de votos na última preferência
A	0
B	$8+17+20=45$
C	27
D	2

Candidato B (45 vezes votado como última preferência).

6.4. O candidato B com (maioria simples) 27 votos.

6.5. Como nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta na primeira preferência, ou seja pelo menos 38 votos, vamos reordenar a tabela ficando apenas com os dois candidatos mais votados na primeira preferência (o A e o B).

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
A	$2+8+17+20=47$
B	27

O vencedor é o candidato A, com 47 votos.

6.6. Como nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta na primeira preferência, ou seja, pelo menos 38 votos, vamos reordenar a tabela eliminando o candidato menos votado na primeira preferência (o D).

Ordem de preferência	Número de votos				
	2	8	17	20	27
1.ª	A	C	C	A	B
2.ª	B	A	A	C	A
3.ª	C	B	B	B	C

A	$2+20=22$
B	27
C	$8+17=25$

Como nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta na primeira preferência, ou seja, pelo menos 38 votos, vamos reordenar a tabela eliminando o candidato menos votado na primeira preferência (o A).

Ordem de preferência	Número de votos				
	2	8	17	20	27
1.ª	B	C	C	C	B
2.ª	C	B	B	B	C

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
B	$2+27=29$
C	$8+17+20=45$

O vencedor é o candidato C, com 45 votos.

6.7.

Candidatos	Número de pontos
A	$2\times4+8\times2+17\times3+20\times4+27\times2=209$
B	$2\times3+8\times1+17\times1+20\times1+27\times4=159$
C	$2\times2+8\times3+17\times4+20\times2+27\times1=163$
D	$2\times1+8\times4+17\times2+20\times3+27\times3=209$

Não existe vencedor pelo método de Borda (empate entre A e D, tendo ambos 209 pontos).

6.8.

A *vs* B	A	$2+8+17+20=47$	Vence A
	B	27	
A *vs* C	A	$2+20+27=49$	Vence A
	C	$8+17=25$	
A *vs* D	A	$2+17+20=39$	Vence A
	D	$8+27=35$	

Não é necessário fazer os restantes 3 confrontos diretos pois o candidato A ganhou a todos os outros candidatos, logo, o candidato A é Vencedor de Condorcet.

7.1.

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
D. Henrique	12
Barracuda	8
Páteo	$x+5$

Se o Páteo foi o menos votado terá de ter menos de 8 votos, assim o valor possível, dentro das opções apresentadas é o 2 $(2+5<8)$.
Resposta correta: **(A)**

7.2. Considerando $x=6$ temos:

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
D. Henrique	12
Barracuda	8
Páteo	$6+5=11$

Número total de votos: $12+8+11=31$

$\frac{31}{2}=15{,}5$

Como nenhum dos restaurantes obteve maioria absoluta na primeira preferência, ou seja pelo menos 16 votos, vamos eliminar o restaurante menos votado (o Barracuda) e reordenar a tabela.

Ordem de preferência	Número de votos			
	12	8	6	5
1.ª	D. Henrique	D. Henrique	Páteo	Páteo
2.ª	Páteo	Páteo	D. Henrique	D. Henrique

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
D. Henrique	$12+8=20$
Páteo	$6+5=11$

De acordo com o método, o restaurante escolhido pelos amigos foi o D. Henrique, com 20 votos.

8.1.

	Maria	Bruno	Clara	Joana	Diogo
1.º	Z	R	P	L	L
2.º	R	A	R	A	P
3.º	A	L	A	R	R
4.º	P	Z	L	Z	Z
5.º	L	P	Z	P	A

8.2. A cidade vencedora foi Londres, com 2 votos na primeira preferência.

8.3.

Candidatos	Número de pontos
Z	$5+2+1+2+2=12$
R	$4+5+4+3+3=19$
A	$3+4+3+4+1=15$
P	$2+1+5+1+4=13$
L	$1+3+2+5+5=15$

De acordo com a aplicação do método de Borda, a cidade onde vão passar férias é Roma, com 19 pontos.

9.1. O vencedor é o Ricardo, com 36 votos.

9.2. Ninguém obteve, pelo menos, 37 votos em primeira preferência, logo nenhum candidato alcançou maioria absoluta.

9.3.

Ricardo *vs* Nuno	Ricardo	36	Vence o Nuno
	Nuno	$32+5=37$	
Ricardo *vs* Constança	Ricardo	36	Vence a Constança
	Constança	$32+5=37$	
Nuno *vs* Constança	Nuno	32	Vence a Constança
	Constança	$36+5=41$	

Vence a Constança.

9.4.

Ricardo *vs* Nuno	Ricardo	36	Vence o Nuno
	Nuno	$32+5=37$	

O vencedor será o Nuno.

10.1. O vencedor foi o Martinho, com a maioria das aprovações, 5 .

10.2. Não, o Martinho continua a ser o preferido.

10.3. Martinho: $62{,}5\%=\frac{5}{8}$; Gonçalo: $50\%=\frac{4}{8}$; Tiago: $50\%=\frac{4}{8}$

11.1. Método de Hont

Divisores	Quocientes			
1	2412	1809	1205	906
2	1206,0	904,5	602,5	453,0
3	804,0	603,0	401,7	302,0
4	603,0	452,3	301,3	226,5
5	482,4	361,8	241,0	181,2
6	402,0	301,5	200,8	151,0
7	344,6	258,4	172,1	129,4
8	301,5	226,1	150,6	113,3

Distribuição final

Lista A: 3 representantes; lista B: 3 representantes; lista C: 1 representante; lista D: 1 representante.

11.2. Aplicando novamente o método, obtemos:

Divisores	Quocientes			
1	2412	1809	1206	906
2	1206,0	904,5	603,0	453,0
3	804,0	603,0	402,0	302,0
4	603,0	452,3	301,5	226,5

Nota: Não é necessário terminar a tabela, pois já foram encontrados os 8 maiores quocientes.

Distribuição final

Lista A: 3 representantes; lista B: 2 representantes; lista C: 2 representantes; lista D: 1 representante.

Observando os novos resultados, podemos afirmar que provocou alterações, a Lista C fez bem em ter pedido a recontagem.

