

I. Modelo matemáticos

Capítulo 2 Modelos populacionais

Exercícios de aplicação

pág. 136

1.1 $10\,000 + 11 \times 100 = 11\,100$ pares de calças

1.2 $10\,000 + 17 \times 100 = 11\,700$ pares de calças

2.1 50 páginas: $3 + 0,04 \times 50 = 5$ €

100 páginas: $3 + 0,04 \times 100 = 7$ €

2.2 $C(n) = 3 + 0,04n$

3. Altitude do nível do mar: 0 metros

$$1100 - 800 = 300 \text{ hPa}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{300}{a} \Leftrightarrow a = 300$$

O alpinista encontra-se a uma altitude de 3000 metros.

4.

1º termo = 5 razão = 3

$$u_n = 5 + 3(n - 1) \quad n \rightarrow \text{semanas}$$

$$42 = 5 + 3n - 3 \Leftrightarrow 3n = 40 \Leftrightarrow n = 13, (3)$$

Serão necessárias 14 semanas.

5.1 $37\,000 + 200 \times 18 = 40\,600$ toneladas

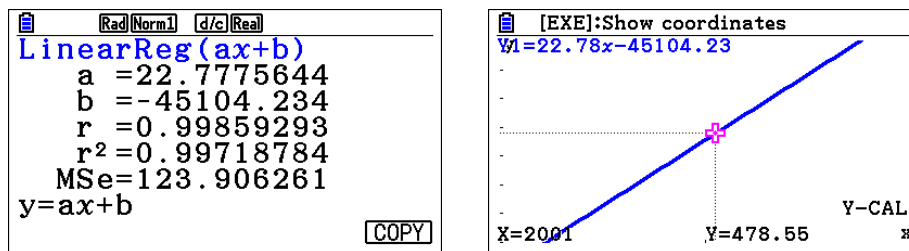
5.2 $Q(N) = 37\,000 + 200N$

5.3 $Q(N) = 65\,000 \Leftrightarrow 37\,000 + 200N = 65\,000 \Leftrightarrow N = 140$ meses

$$140 \div 12 = 11 \frac{2}{3} \text{ anos, isto é, 11 anos e 8 meses.}$$

A capacidade deverá ser atingida em agosto de 2034.

6. Com auxílio da calculadora gráfica, obtemos os valores pretendidos:



ou, analiticamente, $y = 22,78 \times 2001 - 45\,104,23 \approx 479 \text{ €}$.

pág. 137

7. Entre 2021 e 2041, temos duas décadas:

$$P_{2041} = 10\,343\,066 \times \left(1 - \frac{2,1}{100}\right)^2 \approx 9\,913\,218 \text{ habitantes}$$

8. 100 anos $\rightarrow$ 10 décadas

$$P_{2121} = 250\,744 \times \left(1 - \frac{6,4}{100}\right)^{10} \approx 129\,416 \text{ habitantes}$$

A população da Madeira diminuiria para cerca de metade da atual (aproximadamente 52% da atual).

9. $C(12) = 0,5 \times 3^{12} = 625\,720,5 \approx 265,7 \text{ m}$

10. $\text{Valor}(5) = 28\,800 \times 0,85^5 \approx 12\,778,71 \text{ €}$

11.

1º termo: $1 (4^0)$

2º termo: $4 (4^1)$

3º termo: $16 (4^2)$

$$u_n = 4^{n-1}$$

$$1 + 4 + 16 + 64 + \dots + 4^9 = 349\,525 \text{ pessoas}$$

12.1

Mês	Valor da mesada (€)	
	Tomé	Joana
1º	10	0,5
2º	110	1,5
3º	210	3,5
4º	310	7,5
5º	410	15,5

12.2 Também podemos obter os valores pretendidos recorrendo à calculadora:

n	an	bn
1	10	0.5
2	110	1.5
3	210	3.5
4	310	7.5

n	an	bn
5	410	15.5
6	510	31.5
7	610	63.5
8	710	127.5

n	an	bn
9	810	255.5
10	910	511.5
11	1010	1023.5
12	1110	2047.5

Ao fim de 11 meses, a mesada da Joana ultrapassa a do irmão.

