

I. Modelos matemáticos

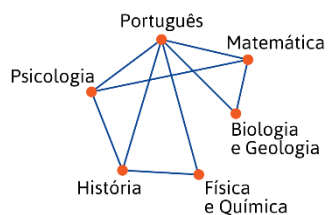
Capítulo 1 Modelos de grafos

pág. 9

1.

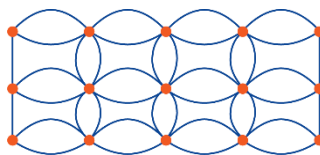
Alínea	Número de arestas	Número de vértices
1.1	11	7
1.2	10	5
1.3	7	6
1.4	7	5
1.5	9	4

2.1

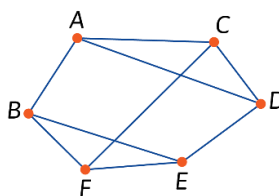


2.2 Três dias: um dia para Português, outro para Matemática e História e outro para Física e Química, Biologia e Geologia e Psicologia.

3. O facto de ter de percorrer ruas duas vezes traduz-se num grafo com várias arestas paralelas:



4. Os vértices representam as equipas e as arestas os jogos realizados:



5.1	A: 3	B: 3	C: 3	D: 3	E: 3	F: 4	G: 3
5.2	A: 4	B: 4	C: 4	D: 4	E: 4		
5.3	A: 1	B: 2	C: 4	D: 2	E: 3	F: 2	
5.4	A: 2	B: 4	C: 3	D: 2	E: 3		
5.5	A: 4	B: 5	C: 4	D: 5			

6.1 Tem trajeto: por exemplo, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E$.

6.2 Tem circuito (e trajeto): por exemplo, $B \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow B$ é um circuito.

6.3 Tem trajeto: por exemplo, $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C$.

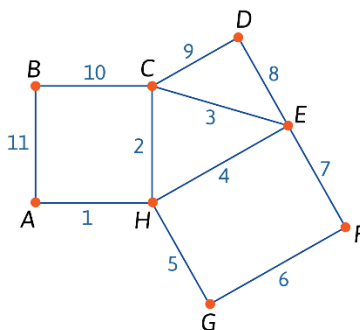
6.4 Tem circuito (e trajeto): por exemplo, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$ é um circuito.

7.1 Sim, é possível encontrar um circuito de Euler, uma vez que todos os vértices têm grau par.

7.2 Com este novo percurso, o Sr. Hipólito não passaria em BD e ED , nem numa das ruas EF , pelo que não cuidaria dos jardins nelas existentes.

8.1 É possível encontrar um circuito de Euler, pois os vértices têm todos grau par.

8.2 Aplicando o algoritmo de Fleury, para indicar o circuito basta seguir, por ordem crescente, a numeração das arestas:

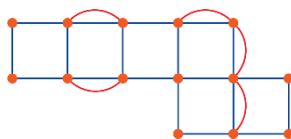


isto é, $A \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$.

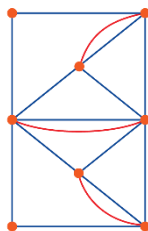
9.1 O grafo II é o único que tem um circuito euleriano, uma vez que todos os vértices têm grau par.

9.2 Para eulerizar um grafo, devemos acrescentar arestas de forma a tornar par o grau dos vértices de grau ímpar. No entanto, temos de ter sempre presente que só podemos duplicar arestas já existentes e que a melhor eulerização é a que acrescenta o menor número de arestas. Assim:

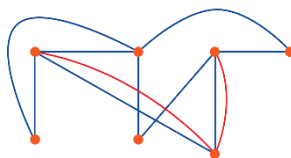
Grafo I:



Grafo III:



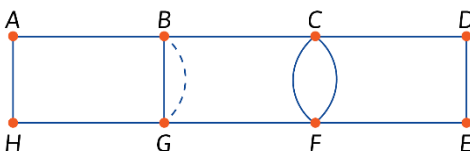
Grafo IV:



10.1 Representando cada cruzamento por um vértice e cada rua por uma aresta, podemos obter o grafo seguinte:



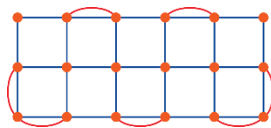
10.2 Não é possível encontrar um circuito euleriano, dado que não é possível sair e regressar a A percorrendo cada rua uma única vez, pelo facto de existirem vértices de grau ímpar. Podemos, no entanto, eulerizar o grafo acrescentando uma aresta.



Deste modo, tornamos possível o carteiro sair da esquina A, distribuir a correspondência nessa área habitacional, repetindo apenas uma das ruas, e regressar a A. Um desses percursos é:

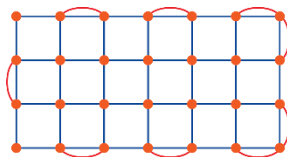
$$A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow A$$

11. Por exemplo:



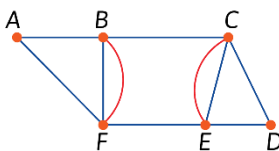
precisamos de acrescentar 7 arestas.

12. Sim, 9 arestas são suficientes para eulerizar o grafo; por exemplo:



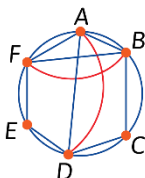
13.1 Só é possível encontrar um circuito de Euler no grafo IV, uma vez que é o único grafo em que todos os vértices têm grau par. Para este grafo, um exemplo de circuito é $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow A$.

