# II. Modelos de probabilidade

## Capítulo 3 Modelos de probabilidade

**Exercícios de aplicação** **pág. 72**

**1.** Fenómenos aleatórias: "sair um número primo no lançamento de um dado com as faces numeradas de 1 a 6" e "num restaurante, o próximo cliente a entrar, medir mais do que 1,67 metros".
Fenómenos determinísticos: "uma vela acesa derreter" e "num dia, haver 24 horas".

**2.** Experiências aleatórias: B, D, E e F.
Experiências determinísticas: A e C.

**3.1** $S = \{B_1, B_2, B_3, A_1, A_2, V_1\}$
**3.2** "Sair bola branca, azul ou vermelha."
**3.3** "Sair bola amarela."
**3.4** "Sair bola vermelha."

**4.1** $S = \{(N, E), (N, N), (E, E), (E, N)\}$
**4.2** "Sair a face nacional em ambas as moedas"
**4.3.1** $A = \{(N, E), (E, N)\}$
**4.3.2** $B = \{(N, E), (E, E), (E, N)\}$
**4.3.3** $\boldsymbol{C} = \{(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{E}), (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}), (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{N})\}$

**5.1** $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
**5.2** $\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$
**5.3** $A \cap B \cap C$
**5.4** $A \cup B \cup C$
**5.5** $\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$
**5.6** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

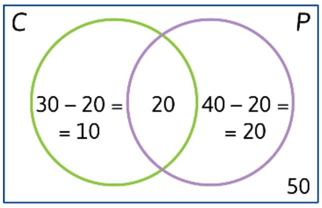
**6.1** $\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})\}$
**6.2** $\boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{1})\}$
$\boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})\}$
**6.2.1** $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{1})\}$
**6.2.2** $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})\}$
**6.2.3** $\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}} = \{(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{3})\}$
**6.2.4** $\overline{\boldsymbol{A}} \cup \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})\} \cup \{(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1})\} =$
$= \{(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{1})\}$

**6.2.5** $\boldsymbol{B - A = \{(3, 1, 2), (3, 2, 1)\}}$

**6.2.6** $\boldsymbol{\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \left\{\overline{(2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)}\right\} = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}}$

**6.2.7** $A \cap (B \cup A) = A = \{(2, 1, 3), (2, 3, 1)\}$

**7.**




$\mathbf{40 + 30 = 70}$

$\mathbf{70 - 50 = 20}$ →interseção

| | ***C*** | $\boldsymbol{\bar{C}}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| ***P*** | 20 | 20 | 40 |
| $\boldsymbol{\bar{P}}$ | 10 | 50 | 60 |
| **Total** | 30 | 70 | 100 |

**pág. 73**

**8.1** *P*(«sair ás vermelho») $= \mathbf{\frac{2}{40}} = \mathbf{\frac{1}{20}} = \mathbf{5}\%$

**8.2** *P*(«sair dama de ouros») $= \mathbf{\frac{1}{40}} = \mathbf{2,5}\%$

**8.3** "Sair carta vermelha"

Como existem 20 cartas vermelhas:

*P*("sair carta vermelha") $= \mathbf{\frac{20}{40}} = \mathbf{\frac{1}{2}} = \mathbf{50}\%$

**9.1** Sabemos que:

- o conjunto dado tem 3 vogais (A, E e I);
- a matrícula tem apenas uma vogal, por isso, restam 7 letras, que se podem repetir, pelo que o número de formas de as escolher é $7 \times 7 \times 7 = 7^3$ ;
- a vogal pode aparecer em qualquer uma das 4 posições;
- como as 10 letras podem aparecer nas 4 posições, o número de casos possíveis é $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ .

As correspondências corretas são I - b); II - b); III - c) e IV - b)

**9.2** As matrículas começam e terminam na letra A, têm o número 78 e as restantes letras são diferentes entre si. Então, existem 9 possibilidades para uma das letras e 8 possibilidades para a restante. Assim, A_-78-_A traduz-se em $1 \times 9 \times 1 \times 1 \times 8 \times 1 = 9 \times 8 = 72$ .

Opção (B).

**10.** O número de casos possíveis é $\mathbf{3 \times 2 = 6}$ .

O número de casos favoráveis é 4.

