

I. Modelos matemáticos

Capítulo 1 Modelos de grafos

Exercícios de aplicação

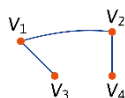
pág. 88

1.1 Apenas o grafo I não é conexo, pois não existe nenhuma aresta a ligar vértice V_3 a outro vértice.

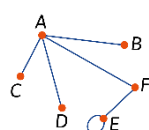
1.2 e 1.3

Grafo	Nº de vértices	Ordem	Vértices	Nº de arestas	Arestas
I	3	3	V_1, V_2 e V_3	2	V_1V_2 e V_2V_3
II	4	4	V_1, V_2, V_3 e V_4	3	V_1V_2, V_2V_3 e V_3V_4
III	4	4	A, B, C e D	5	AD (duas vezes), AC, BD e CD
IV	5	5	A, B, C, D e E	9	$AB, AC, AD, AE, BD, BE, CD, CE$ e DE

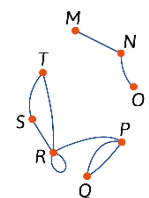
2.1



2.2

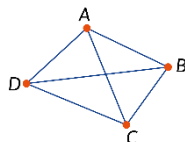


2.3



3. Os grafos das alíneas 2.1 e 2.2 são conexos, pois existe sempre uma sequência de arestas a unir quaisquer dois vértices.

4.1

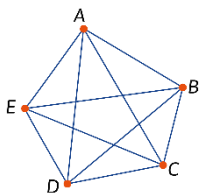


Número de vértices: 4

Número de arestas: 6

$$6 = \frac{4 \times 3}{2}$$

4.2

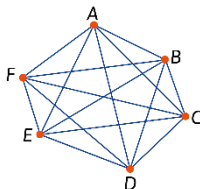


Número de vértices: 5

Número de arestas: 10

$$10 = \frac{5 \times 4}{2}$$

4.3

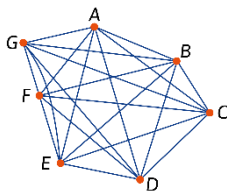


Número de vértices: 6

Número de arestas: 15

$$15 = \frac{6 \times 5}{2}$$

4.4



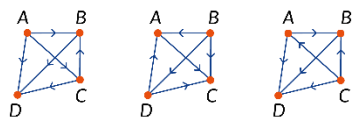
Número de vértices: 7

Número de arestas: 21

$$21 = \frac{7 \times 6}{2}$$

Seja n o número de vértices de um grafo completo. O número de arestas é dado por $\frac{n(n-1)}{2}$.

5.

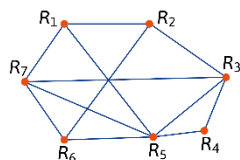


(2)

(3)

(4)

6.



pág. 89

7.1 A: 2; B: 3; C: 2; D: 2; E: 3; F: 1; G: 1; H: 2

7.2 A: 3; B: 3; C: 4; D: 3; E: 3

7.3 A: 2; B: 3; C: 3; D: 3; E: 3; F: 3; G: 5

7.4 A: 2; B: 3; C: 2; D: 2; E: 2; F: 1

8.

	Soma dos graus (S)	Número de arestas (n)	$S = 2 \times n$
Grafo 7.1	16	8	$16 = 2 \times 8$
Grafo 7.2	16	8	$16 = 2 \times 8$
Grafo 7.3	20	10	$20 = 2 \times 10$
Grafo 7.4	12	6	$12 = 2 \times 6$

9.1.1 Os grafos são todos de ordem 6, pois têm 6 vértices.

9.1.2 Os grafos I e II são simples, porque não têm arestas paralelas nem lacetes; o grafo III é um multigrafo.

9.1.3 Os grafos II e III são conexos, pois existe sempre uma aresta, ou sequência de arestas, a unir quaisquer dois vértices; o grafo I desconexo, pois não existe nenhuma aresta a ligar o vértice A a um dos outros vértices.