13.2 Grafo I



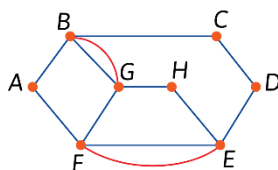
Circuito: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow A$, por exemplo.

Grafo II



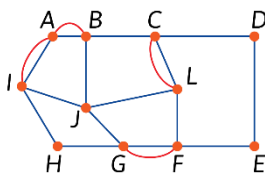
Circuito: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow A$, por exemplo.

Grafo III



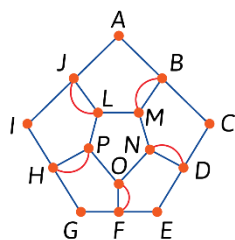
Circuito: $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow A$, por exemplo.

Grafo V



Circuito: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow L \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow L \rightarrow J \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow I \rightarrow A$, por exemplo.

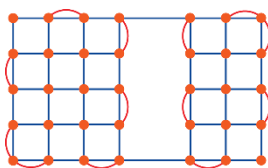
Grafo VI



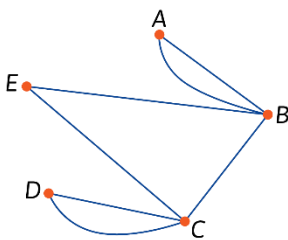
Circuito: $A \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow N \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow O \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow P \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow L \rightarrow J \rightarrow A$, por exemplo.

pág. 13

14. Acrescentaram-se mais $5 \times 13 = 65$ metros.



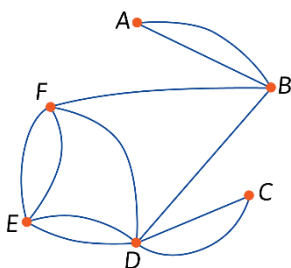
15.1



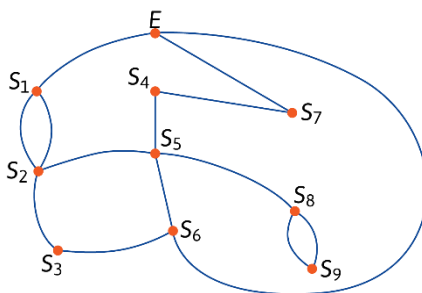
15.2 A: 2; B: 4; C: 4; D: 2; E: 2

16.1 A: 2; B: 4; C: 2; D: 6; E: 4; F: 4

16.2



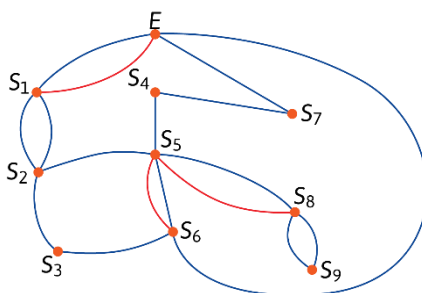
17.1



Os vértices representam as salas e o exterior; as arestas representam as portas de ligação existentes entre salas e entre estas e o exterior.

17.2 Para ser possível concretizar a prova nas condições impostas, teria de existir, pelo menos, um circuito de Euler no grafo. Para tal acontecer, os vértices teriam todos de ter grau par, o que não se verifica: os vértices S_1 , S_6 , S_8 e E têm grau ímpar.

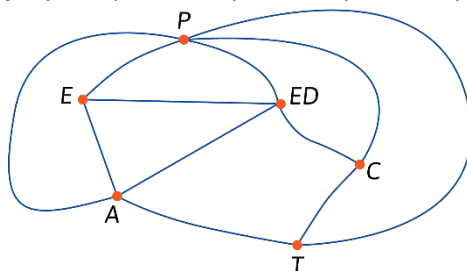
17.3 Teremos de duplicar um número mínimo de arestas, de modo que todos os vértices passem a ter grau par: por exemplo, duplicar as arestas S_1E , S_5S_8 e S_5S_6 .



Um percurso possível para a prova da Rute seria: $E \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow S_6 \rightarrow S_5 \rightarrow S_6 \rightarrow E \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_9 \rightarrow S_8 \rightarrow S_5 \rightarrow S_4 \rightarrow S_7 \rightarrow E$.

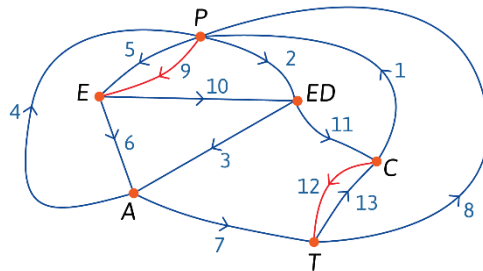
pág. 14

18. Um grafo representativo desta planta terá como vértices cada um dos espaços do recinto; as arestas serão as ligações existentes entre cada um desses espaços ("as portas"). Para simplificar, vamos identificar cada vértice pela(s) primeira(s) letra(s) do espaço que representa: por exemplo, P representa o pátio:



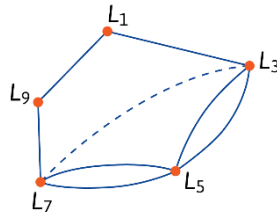
Os vértices C , E , P e T têm grau ímpar, o que inviabiliza a existência de um circuito de Euler, o qual seria necessário para a ronda ao recinto que a funcionária pretendia. Para solucionar o problema, teremos de eulerizar o grafo, isto é, duplicar o menor número de arestas de modo que todos os vértices fiquem com grau par. Conseguimos uma boa eulerização duplicando as arestas TC e PE , passando os vértices T , C , P e E a ter grau par, como os restantes.