$F_1\,F_2\,C$ ; $F_2\,F_1\,C$ ; $C\,F_1\,F_2$ ; $C\,F_2\,F_1$

Logo, $\boldsymbol{P} = \mathbf{\frac{2}{3}}$.

**11.** $\mathbf{10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 = 6\,760\,000}$

**12.1** $\mathbf{10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4} \rightarrow$ Existem dez algarismos para cada um dos quatro dígitos.

**12.2** _ _ _ _

$\mathbf{10 \times 10 \times 1 \times 1}$

Para ser capicua, o primeiro dígito tem de ser igual ao último e o segundo igual ao penúltimo. Assim, existem $\mathbf{10 \times 10 \times 1 \times 1 = 100}$ códigos que são capicuas.

**12.3** Se os números são diferentes, temos:

$\mathbf{10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040}$ códigos diferentes

**12.4** 0 _ _ 0

$\mathbf{10 \times 10}$

Para o primeiro e para o último dígito, só temos uma hipótese. Para os restantes dígitos, temos dez hipóteses para cada um. Assim, existem $\mathbf{10 \times 10 = 100}$ códigos diferentes.

**pág. 74**

**13.1** Existem quatro damas no baralho. Como as cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição, existem $\mathbf{4 \times 3 = 12}$ maneiras.

**13.2** Existem quatro naipes diferentes com 13 cartas cada.

$\mathbf{13 \times 13 \times 4 \times 3 = 2028}$

**13.3** $\mathbf{4 \times 13 \times 12 = 624}$

**13.4** $R_c$ _ ou _ $R_c$

$\mathbf{1 \times 51 \quad + \quad 51 \times 1 \quad = 102}$

**14.1** _ _ _ _ _

↑

{2, 4}

$\mathbf{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 = 5^4 \times 2 = 1250}$

**14.2** 1 _ _ _ 5

$\mathbf{5 \times 5 \times 5 = 125}$

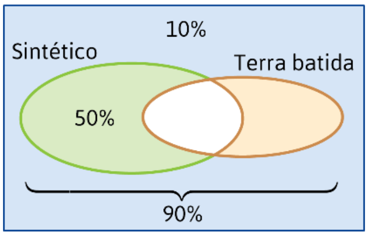
**14.3** $\mathbf{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120}$

**15.1.1** $P(comprimento < 15{,}3) = \frac{45\times44}{50\times49} = \frac{198}{245}$

**15.1.2** $P = \frac{45\times2}{50\times49} = \frac{9}{245}$

**15.2** $P = \frac{45\times45}{50\times50} = \frac{81}{100}$ ; $P = \frac{45\times2}{50\times50} = \frac{9}{250}$

**16.1** Sabe-se que 90% dos adversários do Alexandre venceram torneios disputados em piso sintético ou em piso de terra batida. Então, a percentagem de adversários que nunca venceram é 10%. Como 60% nunca venceram torneios disputados em piso de terra batida e destes 10% nunca venceram qualquer torneio, tem-se que 60% - 10% = 50% é a percentagem dos que venceram em piso sintético, sem terem vencido em terra batida.




Opção (C)

**16.2** Consideremos os acontecimentos:

$A$ : "conseguir um primeiro serviço bem sucedido"

$B$ : "conseguir pontuar"

Tendo em conta o gráfico apresentado tem-se que:

$$P(A) = 0{,}7\ ;\ \ P(B|A) = 0{,}8 \ \text{ e } \ P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}12$$

Organizando os dados numa tabela, temos:

| | $A$ | $\bar{A}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| $B$ | $0{,}56$ | $0{,}3 - 0{,}12 = 0{,}18$ | $1 - 0{,}26 = 0{,}74$ |
| $\bar{B}$ | $0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}14$ | $0{,}12$ | $0{,}14 + 0{,}12 = 0{,}26$ |
| **Total** | $0{,}7$ | $1 - 0{,}7 = 0{,}3$ | $1$ |

$$P(B|A) = 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0{,}8 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}7 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}56$$

Logo, $P(B) = 0{,}74$ .

