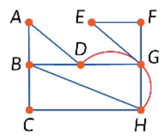
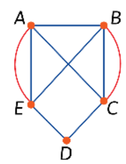
I. Modelos matemáticos

A pensar no exame pág. 145

1.1 Apenas no grafo III é possível encontrar um circuito euleriano, uma vez que todos os vértices têm grau par. Os grafos I e II não têm circuito euleriano porque têm vértices de grau ímpar.

1.2 Por exemplo:

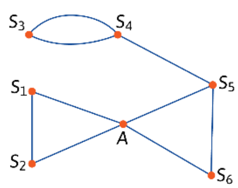




I. **II.**

1.3 Apenas no grafo II é possível encontrar um circuito hamiltoniano, por exemplo, $A \to B \to C \to D \to E \to A$.

2. Por exemplo:

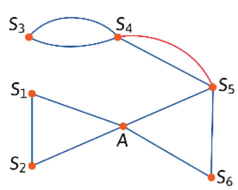


onde os vértices representam as seis salas e o átrio (divisões) e cada a aresta representa a porta entre duas divisões.

Se analisarmos o grau de cada vértice, verificamos que todos têm grau par, exceto S_4 e S_5 , que têm grau ímpar (grau 3). Por esta razão, não é possível definir o percurso com início e fim no átrio passando por todas as portas e entrando em todas as salas sem passar por nenhuma porta mais do que uma vez.

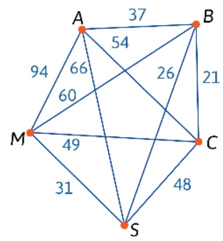
Para que seja possível realizar o percurso pretendido deverá ser acrescentada uma porta entre S_4 e S_5 , o que fará com que estes vértices fiquem grau par e, deste modo, tornar possível a existência de um circuito de Euler.

Assim, o presidente deverá mandar acrescentar uma porta entre S_4 e S_5 , de acordo com o grafo seguinte:



pág. 146

3.1 Por exemplo:



Os vértices representam as cinco localidades (usando a primeira letra do nome de cada uma) e cada aresta representa a ligação entre duas localidades com a distância associada.

3.2 O percurso obtido pela Marília, atendendo ao critério que escolheu, será:

$$B \longrightarrow C \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow A \longrightarrow B$$

que corresponde a uma distância total de $21 + 48 + 31 + 94 + 37 = 231$ km .

3.3 Colocando os pares de localidades por ordem crescente das respetivas distâncias, obtemos:

$$B \overset{21}{—} C \; ; \; B \overset{26}{—} S \; ; \; M \overset{31}{—} S \; ; \; B \overset{37}{—} A \; ; \; C \overset{48}{—} S \; ;$$

$$C \overset{49}{—} M \; ; \; A \overset{54}{—} C \; ; \; C \overset{60}{—} M \; ; \; A \overset{66}{—} S \; ; \; A \overset{94}{—} M$$

Selecionando as menores distâncias de acordo com o método proposto, obtemos:

$$B \overset{21}{—} C \; ; \; B \overset{26}{—} S \; ; \; M \overset{31}{—} S \; ; \; A \overset{54}{—} C \text{ e } A \overset{94}{—} M$$

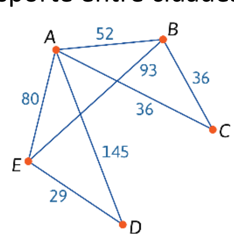
que, depois de ordenado, resulta no percurso:

$$B \xrightarrow{21} C \xrightarrow{54} A \xrightarrow{94} M \xrightarrow{31} S \xrightarrow{26} B, \text{ com } 226 \text{ km}$$

3.4 A Joana é quem apresenta a melhor solução em termos de distância, com menos 5 km do que a Marília. Qualquer um dos dois percursos é hamiltoniano, uma vez que passa em todas localidades uma única vez, exceto a primeira, que também é a última.

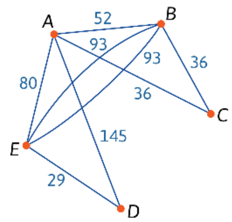
pág. 147

4.1 Os vértices representam as cidades (sendo utilizada apenas a primeira letra de cada cidade) e as arestas representam a existência de serviço de transporte entre cidades.

