II. Modelos de probabilidade

Capítulo 3 - Modelos de probabilidade

pág. 61

1. As experiências aleatórias são: A, C, D, E e H.

2.1 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2.2 "Sair uma ficha com um número entre 0 e 5 inclusive."

2.3 "Sair uma ficha com o número 6."

2.4 "Sair uma ficha com o número 1."

3.1 Para facilitar a verificação de todos os casos possíveis, vamos construir uma tabela de dupla entrada.

		Dado 1					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 2	**1**	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

Então, $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

3.2 "O módulo da diferença das pontuações obtidas ser um número entre 0 e 5."

3.3 "O módulo da diferença das pontuações ser igual a 6."

4. Para facilitar a verificação dos casos possíveis, vamos construir tabelas de dupla entrada:

		Tetraedro 2			
		1	**2**	**3**	**4**
Tetraedro 1	**1**	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8

		Tetraedro 2			
		1	**2**	**3**	**4**
Tetraedro 1	**1**	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

4.1 $A = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\}$

$B = \{(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

$C = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

4.2.1 $A \cap B = \{(2,4),(3,3),(4,2),(4,4)\}$

4.2.2 $A \cup B = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

4.2.3 $A - B = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1)\}$

4.2.4 $B - A = \{(3,4),(4,3)\}$

4.2.5 $B \cap C = \{(2,4),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

4.2.6 $B - C = \{(3,3)\}$

pág. 62

5.1 Existem dez números pares no conjunto das bolas. Logo:

$$P(\text{ser divisível por 2}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

5.2 Existem dois números múltiplos de 7 (7 e 14). Logo:

$$P(\text{ser múltiplo de 7}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

5.3 Existem dez números ímpares no conjunto das bolas. Logo:

$$P(\text{ser ímpar}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

5.4 Existem cinco bolas com número maior do que 15. Logo:

$$P(\text{ser maior do que 15}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

5.5 Existem cinco bolas com número maior do que 5 e menor ou igual a 10. Logo:

$$P(\text{ser maior do que 5 e menor ou igual a 10}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

5.6 Existem cinco bolas com número múltiplo de 4 (4, 8, 12, 16 e 20) e 12 bolas com número menor ou igual a 12 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12). No entanto, as bolas com os números 4, 8 e 12 são comuns aos dois conjuntos.

$$P(\text{ser múltiplo de 4 ou menor ou igual a 12}) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

6. Sabe-se que a probabilidade de as duas primeiras rifas serem premiadas é de $\frac{3}{35}$. Então:

$$\frac{x}{50} \times \frac{x-1}{49} = \frac{3}{35} \Leftrightarrow x(x-1) = \frac{3}{35} \times 50 \times 49 \Leftrightarrow x(x-1) = 210 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 210 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \vee \underbrace{x = -14}_{\text{Impossível}}$$

Logo, existem 15 rifas premiadas.

7.1 $23 \times 23 \times 10 \times 10 \times 23 \times 23 = 27\,984\,100$

7.2 $10 \times 10 \times 23 \times 23 = 52\,900$

7.3 $23 \times 23 \times 23 \times 23 = 279\,841$

7.4 $23 \times 1 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 2300$

8. Consideremos os acontecimentos:

J: "o João ganhar"

M: "o Manuel ganhar"

A: "o António ganhar"

F: "o Francisco ganhar"

Sabe-se que $P(J) = 2P(M)$, $P(F) = P(A) - P(J)$ e $P(F) = \frac{P(J)}{2}$.

Tendo em conta que:

$$P(A) + P(F) + P(J) + P(M) = 1 \Leftrightarrow P(A) + \frac{P(J)}{2} + P(J) + \frac{P(J)}{2} = 1 \Leftrightarrow P(A) = 1 - 2P(J) \ *$$

sabe-se também que:

$$P(F) = P(A) - P(J) \Leftrightarrow \frac{P(J)}{2} = P(A) - P(J) \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(J)}{2} + P(J) \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{2}P(J) \ **$$

Por * e **, vem que:

$$\frac{3}{2}P(J) = 1 - 2P(J) \Leftrightarrow 3P(J) = 2 - 4P(J) \Leftrightarrow 7P(J) = 2 \Leftrightarrow P(J) = \frac{2}{7}$$

Então:

$P(M) = \frac{P(J)}{2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

$P(A) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

$P(F) = \frac{P(J)}{2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

9. $3A + 2B + 2V + 1P$

9.1.1 "Retirar uma camisola azul, branca, vermelha ou preta."