**pág. 75**

**16.3**

$$\overbrace{0{,}6 \times 0{,}4}^{\text{defender apenas o 1º}} + \overbrace{0{,}4 \times 0{,}6}^{\text{defender apenas o 2º}} + \overbrace{0{,}4 \times 0{,}4}^{\text{não defender nenhum}} = 0{,}64$$

**17.1** Se retirarmos do monte A, a probabilidade de serem as duas de copas será:

$$P = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$$

Se retirarmos do monte B, a probabilidade de serem as duas de copas será:

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$$

Então, a probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{6}{56} + \frac{1}{2} \times \frac{20}{56} = \frac{13}{56}$$

**17.2** Se retirarmos do monte A:

$$P = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times 2 = \frac{15}{28}$$

Se retirarmos do monte B:

$$P = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times 2 = \frac{15}{28}$$

Logo:

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{15}{28} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{28} = \frac{15}{28}$$

**18.1** R R ou A A ou V V

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{25}$$

**18.2** V _

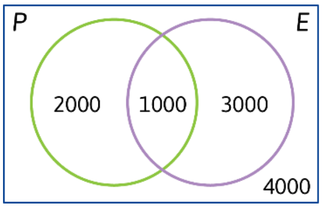
A primeira tem de ser vermelha e segunda pode ser de qualquer cor.

$$P = \frac{1}{5} \times \frac{5}{5} = \frac{1}{5}$$

**18.3** A R ou R A

$$P = \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{25}$$

**19.**




**19.1** $P = \frac{2000}{10000} = 20\%$

**19.2** $P = \frac{2000+1000+3000}{10\,000} = \frac{6000}{10\,000} = \frac{3}{5} = 60\%$

**19.3** $P = \frac{4000}{1000} = 40\%$

**20.1** Consideremos os acontecimentos:

*A* : "pedidos que incluem leite"

*B* : "pedidos que incluem pão"

Tem-se que $P(A) = 45\%$ ; $P(A \cap B) = 9\%$ e $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}$.

Queremos calcular $P(B)$.

Vamos construir uma tabela com os dados fornecidos:

| | $A$ | $\bar{A}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,09 | 0,55 - 0,25 = 0,30 | 0,09 + 0,30 = 0,39 |
| $\bar{B}$ | | 0,25 | |
| **Total** | 0,45 | 1 - 0,45=0,55 | 1 |

Logo, $P(B) = 0{,}39 = 39\%$ .

**20.2** Consideremos o acontecimento $C$ : "ser rapariga" .

Sabe-se que:

- $P(C) = 60\%$
- $P((\bar{A} \cap \bar{B}) \mid \bar{C}) = 37{,}5\%$

Queremos calcular $P(C \cap \bar{A} \cap \bar{B})$ .

$$P((\bar{A} \cap \bar{B}) \mid C) = 37{,}5\% \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = 0{,}375 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0{,}375 \times 0{,}4 \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0{,}15$$

E assim:

$$P(C \cap \bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}10 = \frac{1}{10}$$

**pág. 76**

**21.** O número de casos possíveis é $200 + 250 = 450$ , que corresponde ao número de pessoas que escolheram o jogo A ou o B. Assim, $P = \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$.

Opção (A)

**22.** Existem 4 bolas vermelhas, 3 bolas azuis e 3 bolas verdes.

Se uma das bolas foi retirada, o número de casos possíveis é 9. Se a primeira bola que saiu foi verde, continuam a existir 3 bolas azuis no saco. Logo, $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

**23.1.** O número total de alunos é 200 e o número de alunos que estudam regularmente é:

$$50 + 40 + 20 = 110 \text{ , pelo que } P = \frac{110}{200} = \frac{11}{20}$$

**23.2.** $P(\text{ser do turno da tarde} \mid \text{não estuda regularmente}) = \frac{60}{30+60} = \frac{2}{3}$

**23.3.** $P(\text{não estudar regularmente} \mid \text{é do turno da manhã}) = \frac{30}{30+50} = \frac{3}{8}$

**23.4.** $P(\text{ser do turno da noite} \mid \text{estuda regularmente}) = \frac{20}{50+40+20} = \frac{2}{11}$

**24.1** Consideremos os acontecimentos:

$C$ : "escolher carne"

$E$ : "escolher peixe"

$V$ : "escolher vegetariano"

$S$ : "escolher sobremesa"

Sabe-se que $P(C) = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$, $P(V) = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$, $P(S \mid E) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$ e $P(S \mid V) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Logo, $P(E) = \frac{70}{150} = \frac{7}{15}$.

**24.2** $P(S \mid C) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

**24.3** Podemos construir uma tabela para melhor visualização dos resultados:

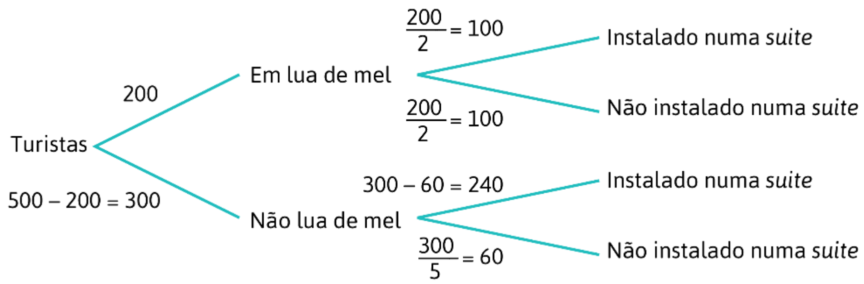
| | $S$ | $\bar{S}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| $C$ | 30 | | 50 |
| $E$ | 40 | | 70 |
| $V$ | 10 | | 30 |
| **Total** | 80 | | 150 |

$$P(V \mid \bar{S}) = \frac{P(V \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{\frac{30-10}{150}}{P(\bar{S})} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{10}{150}}{\frac{150-80}{150}} = \frac{2}{7}$$

**24.4** $P(S \mid E) = \frac{P(S \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{40}{150}}{\frac{70}{150}} = \frac{4}{7}$

**pág. 77**

**25.** Sabemos que:




O número total de turistas que estão instalados numa *suite* é $100 + 240 = 340$ .

O número de turistas instalados numa *suite* que não estão em lua de mel é 240.

Logo, $P = \frac{240}{340} = \frac{12}{17}$.

**26.** Consideremos os acontecimentos:

$A$ : "a rifa é verde"

$B$ : "a rifa é premiada"

Sabe-se que $P(B \mid A) = 25\%$ e $P(A \mid B) = P(\bar{A} \mid B)$ .

Organizando os dados numa tabela, obtém-se:

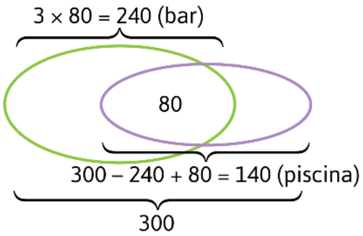
| | $A$ | $\bar{A}$ | **Total** |
|---|---|---|---|
| $B$ | 30 | 30 | 60 |
| $\bar{B}$ | 120 – 30 = 90 | 140 – 90 = 50 | 200 – 60 = 140 |
| **Total** | 120 | 200 – 120 = 80 | 200 |

$$P(B \mid A) = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0{,}25 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}25 \times \frac{120}{200} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}15$$

$0{,}15 \times 200 = 30$ rifas verdes e premiadas. Como o número de rifas premiadas que são verdes e não verdes é o mesmo, tem-se que o número de rifas premiadas e não verdes também é 30.

Sendo assim, $P(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{50}{200}}{\frac{80}{200}} = \frac{5}{8}$.

**27.1**




Os clientes que usufruíram da piscina são os que usufruíram do bar, $300 - 240 = 60$, mais os que usufruíram de ambas as comodidades, ou seja, $60 + 80 = 140$.

**27.2** Consideremos os acontecimentos:

*A* : "o cliente é estrangeiro"

*B* : "o cliente usufruiu da piscina"

Tem-se que $P(A) = 0{,}6$; $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}3$ e $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0{,}8$.

Organizando os dados numa tabela, obtém-se:

| | $A$ | $\bar{A}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,6 - 0,3 = 0,3 | | |
| $\bar{B}$ | 0,3 | 0,32 | 0,3 + 0,32 = 0,62 |
| Total | 0,6 | 1 - 0,6 = 0,4 | 1 |

$P(\bar{B} \cap \bar{A}) = P(\bar{B} \mid \bar{A}) \times P(\bar{A}) = 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$

$P(B) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

**28.** $P(R \mid S)$ é a probabilidade de ter assinalado o candidato B como primeira preferência, sabendo que tem assinalado como segunda preferência o candidato A.

O número de votos que tem assinalado como segunda preferência o candidato A são 11. Destes votos, apenas 4 tem assinalado como primeira preferência o candidato B.