A ronda pretendida para a funcionária pode ser, por exemplo:



$C \rightarrow P \rightarrow ED \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow T \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow ED \rightarrow C \rightarrow T \rightarrow C$

19. Por exemplo:



O grafo inicialmente construído pelo morador não incluiria a aresta a tracejado.

pág. 15

20. A. Euler; B. Hamilton; C. Hamilton

21. Sim, com o percurso $F \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow F$.

22.1

I. $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B$

II. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow A$

III. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A$

22.2 Sim:

I. $B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow B$

II. $A \rightarrow I \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow A$

III. $A \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$

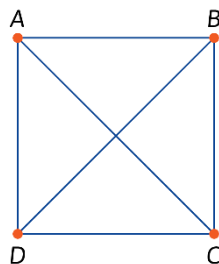
23. $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow A$

pág. 16

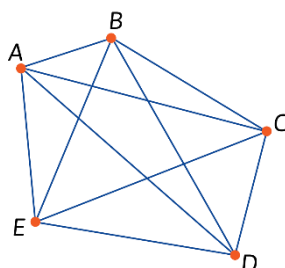
24. Sim; no grafo I, acrescentando a aresta AI podemos obter o circuito $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow A$ e no grafo II, acrescentando a aresta AB , obtemos $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$.

25. Por exemplo:

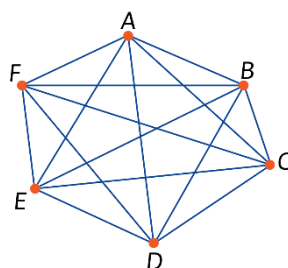
25.1



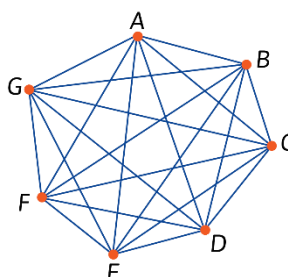
25.2



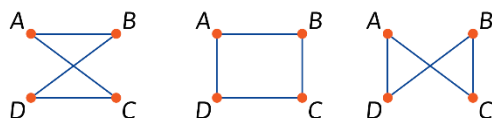
25.3



25.4



26.



3 circuitos

4 vértices: $(3 \times 2) : 2 = 3$ circuitos

5 vértices: $(4 \times 3 \times 2) : 2 = 12$ circuitos

6 vértices: $(5 \times 4 \times 3 \times 2) : 2 = 60$ circuitos

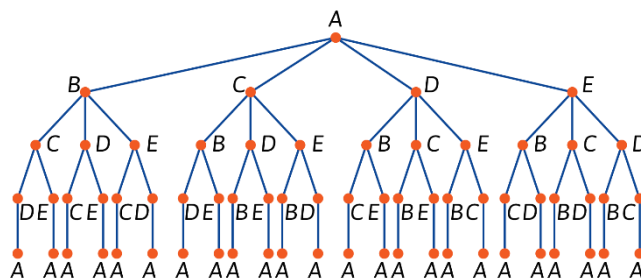
7 vértices: $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2) : 2 = 360$ circuitos

27.1 São seis os percursos que começam em A e seguem de imediato para D :

$A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$; $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$; $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$;

$A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$; $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A$; $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A$

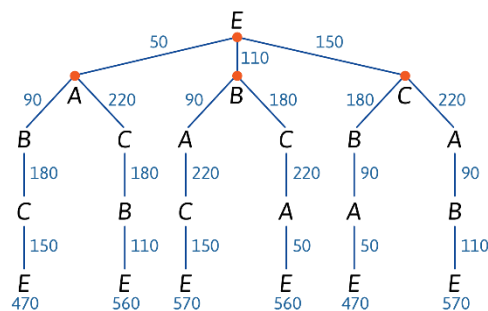
27.2 Podemos fazer um diagrama em árvore para mais facilmente contar os percursos possíveis:



Contámos 24 percursos. No entanto, como para cada um existe o percurso no sentido contrário ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A$ é idêntico a $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, em número de quilómetros), existem $24 : 2 = 12$ voltas distintas que podem fazer parte da lista do Miguel.

pág. 17

28.1



O menor percurso, de 470 metros, é $E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E$ ou $E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow E$.

28.2 Sim, uma vez que é o menor de todos os possíveis.

29. $A \xrightarrow{5} B \xrightarrow{5} C \xrightarrow{5} D \xrightarrow{11} E \xrightarrow{20} A$ ou no sentido inverso, com um total de 46 km.