9.1.2 "Retirar uma camisola verde."

9.2.1 "Consideremos os acontecimentos:

A : "a camisola é azul"

B : "a camisola é branca"

V : "a camisola é vermelha"

P : "a camisola é preta"

Queremos calcular $P(A \cup V)$:

$$P(A \cup V) = P(A) + P(V) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

9.2.2 $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

9.2.3 Se a camisola não é azul nem preta, então só pode ser branca ou vermelha.

$$P(B \cup V) = P(B) + P(V) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$$

10. $7V + 6A + 2P$

10.1 Consideremos os acontecimentos:

A : “ser azul”

V : “ser vermelha”

P : “ser preta”

Sabemos que $P(A) = 0{,}25$.

$$\frac{6}{15+x} = 0{,}25 \Leftrightarrow 3{,}75 + 0{,}25x = 6 \Leftrightarrow 0{,}25x = 2{,}25 \Leftrightarrow x = 9$$

Podemos, por exemplo, acrescentar nove bolas pretas ou então:

$$\frac{6+x}{15+x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 24 + 4x = 15 + x \Leftrightarrow 3x = -9 \Leftrightarrow x = -3$$

retirar três bolas azuis.

10.2 $P(V) = 0{,}5$

$$\frac{7+x}{15+x} = 0{,}5 \Leftrightarrow 7 + x = 0{,}5(15 + x) \Leftrightarrow 7 + x = 7{,}5 + 0{,}5x \Leftrightarrow 0{,}5x = 0{,}5 \Leftrightarrow x = 1$$

podemos, por exemplo, acrescentar uma bola vermelha ou então:

$$\frac{7}{15+x} = 0{,}5 \Leftrightarrow 7 = 0{,}5(15 + x) \Leftrightarrow 7 = 7{,}5 + 0{,}5x \Leftrightarrow 0{,}5x = -0{,}5 \Leftrightarrow x = -1$$

retirar uma bola azul.

10.3 Para que a probabilidade de a bola ser vermelha ou azul seja 1, teremos de retirar duas bolas pretas.

11.1.1 $P(D, D) = \frac{4}{40} \times \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$

11.1.2 $P(D, D) = \frac{4}{40} \times \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

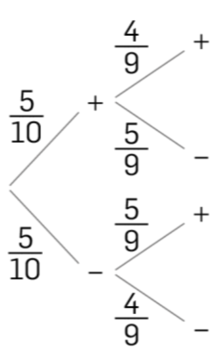
11.2.1 $P(A, A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ Com reposição

11.2.2 $P(A, A) = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$ Sem reposição

12. Existem dez fichas brancas numeradas de 1 a 10 e três fichas vermelhas.

$$P(V, V) = \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} = \frac{1}{26}$$