9.1.4 Pontes são arestas de um grafo que, ao serem retiradas, o tornam desconexo. Assim:

- grafo I: a aresta CD ;
- grafo II: as arestas EF , EC , DB , AD e AE ;
- grafo III: as arestas TU , UX e UV .

9.2 Apenas o grafo III é regular, pois os vértices têm todos o mesmo grau (grau 3).

10.1 Trajeto euleriano. Não tem circuito porque tem dois vértices de grau ímpar.

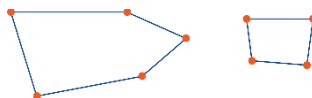
10.2 Não tem trajeto euleriano pois tem mais de dois vértices de grau ímpar.

10.3 Circuito euleriano.

10.4 Trajeto euleriano. Não tem circuito porque tem dois vértices de grau ímpar.

11. Sim, pois todos os vértices têm grau par.

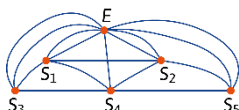
12. A afirmação é falsa. Para além de todos os vértices terem de ser de grau par, o grafo tem de ser conexo. Por exemplo:



Neste grafo todos os vértices têm grau par, mas não é possível encontrar um circuito euleriano porque é desconexo.

pág. 90

13.1

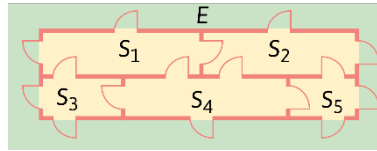


13.2 E – grau 5 ; S_1 – grau 5 ; S_2 – grau 5 ; S_3 – grau 4 ; S_4 – grau 5 ; S_5 – grau 4

13.3 Sim, é possível, fazendo, por exemplo, o percurso $E \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_4 \rightarrow S_3 \rightarrow E$.

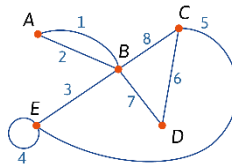
13.4 Não é possível, porque existem vértices de grau ímpar (salas com um número ímpar de portas).

13.5 Encerrando uma das portas de S_1 que dá acesso ao exterior e a porta de ligação entre S_2 e S_4 , ficam todas as salas com um número par de portas:



14. Se eliminarmos FG , os vértices F e G passam a ter grau par, como os restantes.

15. Não é possível encontrar um circuito, porque nem todos os vértices têm grau par. Como existem apenas dois vértices de grau ímpar, B e C , podemos encontrar um trajeto euleriano que comece num deles e termine no outro. Começando no vértice B , por exemplo, a ordem de inclusão das arestas por aplicação do algoritmo de Fleury é a indicada no seguinte grafo pela numeração crescente:



16. É possível, pois todos os vértices têm grau par. Um percurso pode ser, por exemplo:

$A \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow O \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow O \rightarrow U \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow A$

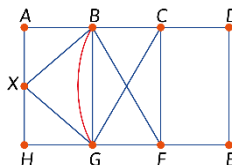
17. Sim, porque todos os vértices têm grau par. Por exemplo:

$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow M \rightarrow O \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$

pág. 91

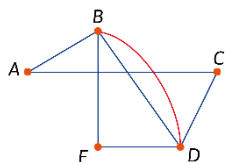
18.1 Não, porque o vértice X tem grau par e há dois vértices de grau ímpar.

18.2 Só consegue se repetir a aresta BG (fazendo com que os vértices B e G «fiquem com grau par»):

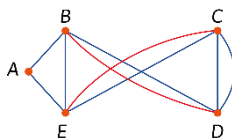


Por exemplo, $X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow X \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow X$.