30.1 (I) $A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} B \xrightarrow{5} C \xrightarrow{8} A$ Total: 20

(II) $A \xrightarrow{21} B \xrightarrow{14} D \xrightarrow{25} C \xrightarrow{18} E \xrightarrow{53} A$ Total: 131

(III) $A \xrightarrow{18} E \xrightarrow{28} C \xrightarrow{32} F \xrightarrow{29} B \xrightarrow{4} D \xrightarrow{33} A$ Total: 144

30.2 (I) $A \xrightarrow{3} D; D \xrightarrow{4} B; B \xrightarrow{5} C; C \xrightarrow{6} A; A \xrightarrow{7} B; B \xrightarrow{8} C$

Circuito: $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$; Total: 20

(II) $B \xrightarrow{14} D; C \xrightarrow{18} E; A \xrightarrow{21} B; A \xrightarrow{24} D; C \xrightarrow{25} D; E \xrightarrow{27} D; A \xrightarrow{30} C; B \xrightarrow{35} E;$

$B \xrightarrow{41} C; A \xrightarrow{53} E$

Circuito: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$; Total: 131

(III) $B \xrightarrow{4} D; A \xrightarrow{18} E; A \xrightarrow{21} B; C \xrightarrow{28} E; F \xrightarrow{29} B; C \xrightarrow{32} F; B \xrightarrow{33} E; B \xrightarrow{33} C; A \xrightarrow{37} C;$

$F \xrightarrow{40} E; D \xrightarrow{44} F; A \xrightarrow{49} F; B \xrightarrow{50} E; C \xrightarrow{52} D; E \xrightarrow{61} D$

Circuito: $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$; Total: 147

31.1 Problema do tipo do caixeiro viajante (PCV).

31.2 $F \xrightarrow{8} G \xrightarrow{12} H \xrightarrow{13} I \xrightarrow{10} F$ Total: 43 minutos

31.3 $F \xrightarrow{8} G; F \xrightarrow{10} I; G \xrightarrow{12} H; I \xrightarrow{13} H; G \xrightarrow{15} I; F \xrightarrow{17} H$
 $F \xrightarrow{8} G \xrightarrow{12} H \xrightarrow{13} I \xrightarrow{10} F$ (ou o inverso) Total: 43 minutos

O percurso é o mesmo que o obtido em 31.2. Sim, porque é o menor percurso possível.

32.1 Bar. $\frac{\quad}{110}$ Tar. ; Mál. $\frac{\quad}{163}$ Gra. ; Valha. $\frac{\quad}{193}$ Mad. ; Mál. $\frac{\quad}{240}$ Sev. ; Val. $\frac{\quad}{248}$ Tar. ; Múrc. $\frac{\quad}{261}$ Val. ;
Múrc. $\frac{\quad}{271}$ Gra. ; Por. $\frac{\quad}{301}$ Cor. ; Lis. $\frac{\quad}{336}$ Por. ; Valha. $\frac{\quad}{352}$ SS ; Mad. $\frac{\quad}{356}$ Val. ; SS $\frac{\quad}{361}$ Bar. ; Múrc. $\frac{\quad}{391}$ Mad. ;
Mad. $\frac{\quad}{392}$ Sant. ; Cor. $\frac{\quad}{416}$ Valha. ; Lis. $\frac{\quad}{420}$ Sev. ; Gra. $\frac{\quad}{460}$ Mad. ; Mad. $\frac{\quad}{469}$ SS ; Cor. $\frac{\quad}{539}$ Sant. ;
Sev. $\frac{\quad}{565}$ Mad. ; Mad. $\frac{\quad}{624}$ Bar. ; Lis. $\frac{\quad}{648}$ Mad. ; Lis. $\frac{\quad}{661}$ Valha.

Lisboa → Porto → Corunha → Santander → Madrid → Valhadolide → San Sebastián
→ Barcelona → Tarragona → Valência → Múrcia → Granada → Málaga → Sevilha
→ Lisboa (ou no sentido inverso)

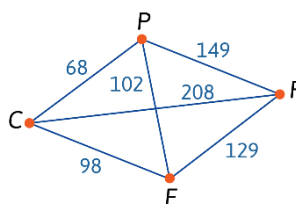
Total: 4187 quilómetros

32.2 Não, uma vez que existem mais de dois vértices (cidades) de grau ímpar.

32.3 Lisboa → Porto → Corunha* → Santander → Madrid → Valhadolide → San Sebastián → Barcelona →
Tarragona → Valência → Múrcia → Granada → Málaga → Sevilha → Lisboa

*Nota: se aqui se escolher Valhadolide, que é a cidade que está mais próxima, irá chegar a San Sebastián, o que obrigada a repetir Madrid ou Valhadolide sem ter tido a possibilidade de visitar todas as cidades pretendidas.

