I. Modelo matemáticos

Capítulo 2 Modelos populacionais

Check pág. 106

1. $N(6) = 6000 + 150 \times 6 = 6900$ indivíduos

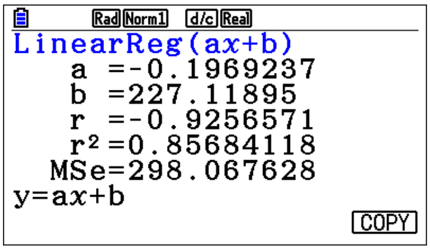
2. $N(t) = 8250 \Leftrightarrow 6000 + 150t = 8250 \Leftrightarrow t = 15$

$2024 + 15 = 2039$

No início de 2039

Check pág. 109

Usando as capacidades da calculadora gráfica, obtemos:



Assim, $a \approx -0{,}197$ e $b \approx 227{,}119$, pelo que o modelo linear é $y = -0{,}197x + 227{,}119$.

Para $x = 160$, vem:

$$y = -0{,}197 \times 160 + 227{,}119 \approx 195{,}6$$

O peso médio das maçãs será aproximadamente 195,6 gramas.

Prova dos 9 pág. 110

1.1 Aumento: $\frac{89\,000 - 51\,000}{5} = 7600$ clientes por ano

1.2 No final de 2022 (3 anos depois), o número de clientes era $51\,000 + 7600 \times 3 = 73\,800$.

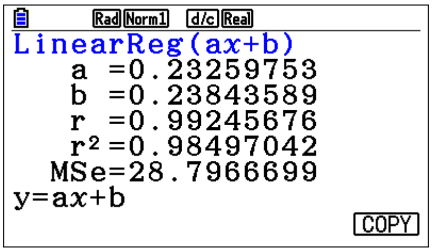
1.3 $C(n) = 51\,000 + 7600n$

1.4.1 $C(9) = 51\,000 + 7600 \times 9 = 119\,400$ clientes

1.4.2 $C(n) > 125\,000 \Leftrightarrow 51\,000 + 7600n > 125\,000 \Leftrightarrow n > 9{,}7 \Leftrightarrow n \geq 10$

Em 2029.

2.1 Usando as capacidades da calculadora gráfica, obtemos:

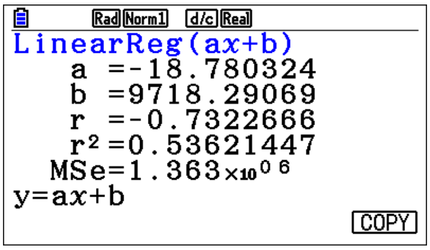


Logo, o modelo linear pedido será $y = 0{,}233x + 0{,}238$.

2.2 $y = 0{,}233 \times 52{,}5 + 0{,}238 \approx 224$ milhares de euros

pág. 111

3.1 Usando as capacidades da calculadora gráfica, obtemos:



Logo, o modelo linear pedido será $y = -18{,}78x + 9718{,}29$.

3.2 Para $x = 179$ milhares de colmeias , vem:

$$y = -18{,}78 \times 179 + 9718{,}29 \approx 6356{,}67 \text{ toneladas de mel}$$

$\frac{14\,246}{6356{,}67} \approx 2{,}24$, isto é, a produção foi cerca de 2,2 vezes superior ao valor estimada.

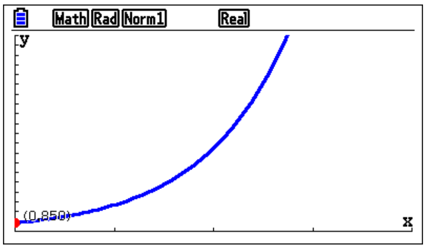
A afirmação é verdadeira.

Check pág. 113

1. $P_0 = 850 \times \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 850$ pinheiros

2. $P_{10} = 850 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{10} = 15\,094{,}06764 \approx 15\,094$ pinheiros

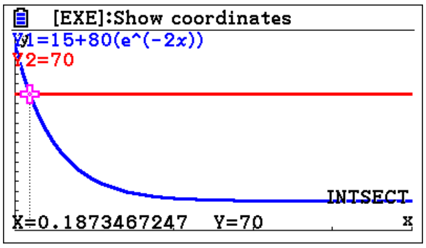
3. Podemos observar que este modelo tem um crescimento exponencial:



Check pág. 115

1. $G(0) = 15 + 80e^{-k\times 0} = 15 + 80 = 95\ °\mathrm{C}$

2. $G(2) = 70$ Podemos determinar o valor de k com auxílio da calculadora gráfica:



$k \approx 0{,}187$

ou, analiticamente:

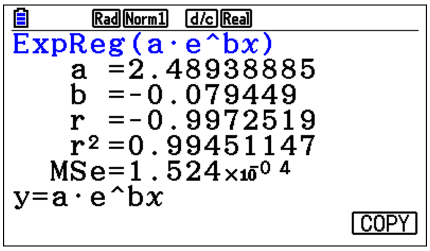
$$G(2) = 70 \Leftrightarrow 15 + 80e^{-2k} = 70 \Leftrightarrow e^{-2k} = \frac{11}{16} \Leftrightarrow -2k = \ln\frac{11}{16} \Leftrightarrow k \approx 0{,}187$$

Donde:

$$G(10) = 15 + 80e^{-0{,}187\times 10} \approx 27\ °\mathrm{C}$$

Check pág. 117

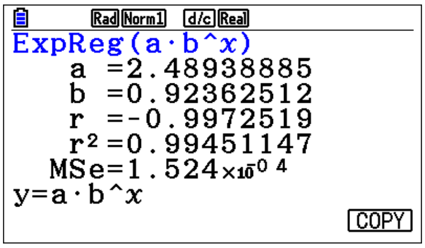
1. $y = a \times e^{bx}$



$C(t) = 2{,}489e^{-0{,}079t}$

ou

$y = a \times b^x$



$C(t) = 2{,}489 \times 0{,}924^t$

2. 6 h 30 m → 6,5 h

$C(6{,}5) = 2{,}489e^{-0{,}079\times 6{,}5} \approx 1{,}48941$

ou

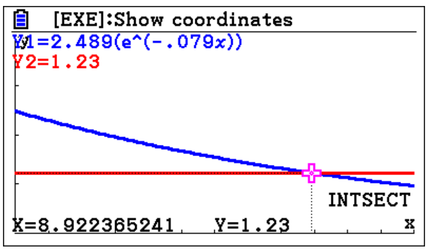
$C(6{,}5) = 2{,}489 \times 0{,}924^{6{,}5} \approx 1{,}48941$

A concentração deverá ser de aproximadamente 1,49 mg/cm³.

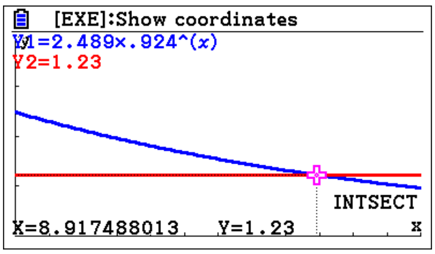
3. $C(t) = 1{,}23\ \mathrm{mg/cm^3}$

Podemos determinar o valor de t:

- com auxílio da calculadora gráfica:



ou



8,922 horas $\rightarrow$ 8 horas e $0{,}922 \times 60 \approx 55$ minutos

ou

8,917 horas $\rightarrow$ 8 horas e $0{,}917 \times 60 \approx 55$ minutos

- analiticamente:

$$2{,}489e^{-0{,}079t} = 1{,}23 \Leftrightarrow e^{-0{,}079t} = \frac{1{,}23}{2{,}489} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{0{,}079} \times \ln\frac{1{,}23}{2{,}489} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t \approx 8{,}922 \Leftrightarrow t \approx 8\text{ h }55\text{ min}$$

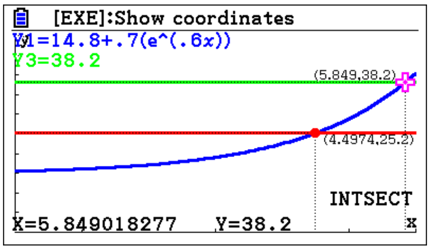
ou

$$2{,}489 \times 0{,}924^t = 1{,}23 \Leftrightarrow 0{,}924^t = \frac{1{,}23}{2{,}489} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1{,}23}{2{,}489}}{\ln 0{,}924} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t \approx 8{,}917 \Leftrightarrow t \approx 8\text{ h }55\text{ min}$$

Prova dos 9 pág. 118

1.1 $r(2) = 14{,}8 + 0{,}7e^{0{,}6\times 2} \approx 17{,}1\%$

1.2 $25{,}2\% + 13\% = 38{,}2\%$



Pontos de interseção: $P_1(4{,}5;\ 25{,}2)$ e $P_2(5{,}8;\ 38{,}2)$.