Logo, $P(R \mid S) = \frac{4}{11}$.

Opção (A)

## pág. 78

**29.** Consideremos os acontecimentos:

$A$ : “ser da caixa A”

$B$: “ser da caixa B”

$D$ : “ter defeito”

Sabe-se que:

$$P(D \mid A) = \frac{7}{20} \text{ e } P(D \mid B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

**29.1** Consideremos os acontecimentos:

$D_A$ : “tirar lápis com defeito da caixa A”

$D_B$ : “tirar lápis com defeito da caixa B”

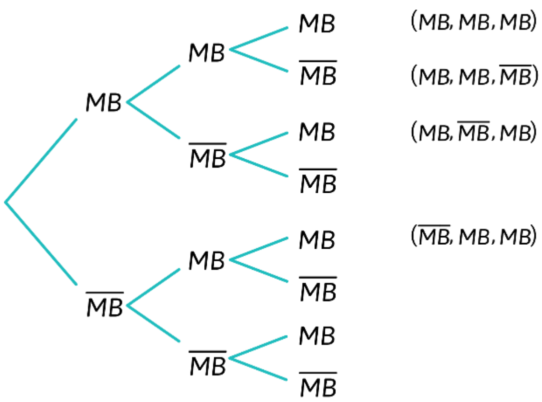
$D_A$ e $D_B$ são acontecimentos independentes, logo:

$$P(D_A \cap D_B) = P(D_A) \times P(D_B) = \frac{7}{20} \times \frac{4}{12} = \frac{7}{60}$$

**29.2** $P\left(\left(D_A \cap \overline{D_B}\right) \cup \left(\overline{D_A} \cap D_B\right)\right) = P(D_A) \times P\left(\overline{D_B}\right) + P\left(\overline{D_A}\right) \times P(D_B) = \frac{7}{20} \times \frac{8}{12} + \frac{13}{20} \times \frac{4}{12} = \frac{9}{20}$

**30.1** $P = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{14}{95}$

**30.2**




Pelo menos dois estarem muito bons é equivalente a afirmar que apenas dois estão $MB$ ou estão os três $MB$ .

$\underline{MB}\ \underline{MB}\ \underline{\overline{MB}}$ $\qquad \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{12}{18} \times 3$

$\underline{MB}\ \underline{MB}\ \underline{\overline{MB}}$ $\qquad \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{6}{18}$

Então, $P = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{12}{18} \times 3 + \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{6}{18} = \frac{98}{285}$ .

**31.** Consideremos os acontecimentos:

*A* : ”ser promovido”

*B* : ”ter bonificação”

Sabe-se que $P(A) = 0{,}4$ e $P(B) = 0{,}5$ .

Como os acontecimentos são independentes, vem:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$$

**32.** Consideremos os acontecimentos:

*A* : “ter a doença A”

*B*: “ter a doença B”

*C*: “ter a doença C”

*D*: “sair curado”

Sabe-se que:

$P(A) = 20\%$ , $P(B) = 30\%$ , $P(C) = 50\%$ , $P(D|A) = 10\%$ , $P(D|B) = 70\%$ e $P(D \mid C) = 50\%$

**32.1** $P(D \mid B) = 70\%$

**32.2** $P(D) = P(D \mid A) \times P(A) + P(D \mid B) \times P(B) + P(D \mid C) \times P(C) =$

$= 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}48 = 48\%$

**32.3** $P(C \mid D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \times P(C)}{0{,}48} = \frac{0{,}5 \times 0{,}5}{0{,}48} = \frac{25}{48} \approx 52\%$

**33.** Consideremos os acontecimentos:

*A* : “ser da máquina A”

*B* : “ser da máquina B”

*C* : “ser da máquina C”

*D* : “ser defeituosa”

Sabe-se que:

$P(A) = 15\%$ , $P(D|A) = 5\%$ , $P(B) = 45\%$ , $P(D|B) = 3\%$ e $P(D|C) = 10\%$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) =$$
$$= P(D \mid A) \times P(A) + P(D \mid B) \times P(B) + P(D \mid C) \times P(C) =$$
$$= 0{,}05 \times 0{,}15 + 0{,}03 \times 0{,}45 + 0{,}1 \times (1 - 0{,}15 - 0{,}45) = 0{,}061 = 6{,}1\%$$

**34.** Consideremos os acontecimentos:

*A* : “ser do parque A”

*B* : “ser do parque B”

*C* : “ser do parque C”

*D* : “produzir cerâmica”

Sabe-se que $P(D|A) = 10\%$ , $P(D \mid B) = 40\%$ e $P(D \mid C) = 25\%$ .