11.3. Aplicando o método com $p=8$, vamos ter os divisores ímpares até ao $8\times2-1=15$.

Divisores	Quocientes			
1	2412,0	1809,0	1205,0	906,0
3	804,0	603,0	401,7	302,0
5	482,4	361,8	241,0	181,2
7	344,6	258,4	172,1	129,4
9	268,0	201,0	133,9	100,7
11	219,3	164,5	109,5	82,4
13	185,5	139,2	92,7	69,7
15	160,8	120,6	80,3	60,4

Distribuição final

Lista A: 3 representantes; lista B: 2 representantes; lista C: 2 representantes; lista D: 1 representante

Observando os resultados usando o método de Sainte-Laguë, podemos afirmar que os resultados são diferentes, a lista C iria "ganhar" um representante da lista B .

12.1. Opção correta: **(C)**

$31019-631-764=29624$

12.2. Opção correta: **(B)**

$\frac{54922-31019}{54922}\times100=43{,}52\%$

12.3.

	FAP	PS	PPD/PSD	PCP-PEV	BE	CDS-PP
1	**12528,0**	**11909,0**	**3358,0**	831,0	637	361
2	**6264,0**	**5954,5**	1679,0	415,5	318,5	180,5
3	**4176,0**	**3969,7**	1119,3	277,0	212,3333	120,3333
4	**3132,0**	**2977,3**	839,5	207,8	159,25	90,25
5	2505,6	2381,8	671,6	166,2	127,4	72,2
6	2088,0	1984,8	559,7	138,5	106,1667	60,16667

Distribuição: FAP: 4; PS: 4; PPD/PSD: 1; PCP-PEV: 0; BE: 0; CDS-PP: 0

12.4. Afirmação falsa

	FAP	PS	PPD/PSD	PCP-PEV	BE	CDS-PP
1	**12528**	**11909**	**3358**	831	637	361
3	**4176**	**3969,667**	1119,333	277	212,3333	120,3333
5	**2505,6**	**2381,8**	671,6	166,2	127,4	72,2
7	**1789,714**	**1701,286**	479,7143	118,7143	91	51,57143
9	1392	1323,222	373,1111	92,33333	70,77778	40,11111
11	1138,909	1082,636	305,2727	75,54545	57,90909	32,81818

Distribuição: FAP: 4; PS: 4; PPD/PSD: 1; PCP-PEV: 0; BE: 0; CDS-PP: 0

13. Método de Sainte-Laguë

Curso	N.º de alunos	Divisores				
		1	3	5	7	9
Ciências e Tecnologia	70	70	23,3	14	10	7,8
Ciências Socioeconómicas	45	45	15	9	6,4	5
Línguas e Humanidades	55	55	18,3	11	7,9	6,1
Artes Visuais	19	19	6,3	3,8	2,7	2,1

Verifica-se que o curso de Artes Visuais elege um representante e cada um dos outros três elege dois representantes.

Método de Sainte-Laguë modificado

Curso	N.º de alunos	Divisores				
		1,4	3	5	7	9
Ciências e Tecnologia	70	50	23,3	14	10	7,8
Ciências Socioeconómicas	45	32,1	15	9	6,4	5
Línguas e Humanidades	55	39,3	18,3	11	7,9	6,1
Artes Visuais	19	13,6	6,3	3,8	2,7	2,1

Verifica-se que o curso de Ciências e Tecnologia elege três representantes, os de Ciências Socioeconómicas e Línguas e Humanidades elegem dois cada e o de Artes Visuais não elege nenhum.

No método de Sainte-Laguë modificado, o primeiro divisor é o que não permite ao curso de Artes Visuais eleger representantes. Assim, a associação de estudantes deve usar o método de Sainte-Laguë para que todos os cursos tenham representantes.

14.1. $437+774+4286+3873+257=9627$

O país tem 9 627 000 habitantes.

14.2. Divisor-padrão $=\dfrac{9627}{140}=68,7643$

Resposta correta: **(C)**

14.3.

Estado	População (em milhares)	Quota-padrão
A	437	6,3550
B	774	11,2558
C	4286	62,3289
D	3873	56,3228
E	257	3,7374

14.4. **a)** Aplicando o método de Hamilton temos:

Estado	População (em milhares)	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota padrão	N.º lugares
A	437	6,3550	6	0,3550	$6+1=7$
B	774	11,2558	11	0,2558	11
C	4286	62,3289	62	0,3289	62
D	3873	56,3228	56	0,3228	56
E	257	3,7374	3	0,7374	$3+1=4$
Total	**9627**		**138**		**140**

sobram 2 lugares

Distribuição final

Estado A: 7 lugares; estado B: 11 lugares; estado C: 62 lugares; estado D: 56 lugares; estado E: 4 lugares.

b) Aplicando o método de Jefferson temos:

Divisor-padrão $=68,764$

Estado	População (em milhares)	Quota-padrão	Quota inferior
A	437	6,3550	6
B	774	11,2558	11
C	4286	62,3289	62
D	3873	56,3228	56
E	257	3,7374	3
Total	**9627**		**138**

Temos de encontrar outro divisor. Por exemplo:

Divisor modificado $=67$

Estado	População (em milhares)	Quota modificada	Quota modificada inferior
A	437	6,5524	6
B	774	11,5522	11
C	4286	63,9701	63
D	3873	57,8060	57
E	257	3,8358	3
Total	**9627**		**140**

Distribuição final

Estado A: 6 lugares; estado B: 11 lugares; estado C: 63 lugares; estado D: 57 lugares; estado E: 3 lugares.

15. **<u>Método de Hamilton</u>**

Número de lugares a distribuir: 7

Divisor-padrão $=1312,4286$

Partido	Número de votos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º mandatos
PPD/PSD	4279	3,2604	3	0,2604	3
PS	2861	2,1799	2	0,1799	2
PCP-PEV	1789	1,3631	1	0,3631	$1+1=2$
BE	258	0,1966	0	0,1966	0
Total	**9187**		**6**		**7**

sobra 1 mandato

<u>Método de Adams</u>

Divisor-padrão $=1312,4286$

Partido	Número de votos	Quota-padrão	Quota superior
PPD/PSD	4279	3,2604	4
PS	2861	2,1799	3
PCP-PEV	1789	1,3631	2
BE	258	0,1966	1
Total	**9187**		**10**

Temos de procurar outro divisor, por exemplo:

Divisor modificado $=1800$

Partido	Número de votos	Quota modificada	Quota modificada superior
PPD/PSD	4279	2,3772	3
PS	2861	1,5897	2
PCP-PEV	1789	0,9939	1
BE	258	0,1433	1
Total	**9187**		**7**

Distribuição final

Partido	Hondt	Hamilton	Adams
PPD/PSD	4	3	3
PS	2	2	2
PCP-PEV	1	2	1
BE	0	0	1

Nesta situação, o método de Hamilton continua a favorecer os partidos mais votados (ainda que menos do que o método de Hondt). Já o método de Adams favorece, claramente, o partido com menos votos.