33.1



33.2 $E \xrightarrow{129} F \xrightarrow{149} P \xrightarrow{68} C \xrightarrow{98} E$ Total: 444 km

$E \xrightarrow{129} F \xrightarrow{208} C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{102} E$ Total: 507 km

$E \xrightarrow{102} P \xrightarrow{149} F \xrightarrow{208} C \xrightarrow{98} E$ Total: 557 km

33.3 $F \xrightarrow{129} E \xrightarrow{102} P \xrightarrow{68} C \xrightarrow{208} F$ Total: 507 km

$F \xrightarrow{129} E \xrightarrow{98} C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{149} F$ Total: 444 km

$F \xrightarrow{208} C \xrightarrow{98} E \xrightarrow{102} P \xrightarrow{149} F$ Total: 557 km

33.4 Há dois percursos mínimos ($E \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow C \rightarrow E$ e $F \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow F$), ambos com 444 quilómetros.

$$\begin{array}{ll}
 \text{33.5 } E \xrightarrow{98} C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{149} F \xrightarrow{129} E & \text{Total: 444 km} \\
 \text{33.6 } F \xrightarrow{129} E \xrightarrow{98} C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{149} F & \text{Total: 444 km} \\
 P \xrightarrow{68} C \xrightarrow{98} E \xrightarrow{129} F \xrightarrow{149} P & \text{Total: 444 km} \\
 C \xrightarrow{68} P \xrightarrow{102} E \xrightarrow{129} F \xrightarrow{208} C & \text{Total: 507 km} \\
 \text{33.7 } C \xrightarrow{68} P ; C \xrightarrow{68} P ; C \xrightarrow{98} E ; P \xrightarrow{102} E ; E \xrightarrow{129} F ; P \xrightarrow{149} F ; C \xrightarrow{208} F & \\
 \text{Percurso: } C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow C, \text{ com 444 quilómetros.} &
 \end{array}$$

33.8 Sim, porque é o menor percurso possível.

$$\begin{array}{ll}
 \text{34.1.1 } A \xrightarrow{10} D \xrightarrow{35} C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{83} E \xrightarrow{52} A & \text{Total: 203 milhas aéreas} \\
 \text{34.1.2 } B \xrightarrow{23} C \xrightarrow{35} D \xrightarrow{10} A \xrightarrow{52} E \xrightarrow{83} B & \text{Total: 203 milhas aéreas} \\
 \text{34.1.3 } C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{57} A \xrightarrow{10} D \xrightarrow{50} E \xrightarrow{65} C & \text{Total: 205 milhas aéreas} \\
 \text{34.1.4 } D \xrightarrow{10} A \xrightarrow{38} C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{83} E \xrightarrow{50} D & \text{Total: 204 milhas aéreas} \\
 \text{34.1.5 } E \xrightarrow{50} D \xrightarrow{10} A \xrightarrow{38} C \xrightarrow{23} B \xrightarrow{83} E & \text{Total: 204 milhas aéreas} \\
 \text{34.2 } A \xrightarrow{10} D ; B \xrightarrow{23} C ; C \xrightarrow{35} D ; A \xrightarrow{38} C ; D \xrightarrow{50} E ; A \xrightarrow{52} E ; A \xrightarrow{57} B ; B \xrightarrow{60} D ; C \xrightarrow{65} E ; & \\
 B \xrightarrow{83} E &
 \end{array}$$

Percurso: $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A$, com 203 milhas aéreas.

34.3 É o $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A$ ou o $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B$ (ou os inversos), com um comprimento de 203 milhas aéreas.

pág. 20

35. 1.º caso: a estrada que liga A a B está transitável.

Algoritmo: 1.º passo: seleciona-se F .

2.º passo: seleciona-se A (mais próxima).

3.º passo: seleciona-se B , de seguida D , depois C e regressamos a F .

Distância total: $18 + 28 + 32 + 48 + 20 = 146$ km

2.º caso: a estrada que liga A a B está intransitável.

Algoritmo: 1.º passo: seleciona-se F .

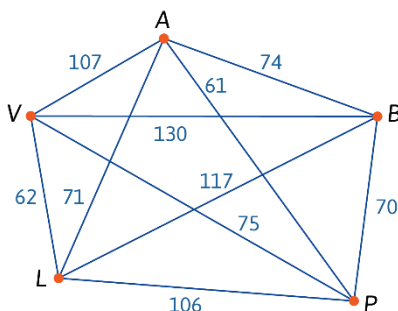
2.º passo: seleciona-se A (mais próxima).

3.º passo: seleciona-se D (não pode ser B porque está intransitável), de seguida B , depois C e regressamos a F .

Distância total: $18 + 30 + 32 + 36 + 20 = 136$ km

A afirmação do anúncio é falsa, pois a distância total a percorrer caso a estrada que liga A a B esteja intransitável é inferior (em 10 quilómetros) e não superior.

36. Um grafo ponderado representativo da situação pode ser (os vértices estão designados pela primeira letra de cada cidade):



Vamos aplicar cada uma das opções para saber se o Luís tem razão ou não.

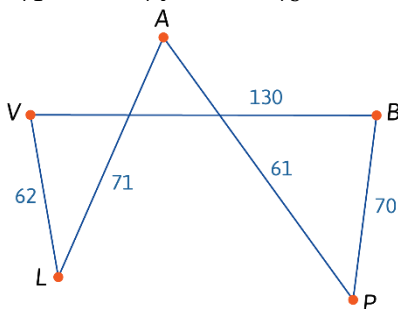
Opção 1:

$$A \xrightarrow{61} P \xrightarrow{70} B \xrightarrow{117} L \xrightarrow{62} V \xrightarrow{107} A$$

Distância total: $61 + 70 + 117 + 62 + 107 = 417$ km

Opção 2:

$$A \xrightarrow{31} P; L \xrightarrow{62} V; B \xrightarrow{70} P; A \xrightarrow{71} L; A \xrightarrow{74} B; P \xrightarrow{75} V; P \xrightarrow{106} L; A \xrightarrow{107} V; B \xrightarrow{117} L; B \xrightarrow{130} V$$

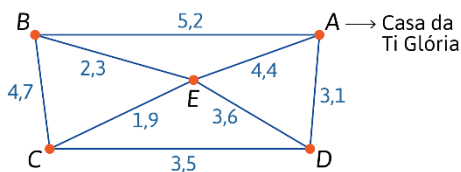


Distância total: $61 + 62 + 70 + 71 + 130 = 394$ km

Percurso: $A \rightarrow P \rightarrow B \rightarrow V \rightarrow L \rightarrow A$ (ou o inverso)

O Luís não tem razão.