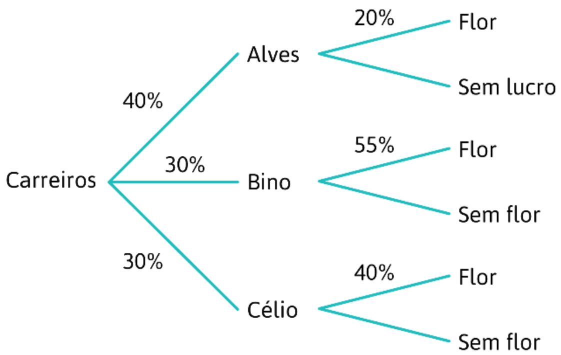
$$P(D) = P(D \mid A) \times P(A) + P(D \mid B) \times P(B) + P(D \mid C) \times P(C) =$$
$$= 0{,}1 \times \frac{1}{3} + 0{,}4 \times \frac{1}{3} + 0{,}25 \times \frac{1}{3} = 0{,}25 = 25\%$$

**35.1** Consideremos a tabela, em que E – Empate, F-Ganha o Francisco e I -ganha o irmão do Francisco:

| | | Francisco | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **Irmão** | **1** | E | F | F | F | F | F |
| | **2** | I | E | F | F | F | F |
| | **3** | I | I | E | F | F | F |
| | **4** | I | I | I | E | F | F |
| | **5** | I | I | I | I | E | F |
| | **6** | I | I | I | I | I | E |

Analisando a tabela, verificamos que $P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

**35.2** Consideremos um diagrama em árvore que esquematiza os dados do problema:




e os acontecimentos:

*A* : "o carro foi conduzido pelo Alves"

*B* : "o carro foi conduzido pelo Bino"

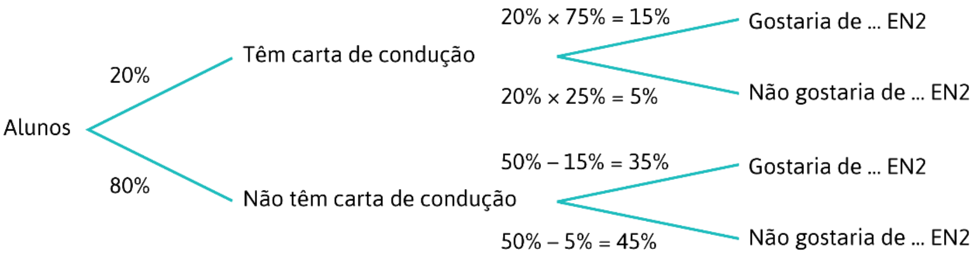
*C* : "o carro foi conduzido pelo Célio"

*F* : "oferecer uma flor"

$$P(B \mid F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B \cap F)}{P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F)} =$$
$$= \frac{0{,}3 \times 0{,}55}{0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}55 + 0{,}3 \times 0{,}4} = \frac{0{,}165}{0{,}365} \approx 0{,}45$$

## pág. 79

**36.** Consideremos um diagrama em árvore que esquematiza os dados do problema:



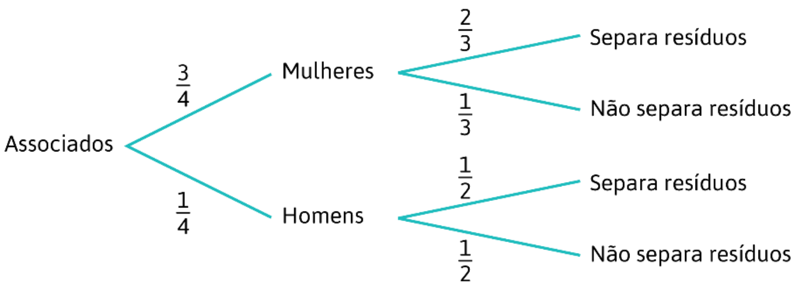

e os acontecimentos:

$C$ : "o aluno tem carta de condução"