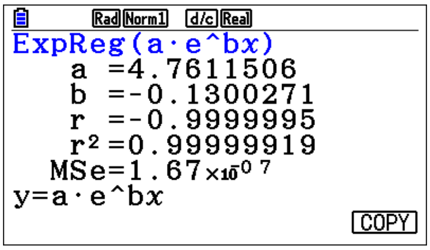
4,5 horas → 4 horas e 30 minutos: 20 h 00 min + 4 h 30 min = 0 h 30 min

5,8 horas → 5 horas e 48 minutos: 20 h 00 min + 5 h 48 min = 1 h 48 min

A banda principal atuou entre as 0 h 30 min e as 1 h 48 min.

2.1 4,76 mg corresponde ao valor para $t = 0$.

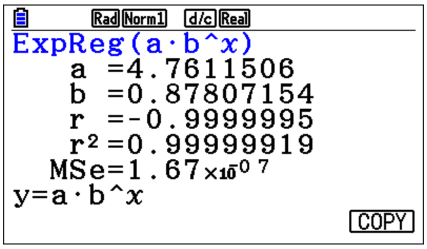
2.2 $y = a \times e^{bx}$



$Q(t) = 4{,}76e^{-0{,}13t}$

ou

$y = a \times b^x$



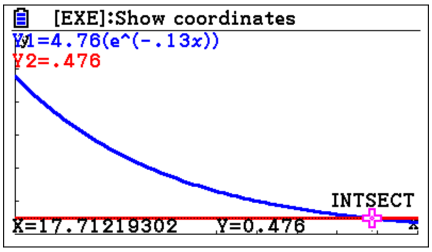
$Q(t) = 4{,}76 \times 0{,}88^t$

2.3.1 $Q(24) = 4{,}76e^{-0{,}13\times 24} \approx 0{,}210$ mg

2.3.2 $Q(t) = \frac{4,76}{10}$ mg

Podemos determinar o valor de t:

- com auxílio da calculadora gráfica:



$17,712$ horas $\rightarrow$ 17 horas e $0,712 \times 60 \approx 43$ minutos

- analiticamente:

$$Q(t) = \frac{4,76}{10} \Leftrightarrow 4,76e^{-0,13t} = 0,476 \Leftrightarrow -0,13t = \ln 0,1 \Leftrightarrow t \approx 17,712$$

3. $P(t) = 1,65 \times 2^{\frac{t}{25}}$ $\quad t \geq 0$ ($t = 0$ corresponde a 1900)

$t = 2000 - 1900 = 100$

$P(100) = 1,65 \times 2^{\frac{100}{25}} = 1,65 \times 2^4 = 26,4$

Teria sido aproximadamente 26 mil milhões de pessoas.

Nota: progressão geométrica:

- primeiro termo: $a_1 = 1,65$ e razão 2
- termo geral: $a_n = 1,65 \times 2^{n-1}$
- termo correspondente ao ano 2000 → n = 5 :

$a_5 = 1,65 \times 2^{5-1} = 26,4$ mil milhões

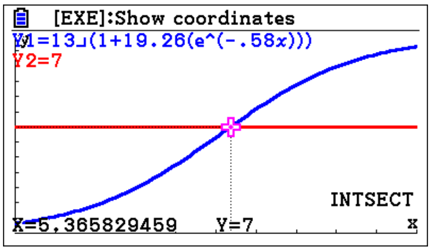
Check pág. 122

1. $h(0) \approx 0,642$ e $h(1) \approx 1,103$

Crescimento no 1º ano: $h(1) - h(0) = 0,461$ metros

Cresceu aproximadamente 46 cm.

2.



$5,37$ anos → 5 anos e $0,37 \times 12 = 4,44$ meses

A árvore ultrapassa os 7 metros depois de 5 anos e 4 meses (já no decurso do quinto mês).

3. Estando representada por um modelo logístico, com o decorrer do tempo, a altura da árvore vai-se aproximando dos 13 metros de altura, sem nunca ultrapassar este valor.

Assim, nunca irá atingir 13,5 metros.

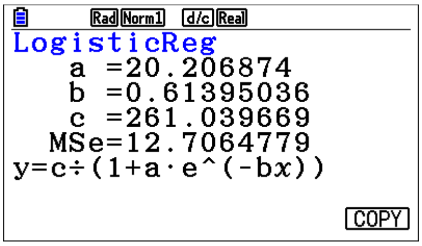
Check pág. 124

1. Durante $84 \div 7 = 12$ semanas .

2.