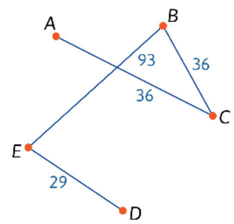


4.2 O grafo não é completo porque, por exemplo, não há nenhuma aresta a unir os vértices C e D.

4.3 A pretensão da Cândida não é possível pois existem dois vértices, B e E, que têm grau ímpar. No entanto, se repetir a ligação entre B e E já consegue:

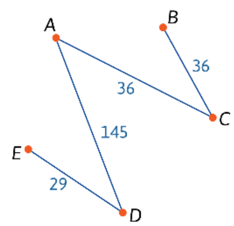


4.4.1 Começando em Alva:



Percurso: $A \to C \to B \to E \to D$, com $36 + 36 + 93 + 29 = 194$ km

Começando em Esbatida:



Percurso: $E \to D \to A \to C \to B$, com $29 + 145 + 36 + 36 = 246$ km

O melhor percurso é o que começa em Alva.

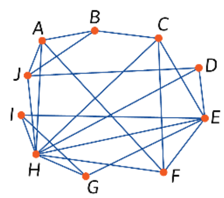
4.4.2 Percurso 1: $C \to B \to A \to E \to D$, com $36 + 52 + 80 + 29 = 197$ km

Percurso 2: $C \to A \to B \to E \to D$, com $36 + 52 + 93 + 29 = 210$ km

O percurso 1 é o melhor (tem menos 13 km)

pág. 148

5.1 Representando os projetos pelos vértices e as incompatibilidades de reunir no mesmo dia pelas arestas, podemos obter, por exemplo, o seguinte grafo:



5.2 Começamos por determinar o grau de cada vértice:

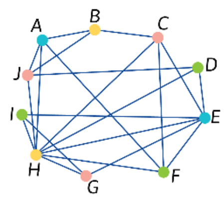
Vértice	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Grau	4	3	4	3	6	4	3	8	3	4

Atribuímos uma primeira cor ao vértice H, que é o que tem maior grau, e atribuímos essa mesma cor a todos os vértices que não lhe sejam adjacentes nem adjacentes entre si: apenas o vértice B.

Atribuímos uma segunda cor ao próximo vértice com maior grau, E, bem como a todos os vértices que não lhe sejam adjacentes nem adjacentes entre si: apenas o vértice A.

A seguir temos vários vértices de grau 4: escolhemos um deles, C, por exemplo, e atribuímos uma terceira cor, bem como a todos os vértices que não lhe sejam adjacentes nem adjacentes entre si: os vértices G e J.

Repetindo o procedimento, concluímos que os três vértices restantes, D, F e I, podem ser coloridos com uma quarta cor. Obtemos o seguinte grafo colorido:

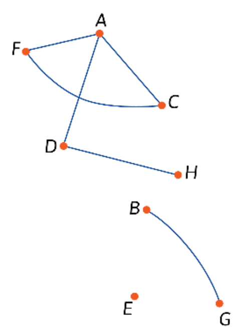


Assim, serão necessários, no mínimo, 4 dias para a realização das reuniões, por exemplo:

- os projetos B e H reúnem no primeiro dia;
- os projetos A e E reúnem no segundo dia;
- os projetos C, J e G reúnem no terceiro dia;
- os projetos D, F e I reúnem no quarto dia.

pág. 149

6.1 Cada vértice representa uma modalidade e as arestas representam as compatibilidades das modalidades no mesmo bloco. Um grafo possível para esta situação é:



6.2 Será necessário constituir, no mínimo, 4 blocos:

- a modalidade E não é compatível com nenhuma das outras modalidades, pelo que terá de ficar isolada num bloco;
- as modalidades B e G ficam num segundo bloco;
- as modalidades D e H ficam num terceiro bloco;
- as modalidades A, C e F ficam num quarto bloco.

7.1 Aplicando o algoritmo dos mínimos sucessivos, obtemos:

- percurso 1: $P \xrightarrow{15} T \xrightarrow{19} S \xrightarrow{34} Q \xrightarrow{32} R \xrightarrow{35} P$, com 135 km;
- percurso 2 : $R \xrightarrow{21} T \xrightarrow{15} P \xrightarrow{30} Q \xrightarrow{34} S \xrightarrow{50} R$, com 150 km.