16.1. Aplicando o método obtém-se a seguinte tabela:

Consultores para distribuir $=100$

Divisor-padrão $=100,45$

Universidade	Número de estudantes	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º consultores
UD	1055	10,5027	10	0,5027	$10+1=11$
UBM	8990	89,4973	89	0,4973	89
Total	**10 045**		**99**		**100**

sobra 1 consultor

Distribuição final

UD: 11 consultores; UBM: 89 consultores.

16.2. Com a introdução da UTC temos:

Consultores para distribuir $=107$

Divisor-padrão $=100,4206$

Universidade	Número de estudantes	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º consultores
UD	1055	10,5058	10	0,5058	10
UBM	8990	89,5235	89	0,5235	$89+1=90$
UTC	700	6,9707	6	0,9707	$6+1=7$
Total	10 745		**105**		**107**

sobram 2 consultores

Distribuição final
UD: 10 consultores; UBM: 90 consultores; UTC: 7 consultores.
Com a introdução de uma nova universidade com direito a um determinado número de consultores, existe alteração na distribuição relativa às outras universidades (a UD perde um consultor para a UBM). Estamos perante o chamado Paradoxo do Novo Estado.

17. Aplicando o método de Hamilton temos:
Veículos para distribuir = 16
Divisor-padrão = 62,45

Organismos	Número de membros	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º veículos
Polícia	485	7,7291	7	0,7291	8
Bombeiros	213	3,3944	3	0,3944	3
Proteção Civil	306	4,8765	4	0,8765	5
Total	**1004**		**14**		**16**

sobram 2 veículos

Distribuição final
Polícia: 8 veículos; Bombeiros: 3 veículos; Proteção Civil: 5 veículos

18. Método de Jefferson
Autocarros para distribuir = 130
Divisor-padrão = 1

Rota	Número de passageiros	Quota-padrão	Quota inferior
A	45,3	45,3000	45
B	31,07	31,0700	31
C	20,49	20,4900	20
D	14,16	14,1600	14
E	10,26	10,2600	10
E	8,72	8,7200	8
Total	**130**		**128**

Temos de encontrar outro divisor, por exemplo:
Divisor modificado = 0,973

Rota	Número de passageiros	Quota modificada	Quota modificada inferior
A	45,3	46,5403	46
B	31,07	31,9207	31
C	20,49	21,0510	21
D	14,16	14,5477	14
E	10,26	10,5409	10
E	8,72	8,9588	8
Total	**130**		**130**

Distribuição final
Rota A : 46 autocarros; rota B : 31 autocarros; rota C : 21 autocarros; rota D : 14 autocarros; rota E : 10 autocarros; rota F : 8 autocarros.

19. Método de Jefferson

Divisor-padrão	17847,6667

Partido	Número de votos	Quota-padrão	Quota inferior
PPD/PSD.CDS-PP	50634	2,8370	2
PS	40004	2,2414	2
JPP	8721	0,4886	0
CH	7727	0,4329	0
Total	**107086**		**4**

Sobram 2 lugares

Divisor modificado	13000

Lista	Número de votos	Quota modificada	Quota modificada inferior
PPD/PSD.CDS-PP	50634	3,8949	3
PS	40004	3,0772	3
JPP	8721	0,6708	0
CH	7727	0,5944	0
Total	**107086**		**6**

Confirma-se que o com o método de Jefferson a distribuição é igual.

20. Método de Hill-Huntington
Subgerentes para distribuir = 25
Divisor – padrão = 7,8

Localização das lojas	Vendas mensais (em milhares de euros)	Quota-padrão	M	Quota arredondada pela regra H-H
Braga	55	7,0513	7,4833	7
Coimbra	25	3,2051	3,4641	3
Lisboa	39	5,0000	5,4772	5
Porto	76	9,74	9,49	10
Total	**195**			**25**

Distribuição final
Braga: 7 subgerentes; Coimbra: 3 subgerentes; Lisboa: 5 subgerentes; Porto: 10 subgerentes.

21.1. Método de Webster
Livros para distribuir = 40
Divisor-padrão = 2,5

Género	Número de livros	Quota-padrão	Quota arredondada
Policial	40	16,00	16
Poesia	35	14,00	14
Romance	15	6,00	6
Científico	10	4,00	4
Total	**100**		**40**

Distribuição final
Policial: 16 livros; poesia: 14 livros; romance: 6 livros; científico: 4 livros.

21.2. Aplicando novamente o método de Webster com a atualização vamos obter:
Livros para distribuir = 43
Divisor-padrão = 2,32558

Género	Número de livros	Quota-padrão	Quota arredondada
Policial	40	17,20	17
Poesia	35	15,05	15
Romance	15	6,45	6
Científico	10	4,30	4
Total	**100**		**42**

Temos de procurar outro divisor, por exemplo:
Divisor modificado = 2,30

Género	Número de livros	Quota modificada	Quota modificada arredondada
Policial	40	17,39	17
Poesia	35	15,22	15
Romance	15	6,52	7
Científico	10	4,35	4
Total	**100**		**43**

Distribuição final
Policial: 17 livros ; poesia: 15 livros; romance: 7 livros; científico: 4 livros.

22.1. Quota-padrão (Clara): 6,5 . Pela aplicação do método de Hamilton, a Clara recebe, pelo menos, seis chocolates (quota inferior). Assim, é impossível cada uma das três filhas receber cinco chocolates.

22.2. Total de minutos de estudo por dia: 720

Divisor-padrão: $\frac{720}{15}=48$

Número médio de minutos de estudo diários da Clara:
$48\times6{,}5=312$ $312:60=5{,}2$ horas
$0{,}2\times60=12\,\text{min}$

A Clara estuda, por dia, em média, 5 horas e 12 minutos.

