

II. Modelos de probabilidade

A pensar no exame

pág. 86

1. A frequência relativa da classe $]30, 40]$ é $70 - 60 = 10\%$.

Como existem um total de 120 equipas, vem que $0,25 \times 120 = 3$ é o número de equipas que concluíram o desafio num tempo pertencente ao intervalo $]35, 40]$.

A probabilidade de apenas uma das duas fotografias colocadas nas duas primeiras páginas do álbum ser de uma destas 3 equipas, na forma de dízima com arredondamentos às centésimas, é:

$$P = \frac{3}{12} \times \frac{9}{11} + \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \approx 0,41$$

pág. 87

2. Queremos calcular a probabilidade de escolher, ao acaso, um dos polígonos em que esteja assinalado o nível 4 na capacidade de comunicação (C), sabendo que tem assinalado, pelo menos, o nível 3 na capacidade de negociação (N). Existem três polígonos que têm, pelo menos, nível 3 na capacidade de negociação. Destes três polígonos, só um tem nível 4 na capacidade de comunicação, pelo que só existe um caso possível. Sendo assim, $P(A | B) = \frac{1}{3}$.

Opção (B)

pág. 88

- 3.1 Consideremos os acontecimentos:

A : “ser do modelo A”

B : “ser do modelo B”

C : “ser do modelo C”

D : “ter menos de 25 anos”

E : “ter entre 25 e 45 anos”

F : “ter mais de 45 anos”

$$P(E \cap A) = 15\%$$

$$3.2 P(B \cap \bar{F}) = 15\%$$

$$3.3 P(A | E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{0,15}{0,15+0,1+0,12} = \frac{15}{37}$$

$$3.4 P(F | C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0,17}{0,17+0,12+0,01} = \frac{17}{30}$$

4. As faces com os números 3 e 6 são as únicas faces com um número múltiplo de 3, logo a probabilidade de obter uma face com um número múltiplo de 3 é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. A probabilidade de este acontecimento não ocorrer é, portanto, $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

A probabilidade pedida é dada por:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Opção (D)

5.1 $P = \frac{10}{25} = 40\%$

Opção (A)

pág. 89

5.2.1 $P = \frac{5}{20} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$

5.2.2 $P = 2 \times \frac{15}{20} \times \frac{5}{19} = \frac{150}{380} \approx 0,395 \approx 40\%$

6. Como $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,5$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tem-se que:
 $0,8 = P(B) + 0,5 \Leftrightarrow P(B) = 0,3$

Opção (B)

7. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A : "o candidato é violinista"

B : "o candidato é português"

Tem-se que $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{10} \times P(\bar{B}) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$.

Organizemos os dados numa tabela:

	A	$\bar{A}$	Total
B	$\frac{3}{5} - \frac{7}{20} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\bar{B}$	$\frac{1}{2} - \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Logo, a probabilidade de o candidato ser português, sabendo que é violinista é

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{12}$$

8. Consideremos os acontecimentos:

A : “o anúncio passar no canal A”

B : “o anúncio passar no canal B”

V : “o produto ser vendido”

Sabe-se que $P(V|A) = 0,2$; $P(V|B) = 0,5$ e $P(A) = 52\%$.

8.1 $P(V) = P(V | A) \times P(A) + P(V | B) \times P(B) = 0,2 \times 0,52 + 0,5 \times (1 - 0,52) = 0,344 = 34,4\%$

8.2 Queremos determinar $P(B | \bar{V})$:

$$P(V | A) = 0,2 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap A)}{P(A)} = 0,2 \Leftrightarrow P(V \cap A) = 10,4\%$$

$$P(V | B) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = 0,5 \Leftrightarrow P(V \cap B) = 24\%$$

	V	$\bar{V}$	Total
A	10,4	41,6	52%
B	24	24	48%
Total	34,4%	65,6%	100%

$$\text{Logo, } P(B | \bar{V}) = \frac{P(B \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{24}{65,6} \approx 36,6\% .$$

pág. 90

9. Consideremos os acontecimentos:

A : “a Ana embrulhar”

B : “a Belmira embrulhar”

C : “a Carla embrulhar”

L : “colocar o laço”

Sabe-se que: $P(A) = 30\%$, $P(\bar{L}|A) = 3\%$, $P(B) = 20\%$, $P(\bar{L}|B) = 8\%$,

$P(C) = 100\% - 30\% - 20\% = 50\%$ e $P(\bar{L} | C) = 5\%$.

9.1 Queremos determinar $P(\bar{L})$.

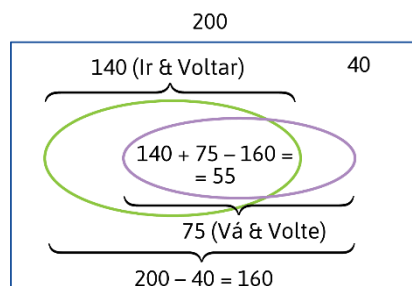
Usando o teorema da probabilidade total, temos:

$$\begin{aligned} P(\bar{L}) &= P(\bar{L} | A) \times P(A) + P(\bar{L} | B) \times P(B) + P(\bar{L} | C) \times P(C) = \\ &= 0,03 \times 0,3 + 0,08 \times 0,2 + 0,05 \times 0,5 = 0,05 = 5\% \end{aligned}$$

9.2 Queremos determinar $P(C | \bar{L})$.

$$P(C | \bar{L}) = \frac{P(C \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{P(\bar{L} | C) \times P(C)}{0,05} = \frac{0,05 \times 0,5}{0,05} = 0,5 = 50\%$$

10.1 Elaborando um diagrama de Venn com os dados do problema, obtém-se:



A probabilidade de uma pessoa que respondeu ao inquérito já ter comprado viagens em ambas as agências, na forma de dízima, é $P = \frac{55}{200} = 0,275$.