O menor é o percurso 1, que começa e acaba em P .

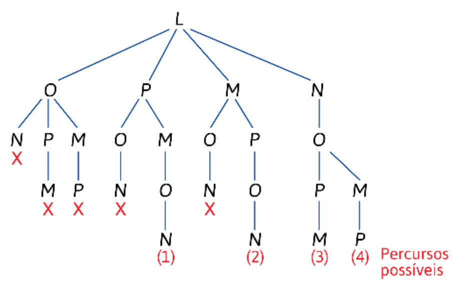
7.2 Percurso 3: $Q \xrightarrow{30} T \xrightarrow{15} P \xrightarrow{32} S \xrightarrow{50} R \xrightarrow{32} Q$, com 159 km.

Percurso 4: $Q \xrightarrow{30} P \xrightarrow{15} T \xrightarrow{19} S \xrightarrow{50} R \xrightarrow{32} Q$, com 146 km.

O percurso 4 tem menos 13 km do que o percurso 3, logo o número mínimo de quilómetros é 146.

pág. 150

8.1 Analisando o grafo da figura, podemos construir o seguinte diagrama em árvore:



Agora, observando o diagrama, podemos facilmente completar a frase solicitada:

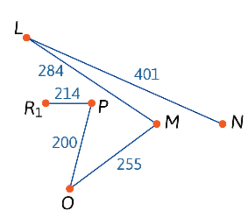
O presidente da junta de freguesia verificou que existem **4** percursos possíveis, mas, se quiser visitar o expositor N depois de visitar o expositor O , apenas existe(m) **2** percurso(s) possível(is). Verificou também que não poderia visitar o expositor M imediatamente a seguir ao expositor ***N*** e que, imediatamente a seguir a visitar o expositor N , poderia visitar o expositor ***O*** .

Assim, a correspondência correta é: I - c); II - b); III - a); IV - b).

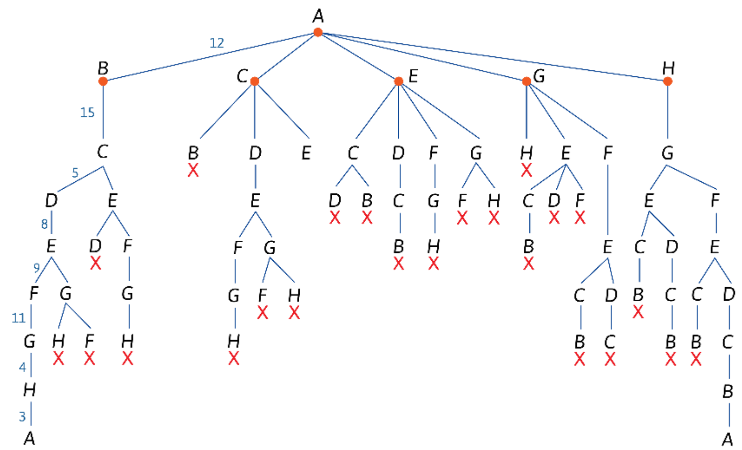
8.2 Utilizando o método descrito, vamos obter o percurso seguinte:

$$R_1 \xrightarrow{214} P \xrightarrow{200} O \xrightarrow{255} M \xrightarrow{284} L \xrightarrow{401} N \text{ , com 1354 metros}$$

que poderemos representar num grafo ponderado:



9.1



Só existem dois percursos possíveis: $A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to A$ e no sentido inverso.

9.2 Ambos têm 67 unidades de comprimento.

9.3 $\boldsymbol{A \to H \to G \to F \to E \to D \to C \to B \to A}$**:** 67

$B \to A \to H \to G \to F \to E \to D \to C \to B$: 67

$C \to D \to E \to F \to G \to H \to A \to B \to C$: 67

$D \to C \to B \to A \to H \to G \to F \to E \to D$: 67

$E \to D \to C \to B \to A \to H \to G \to F \to E$: 67

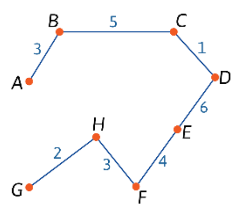
$F \to E \to D \to C \to B \to A \to H \to G \to F$: 67

$G \to H \to A \to B \to C \to D \to E \to F \to G$: 67

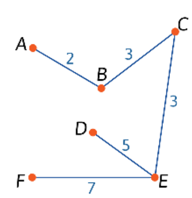
$H \to A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H$: 67

Partindo de qualquer vértice, a distância total é sempre igual a 67.