13.1 Vamos construir uma árvore de probabilidades que traduza o problema:



Produto positivo: $\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

Produto negativo: $\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$

Produto negativo: $\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{18}$

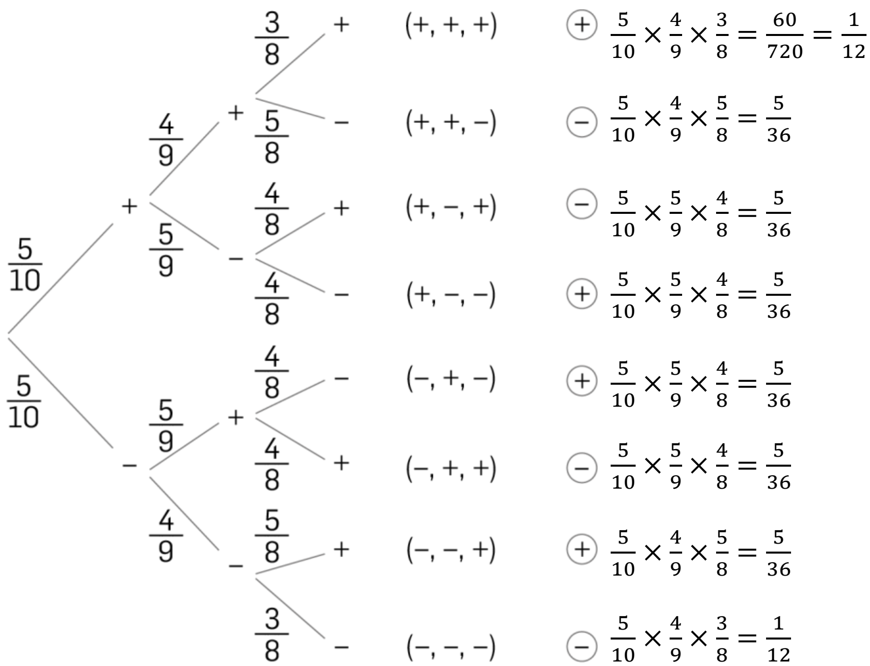
Produto positivo: $\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

P(produto positivo) $= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

P(produto negativo)$= \frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

É mais provável o produto ser negativo.

13.2



P(produto positivo) $= \frac{1}{12} + \frac{5}{36} \times 3 = \frac{1}{2}$

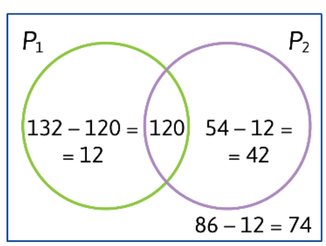
P(produto negativo) $= \frac{1}{2}$

14. Consideremos os acontecimentos:

P_1: "acertar o primeiro problema"

P_2: "acertar o segundo problema"

Vamos construir um diagrama de Venn que traduza os dados do problema:



Total: 248

14.1 $P(\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2) = P\left(\overline{P_1 \cup P_2}\right) = 1 - P(P_1 \cup P_2) = 1 - \left(P(P_1) + P(P_2) - P(P_1 \cap P_2)\right) =$

$$= \mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{132}}{\mathbf{248}} + \frac{\mathbf{162}}{\mathbf{248}} - \frac{\mathbf{120}}{\mathbf{248}}\right) = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{124}}$$

14.2 $P(\bar{P}_1 \cap P_2) = P(P_2) - P(P_1 \cap P_2) = \frac{162}{248} - \frac{120}{248} = \frac{42}{248} - \frac{21}{124}$

15. Consideremos os acontecimentos:

M : "pertencer ao clube de Matemática"

F : "ser do sexo feminino"

Sabe-se que $P(M) = 60\%$, $P(F) = 55\%$ e $P(\bar{F} \mid \bar{M}) = 30\%$.

15.1 Pretende-se calcular $P(F \cap M)$.

$$P(\bar{F} \mid \bar{M}) = 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{P(\bar{F} \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = 0{,}3 \Leftrightarrow P(\bar{F} \cap \bar{M}) = 0{,}3 \times 0{,}4 \Leftrightarrow P(\bar{F} \cap \bar{M}) = 0{,}12 \Leftrightarrow P\left(\overline{F \cup M}\right) = 0{,}12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(F \cup M) = 0{,}88 \Leftrightarrow P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0{,}88 \Leftrightarrow P(F \cap M) = 0{,}27$$

Logo, $P(F \cap M) = \frac{27}{10}$.

15.2 Pretende-se calcular $P(\bar{F} \cap \bar{M})$.

Pelo exercício anterior, concluímos que $P(\bar{F} \cap \bar{M}) = 0{,}12 = \frac{3}{25}$.

15.3 Pretende-se calcular $P(\bar{M} \mid F)$.

$$P(\bar{M} \mid F) = \frac{P(\bar{M} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F) - P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0{,}55 - 0{,}27}{0{,}55} = \frac{28}{55}$$

15.4 $P(F \mid M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}27}{0{,}6} = \frac{9}{20}$

pág. 64

16.1.1 C_1 $(5C + 4L)$

C_2 $(3C + 1L)$

Pretende-se calcular $P(L \mid C_1) = \frac{4}{9}$.