Número de semanas (s)	Comprimento, em cm (C)
1	17,93
2	36,36
3	67,76
4	98,10
5	131,00
6	169,50
7	205,50
8	228,30
9	247,10
10	250,50
11	253,80
12	254,50

3.



$$C(s) = \frac{261{,}040}{1 + 20{,}207e^{-0{,}614s}}$$

4. 100 dias $\to \frac{100}{7} \approx 14{,}2857$ semanas

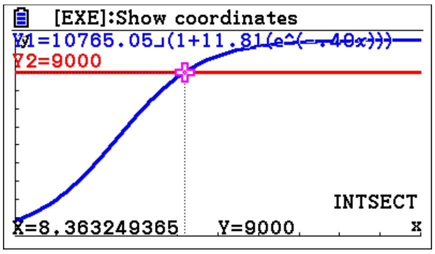
$$C\left(\frac{100}{7}\right) = \frac{261{,}040}{1+20{,}207e^{-0{,}614\times\frac{100}{7}}} \approx 260{,}22 \text{ cm}$$

Prova dos 9 pág. 125

1.1 $2017 \ \to \ t = 20$

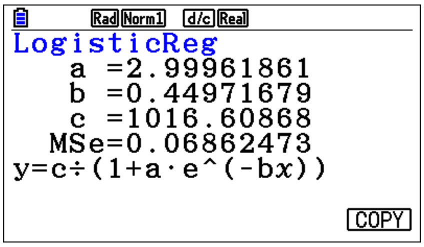
$$G(20) = \frac{10\,765{,}05}{1+11{,}81e^{-0{,}49\times 20}} \approx 10\,758 \text{ TJ}$$

1.2 $G(t) > 9000$



$G(t) > 9000$ para $t > 8{,}36$, isto é, depois de 9 anos.
Então, seria a partir de $1997 + 9 = 2006$.

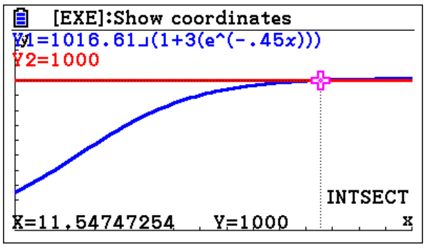
2.1 Foram vendidas 254 unidades.
2.2 Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos:



$$N(t) = \frac{1016{,}61}{1 + 3{,}00e^{-0{,}45t}}$$

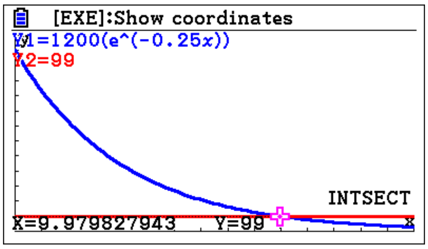
pág. 126

2.3.1 $N(8) = \frac{1016{,}61}{1+3{,}00e^{-0{,}45\times 8}} \approx 939$ unidades
2.3.2



Ultrapassa o milhar de unidades vendidas para $t > 11{,}54$, ou seja, ao fim de 12 dias.

3.1 $c(t) \leq 99$

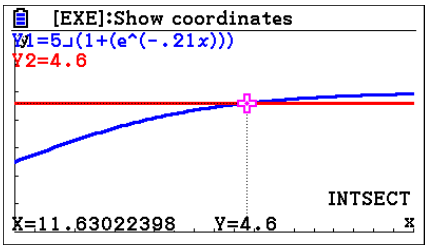


A qualidade da água é considerada boa, pela primeira vez, quando $t \approx 9{,}98$ e, neste instante, o número de peixes no lago é dado por:

$$p(9{,}98) = \frac{5}{1+e^{-0{,}21\times 9{,}98}} \approx 4{,}45 \text{ milhares.}$$

Assim, 4,45 milhares = 4450 > 4400 .

3.2 Sabemos que o número de peixes tende a estabilizar nos 5 milhares (5000) peixes, logo pode ser introduzida uma nova espécie quando a população já existente for de 5000 – 400 = 4600 , que é igual a 4,6 milhares. Para determinar ao fim de quantos dias após a manutenção se pode introduzir uma nova espécie, temos de resolver a equação $p(t) = 4{,}6$.



$p(t) = 4{,}6 \Leftrightarrow t \approx 11{,}63$

A partir do 12º dia pode ser feita a introdução de novos peixes.