$G$ : "o aluno gostaria de percorrer a EN2"

$$P(\bar{C} \mid G) = \frac{P(\bar{C} \cap G)}{P(G)} = \frac{P(\bar{C} \cap G)}{P(C \cap G) + P(\bar{C} \cap G)} = \frac{0{,}35}{0{,}35 + 0{,}15} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7 = 70\%$$

**37.** Consideremos um diagrama em árvore que esquematiza os dados do problema:




e os acontecimentos

$M$ : "o associado é mulher"

$R$ : "o associado separa resíduos"

$$P(M \mid \bar{S}) = \frac{P(M \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(M \cap \bar{S})}{P(M \cap \bar{S}) + P(\bar{M} \cap \bar{S})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

**38.1** $0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + P(X = 4) = 1 \Leftrightarrow P(X = 4) = 1 - 0{,}2 - 0{,}3 - 0{,}4 \Leftrightarrow P(X = 4) = 0{,}1$

**38.2** $0{,}4 \times 20 = 8$

Oito alunos leram três livros nas férias.

**38.3** $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5 = 50\%$

**39.1** $X$ pode tomar os valores 0, 1 e 2.

**39.2** $P(X=0)=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$

$P(X=1)=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times 2=\frac{8}{25}$

$P(X=2)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$

Pelo que a distribuição de probabilidade da variável aleatória $X$ pode ser dada por:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{16}{25}$ | $\frac{8}{25}$ | $\frac{1}{25}$ |

**40.** $X$ pode tomar os seguintes valores:

$X$ = 0 →Não há bolas amarelas, ou seja, são todas vermelhas.

$X$ = 1 →Existe uma bola amarela e três vermelhas.

$X$ = 2 →Existem duas bolas amarelas e duas vermelhas.

$X$ = 3 →Existem três bolas amarelas e uma vermelha.

$X$ = 4 →Todas as bolas são amarelas.

$P(X=0)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{24}{5040}=\frac{1}{210}$

$P(X=1)=4\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{4}{35}$ AVVV

$P(X=2)=6\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$ AVAV, AAVV, AVVA, VAAV, VAVA, VVAA

$P(X=3)=4\times\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$ AAAV

$P(X=4)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{14}$ AAAA

Pelo que a distribuição de probabilidade da variável aleatória $X$ é:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{210}$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{8}{21}$ | $\frac{1}{14}$ |

**41.** $X$ pode tomar os valores 0, 1, 2, 3 e 4.

Considerando que a probabilidade de ter um filho rapaz é $\frac{1}{2}$, tem-se que:

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ → Serem todas raparigas

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 4=\frac{1}{4}$ → Um rapaz

$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 6=\frac{3}{8}$ → Dois rapazes

$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 4=\frac{1}{4}$ → Três rapazes

$P(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ → Serem todos rapazes

Pelo que a distribuição de probabilidade da variável aleatória $X$ é:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |

**42.** O número total de membros da equipa são 32.

A distribuição de probabilidade da variável aleatória $X$ é dada por:

| $x_i$ | 3 | 4 |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{21}{32}$ | $\frac{11}{32}$ |

**43.1** $X$ pode tomar os valores 0, 1 e 2.

$P(X = 0) = \frac{1}{3}$ → A primeira bola é azul.

$P(X = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ → A primeira bola é verde e a segunda é azul.

$P(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}$ → A primeira bola e a segunda são verdes.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

**43.2** $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$

$\text{var}(X) = \frac{1}{3} \times (0-1)^2 + \frac{1}{3} \times (1-1)^2 + \frac{1}{3} \times (2-1)^2 = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$

**44.1** $\frac{b+1}{8} + \frac{b}{8} + \frac{b-1}{8} + \frac{b}{8} = 1 \Leftrightarrow \frac{4b}{8} = 1 \Leftrightarrow b = 2$

$E(X) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (a-1) \times \frac{2+1}{8} + a \times \frac{2}{8} + (a+3) \times \frac{2-1}{8} + (a+5) \times \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3a-3}{8} + \frac{2a}{8} + \frac{a+3}{8} + \frac{2a+10}{8} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 8a + 10 = 2 \Leftrightarrow 8a = -8 \Leftrightarrow a = -1$

**44.2.** Introduzindo os dados na calculadora, obtemos $\text{Var}(X) \approx 6{,}188$ .

**44.3.1** Substituindo os valores de $a$ e de $b$ , obtidos em 44.1, na tabela do enunciado, obtém-se:

| $x_i$ | −2 | −1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

Logo, $P(X \geq 4) = \frac{1}{4} = 25\%$ .