16.1.2 $P(C) = P(C \mid C_1) \times P(C_1) + P(C \mid C_2) \times P(C_2) = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{47}{72}$

16.1.3 $P(C_2 \mid C) = \frac{P(C_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C \mid C_2) \times P(C_2)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{47}{72}} = \frac{27}{47}$

16.2 Queremos verificar se L e C_1 são independentes, ou seja, $P(L \cap C_1) = P(L) \times P(C_1)$.

$P(L \cap C_1) = P(L \mid C_1) \times P(C_1) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$P(L) = P(L \mid C_1) \times P(C_1) + P(L \mid C_2) \times P(C_2) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{8} = \frac{25}{72}$

$P(C_1) = \frac{1}{2}$

$\frac{2}{9} = \frac{25}{72} \times \frac{1}{2}$ Falso. Logo, não são independentes.

17. Consideremos uma tabela de dupla entrada onde assinalámos todos os casos possíveis:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
1	-	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	-	-	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)

Os valores que a variável "pontos da peça" pode tomar são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

$\boldsymbol{x_i}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$

18. $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(X=0) = 1 - 0{,}01 - 0{,}02 - 0{,}05 - 0{,}09 - 0{,}41 - 0{,}21 - 0{,}21 \Leftrightarrow P(X=0)=0$

pág. 65

19.1 $\bar{x} = \frac{1\times15+2\times25+3\times96+4\times50+5\times10+6\times4}{200} = 3{,}135$

19.2 $\mathrm{Var}(X) = \frac{15\times(1-3{,}135)^2+25\times(2-3{,}135)^2+\ldots+4\times(6-3{,}135)^2}{200} \approx 1{,}04$

$\sigma \approx \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1{,}02$

19.3 $10+4=14$ pessoas

19.4

$\boldsymbol{x_i}$	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	0,075	0,125	0,48	0,25	0,05	0,02

19.5.1 $P(X=4)=25\%$

19.5.2 $P(X<2)=7{,}5\%$

19.5.3 $P(X\geq 3) = 0{,}48+0{,}25+0{,}05+0{,}02 = 80\%$

19.5.4 $P(X\leq 3) = 0{,}075+0{,}125+0{,}48 = 68\%$

20. $k+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{6}$, logo $P(X=0)=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}\times 12 = 4$, logo o dado tem 4 faces com o número 2.

$E(X) = 0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$

I - b); II - b); III - c)

pág. 66

21.1 $0{,}03 + 0{,}10 + 0{,}16 + k + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}07 = 1 \Leftrightarrow k = 0{,}19$

21.2.1 $P(X \geq 5) = 0{,}15 + 0{,}07 = 22\%$

21.2.2 $P(X \leq 2) = 0{,}03 + 0{,}10 + 0{,}16 = 0{,}29 = 29\%$

21.3 $\mu = 0 \times 0{,}03 + 1 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}16 + \ldots + 6 \times 0{,}07 = 3{,}36$ pessoas

21.4 $\sigma = 1{,}493$ (calculadora)

22. $\mu = 25 \qquad \sigma = 7$

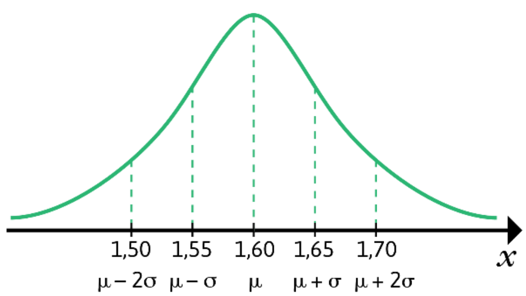
22.1 $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) \approx 1 - 0{,}2373 = 76{,}27\%$ (calculadora)

22.2 $P(X < 3) \approx 0{,}066\%$ (calculadora)

22.3 $P(X < 28) \approx 66{,}57\%$ (calculadora)

22.4 $P(15 < X < 30) \approx 68{,}59\%$ (calculadora)