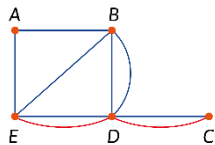
19.1



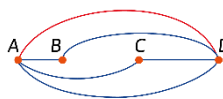
19.2



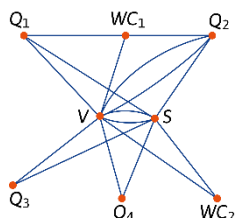
19.3



19.4

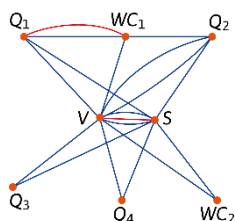


20.1 Os vértices representam as divisões e as arestas representam as ligações entre as divisões.



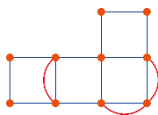
20.2 A ronda pretendida não é possível, pois existem vértices com grau ímpar, Q_1 , WC_1 , V e S .

20.3 Por exemplo,



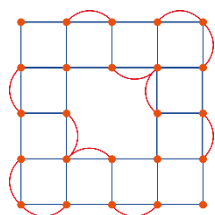
21.1 Não existe circuito euleriano, porque há vértices de grau ímpar.

21.2

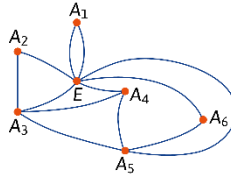


pág. 92

22.



23.1 Os vértices representam as divisões e o exterior e as arestas representam as ligações entre divisões e entre estas e o exterior. Um grafo que representa esta situação é, por exemplo:



23.2 Esse circuito não é possível porque existem, no grafo, vértices de grau ímpar, A_4 e E .

23.3 Basta duplicar a aresta EA_4 . No contexto do problema, significa que a porta existente entre E e A_4 deverá ser passada duas vezes.

24. Repete o vértice C : num circuito hamiltoniano não pode haver repetição de vértices, exceto o primeiro, que também é o último.

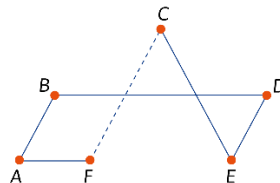
25.1 Existe: $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, por exemplo.

25.2 Existe: $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$, por exemplo.

25.3 Existe: $J \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow J$, por exemplo.

25.4 Não existe.

26. Como os vértices A , D e E têm grau 2, teremos de usar as arestas incidentes nestes vértices. Assim, para qualquer circuito hamiltoniano, teremos de usar obrigatoriamente as arestas:



e, para completar o circuito, só pode ser com a inclusão da aresta FC :

$A \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$

$F \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow F$

$C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow C$

$E \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow E$

$B \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B$

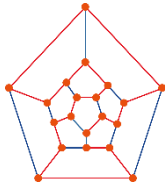
$D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D$

Assim, o circuito é sempre o mesmo, exceto o ponto de partida e o de chegada.

27.1 Acrescenta-se ED (ou DC , por exemplo).

27.2 Acrescenta-se EG (ou AG , por exemplo).

28.1



28.2 Sim, pois passa em cada um uma única vez.

29. Por exemplo, $B \rightarrow R_1 \rightarrow R_6 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3 \rightarrow R_4 \rightarrow R_5 \rightarrow R_7 \rightarrow R_8 \rightarrow B$.

30.

A: circuito euleriano.

B: circuito euleriano.

C: circuito hamiltoniano.

D: Circuito hamiltoniano.

31. Problema do caixeiro-viajante.

32.1 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{20} D \xrightarrow{30} C \xrightarrow{10} A \quad \text{Total: 65}$$

$$B \xrightarrow{5} A \xrightarrow{10} C \xrightarrow{30} D \xrightarrow{20} B \quad \text{Total: 65}$$

$$C \xrightarrow{10} A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{20} D \xrightarrow{30} C \quad \text{Total: 65}$$

$$D \xrightarrow{10} A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{30} C \xrightarrow{30} D \quad \text{Total: 75}$$