13. $D(n) = 2^n$

$$D(8) = 2^8 = 256 \text{ series}$$

14.1 $2000 \times 1,03 = 2060 \text{ €}$

14.2 $2000 \times 1,015^2 = 2060,45 \text{ €}$

14.3 $2000 \times \left(1 + \frac{0,03}{365}\right)^{365} \approx 2060,91 \text{ €}$

14.4 $2000 \times \left(1 + \frac{0,03}{365 \times 24}\right)^{8760} \approx 2060,91 \text{ €}$

14.5 $2000 \times e^{0,03 \times 1} \approx 2060,91 \text{ €}$

15.1 $P(6) = 1 + 3 \times e^{0,1 \times 6} \approx 6,466356401$

Será de aproximadamente 6466 elementos.

15.2 $P(t) > 5 \Leftrightarrow t \approx 2,88 \text{ meses (calculadora)}$

Verificado através do gráfico ($t \approx 2,876820$).

16. $4000 = N_0 \times (1 + 0,055)^4 \Leftrightarrow N_0 = \frac{4000}{1,0554} \approx 3228,87$

A população inicial era de aproximadamente 3229 indivíduos.

17.1 $P(10) = 167\,646 \Leftrightarrow P_0 \times e^{0,02 \times 10} = 167\,646 \Leftrightarrow P_0 = \frac{167\,646}{e^{0,2}} \Leftrightarrow P_0 \approx 137\,256,9358$

Existiam cerca de 137 257 melgas.

17.2 $P(25) = 137\,257 \times e^{0,02 \times 25} \approx 226\,298,5355$

Ao fim de 25 dias, existirão cerca de 226 229 melgas.

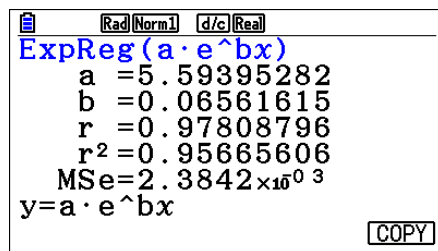
pág. 138

18.1 $\begin{cases} N_0 \times e^{k \times 0} = 1 \\ N_0 \times e^{k \times 20} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_0 = 1 \\ e^{k \times 20} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N_0 = 1 \\ k = \frac{\ln 2}{20} \end{cases}$

18.2 $N(30) = 1 \times e^{\frac{\ln 2}{20} \times 30} \approx 2828 \text{ bactérias}$

18.3 $N(t) = 5 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln 2}{20} \times t} = 5 \Leftrightarrow t = \frac{20}{\ln 2} \times \ln 5 \Leftrightarrow t \approx 46,4386 \text{ min} \approx 46 \text{ min e } 26 \text{ s}$

19.1 Com auxílio da calculadora gráfica, obtemos:



$$P(t) = 5,594e^{0,066t}$$

19.2.1 2030 $\rightarrow t = 13$ décadas após 1900

$$P(13) = 5,594e^{0,066 \times 13} \approx 13,193 \text{ milhões de habitantes}$$

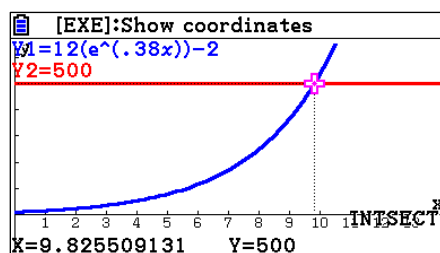
19.2.2 $P(t) = 20 \Leftrightarrow 5,594e^{0,066t} = 20 \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{20}{5,594}}{0,066} \Leftrightarrow t \approx 19,3$ décadas ou 193 anos, ou seja, no ano 2093.

20.1 13 horas $\rightarrow t = 5$ e 14 horas $\rightarrow t = 6$

$$P(6) - P(5) = 12e^{0,38 \times 6} - 2 - (12e^{0,38 \times 5} - 2) \approx 37,09$$

Realizou cerca de 37 novas partilhas.