37. 1 Para facilitar, vamos representar cada casa por uma letra, obtendo o seguinte grafo:



Os percursos possíveis são:

$A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$, $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A$, $A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ e $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ (ou os inversos)

37.2 $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$: $3,1 + 3,6 + 1,9 + 4,7 + 5,2 = 1850$ metros

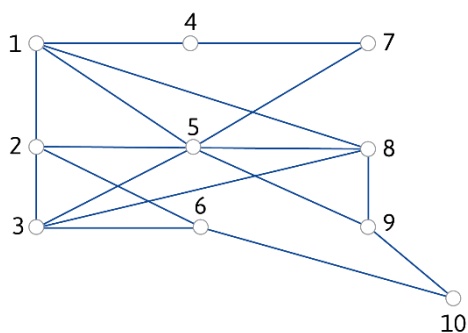
$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A$: $3,1 + 3,5 + 1,9 + 2,3 + 5,2 = 1600$ metros

$A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$: $4,4 + 2,3 + 4,7 + 3,5 + 3,1 = 1800$ metros

$A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$: $4,4 + 3,6 + 3,5 + 4,7 + 5,2 = 2140$ metros

O menor percurso é $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A$, ou o inverso, com 1600 metros.

38.1

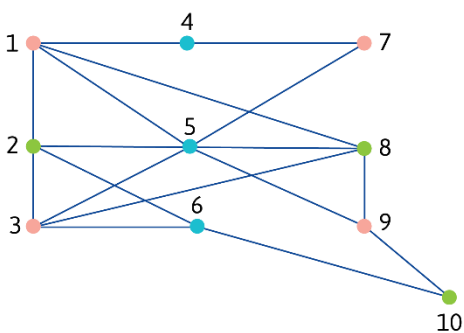


Os vértices representam as antenas; as arestas representam as interferências entre as antenas.

38.2 Ordenamos os vértices por ordem decrescente do seu grau:

Vértice	Grau
5	6
1	4
2	4
3	4
8	4
6	3
9	3
4	2
7	2
10	2

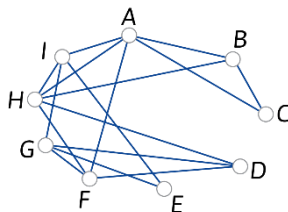
Vamos atribuindo cores iguais a vértices não adjacentes, começando pelo de maior grau, e assim sucessivamente, obtendo a seguinte apresentação dos vértices do grafo:



São necessárias três frequências diferentes para não haver interferências entre as antenas:

- frequência I: antenas 4, 5 e 6;
- frequência II: antenas 1, 3, 7 e 9;
- frequência III: antenas 2, 8 e 10.

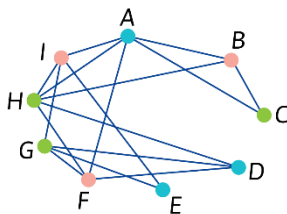
39.1 Os vértices representam as espécies dos peixes; as arestas representam as incompatibilidades entre espécies.



39.2 Ordenam-se os vértices por ordem decrescente do seu grau:

Vértice	Grau
A	5
H	5
F	4
G	4
I	4
B	3
D	3
C	2
E	2

Sucessivamente, vamos atribuindo cores iguais a vértices não adjacentes (começando pelos de maior grau), obtendo a seguinte apresentação para os vértices do grafo:



O Tiago terá de construir três aquários:

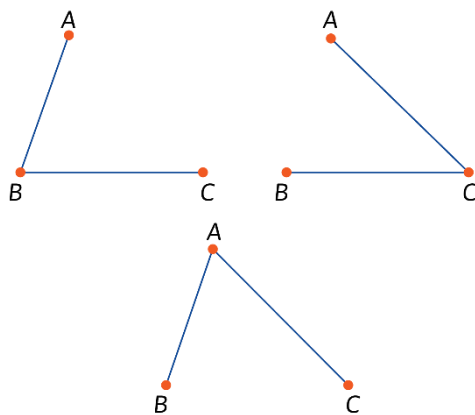
- espécies A , D e E ;
- espécies B , F e I ;
- espécies C , G e H .

pág. 23

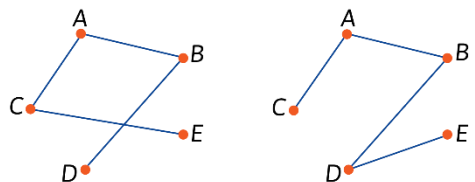
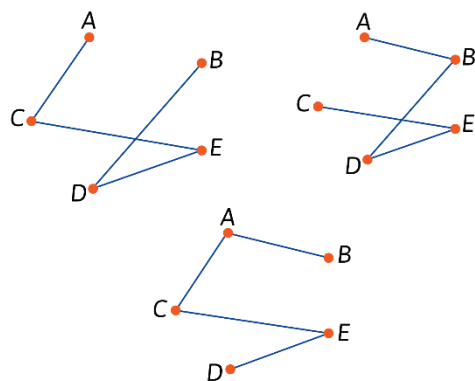
40. Os grafos II, III e V são árvores porque são conexos e não têm circuitos.