10.2 Consideremos os seguintes acontecimentos:

A : "a pessoa fez um cruzeiro"

B : "a pessoa comprou viagens na agência Ir&Voltar"

Tem-se que $P(B) = \frac{140}{200} = 0,7$; $P(\bar{A}) = 0,35$ e $P(\bar{A}|\bar{B}) = 0,7$.

$$P(\bar{A} | \bar{B}) = 0,7 \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times P(\bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,3 \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,21$$

Organizemos os dados numa tabela:

	A	$\bar{A}$	Total
B	$0,7 - 0,14 = 0,56$	$0,35 - 0,21 = 0,14$	0,7
$\bar{B}$	$0,65 - 0,56 = 0,09$	0,21	$1 - 0,7 = 0,3$
Total	$1 - 0,35 = 0,65$	0,35	1

A probabilidade de uma pessoa ter comprado viagens na agência Ir&Voltar, sabendo que não fez um cruzeiro, é dada por:

$$P(B | \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,14}{0,35} = 0,4$$

11. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A : "o funcionário trabalha a partir de casa"

B : "o funcionário colabora em programas emitidos diariamente"

Tem-se que $P(A) = 0,8$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,05$ e $P(B | A) = 0,5$.

$$P(B | A) = 0,5 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,5 \times P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,5 \times 0,8 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,4$$

Organizemos os dados numa tabela:

	A	$\bar{A}$	Total
B	0,4	$0,55 - 0,4 = 0,15$	$1 - 0,45 = 0,55$
$\bar{B}$	$0,8 - 0,4 = 0,4$	0,05	$0,4 + 0,05 = 0,45$
Total	0,8	$1 - 0,8 = 0,2$	1

Portanto, a probabilidade de o funcionário colaborar em programas emitidos diariamente é dada por:

$$P(B) = 0,55$$

12. Como $3a + a + 0,2 = 1$, vem que $4a = 0,8 \Leftrightarrow a = 0,2$.

Sendo assim, $E(X) = 0 \times 0,6 + 1 \times 0,2 + 2 \times 0,2 = 0,6$.

Opção (C)

13. Se $X \sim N(160, 10)$ então $P(X < 150) = 50\% - 34,135\% = 15,865\% < 50\%$.

Opção (A)

14.1 Seja X a variável “classificação atribuída”:

x_i	9	10	14	15	16	18	19
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$\frac{3}{23}$

Número total de alunos da turma: $2 + 3 + 5 + 1 + 4 + 5 + 3 = 23$

$$14.2 \mu = 9 \times \frac{2}{23} + 10 \times \frac{3}{23} + 14 \times \frac{5}{23} + \dots + 19 \times \frac{3}{23} \approx 14,96$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{23}(9 - 14,96)^2 + \frac{3}{23}(10 - 14,96)^2 + \dots + \frac{3}{23}(19 - 14,96)^2} \approx 3,29$$

(Também podemos obter estes resultados usando a calculadora.)

$$14.3.1 P(X < 14) = \frac{2}{23} + \frac{3}{23} = \frac{5}{23}$$

$$14.3.2 P(10 \leq X \leq 16) = \frac{3}{23} + \frac{5}{23} + \frac{1}{23} + \frac{4}{23} = \frac{13}{23}$$

$$14.3.3 P(X > 15) = \frac{4}{23} + \frac{5}{23} + \frac{3}{23} = \frac{12}{23}$$

15. Consideremos a variável aleatória X : “número de filhos do casal”.

Considerando que o casal tem quatro filhos, o modelo de probabilidade será:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 6$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

ou seja:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

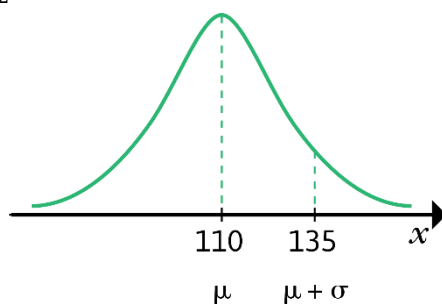
15.1 Usando a calculadora, obtemos:

$$\mu = 2 \text{ e } \sigma = 1$$

15.2 A probabilidade de ter três crianças do mesmo sexo é 0,5 e a probabilidade de ter duas crianças de cada sexo é 0,375, pelo que é mais provável ter três crianças do mesmo sexo.

16. $\mu = 110$ e $\sigma = 25$

16.1 $P(X > 135) = 50\% - \frac{68,27\%}{2} \approx 15,87\%$



16.2 $P(X < 75)$

$$X \sim N(110, 25)$$

$$U = \frac{X-110}{25} \Leftrightarrow 25U + 110 = X$$

$$25U + 110 < 75 \Leftrightarrow 25U < -35 \Leftrightarrow U < -1,4$$

$$\begin{aligned} P(X < 75) &= P(U < -1,4) = P(U > 1,4) = 0,5 - P(0 < U < 1,4) = 0,5 - (\phi(1,4) - \phi(0)) = \\ &= 0,5 - (0,9192 - 0,5) = 1 - 0,9192 = 0,0808 = 8,08\% \end{aligned}$$

16.3 $P(90 < X < 145)$

$$\begin{cases} 25U + 110 > 90 \\ 25U + 110 < 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25U > -20 \\ 25U < 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U > -0,8 \\ U < 1,4 \end{cases}$$

$$P(-0,8 < U < 1,4) = \phi(1,4) - \phi(-0,8) = \phi(1,4) - 1 + \phi(0,8) = 0,7073 = 70,73\%$$