22.3. Número médio de minutos de estudo diários da Petra:
$48\times5{,}208=249{,}984$

Número médio de minutos de estudo diários da Liliana:
$720-312-249{,}984=158{,}016$

Quota-padrão da Liliana: $\frac{158{,}016}{48}=3{,}292$

A soma das partes inteiras é $6+5+3=14$, logo, falta atribuir um chocolate a quem tem a maior parte decimal da quota-padrão, neste caso, a Clara.
Portanto, a Clara vai receber sete chocolates.

Revê o que aprendeste

Pág. 110-111

1.1. Número total de votos: $278\,000$

$Pie3.14 \rightarrow \frac{35000}{278000}\times100\%\approx12{,}6\%$

$BeautyTales \rightarrow \frac{58000}{278000}\times100\%\approx20{,}9\%$

$NapierZilla \rightarrow \frac{75000}{278000}\times100\%\approx27{,}0\%$

$TuringCripto \rightarrow \frac{110000}{278000}\times100\%\approx39{,}6\%$

Os finalistas são os dois canais com maior percentagem de votos: *NapierZilla* e *TuringCripto*.

1.2. Podemos afirmar que o canal *TuringCripto* teve uma maioria relativa dos votos. No entanto, como não alcançou mais de 50% dos votos, não podemos dizer que obteve maioria absoluta.

1.3. Apesar de o canal *TuringCripto* ter obtido mais votos, isso não implica que seja o vencedor na final, pois os votantes poderão não ser os mesmos. Para além disso, as pessoas que votaram nos canais *Pie3.14* e *BeautyTales* (eliminados na semifinal) podem, na final, votar no canal *NapierZilla*, fazendo com que o canal *TuringCripto* seja derrotado.

2.1. P, com aproximadamente $44{,}4\%$.

$\frac{22+18}{22+30+18+20}\times100\approx44{,}4\%$

2.2. Não, pois o vencedor (R) teria apenas 30 votos, sendo necessário pelo menos $46=\frac{90}{2}+1$ para obter maioria absoluta.

2.3. **a)** $G:\ 22;\ R:\ 30;\ S:\ 18;\ P:\ 20$ (eliminado: S)
$G:\ 22;\ R:\ 30+18=48;\ P:\ 20$ (eliminado: P)
$G:\ 22+20=42;\ R:\ 30+18=48$ (vencedor: R)

Local escolhido: Refeitório

b) $G:\ 22\times4+30\times1+18\times2+20\times3=214$ pontos
$R:\ 22\times3+30\times4+18\times3+20\times1=260$ pontos
$S:\ 22\times2+30\times2+18\times4+20\times2=216$ pontos
$P:\ 22\times1+30\times3+18\times1+20\times4=210$ pontos

Local escolhido: Refeitório

3.1. Aplicando o método de Webster:
Planos de férias para distribuir $=100$
Divisor-padrão $=90$

Sucursal	Número de funcionários	Quota-padrão	Quota arredondada
A	2835	31,50	32
B	2625	29,17	29
C	2705	30,06	30
D	835	9,28	9
Total	**9000**		**100**

Distribuição final
Sucursal A: 32 planos de férias; sucursal B: 29 planos de férias; sucursal C: 30 planos de férias; sucursal D: 9 planos de férias.

3.2. Aplicando o método de Adams
Planos de férias para distribuir $=100$
Divisor-padrão $=90$

Sucursal	Número de funcionários	Quota-padrão	Quota superior
A	2835	31,5000	32
B	2625	29,1667	30
C	2705	30,0556	31
D	835	9,2778	10
Total	**9000**		**103**

Temos de procurar um divisor de modo a que o total seja igual a 100. Neste método, o divisor modificado é sempre maior do que o divisor-padrão. Por exemplo:
Divisor modificado $=92$

Sucursal	Número de funcionários	Quota modificada	Quota modificada superior
A	2835	31,8152	31
B	2625	28,5326	29
C	2705	29,4022	30
D	835	9,0761	10
Total	**9000**		**100**

Distribuição final
Sucursal A: 31 planos de férias; sucursal B: 29 planos de férias; sucursal C: 30 planos de férias; sucursal D: 10 planos de férias.
Os resultados obtidos pela aplicação dos dois métodos são diferentes. O método de Adams favoreceu a sucursal com menos funcionários.

4.1. Foram admitidos 8 enfermeiros para trabalhar em quatro andares.
Temos de dividir o número de camas de cada andar por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 até encontrar os 8 maiores quocientes.

Divisores	Quocientes			
1	127	13	107	80
2	63,5	6,5	53,5	40
3	42,3	4,3	35,7	26,7
4	31,8	3,3	26,8	20,0
5	25,4	2,6	21,4	16,0
6	21,2	2,2	17,8	13,3
7	18,1	1,9	15,3	11,4
8	15,9	1,6	13,4	10,0

Distribuição final:
Andar com 127 camas: três enfermeiros
Andar com 13 camas: nenhum enfermeiro
Andar com 107 camas: três enfermeiros
Andar com 80 camas: dois enfermeiros

4.2. Temos de continuar a encontrar quocientes até obter valores inferiores a 13.

Divisores	Quocientes			
1	127	13	107	80
2	63,5	6,5	53,5	40,0
3	42,3	4,3	35,7	26,7
4	31,8	3,3	26,8	20,0
5	25,4	2,6	21,4	16,0
6	21,2	2,2	17,8	13,3
7	18,1	1,9	15,3	11,4
8	15,9	1,6	13,4	10,0
9	14,1	1,4	11,9	8,9
10	12,7	1,3	10,7	8,0

Teriam de ser admitidos mais 16 enfermeiros, perfazendo um total de 24.

5. **Método de Hondt**

Divisores	Quocientes				
1	9061	7179	5259	3319	1182
2	4530,5	3589,5	2629,5	1659,5	591,0
3	3020,3	2393,0	1753,0	1106,3	394,0
4	2265,3	1794,8	1314,8	829,8	295,5
5	1812,2	1435,8	1051,8	663,8	236,4
6	1510,2	1196,5	876,5	553,2	197,0
7	1294,4	1025,6	751,3	474,1	168,9
8	1132,6	897,4	657,4	414,9	147,8
9	1006,8	797,7	584,3	368,8	131,3
10	906,1	717,9	525,9	331,9	118,2
11	823,7	652,6	478,1	301,7	107,5

Nota: Não foi necessário completar a tabela pois já foram encontrados os 26 maiores quocientes.