41. Um grafo só é uma árvore se for conexo e não tiver circuitos.

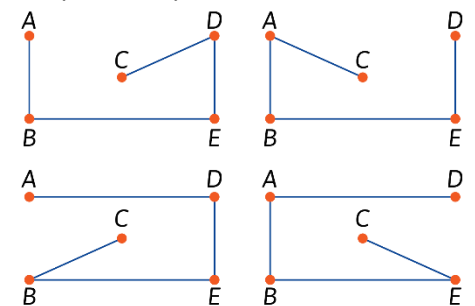
42.1



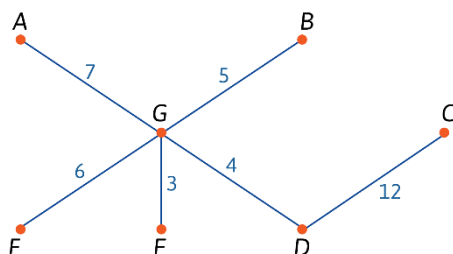
42.2



42.3 São 45 árvores abrangentes, como, por exemplo:

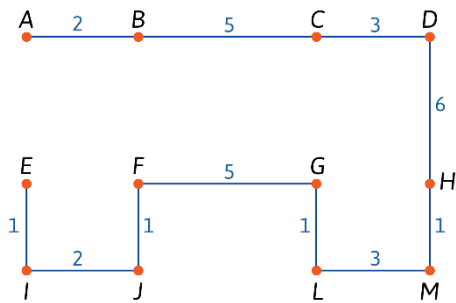


43.1



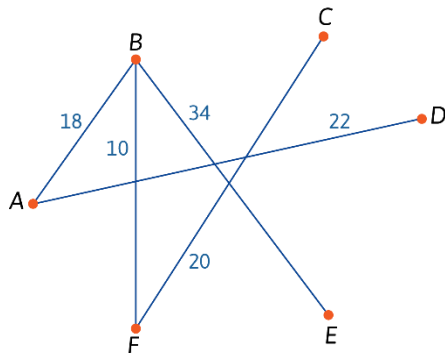
Peso total: 37

43.2 Por exemplo:



Peso total: 30

43.3

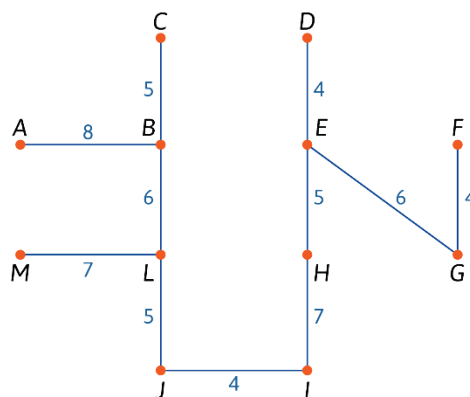


Peso total: 104

pág. 24

44. Os pesos totais obtidos pelo algoritmo de Prim são iguais aos obtidos pelo algoritmo de Kruskal; apenas a árvore final poderá não ser igual, no caso do grafo da alínea 43.2, se optarmos por arestas diferentes, mas de igual peso, em alguma altura da aplicação do algoritmo.

45. Por exemplo:



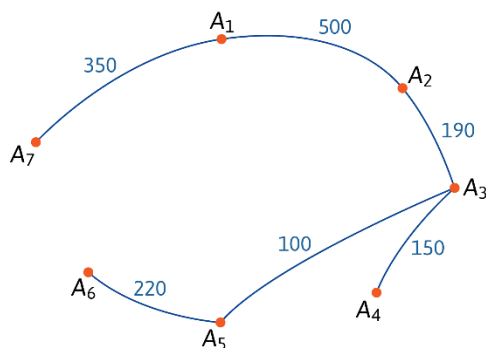
Tubagem: 61 metros

46. Começamos por ordenar, por ordem crescente, as distâncias entre cada par de pavilhões:

$$A_3 \frac{100}{100} A_5 ; A_3 \frac{150}{150} A_4 ; A_2 \frac{190}{190} A_3 ; A_2 \frac{200}{200} A_5 ; A_4 \frac{220}{220} A_5 ; A_5 \frac{220}{220} A_6 ; A_4 \frac{240}{240} A_6 ;$$

$$A_2 \frac{340}{340} A_6 ; A_1 \frac{350}{350} A_7 ; A_1 \frac{500}{500} A_2 ; A_6 \frac{650}{650} A_7 ; A_1 \frac{730}{730} A_6$$

O grafo, nas condições impostas, será:



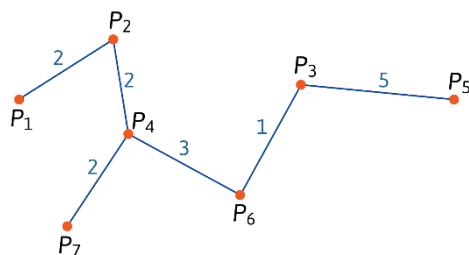
Uma vez selecionadas $7 - 1 = 6$ arestas, calculamos o comprimento total de cabo de fibra ótica:

$$100 + 150 + 190 + 220 + 350 + 500 = 1510 \text{ metros}$$

O custo mínimo para a instalação será:

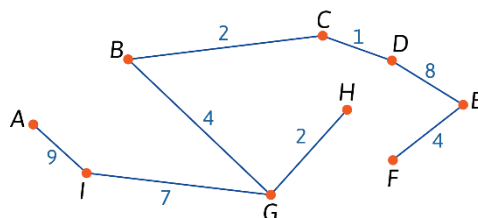
$$1510 \times 3,40 = 5134 \text{ euros}$$

47.



Comprimento: 15 quilómetros

48.1



Por exemplo, deverão ser asfaltadas as estradas AI , IG , GH , GB , BC , CD , DE e EF .

48.2 $9 + 7 + 4 + 2 + 2 + 1 + 8 + 4 = 37$ quilómetros

49.1 No grafo existem dois vértices de grau ímpar (C e F têm grau 3), logo não é possível encontrar um circuito de Euler. Assim, as pretensões do António não podem ser todas satisfeitas.

49.2 Consideremos os pesos das arestas sugeridas pelo João e a respetiva soma:

$$AB + FG + BF + BE + CE + CD \\ 1253 + 832 + 938 + 712 + 941 + 911 = 5587 \text{ metros}$$

Aplicando o algoritmo proposto pelo José:

Passo 1: as arestas com menor peso são $BE - 712$ e $FG - 832$.

Passo 2: a aresta seguinte com menor peso e que não fecha circuito é $CD - 911$.

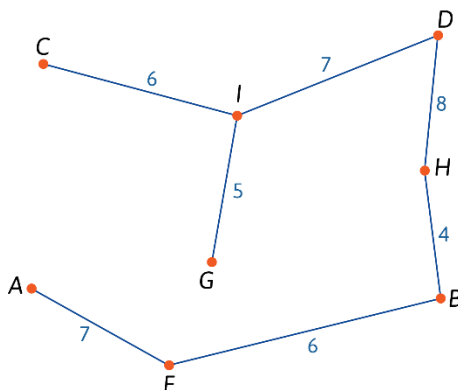
Passo 3: segue-se a aresta $BF - 938$, depois a aresta $EC - 941$ e, por fim, a aresta $AG - 1248$.

O comprimento total para a proposta do José é:

$$712 + 832 + 911 + 938 + 941 + 1248 = 5582 \text{ metros}$$

Assim, a empresa deverá optar pela proposta do José, pois utiliza menos 5 metros de fibra ótica do que a proposta do João.

50.1 Vamos utilizar o algoritmo de Prim, por exemplo, para encontrar a árvore abrangente mínima. Começamos, por exemplo, no vértice A .



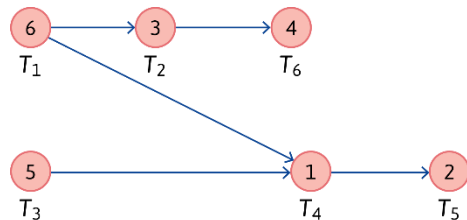
50.2 Para a proposta do exercício 50.1, o comprimento total de fibra ótica necessário será:

$$7 + 6 + 4 + 8 + 7 + 5 + 6 = 43 \text{ dezenas de metros, ou seja, 430 metros}$$

O valor a pagar pela instalação será:

$$430 \times 4,20 = 1806 \text{ euros}$$

51.1 Considerando os tempos necessários à concretização de cada uma das tarefas e às suas precedências, podemos traduzir os dados da tabela no grafo seguinte:



51.2 Considerando todas as sequências de tarefas possíveis:

- $T_1 \rightarrow T_4 \rightarrow T_5$: $6 + 1 + 2 = 9$ semanas
- $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_6$: $6 + 3 + 4 = 13$ semanas
- $T_3 \rightarrow T_4 \rightarrow T_5$: $5 + 1 + 2 = 8$ semanas

As tarefas que constituem o caminho crítico são T_1 , T_2 e T_6 ; serão necessárias, no mínimo, 13 semanas para concluir o projeto.

52.1

Tarefas	Tempo (dias)	Precedências
T_1	4	Nenhuma
T_2	7	Nenhuma
T_3	10	Nenhuma
T_4	8	T_1 e T_2
T_5	6	T_3
T_6	12	T_4
T_7	5	T_4 e T_5
T_8	4	T_7

52.2 As possíveis sequências de tarefas são:

- $T_1 \rightarrow T_4 \rightarrow T_7 \rightarrow T_8$ (21 dias);
- $T_1 \rightarrow T_4 \rightarrow T_6$ (24 dias);
- $T_2 \rightarrow T_4 \rightarrow T_6$ (27 dias);
- $T_2 \rightarrow T_4 \rightarrow T_7 \rightarrow T_8$ (24 dias);
- $T_3 \rightarrow T_5 \rightarrow T_7 \rightarrow T_8$ (25 dias).

As tarefas que constituem o caminho crítico são T_2 , T_4 e T_6 e são necessárias, no mínimo, 27 dias para concluir o projeto.