Check pág. 129

1. $T(5) = 12 - 2\ln 5 \approx 8{,}781$ $\quad 0{,}781 \times 60 = 47$

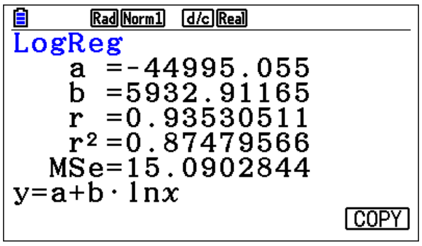
Demora 8 minutos e 47 segundos.

2. $T(1) = 12$

$T(x) = \frac{12}{2} \Leftrightarrow 12 - 2\ln x = 6 \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3 \Leftrightarrow x \approx 20$ tentativas

Check pág. 131

1. Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos:



$N(t) = -44\,995{,}06 + 5932{,}91\ln t$

2.1 $N(2030) = -44\,995{,}06 + 5932{,}91\ln 2030 \approx 189$ prescrições

2.2 $N(t) = 180 \Leftrightarrow -44\,995{,}06 + 5932{,}91\ln\, t = 180 \Leftrightarrow \ln\, t = \frac{180+44\,995{,}06}{5932{,}91} \Leftrightarrow$

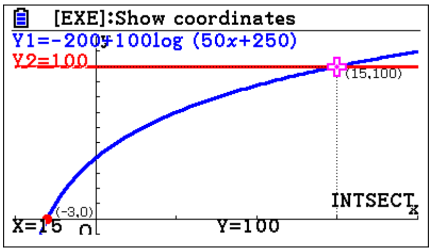
$\Leftrightarrow t = e^{7{,}614} \approx 2027$

Prova dos 9 pág. 132

1.1 $D(-1) = 200 + 100\log\,(50 \times (-1) + 250) \approx 30{,}103\%$

$8 \times 30{,}103\% \approx 2{,}4$ gigabytes

1.2 A descarga do jogo corresponde a 100%.

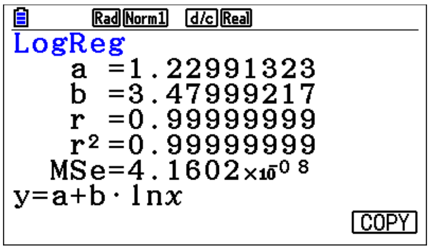


$t=-3$ significa que o jogo estava a descarregar há 3 minutos quando Paulo olhou para o monitor pela primeira vez e, passados 15 minutos dessa primeira observação, o jogo tinha descarregado completamente. Assim, demorou 18 minutos a fazer a descarga do jogo.

2.1 Pesava $86{,}4+1{,}230 \approx 87{,}6$ kg

pág. 133

2.2 Recorrendo à calculadora gráfica, obtemos:

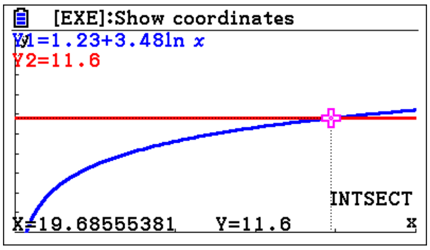


$P(t)=1{,}23+3{,}48\ln t$

2.3.1 $P(8)=1{,}23+3{,}48\ln 8 \approx 8{,}4665$ kg perdidos

Deverá pesar $87{,}6-8{,}4665 \approx 79{,}1$ kg .

2.3.2 Queremos resolver, graficamente, a equação $P(t)=87{,}6-76 \Leftrightarrow P(t)=11{,}6$.



Deverá prolongar a dieta por cerca de 20 semanas.

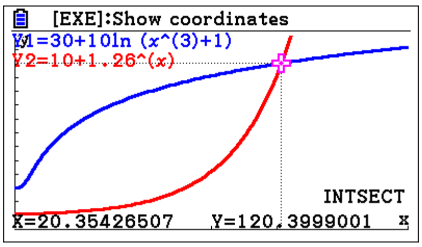
3.1 $A(0)=30$ centenas e $A(2) \approx 51{,}972$ centenas

Percentagem de aumento: $\frac{5197{,}2-3000}{3000} \times 100 \approx 73\%$

3.2 $A(12) \approx 104{,}553$ centenas e $B(12) \approx 26{,}012$ centenas

$\frac{A(12)}{B(12)} \approx 4{,}02 \approx 4$, isto é, o número de plantas da espécie A era aproximadamente o quádruplo do número de plantas da espécie B ; logo, a afirmação é falsa.

3.3 Queremos resolver, graficamente, a equação $A(t)=B(t)$.



O número de plantas da espécie A será igual ao número de plantas da espécie B ao fim de 20,35 meses, ou seja, ao fim de $20{,}35 \times 30 \approx 611$ dias .