Método de Hamilton

Lugares para distribuir = 26

Divisor-padrão = 1000

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º de lugares
Oeste	9061	9,06	9	0,061	9
Este	7179	7,18	7	0,179	7
Norte	5259	5,26	5	0,259	5
Sul	3319	3,32	3	0,319	3 + 1 = 4
Noroeste	1182	1,18	1	0,18	1
Total	**26 000**		**25**		**26**

Método de Jefferson

Lugares para distribuir = 26

Divisor-padrão = 1000

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota-padrão	Quota inferior
Oeste	9061	9,0610	9
Este	7179	7,1790	7
Norte	5259	5,2590	5
Sul	3319	3,3190	3
Noroeste	1182	1,1820	1
Total	**26 000**		**25**

Divisor modificado = 905

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota modificada	Quota modificada inferior
Oeste	9061	10,0122	10
Este	7179	7,9326	7
Norte	5259	5,8110	5
Sul	3319	3,6674	3
Noroeste	1182	1,3061	1
Total	**26 000**		**26**

Método de Adams

Lugares para distribuir = 26

Divisor-padrão = 1000

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota-padrão	Quota superior
Oeste	9061	9,0610	10
Este	7179	7,1790	8
Norte	5259	5,2590	6
Sul	3319	3,3190	4
Noroeste	1182	1,1820	2
Total	**26 000**		**30**

Divisor modificado = 1127

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota modificada	Quota modificada superior
Oeste	9061	8,0399	9
Este	7179	6,3700	7
Norte	5259	4,6664	5
Sul	3319	2,9450	3
Noroeste	1182	1,0488	2
Total	**26 000**		**26**

Método de Webster

Lugares para distribuir = 26

Divisor-padrão = 1000

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota-padrão	Quota arredondada
Oeste	9061	9,06	9
Este	7179	7,18	7
Norte	5259	5,26	5
Sul	3319	3,32	3
Noroeste	1182	1,18	1
Total	**26 000**		**25**

Divisor modificado = 956,5

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota modificada	Quota modificada arredondada
Oeste	9061	9,47	9
Este	7179	7,51	8
Norte	5259	5,50	5
Sul	3319	3.47	3
Noroeste	1182	1,24	1
Total	**26 000**		**26**

Método de Hill-Huntington

Lugares para distribuir = 26

Divisor-padrão = 1000

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota-padrão	*M*	Quota arredondada pela regra H-H
Oeste	9061	9,0610	9,4868	9
Este	7179	7,1790	7,4833	7
Norte	5259	5,2590	5,4772	5
Sul	3319	3.32	3,46	3
Noroeste	1182	1,18	1,41	1
Total	**26 000**			**25**

Divisor modificado = 960

Agrupamento de escolas	Número de alunos	Quota modificada	*M*	Quota modificada arredondada pela regra H-H
Oeste	9061	9,4385	9,4868	9
Este	7179	7,4781	7,4833	7
Norte	5259	5,4781	5,4772	6
Sul	3319	3,4573	3,4641	3
Noroeste	1182	1,2313	1,4142	1
Total	**26 000**			**26**

Agrupamento de Escolas	Hondt	Hamilton	Jefferson	Adams	Webster	Hill--Huntington
Oeste	10	9	10	9	9	9
Este	7	7	7	7	8	7
Norte	5	5	5	5	5	6
Sul	3	4	3	3	3	3
Noroeste	1	1	1	2	1	1

Os métodos produzem todos resultados diferentes, à exceção dos métodos de Hondt e Jefferson (que são, matematicamente, equivalentes). Observa-se que o método de Hondt (e o de Jefferson) favorece, claramente, o agrupamento de escolas com mais alunos, enquanto o método de Adams favorece o agrupamento mais pequeno (é o único que atribui ao Agrupamento de Escolas do Noroeste dois representantes). Nesta situação, os métodos de Hamilton e de Hill-Huntington parecem ser os que produzem resultados mais aceitáveis tendo em conta a distribuição aproximada que resultaria de um simples cálculo proporcional.

Avaliação global

Pág. 112-117

1.1. Número total de alunos da turma: $4+7+3+9+5=28$
Resposta correta: **(B)**

1.2. Número de votos nas últimas preferências:

Candidatos	N.º de votos na última preferência
Abel	14
Eva	3
Clara	0
Bruna	0
Diogo	11

O Abel, com 14 votos.

1.3.

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
Abel	4
Eva	5
Clara	3
Bruna	7
Diogo	9

O vencedor é o Diogo, com maioria simples.

1.4.

Candidatos	Número de pontos
Abel	$4\times5+7\times2+3\times4+9\times1+5\times1=60$
Eva	$4\times4+7\times3+3\times1+9\times4+5\times5=101$
Clara	$4\times3+7\times4+3\times5+9\times3+5\times4=102$
Bruna	$4\times2+7\times5+3\times2+9\times2+5\times3=82$
Diogo	$4\times1+7\times1+3\times3+9\times5+5\times2=75$

O vencedor pelo método de Borda é a Clara, com 102 pontos.

1.5. Como nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta na primeira preferência, ou seja, pelo menos 15 votos, vamos manter apenas os dois candidatos mais votados na primeira preferência (a Bruna e o Diogo) e reordenar a tabela.

Ordem de preferência	Número de votos				
	4	**7**	**3**	**9**	**5**
1.ª	Bruna	Bruna	Diogo	Diogo	Bruna
2.ª	Diogo	Diogo	Bruna	Bruna	Diogo

O vencedor pelo método *run-off standard* é a Bruna com 16 votos.

1.6. Sim, a Eva é vencedora de Condorcet, pois ganhou a todos os outros os confrontos diretos.

Abel *vs* Eva	Abel	$4+3=7$	Vence a Eva
	Eva	$7+9+5=21$	
Abel *vs* Clara	Abel	4	Vence a Clara
	Clara	$7+3+9+5=24$	
Abel *vs* Bruna	Abel	$4+3=7$	Vence a Bruna
	Bruna	$7+9+5=21$	
Abel *vs* Diogo	Abel	$4+7+3=14$	Empate
	Diogo	$9+5=14$	
Eva *vs* Clara	Eva	$4+9+5=18$	Vence a Eva
	Clara	$7+3=10$	
Eva *vs* Bruna	Eva	$4+9+5=18$	Vence a Eva
	Bruna	$7+3=10$	
Eva *vs* Diogo	Eva	$4+7+5=16$	Vence a Eva
	Diogo	$3+9=12$	
Clara *vs* Bruna	Clara	$4+3+9+5=21$	Vence a Clara
	Bruna	7	
Clara *vs* Diogo	Clara	$4+7+3+5=19$	Vence a Clara
	Diogo	9	
Bruna *vs* Diogo	Bruna	$4+7+5=16$	Vence a Bruna
	Diogo	$3+9=12$	

1.7.