20.2



$$t \approx 9,8 \rightarrow 10 + 8 = 18 \text{ horas}$$

Às 18 horas, o número total de novas partilhas foi pela primeira vez superior a 500.

$$21.2 P(0) = \frac{100}{5 + 12e^{-0,3 \times 0}} = \frac{100}{17} \approx 5,88 \text{ milhares de habitantes}$$

$$21.2 P(10) = \frac{100}{5 + 12e^{-3}} \approx 17,87 \text{ milhares de habitantes}$$

21.3 Podemos obter o valor pretendido graficamente ou através de uma tabela (calculadora):

X	Y1
15	19.48
20	19.881
25	19.973
30	19.994

X	Y1
35	19.998
40	19.999
45	19.999
50	19.999

Verificamos que o número de habitantes tende a estabilizar nos 20 milhares.

$$22.1 \quad N(0) = \frac{2500}{1+1499e^0} = \frac{2500}{1500} \approx 1, (6)$$

Havia cerca de 2 alunos infectados.

$$22.2 \quad N(7) = \frac{2500}{1+1499e^{-0,82 \times 7}} \approx 429,632$$

Havia cerca de 430 alunos infectados.

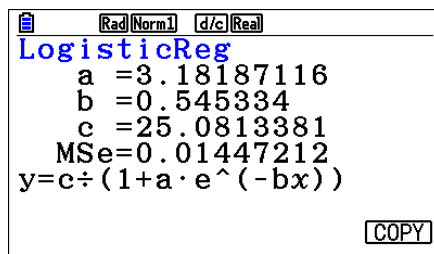
22.3 50% dos alunos: 1250

$$N(t) = 1250 \Leftrightarrow \frac{2500}{1+1499e^{-0,82t}} = 1250 \Leftrightarrow 1+1499e^{-0,82t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0,82t} = \frac{1}{1499} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{-0,82} \ln\left(\frac{1}{1499}\right) \approx 8,92 \approx 9 \text{ dias}$$

1 de outubro $\rightarrow t = 0$, então, $t = 9$ corresponde ao dia 10 de outubro

23.1 Com auxílio da calculadora gráfica, obtemos:



$$C(t) = \frac{25,08}{1+3,18e^{-0,55t}}$$

$$23.2.1 \text{ No dia da compra: } \frac{25,08}{1+3,18e^{-0,55 \times 0}} = \frac{25,08}{4,18} = 6,0 \text{ cm}$$

$$\text{Passado 1 ano: } \frac{25,08}{1+3,18e^{-0,55 \times 12}} \approx 25,0 \text{ cm}$$

$$23.2.2 \quad \frac{25,08}{1+3,18e^{-0,55t}} = 17 \Leftrightarrow 1+3,18e^{-0,55t} = \frac{25,08}{17} \Leftrightarrow -0,55t = \ln\left(\frac{\frac{25,08}{17}-1}{3,18}\right) \Leftrightarrow t \approx 3,4558$$

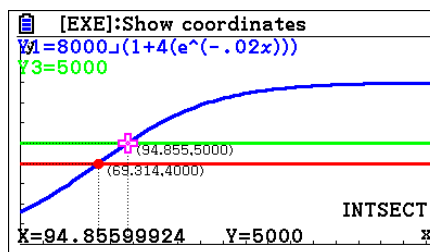
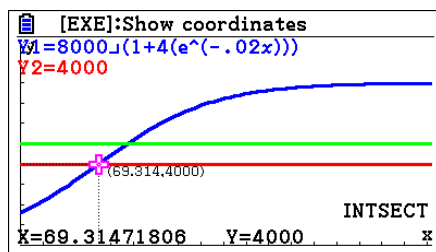
ou seja, no mês de março, por volta do dia $0,4558 \times 31 \approx 14$ de março.

$$24.1 \quad N(0) = \frac{8000}{1+4e^{-0,02 \times 0}} = 1600$$

$$N(364) = \frac{8000}{1+4e^{-0,02 \times 364}} \approx 7978,007$$

$$N(364) - N(0) = 6378 \text{ visitantes}$$

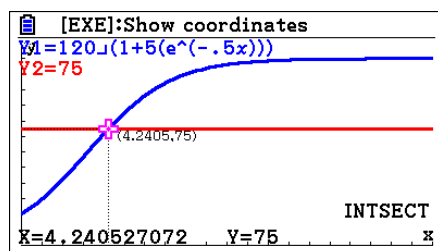
24.2 Com auxílio da calculadora gráfica, obtemos:



Podemos dizer que o número de visitantes foi superior a 4000 e inferior a 5000 entre o 70º dia e o 94º dia, isto é, durante $94 - 70 + 1 = 25$ dias .

pág. 140

25.1 Recorrendo à calculadora gráfica, podemos obter:



O número de visitantes ultrapassou os 75 mil, 4,2 anos após o início de 1990, por isso, durante o ano de 1994.