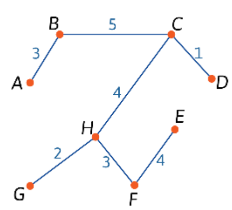
10.1 Por exemplo:



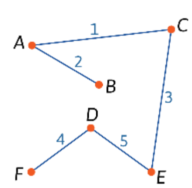
e



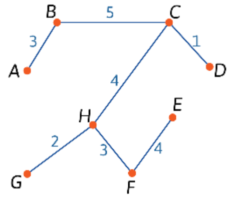
10.2 Por exemplo:



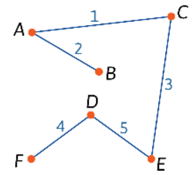
e



10.3 Escolhendo A para vértice inicial para cada um dos grafos, obtemos:



e



sendo a ordem de seleção dos vértices para a árvore, no caso do grafo da esquerda:

$$A - B - C - D - H - G - F - E$$

e para o grafo da direita:

$$A - C - B - E - D - F$$

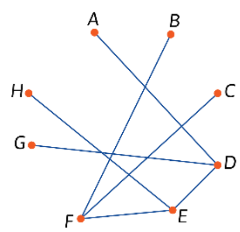
pág. 152

11. Considerando que as arestas representam as ligações internas entre as câmaras, começamos por as colocar por ordem crescente de comprimento:

$$B \overset{14}{—} F\ ;\ C \overset{15}{—} F\ ;\ E \overset{16}{—} F\ ;\ D \overset{18}{—} G\ ;\ B \overset{19}{—} E\ ;\ A \overset{20}{—} D\ ;$$

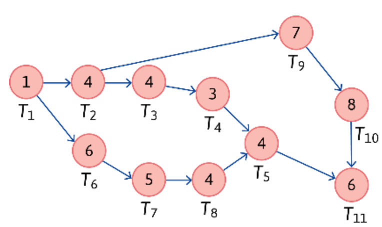
$$D \overset{22}{—} E\ ;\ A \overset{23}{—} B\ ;\ B \overset{25}{—} C\ ;\ E \overset{30}{—} H\ ;\ C \overset{45}{—} H\ ;\ G \overset{50}{—} H$$

Aplicamos o algoritmo descrito, escolhendo as arestas de acordo com peso crescente, tendo atenção que não se podem formar ciclos. Assim, usamos as arestas $B \overset{14}{—} F$, $C \overset{15}{—} F$, $E \overset{16}{—} F$, $D \overset{18}{—} G$, $A \overset{20}{—} D$, $D \overset{22}{—} E$ e $E \overset{30}{—} H$ e obtemos o grafo seguinte:



O comprimento total para as ligações internas será $14 + 15 + 16 + 18 + 20 + 22 + 30 = 135$ metros, com um custo total de $135 \times 12 = 1620$ euros.

12.1 Considerando os tempos necessários à concretização de cada uma das tarefas e as suas precedências, podemos traduzir os dados da tabela através do grafo seguinte:



12.2 As possíveis sequências de tarefas são:

$T_1 \to T_2 \to T_3 \to T_4 \to T_5 \to T_{11}$, que demora $1+4+4+3+4+6=22$ dias

$T_1 \to T_6 \to T_7 \to T_8 \to T_5 \to T_{11}$, que demora $1+6+5+4+4+6=26$ dias

$T_1 \to T_2 \to T_9 \to T_{10} \to T_{11}$, que demora $1+4+7+11+6=29$ dias

Assim, o António demora 29 dias a concluir o projeto, pelo que cumpre o prazo estipulado.