Ordem de preferência	Número de votos				
	4	**7**	**3**	**9**	**5**
1.ª	Abel	Bruna	Clara	Diogo	Eva
2.ª	Eva	Clara	Abel	Eva	Clara

Candidatos	N.º de aprovações
Abel	$4+3=7$
Eva	$4+9+5=18$
Clara	$7+3+5=15$
Bruna	7
Diogo	9

Vencedor: A Eva (com 18 aprovações)
Resposta correta: **(B)**

2.1. Número total de votos: $70+65+75=210$

$\frac{210}{2}=105$

O destino escolhido pela maioria dos alunos foi os Açores com 75 votos. Não obteve maioria absoluta pois teria de ter, pelo menos, 106 votos.

2.2. **a)** Se retiramos B, a tabela fica organizada da seguinte forma:

Ordem de preferência	Destino		
1.ª	A	C	C
2.ª	C	A	A
Total	70	65	75

Pelo método de Borda temos:

Candidatos	Número de pontos
A	$70\times2+65+75=280$
C	$70+65\times2+75\times2=350$

Vence C.
Pelo método *run-off standard*
Número de votos na primeira preferência:
A: 70
C: $65+75=140$
Vence C.
Portanto, se o destino B for retirado, por ambos os métodos, vence C.

b) Se retiramos C, a tabela fica organizada da seguinte forma:

Ordem de preferência	Destino		
1.ª	A	B	B
2.ª	B	A	A
Total	70	65	75

Pelo método de Borda temos:

Candidatos	Número de pontos
A	$70\times2+65+75=280$
B	$70+65\times2+75\times2=350$

Vence B.
Pelo método *run-off standard*
Número de votos na primeira preferência:
A: 70
C: $65+75=140$
Vence B.
Portanto, se o destino C for retirado, por ambos os métodos, vence B.

c) Se retiramos A, a tabela fica organizada da seguinte forma:

Ordem de preferência	Destino		
1.ª	B	B	C
2.ª	C	C	B
Total	70	65	75

Pelo método de Borda temos:

Candidatos	Número de pontos
B	$70\times2+65\times2+75=345$
C	$70+65+75\times2=285$

Vence B.
Pelo método *run-off standard*
Número de votos na primeira preferência:
B: $70+65=135$
C: 75
Vence B.
Portanto, se o destino A for retirado, por ambos os métodos, vence B.

2.3.

Destino	Número de pontos
A	$70\times3+65\times1+75\times1=350$
B	$70\times2+65\times3+75\times2=485$
C	$70\times1+65\times2+75\times3=425$

Pelo método de Borda, vence B (Costa alentejana), com 485 pontos.

2.4. Apesar de os Açores ser o destino escolhido pela maioria, pela aplicação do método de Borda, o vencedor é a Costa alentejana. Importa também referir que, se o destino Algarve não estivesse a votação, o vencedor seria a Costa alentejana, seja pelo método da maioria, pelo de Borda ou pelo *run-off standard*.

3.1. $12+16+5+13+18+30+52+17=163$
Votaram 163 pessoas.

3.2. $\dfrac{20}{163+20}\approx0{,}109$

A percentagem de abstenção é, aproximadamente, 11%.
Resposta correta: **(B)**

3.3.

Candidatos	Número de votos na primeira preferência
A	$12+16+52=80$
B	$5+18=23$
C	$13+30=43$
D	17

Candidato A: 80; candidato B: 23; candidato C: 43; candidato D: 17.

3.4.

Candidatos	Número de votos na última preferência
A	0
B	$30+52=82$
C	$5+18+17=40$
D	$12+16+13=41$

O candidato B com 82 últimos lugares.

3.5.

Candidatos	N.º de votos na segunda preferência	
A	$13+18+30=61$	$\dfrac{61}{163}\approx0{,}3742$
B	$12+17=29$	$\dfrac{29}{163}\approx0{,}1779$
C	$16+52=68$	$\dfrac{68}{163}\approx0{,}4172$
D	5	$\dfrac{5}{163}\approx0{,}0307$

Candidato A: 37,42%; candidato B: 17,79%; candidato C: 41,72%; candidato D: 3,07%.

3.6.

Candidatos	Número de pontos
A	$12\times4+16\times4+5\times2+13\times3+18\times3+30\times3+52\times4+17\times2=54$
B	$12\times3+16\times2+5\times4+13\times2+18\times4+30\times1+52\times1+17\times3=319$
C	$12\times2+16\times3+5\times1+13\times4+18\times1+30\times4+52\times3+17\times1=440$
D	$12\times1+16\times1+5\times3+13\times1+18\times2+30\times2+52\times2+17\times4=324$

O vencedor foi o candidato A, com 547 pontos.

3.7.

Candidatos	Número de aprovações
A	$12+16+13+18+30+52=141$
B	$12+5+18+17=52$
C	$16+13+30+52=111$
D	5

O vencedor foi o candidato A (com 141 aprovações).

4. Número total de votos: $14+10+8+4+1=37$

$\dfrac{37}{2}=18{,}5$

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
A	14
B	4
C	$10+1=11$
D	8

Método *run-off standard*
Como nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta na primeira preferência, ou seja, pelo menos 19 votos, vamos manter apenas os dois candidatos mais votados na primeira preferência (o A e o C) e reordenar a tabela.

Ordem de preferência	Número de votos				
	14	**10**	**8**	**4**	**1**
1.ª	A	C	C	C	C
2.ª	C	A	A	A	A

O vencedor pelo método *run-off standard* é o candidato C com 23 votos.

Método *run-off* sequencial
Como nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta na primeira preferência, ou seja, pelo menos 19 votos, vamos eliminar o candidato menos votado na primeira preferência (o B) e reordenar a tabela.