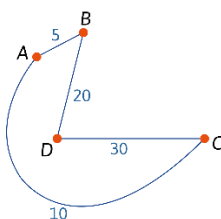
Percurso mínimo, com comprimento igual a 65, a começar em A , em B ou em C : $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$ ou $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ ou $C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$, respetivamente.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas: começamos por ordenar as arestas por ordem crescente dos seus pesos:

$$A \xrightarrow{5} B; A \xrightarrow{10} C; A \xrightarrow{10} D; B \xrightarrow{20} D; B \xrightarrow{30} C; C \xrightarrow{30} D$$

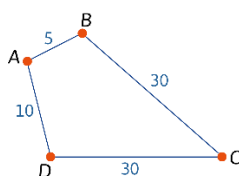
Em seguida, escolhemos, sucessivamente, a aresta a que corresponde o valor mais baixo, nunca escolhendo três arestas que concorram num mesmo vértice e não formando um circuito quando ainda há vértices por visitar. Depois de escolher a primeira aresta, AB , as duas seguintes têm o mesmo peso, o que nos vai levar a obter circuitos diferentes dependendo da aresta escolhida neste ponto. Assim, se optarmos por:

- AC , obtemos:



Total: 65

- AD , obtemos:



Total: 75

32.2 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$A \xrightarrow{52} D \xrightarrow{58} B \xrightarrow{133} C \xrightarrow{75} A \quad \text{Total: 318}$$

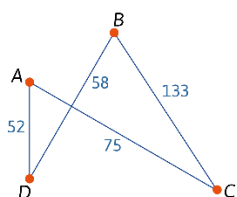
$$B \xrightarrow{58} D \xrightarrow{52} A \xrightarrow{75} C \xrightarrow{133} B \quad \text{Total: 318}$$

$$C \xrightarrow{68} D \xrightarrow{52} A \xrightarrow{61} B \xrightarrow{133} C \quad \text{Total: 314}$$

$$D \xrightarrow{52} A \xrightarrow{61} B \xrightarrow{133} C \xrightarrow{68} D \quad \text{Total: 314}$$

Percurso a começar em C ou D , com 314.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:



Percurso: $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

Total: 318

32.3 Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$A \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} E \xrightarrow{5} D \xrightarrow{8} C \xrightarrow{7} B \xrightarrow{2} A$$

$$B \xrightarrow{2} A \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} E \xrightarrow{5} D \xrightarrow{8} C \xrightarrow{7} B$$

$$C \xrightarrow{7} B \xrightarrow{2} A \xrightarrow{1} F \xrightarrow{3} E \xrightarrow{5} D \xrightarrow{8} C$$

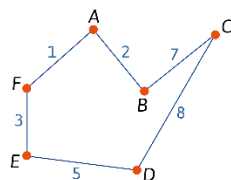
$$D \xrightarrow{5} E \xrightarrow{3} F \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{7} C \xrightarrow{8} D$$

$$E \xrightarrow{3} F \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{7} C \xrightarrow{8} D \xrightarrow{5} E$$

$$F \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{7} C \xrightarrow{8} D \xrightarrow{5} E \xrightarrow{3} F$$

Têm todos o mesmo comprimento: 26

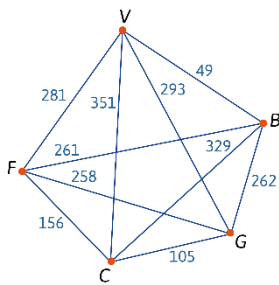
Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:



Percurso: $A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$

Total: 26

33.1

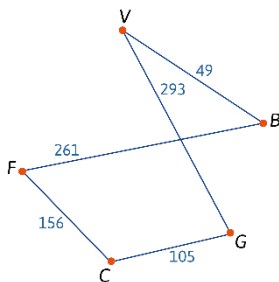


33.2 Por exemplo:

$$B \rightarrow V \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow B : 49 + 281 + 258 + 105 + 329 = 1022 \text{ km}$$

$$B \rightarrow F \rightarrow V \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow B : 261 + 281 + 293 + 105 + 329 = 1269 \text{ km}$$