12.3 O caminho crítico para este projeto é $T_1 \to T_2 \to T_9 \to T_{10} \to T_{11}$.

pág. 153

13.1

Tarefas	Tempo (dias)	Precedências
T_1	3	Nenhuma
T_2	5	T_1
T_3	8	T_2
T_4	7	T_3
T_5	10	Nenhuma
T_6	11	T_1 e T_5
T_7	9	T_2 e T_6

13.2 As possíveis sequências de tarefas são:

$T_1 \to T_2 \to T_3 \to T_4$, com duração de $3+5+8+7=23$ dias

$T_1 \to T_6 \to T_7$, com duração de $3+11+9=23$ dias

$T_5 \to T_6 \to T_7$, com duração de $10+11+9=30$ dias

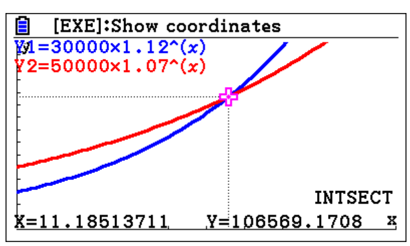
$T_1 \to T_2 \to T_7$, com duração de $3+5+9=17$ dias

O caminho crítico é, portanto, $T_5 \to T_6 \to T_7$ e são necessários, no mínimo, 30 dias para concluir o projeto.

14.1 $P_{\text{Nascente}}(n) = 30\,000 \times 1{,}12^n$, com n em décadas

$P_{\text{Poente}}(n) = 50\,000 \times 1{,}07^n$, com n em décadas

14.2 Graficamente:



Analiticamente:

$$30\,000 \times 1{,}12^n = 50\,000 \times 1{,}07^n \Leftrightarrow \left(\frac{1{,}12}{1{,}07}\right)^n = \frac{5}{3} \Leftrightarrow n = \log_{\frac{1{,}12}{1{,}07}} \frac{5}{3} \Leftrightarrow n \approx 11{,}185 \text{ décadas}$$

Só ao fim de 12 décadas.

15.1 $V_x = 1200 \times 12 = 14\,400$ euros   1 ano

$V_y = 1000 \times 12 = 12\,000$ euros

Deve escolher a empresa X.

15.2 $V_x = 14\,400 + 12 \times 1450 = 31\,800$ euros

$V_y = 12\,000 + 12 \times 1300 = 27\,600$ euros

Deve escolher a empresa X.

15.3 $V_x = 12(1200 + 1450 + 1700 + 1950 + 2200) = 102\,000$ euros

$V_y = 12(1000 + 1300 + 1690 + 2197 + 2856{,}1) = 108\,517{,}2$ euros

Deve escolher a empresa Y.

pág. 154

16.1 Parque A: $0{,}8 + 1{,}1 + 1{,}4 = 3{,}3$ euros

Parque B: $0{,}8 + 0{,}8 + 1{,}3 + 0{,}8 \times 1{,}3^2 = 3{,}192$ euros

16.2 5 horas: parque A: $3{,}3 + 1{,}7 + 2 = 7$ euros

parque B: $3{,}192 + 0{,}8(1{,}3^3 + 1{,}3^4) \approx 4{,}04$ euros

6 horas: parque A: $7 + 2{,}3 = 9{,}3$ euros

parque B: $4{,}04 + 0{,}8 \times 1{,}3^5 \approx 7{,}75$ euros

7 horas: parque A: $9{,}3 + 2{,}6 = 11{,}9$ euros

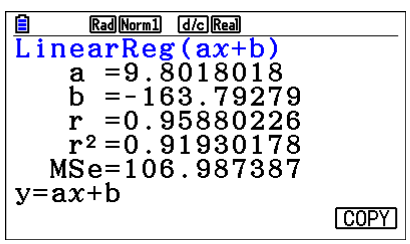
parque B: $7{,}75 + 0{,}8 \times 1{,}3^6 \approx 11{,}61$ euros

8 horas: parque A: $11{,}9 + 2{,}9 = 14{,}8$ euros

parque B: $11{,}61 + 0{,}8 \times 1{,}3^7 \approx 16{,}63$ euros

Se se estiver estacionado no parque 8 horas ou mais, compensa ficar no parque A.