Ordem de preferência	Número de votos				
	14	**10**	**8**	**4**	**1**
1.ª	A	C	D	D	C
2.ª	C	D	C	C	D
3.ª	D	A	A	A	A

Candidatos	N.º de votos na primeira preferência
A	14
C	$10+1=11$
D	$8+4=12$

Como nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta na primeira preferência, ou seja, pelo menos 19 votos, vamos eliminar o candidato menos votado (neste caso o C) e reordenar novamente a tabela.

Ordem de preferência	Número de votos				
	14	**10**	**8**	**4**	**1**
1.ª	A	D	D	D	D
2.ª	D	A	A	A	A

O vencedor pelo método *run-off* sequencial é o candidato D com 23 votos.

Método de Borda

Candidatos	Número de pontos
A	$14\times4+10\times1+8\times1+4\times1+1\times1=79$
B	$14\times3+10\times3+8\times2+4\times4+1\times2=106$
C	$14\times2+10\times4+8\times3+4\times2+1\times4=104$
D	$14\times1+10\times2+8\times4+4\times3+1\times3=81$

O vencedor pelo método de Borda é o candidato B com 106 pontos.

Método de Condorcet

A *vs* B	A	14	Vence B
	B	$10+8+4+1=23$	
A *vs* C	A	14	Vence C
	C	$10+8+4+1=23$	
A *vs* D	A	14	Vence D
	D	$10+8+4+1=23$	
B *vs* C	B	$14+4=18$	Vence C
	C	$10+8+1=19$	
B *vs* D	B	$14+10+4=28$	Vence B
	D	$8+1=9$	
C *vs* D	C	$14+10+1=25$	Vence C
	D	$8+4=12$	

Ranking

Ranking	*Run-off standard*	*Run-off* sequencial	Borda	Condorcet
1.º	C	D	B	C
2.º	A	A	C	B
3.º	D	C	D	D
4.º	B	B	A	A

5.1. Números de eleitores inscritos: 258 005

Total de votos:

$$700+2534+4132+56449+51207+8246+7830+2577+$$
$$+2489+2095+1766+1749+1426=143\,200$$

$$258\,005-143\,200=114\,805$$

$$\frac{114\,805}{258\,005}\approx 0{,}445$$, ou seja, 44,5%

Resposta correta: **(C)**

5.2. Método de Hondt

1	56 449,0	51 207,0	8246,0	7830,0	2577,0	2489,0	2095,0	1766,0	1749,0	1426,0
2	28 224,5	25603,5	4123,0	3915,0	1288,5	1244,5	1047,5	883,0	874,5	713,0
3	18 816,3	17 069,0	2748,7	2610,0	859,0	829,7	698,3	588,7	583,0	475,3
4	14 112,3	12 801,8	2061,5	1957,5	644,3	622,3	523,8	441.5	437,3	356,5
5	11 289,8	10 241,4	1649,2	1566,0	515,4	497,8	419,0	353,2	349,8	285,2
6	9408,2	8534,5	1347,3	1305,0	429,5	414,8	349,2	294,3	291,5	237,7
7	8064,1	7315,3	1178,0	1118,6	368,1	355,6	299,3	252,3	249,9	203,7
8	7056,1	6400,9	1030,8	978,8	322,1	311,1	261,9	220,8	219,6	178,3
9	6272,1	5687,7	916,2	870,0	286,3	276,6	232,8	196,2	194,3	158,4
10	5644,9	5120,7	824,6	783,0	257,7	248,9	209,5	176,6	174,9	142,6
11	5131,7	4655,2	749,6	711,8	234,3	226,3	190,5	160,5	159,0	129,6
12	4704,1	4267,3	687,2	652,5	214,8	207,4	174,6	147,2	145,8	118,8
13	4342,2	3939,0	634,3	602,3	198,2	191,5	161,2	135,8	134,5	109,7
14	4032,1	3657,6	589,0	559,3	184,1	177,8	149,6	126,1	124,9	101,9
15	3763,3	3413,8	549,7	522,0	171,8	165,9	139,7	117,7	116,6	95,1
16	3528,1	3200,4	515,4	489,4	161,1	155,6	130,9	110,4	109,3	89,1
17	3320,5	3012,2	485,1	460,6	151,6	146,4	123,2	103,9	102,9	83,9
18	3136,1	2844,8	458,1	435,0	143,2	138,3	116,4	98,1	97,2	79,2
19	2971,0	2695,1	434,0	412,1	135,6	131,0	110,3	92,9	92.1	75,1
20	2822,5	2560,4	412,3	391,5	128,9	124,5	104,8	88,3	87,5	71,3
21	2688,0	2438,4	392,7	372,9	122,7	118,5	99,8	84,1	83,3	67,9
22	2565,9	2327,6	374,8	355,9	117,1	113,1	95,2	80,3	79,5	64,8

Não foi necessário terminar a tabela, pois já foram encontrados os 47 maiores quocientes.

Partidos	N.º de mandatos
Partido Social Democrata	21
Partido Socialista	19
CDS – Partido Popular	3
Juntos pelo Povo	3
CDU – Coligação Democrática Unitária	1
Bloco de Esquerda	0
PESSOAS – ANIMAIS – NATUREZA	0
Partido Unido dos Reformados e Pensionistas	0
Reagir Incluir Reciclar	0
Partido Trabalhista Português	0