23.1 $\mu = 160 \quad \sigma = 5$



$P(X > 160) = 50\%$

23.2 $P(1{,}55 < X < 1{,}70) = 68{,}27\% + 13{,}59\% = 81{,}86\%$

$81{,}86\% \times 280 \approx 229$ alunos

23.3 $P(X < 1{,}50) = 2{,}14\% + 0{,}135\% = 2{,}275\%$

$2{,}275\% \times 280 \approx 6$ alunos

pág. 67

24. $\mu = 670 \qquad \sigma = 62$

24.1 $P(X > 750) = 0{,}098$ (calculadora)

$0{,}098 \times 2500 \approx 245$ peças

24.2 $P(X < 500) = 0{,}00305$ (calculadora)

$0{,}00305 \times 2500 \approx 8$ peças

24.3 $P(600 < X < 700) = 0{,}5563$

$0{,}5563 \times 2500 \approx 1391$ peças

25. $P(X < 7) \approx 0{,}2743$

$P(X > 10) \approx 0{,}0968$

25.1 Se $P(X < 7) = 15{,}865\%$, então $7 = \mu - \sigma$.

Se $P(X > 10) = 0{,}135\%$, então $10 = \mu + 3\sigma$.

Então:

$$\begin{cases} 7 = \mu - \sigma \\ 10 = \mu + 3\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 7 + \sigma \\ 10 = 7 + \sigma + 3\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 7{,}75 \\ \sigma = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Logo, $\mu = 7{,}75$ e $\sigma = 0{,}75$.

25.2.1 $6{,}25 = \mu - 2\sigma$ e $10 = \mu + 3\sigma$

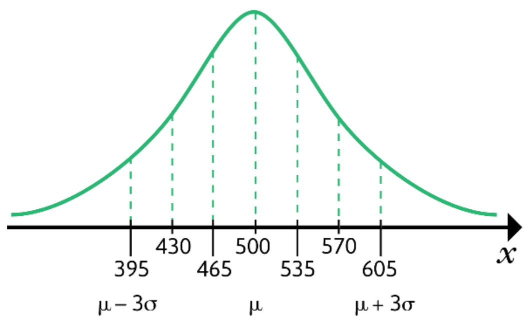
Logo, $P(6{,}25 < X < 10) = 95{,}45\% + 2{,}14\% = 97{,}59\%$.

25.2.2 $P(X < 8{,}5) = 50\% + 34{,}135\% = 84{,}135\%$

$8{,}5 = \mu + \sigma$

26. $\mu = 500 \qquad \sigma = 35$

26.1 $P(X > 395) = 100\% - 0{,}135\% = 99{,}865\%$



26.2 $P(430 < X < 605) = 95{,}45\% + 2{,}14\% = 97{,}59\%$

$430 = \mu - 2\sigma$ e $605 = \mu + 3\sigma$

26.3 $P(X > 43) = 100\% - 2{,}14\% - 0{,}135\% = 97{,}725\%$

Logo, $P(X < 43) = 100\% - 97{,}725\% = 2{,}275\%$.

27. $\mu = 300$ e $P(295 < X < 305) = 90\%$, logo $P(X > 305) = P(X < 295) = 5\%$.

Opção (A)

pág. 68

28. $\mu = 60$ e $\sigma = 5$

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827$, pelo que $P(55 < X < 65) = 0{,}6827$ e $P(55 < X < 60) = \frac{0{,}6827}{2}$,

ou seja, $P(55 < X < 60) = 0{,}34135$.

$P(X > 55) = P(55 < X < 60) + P(X > 60) = 0{,}34135 + 0{,}5 = 0{,}84135$

$0{,}84135 \times 50000 = 42067{,}5$

É esperado que sejam comercializados 42 milhares de maçãs.

29. $X \sim N(22, 1)$

Pretende-se determinar $P(X \leq 24)$.

Recorrendo à calculadora gráfica, vem que $P(X \leq 24) \approx 98\%$.

30. $X \sim N(190, 5)$

$P(X > \mu + 2\sigma) = 2{,}14\% + 0{,}135\% \approx 2{,}3\%$

Opção (B)