33.3

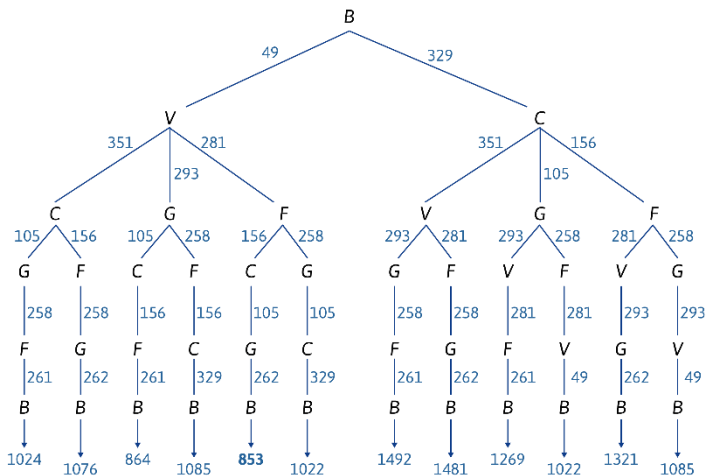


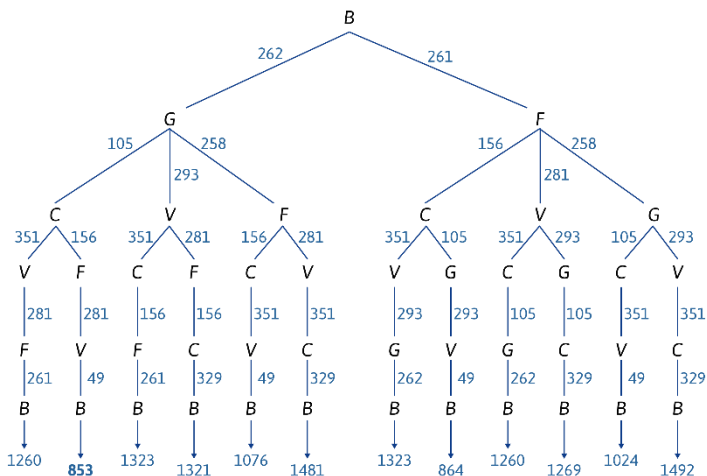
Percurso: $B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow V \rightarrow B$

Comprimento: 864 km

33.4 $B \rightarrow V \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow B : 49 + 281 + 156 + 105 + 262 = 853 \text{ km}$

33.5 Sim, o algoritmo usado em 33.4.



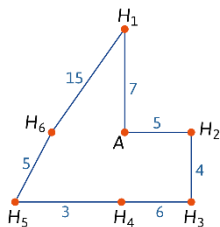


34. Algoritmo dos mínimos sucessivos:

$$A \xrightarrow{5} H_2 \xrightarrow{4} H_3 \xrightarrow{6} H_4 \xrightarrow{3} H_5 \xrightarrow{5} H_6 \xrightarrow{15} H_1 \xrightarrow{7} A$$

Total: 45 km

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas:

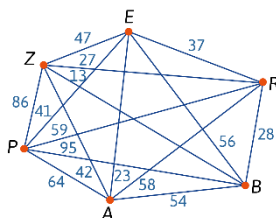


Percurso: $A \rightarrow H_1 \rightarrow H_6 \rightarrow H_5 \rightarrow H_4 \rightarrow H_3 \rightarrow H_2 \rightarrow A$

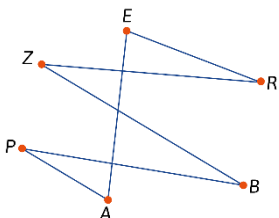
Total: 45 km

35.1 e 35.2 Os vértices representam a empresa e cada filial (designadas pela primeira letra de cada uma, exceto Estremoz, que designaremos pela letra Z); as arestas representam as ligações entre cada filial e entre estas e a empresa.