5.3. Método de Sainte-Laguë

1	56 449,0	51 207,0	8246,0	7830,0	2577,0	2489,0	2095,0	1766,0	1749,0	1426,0
3	18 816,3	17 069,0	2748,7	2610,0	859,0	829,7	698,3	588,7	583,0	475,3
5	11 289,8	10 241,4	1649,2	1566,0	515,4	497,8	419,0	353,2	349,8	285,2
7	8064,1	7315,3	1178,0	1118,6	368,1	355,6	299,3	252,3	249,9	203,7
9	6272,1	5687,7	916,2	870,0	286,3	276,6	232,8	196,2	194,3	158,4
11	5131,7	4655,2	749,6	711,8	234,3	226,3	190,5	160,5	159,0	129,6
13	4342,2	3939,0	634,3	602,3	198,2	191,5	161,2	135,8	134,5	109,7
15	3763,3	3413,8	549,7	522,0	171,8	165,9	139,7	117,7	116,6	95,1
17	3320,5	3012,2	485,1	460,6	151,6	146,4	123,2	103,9	102,9	83,9
19	2971,0	2695,1	434,0	412,1	135,6	131,0	110,3	92,9	92.1	75,1
21	2688,0	2438,4	392,7	372,9	122,7	118,5	99,8	84,1	83,3	67,9
23	2454,3	2226,4	358,5	340,4	112,4	108,2	91,1	76,8	76,0	62,0
25	2258,0	2048,3	329,8	313,2	103,08	99,6	83,8	70,6	70,0	57,0
27	2090,7	1896,6	305,4	290,0	95,4	92,2	77,6	65,4	64,8	52,8
29	1946,5	1765,8	284,3	270,0	88,9	85,9	72,2	60,9	60,3	49,2
31	1820,9	1651,8	266,0	252,6	83,1	80,3	67,6	57,0	56,4	46,0
33	1710,6	1551,7	249,9	237,3	78,1	75,4	63,5	53,5	53,0	43,2
35	1612,8	1463,1	235,6	223,7	73,6	71,1	59,9	50,5	50,0	40,7
37	1525,6	1384,0	222,9	211,6	69,6	67,3	56,6	47,7	47,3	38,5
39	1447,4	1313,0	211,4	200,8	66,1	63,8	53,7	45,3	44,8	36,6

Não foi necessário terminar a tabela, pois já foram encontrados os 47 maiores quocientes.

Partidos	N.º de mandatos
Partido Social Democrata	19
Partido Socialista	17
CDS – Partido Popular	3
Juntos pelo Povo	3
CDU – Coligação Democrática Unitária	1
Bloco de Esquerda	1
PESSOAS – ANIMAIS – NATUREZA	1
Partido Unido dos Reformados e Pensionistas	1
Reagir Incluir Reciclar	1

Partido Trabalhista Português	0

O militante tinha razão, pois a distribuição dos mandatos aplicando o método de Sainte-Laguë é diferente e implica que quatro partidos passem a ter direito a um mandato.

6.1. **Método de Hamilton**

Representantes para distribuir = 5

Divisor-padrão = 300

Departamentos	Número de funcionários	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º representantes
Serviços	690	2,3000	2	0,3000	2
Produção	435	1,4500	1	0,4500	1+1=2
Desenvolvimento	375	1,2500	1	0,2500	1
Total	**1500**		**4**		**5**

sobra 1 representante

Distribuição final

N.º de representantes:

Serviços: 2 ; Produção: 2 ; Desenvolvimento: 1

Método de Jefferson

Representantes para distribuir = 5

Divisor-padrão = 300

Departamentos	Número de funcionários	Quota-padrão	Quota inferior
Serviços	690	2,3000	2
Produção	435	1,4500	1
Desenvolvimento	375	1,2500	1
Total	**1500**		**4**

Temos de encontrar outro divisor, por exemplo:

Divisor modificado = 230

Departamentos	Número de funcionários	Quota modificada	Quota modificada inferior
Serviços	690	3,0000	3
Produção	435	1,8913	1
Desenvolvimento	375	1,6304	1
Total	**1500**		**5**

Distribuição final

N.º de representantes:

Serviços: 3 ; Produção: 1 ; Desenvolvimento: 1

6.2. **Método de Hamilton**

Divisor-padrão = 300

Departamentos	Número de funcionários	Quota-padrão	Quota inferior	Parte decimal da quota-padrão	N.º representantes
Serviços	555	1,8500	1	0,8500	1+1=2
Produção	465	1,5500	1	0,5500	1
Desenvolvimento	480	1,6000	1	0,6000	1+1=2
Total	**1500**		**3**		**5**

sobram 2 representantes

Distribuição final

N.º de representantes:

Serviços: 2 ; Produção: 1 ; Desenvolvimento: 2

Método de Jefferson

Divisor-padrão = 300

Departamentos	Número de funcionários	Quota-padrão	Quota inferior
Serviços	555	1,8500	1
Produção	465	1,5500	1
Desenvolvimento	480	1,6000	1
Total	**1500**		**3**

Temos de encontrar outro divisor, por exemplo:

Divisor modificado = 240

Departamentos	Número de funcionários	Quota modificada	Quota modificada inferior
Serviços	555	2,3125	2
Produção	465	1,9375	1
Desenvolvimento	480	2,0000	2
Total	**1500**		**5**

Distribuição final

N.º de representantes:

Serviços: 2 ; produção: 1 ; desenvolvimento: 2

6.3. O grande prejudicado é o departamento de Produção pois, com o método de Hamilton conseguia eleger dois representantes (para 435 funcionários), mas depois do aumento do número de funcionários para 465 acaba por "perder" um representante (pela aplicação do mesmo método). Note-se que a diferença para o departamento de Desenvolvimento é de apenas 15 funcionários, mas isso acaba por concretizar-se numa diferença de um representante. Também o departamento de Serviços perde um representante (pelo método de Jefferson), mas aí também houve diminuição do seu número de funcionários.

7.1.

Associação	N.º de inscritos	Quota-padrão	Média geométrica	N.º de jogadores
A	501	6,4806	6,4807	6
B	332	4,2945	4,4721	4
C	53	0,6856	0,0000	1
D	46	0,5950	0,0000	1
E	15	0,1940	0,0000	1
F	58	0,7502	0,0000	1
Total	**1005**			**14**

7.2. Apenas com a tabela anterior não é possível efetuar a seleção, pois atribuiu-se um jogador a mais.

Divisor modificado: 95

Associação	N.º de inscritos	Quota-padrão	Média geométrica	N.º de jogadores
A	501	5,2737	5,4772	5
B	332	3,4947	3,4641	4
C	53	0,5579	0,0000	1
D	46	0,4842	0,0000	1
E	15	0,1579	0,0000	1
F	58	0,6105	0,0000	1
Total	**1005**			**13**

Associação A : 5 jogadores; associação B : 4 jogadores; associação C : 1 jogador; associação D : 1 jogador; associação E : 1. jogador; associação F : 1 jogador

7.3. A repartição efetuada nas alíneas anteriores conduziu a uma violação da regra da quota. De facto, a associação A, com uma quota-padrão de 6,4806 , deveria ter direito a 6 ou 7 jogadores (quota inferior ou quota superior) e, no final, elegeu apenas 5 .