17. Com auxílio da calculadora gráfica, obtemos:



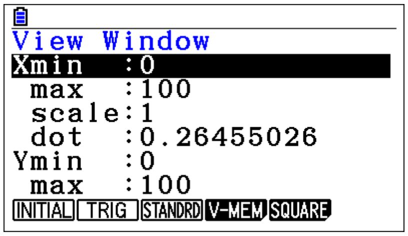
$y = 9{,}8x - 163{,}8$

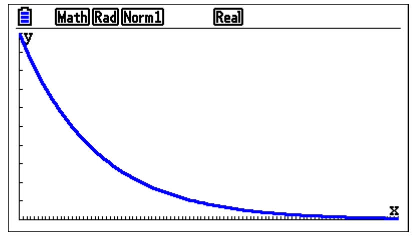
Para $x = 35$ °C , vem $y = 9{,}8 \times 35 - 163{,}8 = 179{,}2$, isto é, num dia com uma temperatura máxima de 35 °C, é de esperar que o quiosque venda cerca de 179 gelados.

18.1 $M(0) = 100e^{-0{,}05 \times 0} = 100$ mg

18.2 $M(3) = 100e^{-0{,}05 \times 3} \approx 86{,}07079764 \approx 86{,}07$ mg

18.3 Com auxílio da calculadora gráfica, obtemos:

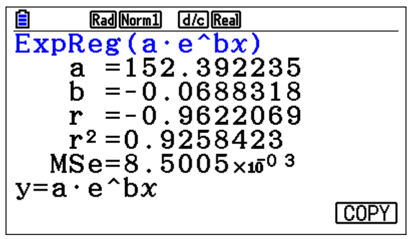




18.4 Este elemento radioativo tende a desintegrar-se completamente.

pág. 155

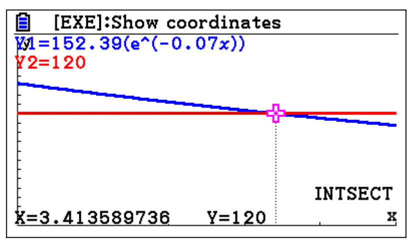
19.1 Com auxílio da calculadora gráfica, obtemos:



$N(t) = 152{,}39e^{-0{,}07t}$

19.2.1 $N(3) = 152{,}39e^{-0{,}07\times 3} \approx 124$ batimentos por minuto

19.2.2 Graficamente:



Analiticamente:

$$152{,}39e^{-0{,}07x} = 120 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\frac{120}{152{,}39}}{-0{,}07} \Leftrightarrow x \approx 3{,}41 \text{ minutos ou } 3 \text{ minutos e } 25 \text{ segundos}$$

20.1 $g(0) = \frac{100}{1+e^0} = \frac{100}{2} = 50$ centenas = 5000 gafanhotos

20.2 $g(10) = \frac{100}{1+e^{-0{,}03\times 10}} = \frac{100}{e^{-0{,}3}} \approx 57{,}4425$

Haverá cerca de 57,44 centenas de gafanhotos ou 5744 gafanhotos.

20.3 À medida que o número de dias aumenta, o número de gafanhotos tende a aumentar, aproximando-se das 100 centenas ou 10 000.

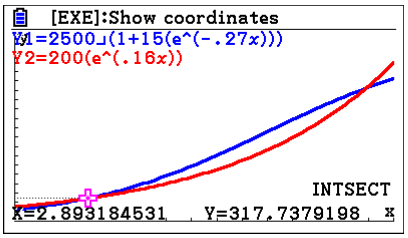
pág. 156

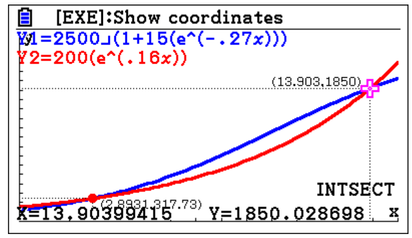
21.1 Início de 2004 → $t = 4$: $E(4) = \frac{2500}{1+15e^{-0,27\times 4}} \approx 410,24$

Início de 2007 → $t = 7$: $E(7) = \frac{2500}{1+15e^{-0,27\times 7}} \approx 765,44$

O triplo de alunos estrangeiros inscritos no início de 2004 é $3 \times 410,24 \approx 1231$, o que não corresponde ao número de alunos estrangeiros no início de 2007, que eram cerca de 765. Logo a afirmação é falsa.

21.2 Queremos resolver a condição $E(t) > N(t)$. Com auxílio da calculadora gráfica, determinamos os pontos de interseção dos dois modelos:





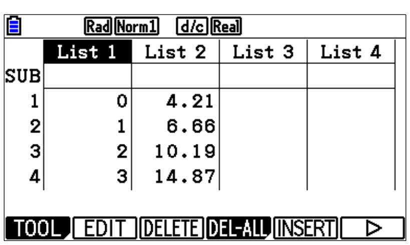
Obtemos dois pontos de interseção, de coordenadas $(2,89; 317,74)$ e $(13,90; 1850,03)$, ou seja, para $t \approx 3$ e para $t \approx 14$.

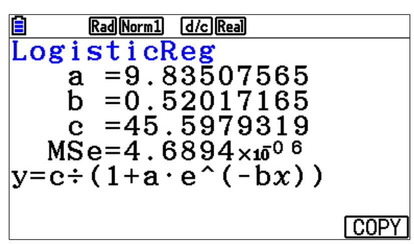
Assim, podemos concluir que, no início de cada ano, o número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade F1 foi superior ao número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade F2 entre 2003 e 2014, ou seja, durante $2014 - 2003 = 11$ anos .

22.1 $36,25 - 4,21 = 32,04$ dm $= 3,204$ metros

pág. 157

22.2 Recorrendo à calculadora gráfica:



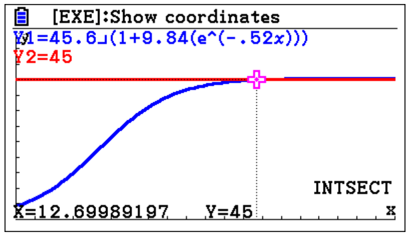


$C(s) = \frac{45,60}{1+9,84e^{-0,52s}}$

22.3.1 $C(10) = \frac{45,60}{1+9,84e^{-0,52\times 10}} \approx 43,25$

Ao fim de 10 semanas, o comprimento médio dos peixes é aproximadamente 43 dm.

22.3.2 Recorrendo à calculadora gráfica:



A espécie atinge o comprimento médio de 4,5 metros ao fim de aproximadamente 12,7 semanas, ou seja, 12 semanas e $0{,}7 \times 7 \approx 5$ dias.

23.1 $\log 100 = \log 10 + 0{,}7 \log m \Leftrightarrow 2 = 1 + 0{,}7 \log m \Leftrightarrow \log m = \frac{10}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = 10^{\frac{10}{7}} \approx 26{,}83\ gramas$

23.2 $\log x = \log 10 + 0{,}7 \log 300 \Leftrightarrow \log x = 1 + 0{,}7 \log 300 \Leftrightarrow \log x \approx 2{,}733984878 \Leftrightarrow$

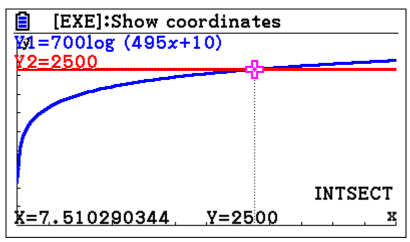
$\Leftrightarrow x \approx 10^{2{,}734} \approx 541{,}98\ microlitros$

24.1 A partir dos dados do enunciado, podemos concluir que $C(0) = 700$ e que $C(2) = 2100$. Então:

$$\begin{cases} a\log(b \times 0 + 10) = 700 \\ a\log(b \times 2 + 10) = 2100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\log(10) = 700 \\ a\log(2b + 10) = 2100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 700 \\ \log(2b + 10) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 700 \\ 2b + 10 = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 700 \\ b = 495 \end{cases}$$

24.2 Usando as capacidades gráficas da calculadora:



podemos verificar que existe um ponto de interseção, de coordenadas $(7{,}51; 2500)$, e concluir que o catálogo da empresa deverá atingir os 2,5 milhares de tipos de capas ao fim de aproximadamente 7,5 meses.