**44.3.2** Atendendo à tabela anterior, $P(-1 < X \leq 3) = P(X = 2) = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$ .

**45.1** Usando a calculadora, obtemos:

$$P(530 \leq X \leq 680) = 0{,}8644$$

Logo, existem $0{,}8644 \times 4000 \approx 3458$ indivíduos, aproximadamente.

**45.2** $P(X < 480) = 0{,}0082$

$P(X > 740) = 1 - P(X \leq 740) = 1 - 0{,}997445 = 0{,}0026$

## pág. 81

**46.1** $\mathrm{Var}(X) = 625\ \mathrm{mm}^2$

Logo, $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 25$ .

$$P(X > 400) = 0{,}1 \qquad N(\mu, 25)$$

$$X > 400 \Leftrightarrow 25U + \mu > 400 \Leftrightarrow U > \frac{400 - \mu}{25}$$

$$P\left(U > \frac{400 - \mu}{25}\right) = 1 - P\left(U \leq \frac{400 - \mu}{25}\right)$$

Logo, $P\left(U \leq \frac{400-\mu}{25}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{400-\mu}{25} = 0{,}9 \Leftrightarrow \mu = 368\ \mathrm{mm}$ .

**46.2** $P(X \geq 369) = 0{,}484$

$0{,}484 \times 8000 = 3872$

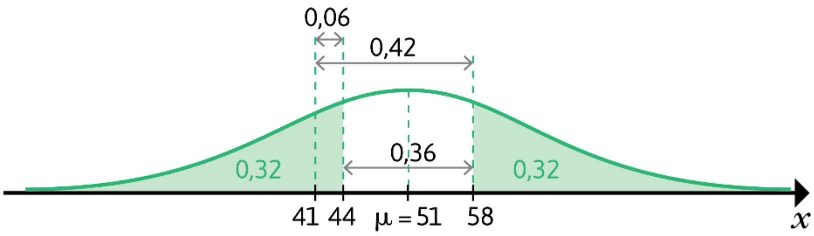
**47.1** Introduzindo os dados na calculadora, obtém-se:

**47.1** $P(X > 38) = 0{,}0548$ , ou seja, 5,48%.

**47.2** $P(X > 30) = 0{,}9452$ , ou seja, 94,52%.

**48.** Tem-se que:

- $P(X \geq 58) = P(X \leq 44) = 0{,}32$
- $P(44 \leq X \leq 58) = 1 - P(X \leq 44) - P(X \geq 58) = 1 - 0{,}32 - 0{,}32 = 0{,}36$
- $P(41 \leq X \leq 44) = P(41 \leq X \leq 58) - P(44 \leq X \leq 58) = 0{,}42 - 0{,}36 = 0{,}06$



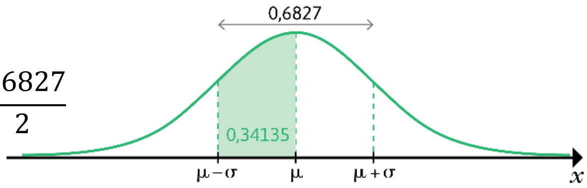

Logo, dos 500 turistas cujos formulários foram analisados, espera-se que 6% tenham uma idade compreendida entre 41 e 44 anos , isto é:

$$500 \times 0{,}06 = 30$$

**49.** Como numa distribuição normal $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ e, neste caso, $P(\mu - 8 < X < \mu + 8) \approx 0{,}9545$ , podemos calcular o valor de desvio padrão:

$$2\sigma = 8 \Leftrightarrow \sigma = 4$$

$$\begin{aligned} P(11 < X < 15) &= P(12 - 4 < X < 15) \\ &= P(\mu - \sigma < X < \mu) \\ &= \frac{P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)}{2} \approx \frac{0{,}6827}{2} \\ &\approx 0{,}34135 \end{aligned}$$




Logo, dos 1550 clientes que foram atendidos naquele dia, espera-se que o número dos que devem esperar entre 11 e 15 minutos seja:

$$1550 \times 0{,}34135 \approx 529$$