25.2 $V(10) = \frac{120}{1+5e^{-0,5 \times 10}} \approx 116,0890$ milhares de visitantes

$V(5) = \frac{120}{1+5e^{-0,5 \times 5}} \approx 85,0807$ milhares de visitantes

Percentagem de aumento: $\frac{V(10)-V(5)}{V(5)} \approx 36\%$

26.1 Como a amplitude é medida em milímetros, $3 \text{ cm} = 30 \text{ mm}$ e vem:

$$M = 3 + \log 30 \Leftrightarrow M \approx 4,5$$

Logo, o sismo terá uma magnitude de 4,5 na escala de Richter.

26.2 Sendo $M = 5,7$:

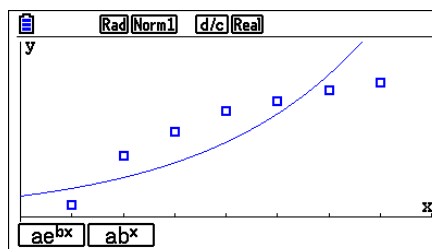
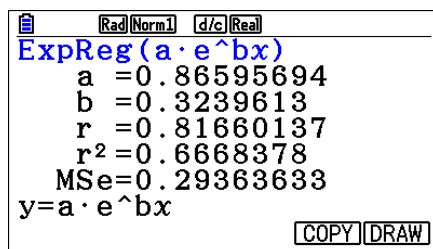
$$\begin{aligned} 5,7 &= 3 + \log A \Leftrightarrow 5,7 - 3 = \log A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2,7 = \log A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \approx 10^{2,7} \approx 501 \end{aligned}$$

Assim, a amplitude registada pelo sismógrafo será de aproximadamente 501 mm.

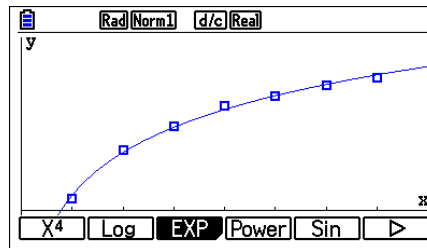
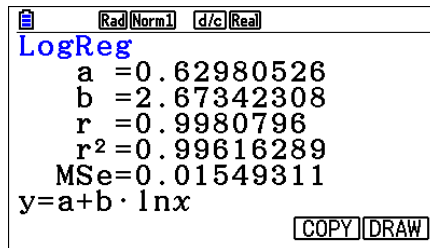
27. $L(h) > 4 \Leftrightarrow \log(80 + h) + 2 > 4 \Leftrightarrow \log(80 + h) > 2 \Leftrightarrow 80 + h > 10^2 \Leftrightarrow h > 20$

Será necessário trabalhar mais de 20 horas.

28. Para o modelo exponencial $y = a \times e^{bx}$:

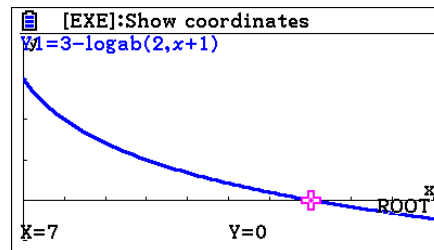


Para o modelo logarítmico $y = a + b \ln x$:



Podemos concluir que o modelo logarítmico é o que melhor se ajusta aos dados da experiência.

29.1 Usando a calculadora gráfica:



Ao fim de 7 minutos.

29.2 $t = \frac{7}{2} = 3,5$ minutos

$Q(3,5) = 3 - \log_2(3,5 + 1) \approx 0,8$ cl

30. $A(10) = 4,4 \Leftrightarrow 0,5 + 6 \ln(10k + 1) = 4,4 \Leftrightarrow \ln(10k + 1) = \frac{83}{120}$

- analiticamente: $10k + 1 = e^{\frac{83}{120}} \Leftrightarrow k = \frac{e^{\frac{83}{120}} - 1}{10} \Leftrightarrow k \approx 0,1$
- graficamente:

