

III. Introdução à inferência estatística

Capítulo 4 Introdução à inferência estatística

pág. 73

1.1

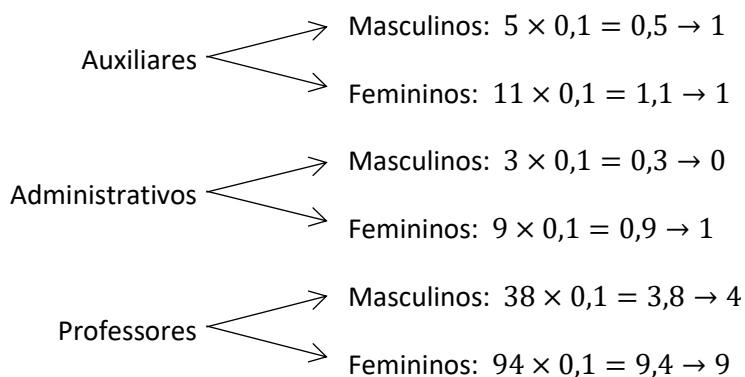
		♂	♀
Auxiliares	16	5	11
Administrativos	12	3	9
Professores	132	38	94
Total	160	46	114

1.2 $\frac{46}{160} \times 100 = 28,75\%$

1.3 $\frac{94}{132} \times 100 = 71,2\%$

1.4.1 $160 \times 0,1 = 16 \rightarrow$ número de elementos da amostra

1.4.2



Farão parte do painel: dois auxiliares, um de cada sexo, um funcionário administrativo do sexo feminino, quatro professores e nove professoras.

2.1 Parâmetro: altura média de um jovem de 17 anos

2.2 Estatística: 165 centímetros

3.1 $\bar{x} = \frac{4+3,6+3,4+3,6+3,5+3,7+3,5+3,5}{8} = 3,6$

3.2 $s \approx 0,173$ (valor obtido com a calculadora, modo estatístico)

4.1 $\mu = \frac{2+4+6+9}{4} = 5,25$ e $\sigma \approx 2,586$ (valor obtido através da calculadora em modo estatístico)

4.2 São $4^2 = 16$ amostras:

Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$
(2, 2)	2	(4, 2)	3	(6, 2)	4	(9, 2)	5,5
(2, 4)	3	(4, 4)	4	(6, 4)	5	(9, 4)	6,5
(2, 6)	4	(4, 6)	5	(6, 6)	6	(9, 6)	7,5
(2, 9)	5,5	(4, 9)	6,5	(6, 9)	7,5	(9, 9)	9

4.3

x_i	2	3	4	5	5,5	6	6,5	7,5	9
$P(\bar{X} = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

4.4 $E(\bar{X}) = \frac{1}{16}(2 + 6 + 12 + 10 + 11 + 6 + 13 + 15 + 9) = 5,25$

4.5 Como $\mu = E(\bar{X})$, o estimador é não enviesado.

4.6 $\sigma \approx 1,829$ (valor obtido através da calculadora em modo estatístico)

5.1 São $4^3 = 64$ amostras:

Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$	Amostras	$\bar{X}$
(2, 2, 2)	2	(4, 2, 2)	$\frac{8}{3}$	(6, 2, 2)	$\frac{10}{3}$	(9, 2, 2)	$\frac{13}{3}$
(2, 2, 4)	$\frac{8}{3}$	(4, 4, 2)	$\frac{10}{3}$	(6, 2, 4)	4	(9, 2, 4)	5
(2, 2, 6)	$\frac{10}{3}$	(4, 2, 4)	$\frac{10}{3}$	(6, 4, 2)	4	(9, 4, 2)	5
(2, 2, 9)	$\frac{13}{3}$	(4, 4, 4)	4	(6, 2, 6)	$\frac{14}{3}$	(9, 2, 6)	$\frac{17}{3}$
(2, 4, 2)	$\frac{8}{3}$	(4, 2, 6)	4	(6, 6, 2)	$\frac{14}{3}$	(9, 6, 2)	$\frac{17}{3}$
(2, 6, 2)	$\frac{10}{3}$	(4, 6, 2)	4	(6, 2, 9)	$\frac{17}{3}$	(9, 9, 2)	$\frac{20}{3}$
(2, 9, 2)	$\frac{13}{3}$	(4, 2, 9)	5	(6, 9, 2)	$\frac{17}{3}$	(9, 2, 9)	$\frac{20}{3}$
(2, 4, 4)	$\frac{10}{3}$	(4, 9, 2)	5	(6, 4, 4)	$\frac{14}{3}$	(9, 4, 4)	$\frac{17}{3}$
(2, 6, 6)	$\frac{14}{3}$	(4, 6, 9)	$\frac{19}{3}$	(6, 4, 6)	$\frac{16}{3}$	(9, 4, 6)	$\frac{19}{3}$
(2, 9, 9)	$\frac{20}{3}$	(4, 9, 6)	$\frac{19}{3}$	(6, 6, 4)	$\frac{16}{3}$	(9, 6, 4)	$\frac{19}{3}$
(2, 4, 6)	4	(4, 4, 6)	$\frac{14}{3}$	(6, 4, 9)	$\frac{19}{3}$	(9, 4, 9)	$\frac{22}{3}$
(2, 6, 4)	4	(4, 6, 4)	$\frac{14}{3}$	(6, 9, 4)	$\frac{19}{3}$	(9, 9, 4)	$\frac{22}{3}$
(2, 4, 9)	5	(4, 4, 9)	$\frac{17}{3}$	(6, 6, 6)	6	(9, 6, 6)	7
(2, 9, 4)	5	(4, 9, 4)	$\frac{17}{3}$	(6, 6, 9)	7	(9, 6, 9)	8
(2, 6, 9)	$\frac{17}{3}$	(4, 6, 6)	$\frac{16}{3}$	(6, 9, 6)	7	(9, 9, 6)	8
(2, 9, 6)	$\frac{17}{3}$	(4, 9, 9)	$\frac{22}{3}$	(6, 9, 9)	8	(9, 9, 9)	9

5.2

x_i	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{13}{3}$	$\frac{14}{3}$	5	$\frac{16}{3}$	$\frac{17}{3}$	6	$\frac{19}{3}$	$\frac{20}{3}$	7	$\frac{22}{3}$	8	9
$P(\bar{X} = x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

5.3 $E(\bar{X}) = \frac{2}{64} + \frac{8}{64} + \frac{20}{64} + \dots + \frac{24}{64} + \frac{9}{64} = 5,25$

5.4 $\sigma \approx 1,493$ (valor obtido através da calculadora em modo estatístico)

5.5 O aumento da amostra provocou uma diminuição do erro padrão.

$$6. E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = 65 \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{14}{\sqrt{37}} \approx 2,302$$

7.1 Uma vez que a dimensão da amostra é $45 > 30$, o teorema do limite central diz-nos que, nestas condições, a distribuição de amostragem da média pode ser modelada por um modelo normal, com valor médio de 58,7 metros e desvio padrão igual a $\frac{5,03}{\sqrt{45}} \approx 0,7498$ metros (cerca de 75 centímetros).

7.2 Vimos que a distribuição de amostragem da média é modelada por um modelo normal de valor médio de 58,7 metros e desvio padrão de 0,75 metros. Pretendemos calcular $P(\bar{X} < 57,5)$. Seja $U \sim N(0, 1)$. Então:

$$U = \frac{\bar{X} - 58,7}{0,75} \Leftrightarrow \bar{X} = 0,75U + 58,7$$

De onde:

$$\bar{X} < 57,5 \Leftrightarrow 0,75U + 58,5 < 57,5 \Leftrightarrow 0,75U < -1,2 \Leftrightarrow U < -1,6$$

Assim:

$$P(\bar{X} < 57,5) = P(U < -1,6) = P(U > 1,6) = 1 - P(U \leq 1,6) = 1 - 0,9452 = 0,0548$$

A probabilidade de a média ser inferior a 57,5 metros é de 5,48%.

8.1 Como a dimensão da amostra é $64 > 30$, o teorema do limite central garante que a distribuição de amostragem da média pode ser modelada por um modelo normal com valor médio de 600 e desvio padrão igual a $\frac{40}{\sqrt{64}} = 5$.

$$\text{Seja } U \sim N(0, 1), \text{ então: } U = \frac{\bar{X} - 600}{5} \Leftrightarrow 5U = \bar{X} - 600 \Leftrightarrow \bar{X} = 5U + 600$$

$$P(\bar{X} > 609,8) = P(5U + 600 > 609,8) = P(U > 1,96) = 1 - P(U \leq 1,96) = 1 - \Phi(1,96) = 1 - 0,9750 = 0,025 = 2,5\%$$

$$8.2 \sigma = \frac{40}{\sqrt{100}} = 4 \quad U = \frac{\bar{X} - 600}{4} \Leftrightarrow \bar{X} = 4U + 600$$

$$P(589,84 < \bar{X} < 610,16) = P(589,84 < 4U + 600 < 610,16) = P(-2,54 < U < 2,54) = 2 \times \Phi(2,54) - 1 = 0,989 = 98,9\%$$

$$8.3 \sigma = \frac{40}{\sqrt{400}} = \frac{40}{20} = 2$$

$$U = \frac{\bar{X} - 600}{2} \Leftrightarrow \bar{X} = 2U + 600$$

$$P(597,44 \leq \bar{X} \leq 602,56) = P(597,44 \leq 2U + 600 \leq 602,56) = P(-1,28 \leq U \leq 1,28) = 2 \times \Phi(1,28) - 1 = 2 \times 0,8997 - 1 = 0,7994 = 79,94\%$$

9.1 1 ano ≈ 52 semanas

$$E(\bar{X}) = 750 \text{ bicicletas/semana}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{28}{\sqrt{52}} \approx 3,883 \text{ bicicletas/semana}$$

$$9.2.1 U = \frac{\bar{X} - 750}{3,883} \Leftrightarrow \bar{X} = 3,883U + 750$$

$$P(\bar{X} > 740) = P(3,883U + 750 > 740) = P(U > -2,58) = P(U \leq 2,58) = 0,9951 = 99,51\%$$

$$9.2.2 P(745 \leq \bar{X} \leq 760) = P\left(-\frac{5}{3,883} \leq U \leq \frac{10}{3,883}\right) = P(-1,288 \leq U \leq 2,575) =$$

$$= \Phi(2,58) - 1 + \Phi(1,29) = 0,9951 - 1 + 0,9015 = 0,8966 = 89,66\%$$

$$9.3 \sigma = \frac{40}{\sqrt{100}} = 4$$

$$U = \frac{\bar{X} - 600}{4} \Leftrightarrow \bar{X} = 4U + 600$$

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq 0,5) = P\left(|U| \leq \frac{0,5}{3,883}\right) = P(|U| \leq 0,13) = 2 \times \Phi(0,13) - 1 = 0,1034 = 10,34\%$$

10. $\bar{x} = 1,63$ $s = 0,2$

10.1 O intervalo de confiança para o valor médio μ é da forma:

$$\left[\bar{x} - z \times \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z \times \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

No caso do intervalo de confiança de 90%, $z = 1,645$, de onde:

$$\left[1,63 - 1,645 \times \frac{0,2}{\sqrt{150}}; 1,63 + 1,645 \times \frac{0,2}{\sqrt{150}} \right] =]1,60; 1,66[$$

10.2 A amplitude do intervalo aumentaria porque, à medida que o grau de confiança aumenta, a amplitude do intervalo também aumenta.

10.3 A amplitude do intervalo diminuiria porque, à medida que a dimensão da amostra aumenta, a amplitude do intervalo diminui.

11. $\hat{p} = \frac{800}{1000} = 0,8$ e $n = 1000$

O intervalo de confiança a 95% para a proporção é dado por

$$\left[0,8 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{1000}}; 0,8 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{1000}} \right] =]0,775; 0,825[$$

O intervalo de confiança a 99% para a proporção é dado por

$$\left[0,8 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{1000}}; 0,8 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,8(1-0,8)}{1000}} \right] =]0,767; 0,833[$$

12. $n = 50$ $\hat{p} = \frac{20}{50} = 0,4$

O intervalo de 95% de confiança para a proporção é:

$$\left[0,4 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{50}}; 0,4 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4(1-0,4)}{50}} \right] =]0,26; 0,54[$$

13. $n = 200$ $\bar{x} = 25$ $s = 10$

13.1 Intervalo de confiança de 95% para μ :

$$\left[25 - 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{200}}; 25 + 1,96 \times \frac{10}{\sqrt{200}} \right] =]23,61; 26,39[$$

13.2 $\hat{p} = \frac{170}{200} = 0,85$

Intervalo de confiança de 90% para a proporção:

$$\left[0,85 - 1,645 \times \sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{200}}; 0,85 + 1,645 \times \sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{200}} \right] =]0,81; 0,89[$$

13.3 Com uma confiança de 90%, podemos dizer que a proporção de pessoas que faz compras no hipermercado varia entre os 81% e os 89%.

14.1 Proporção de alunos que pretendem candidatar-se.

14.2 $\hat{p} = 80\%$ $n = 75$

Intervalo de confiança de 99% para a proporção:

$$\left[0,8 - 2,576 \times \sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{75}}; 0,8 + 2,576 \times \sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{75}} \right] =]0,68; 0,92[$$

14.3 Com uma confiança de 99%, podemos dizer que a proporção de alunos que pretendem candidatar-se varia entre os 68% e os 92%.

15. $\hat{p} = 45\%$ $\varepsilon = 2\%$ Grau de confiança: 95%

$$n = \left(\frac{1,96}{0,02} \right)^2 \times 0,45 \times (1 - 0,45) \approx 2377$$

pág. 76

16. $\sigma = 2$ $n = 60$ $\bar{x} = 97$

16.1 Intervalo de confiança de 90% para μ :

$$\left[97 - 1,645 \times \frac{2}{\sqrt{60}}; 97 + 1,645 \times \frac{2}{\sqrt{60}} \right] =]96,58; 97,42[$$

A marca de bebida deve ser processada porque, com uma confiança de 90%, podemos dizer que a média da capacidade de cada garrafa varia entre 96,58 e 97,42 centilitros.

16.2 $\varepsilon = 0,02$ Grau de confiança: 95%

$$n = \left(\frac{1,96 \times 2}{0,02} \right)^2 = 38\,416$$

17. Amplitude: 10

Logo, o erro será: $\varepsilon = 5$

Nível de confiança: 90%

$$\sigma = 15$$

$$n = \left(\frac{1,645 \times 15}{5} \right)^2 = 24,35$$

Devem ser estudados, pelo menos, 25 alunos.

18. $\sigma = 0,3$ $n = 35$ $\bar{x} = 4,8$

18.1 Intervalo de 99% de confiança para μ :

$$\left[4,8 - 2,576 \times \frac{0,3}{\sqrt{35}}; 4,8 + 2,576 \times \frac{0,3}{\sqrt{35}} \right] =]4,67; 4,93[$$

18.2 $\sigma < 0,1$ Grau de confiança: 95%

$$n = \left(\frac{1,96 \times 0,3}{0,1} \right)^2 = 34,57$$

O número de observações deverá ser, pelo menos, 35.

19. $\hat{p} = 0,85$ e $\varepsilon = 0,05$

$$n = \left(\frac{1,96}{0,05} \right)^2 \times 0,85 \times 0,15 = 195,9216$$

A dimensão da amostra deverá ser, pelo menos, 196.