Cada aresta terá um peso associado que indica a distância, em quilómetros, entre cada filial e entre estas e a empresa.



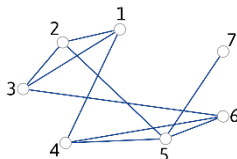
35.3 Começamos com a aresta $Z \xrightarrow{13} B$, seguida de $A \xrightarrow{23} E$ e de $Z \xrightarrow{27} R$. Excluimos $R \xrightarrow{28} B$, que forma um circuito, e continuamos com $R \xrightarrow{37} E$, excluindo sempre as arestas que formem um circuito e que não se encontrem três arestas no mesmo vértice. Finalizamos com $P \xrightarrow{64} A$ e $P \xrightarrow{95} B$.



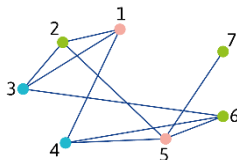
O percurso é: $E \rightarrow R \rightarrow Z \rightarrow B \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow E$ (ou no sentido inverso)

O comprimento mínimo é: $13 + 23 + 27 + 37 + 64 + 95 = 259$ quilómetros

36.1 Os vértices representam as disciplinas e as arestas representam as incompatibilidades de realização de exame no mesmo dia.

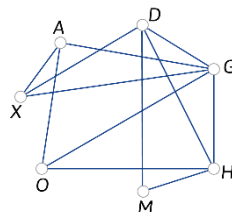


36.2 Vamos colorir os vértices do grafo, começando pelo vértice de maior grau, colorindo com a mesma cor os vértices não adjacentes. Obteremos o grafo:

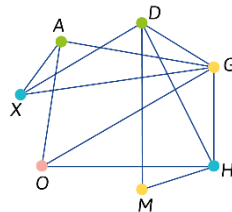


São necessários, pelo menos, três dias: um dia para os exames 1 e 5, outro para os exames 3 e 4 e um terceiro dia para os exames 2, 6 e 7.

37.1 Os vértices representam os diferentes jogos e as arestas representam as impossibilidades de agendar dois jogos no mesmo dia. Um grafo que traduz os dados da tabela é, por exemplo:



37.2 Serão necessários, no mínimo, quatro dias. Por exemplo:



37.3 Uma organização possível do campeonato seria: um dia com abalone e damas, outro com gamão e mastermind, outro com hex e xadrez e outro com ouri.

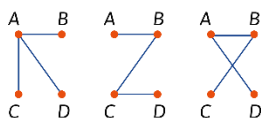
38.1 Não é, porque tem um circuito.

38.2 É, porque é conexo e sem circuitos.

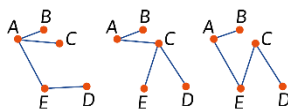
38.3 Não é, porque tem pelo menos um circuito.

38.4 É, porque é conexo e sem circuitos.

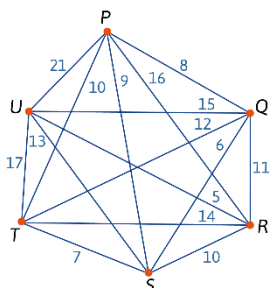
39.1 Por exemplo:



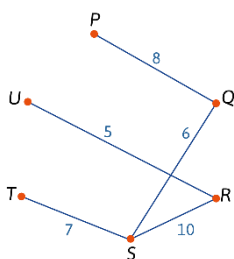
39.2 Por exemplo:



40.1



40.2 Podemos usar o algoritmo de Kruskal para obter a árvore abrangente mínima.



Comprimento: 36 dezenas de metros

40.3 Somas das distâncias a partir de:

$P: 8 + 16 + 9 + 10 + 21 = 64$ dezenas de metros

$Q: 8 + 11 + 6 + 12 + 15 = 52$ dezenas de metros

$R: 16 + 11 + 10 + 14 + 5 = 56$ dezenas de metros

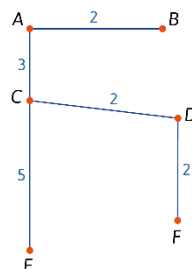
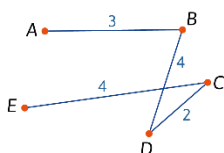
$S: 9 + 6 + 10 + 7 + 13 = 45$ dezenas de metros

$T: 10 + 12 + 14 + 7 + 17 = 60$ dezenas de metros

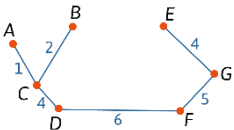
$U: 21 + 15 + 5 + 13 + 17 = 71$ dezenas de metros

A central deve situar-se em S , pois é a que minimiza as distâncias a cada uma das cidades.

41.1 e 41.2 As árvores finais obtidas por qualquer um dos métodos são iguais e têm o mesmo peso: 13 para o grafo I e 14 para o grafo II.



42. O tempo mínimo para os bombeiros será de 22 minutos e o percurso é representado pela árvore:



pág. 97

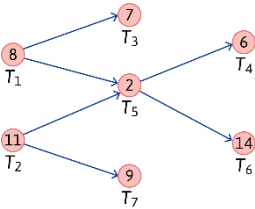
43.1

Tarefas	Tempo (dias)	Precedências
T_1	6	Nenhuma
T_2	9	Nenhuma
T_3	10	Nenhuma
T_4	5	T_1
T_5	8	T_2 e T_3
T_6	12	T_3
T_7	12	T_4 e T_5
T_8	7	T_4 e T_6
T_9	6	T_6

43.2 $10 + 8 + 12 = 30$ ($T_3 \rightarrow T_5 \rightarrow T_7$)

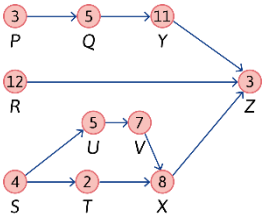
O tempo mínimo é 30 dias.

44.1



44.2 $11 + 2 + 14 = 27$ horas ($T_2 \rightarrow T_5 \rightarrow T_6$)

45.1 Considerando os tempos necessários à concretização de cada uma das tarefas e às suas precedências, podemos traduzir os dados da tabela no grafo seguinte:



45.2 Considerando todas as sequências de tarefas possíveis:

$$P \rightarrow Q \rightarrow Y \rightarrow Z : 3 + 5 + 11 + 3 = 22 \text{ meses}$$

$$R \rightarrow Z : 12 + 3 = 15 \text{ meses}$$

$$S \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow Z : 4 + 5 + 7 + 8 + 3 = 27 \text{ meses}$$

$$S \rightarrow T \rightarrow X \rightarrow Z : 4 + 2 + 8 + 3 = 17 \text{ meses}$$

O caminho crítico é $S \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow Z$ e serão necessários, no mínimo, 27 meses para concluir o projeto.

46.

Tarefas	Tempo (horas)	Precedências
T_1	20	Nenhuma
T_2	12	T_1
T_3	9	T_2
T_4	11	Nenhuma
T_5	17	T_4
T_6	22	T_5 e T_7
T_7	15	Nenhuma
T_8	35	T_3 , T_6 e T_9
T_9	16	Nenhuma

As possíveis sequências de tarefas são:

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow T_8 \text{ (76 horas)}$$

$$T_4 \rightarrow T_5 \rightarrow T_6 \rightarrow T_8 \text{ (85 horas)}$$

$$T_7 \rightarrow T_6 \rightarrow T_8 \text{ (72 horas)}$$

$$T_9 \rightarrow T_8 \text{ (51 horas)}$$

As tarefas que constituem o caminho crítico são T_4 , T_5 , T_6 e T_8 e são necessários, no mínimo, 13 dias (85 horas) para concluir o projeto.