

Cap. 2- Teoria da partilha equilibrada. (pág. 73)

Introdução(73)

Questão 1: se tivermos que dividir 100 euros igualmente por 4 pessoas, basta fazer $100/4$ e obtemos 25euros para cada pessoa.

Questão 2: Se tivermos que dividir uma herança familiar, que inclua objetos de estimação tais como quadros, estatuetas, instrumentos musicais, objetos antigos de coleção, e outros, pode ser difícil proceder à partilha se houver valor sentimental em relação a esses objetos. Se nem todos os herdeiros atribuírem o mesmo valor a cada objeto e também não quiserem vender para distribuírem o dinheiro em partes iguais...

O rei Salomão e o problema da partilha(73)

O problema dos camelos.(74).

Sugestão: admita que o calculista emprestou um camelo para facilitar os cálculos. ...

Partilha é o processo pelo qual se repartem de igual modo objetos, indivisíveis ou não, por sujeitos com direito a partes equivalentes.

Caso discreto: o conjunto C é formado por objetos indivisíveis. EX: Carros, barcos...

Caso contínuo: o conjunto C é formado por objetos que podem ser divididos de infinitas maneiras. Ex: terrenos, Bolos, pizzas, ...

Caso misto- Inclui os dois casos discreto e contínuo.

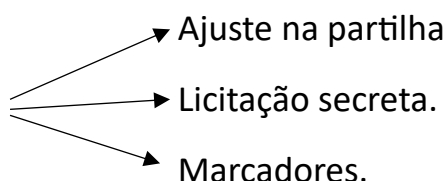
2.1 Partilhas no caso discreto.(pág. 75)

Divisão **justa-** Objetos-ex: carros,

Divisão **proporcional-** Pessoas em cargos. EX: deputados na assembleia.

2.1.1-Métodos de divisão justa.(pág. 75)

Ex: Herdeiros que receberam uma herança constituída por uma casa, um carro, e outros objetos valiosos.



Método de ajuste na partilha(pág.76)

Nota: Este método pode aplicar-se à divisão de um certo número finito de itens entre dois intervenientes da forma mais justa possível.

ALGORITMO:

1º) Cada um dos intervenientes tem 100 pontos para distribuir secretamente pelos itens.

2º) Cada item é atribuído temporariamente ao interveniente que mais o valorizou. Em caso de empate é atribuído ao que tiver menos pontos no final.

3º) Faz-se um balanço:

- se ambos tiverem o mesmo número de pontos, a partilha está feita;
- se não tiverem o mesmo número de pontos, o que tiver mais transfere itens (ou parte) para o outro até igualar o número de pontos, de acordo com os passos seguinte.

4º) Calculam-se os quocientes referentes a cada um dos itens atribuídos ao interveniente que ficou com mais pontos:

$$\frac{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo vencedor inicial}}{\text{Número de pontos atribuídos ao item pelo perdedor inicial}}$$

e colocam – se por ordem decrescente.

5º) Faz-se a transferência do item a que corresponde o menor quociente e contabilizam-se novamente os pontos.

6º) Se a transferência total de um item der vantagem à parte que o recebe, terá de se efetuar a transferência apenas de uma percentagem do item, de forma a igualar o número de pontos.

Vejamos cuidadosamente o exemplo:

Exemplo 1(pág. 76).

Sugestão: pode consultar o vídeo tutorial disponibilizado pelo manual.(pág.77)

Propriedades importantes: **Eficiente, Equitativo, Livre de inveja.**(pág. 78)

Check (pág. 78)

Exercícios de aplicação(136): 1 e 2 (Tente resolver estes para praticar)

Nota muito importante: por vezes, nos exames nacionais, os passos do método do ajuste na partilha surgem ligeiramente diferentes. Nesse caso, é necessário adaptar-se à nova descrição antes de resolver o exercício, e resolver de acordo com a nova descrição.

Método das Licitações Secretas (pág.79)

Nota: Este método pode aplicar-se à divisão de um certo número finito de itens entre **dois ou mais** intervenientes da forma mais justa possível.

ALGORITMO

1º) Licitação: Cada um dos intervenientes atribui, secretamente, um valor em dinheiro a cada um dos itens a dividir. A parte que cada um dos intervenientes considera ser justa receber — **valor justo** — será igual ao quociente entre o valor total que atribuiu aos itens e o número de intervenientes.

2º) Distribuição: Cada um dos itens é **atribuído** ao interveniente que mais o valorizou. Se o valor total dos itens recebidos por um interveniente ultrapassa o que considerou como valor justo a receber, terá de pagar aos outros a diferença. Se, pelo contrário, o valor dos itens for inferior ao valor justo, serão os outros intervenientes a pagar-lhe a diferença.

3º) Divisão monetária: O dinheiro excedente — montante disponível — é dividido igualmente por todos os intervenientes.

Exemplo 2(79)

Exemplo 3(81) Sugestão: tente resolver, antes de consultar a resolução. Construa uma tabela com: Total, Valor justo(J), Bens(B), Valor dos bens, J-B e depois: Pagamentos, sobras, distribuição das sobras, distribuição final.

Check (pág. 82)

Exercícios de aplicação(136): 3 e 4. (Tente resolver estes para praticar)

Nota importante: Se os intervenientes não tiverem todos direito a partes iguais, a parte justa e as sobras serão atribuídas de acordo com a respetiva proporção.

Exemplo(extra):Partes diferentes na herança.

A Rita e o Paulo são os únicos herdeiros de uma casa e um barco e vão efetuar a divisão dos bens pelo método da Licitação Secreta.

Cada um atribui valores(em euros) aos bens conforme a tabela seguinte:

	Rita	Paulo
Casa	225 000	270 000
Barco	40 000	35 000

Admita que a Rita tem direito a $\frac{3}{5}$ quintos da herança e o Paulo tem direito ao restante.

Proceda à distribuição, indicando todos os cálculos.

****Sugestão(esboço da resolução):**

Nota: Pode resolver este problema usando uma tabela!...

Repare que $1 - (\frac{3}{5}) = \frac{2}{5}$

A Rita tem direito a $\frac{3}{5}$ e herança e o Paulo tem direito a $\frac{2}{5}$.

1º) O total das licitações Rita: 265 000 Paulo: 305 000

Parte justa (J)de cada um

$$\text{Rita: } 265000 \times \frac{2}{5} = 159000 \quad \text{Paulo: } 305000 \times \frac{2}{5} = 122000$$

2º) Distribuição:

De acordo com as licitações, (**Bens**)

a Rita fica com o barco (paga 40 000€)

e o Paulo fica com a casa (Paga 270 000€)

pois foram os valores mais altos das licitações de cada um dos bens.

Como a Rita tinha direito a uma parte justa de 159 000 e fica com o barco que custa 40 000, o seu saldo é $159\ 000 - 40\ 000 = 119\ 000$ €. Tem a receber 119 000€ (**J-B**)

Como o Paulo tinha direito a uma parte justa de 122 000€ e fica com a casa que custa

270 000€, o seu saldo é $122\ 000 - 270\ 000 = -148\ 000$ deverá pagar: 148 000€ (**J-B**)

Pagamento: (O Paulo Paga. A Rita recebe) $148\ 000 - 119\ 000 = 29\ 000$ (Sobra).

3º) Divisão monetária.

Os 29 000 € que sobraram serão divididos por ambos na proporção dos direitos à herança de cada um.

$$\text{Rita: } 29\ 000 \times \frac{3}{5} = 17400\text{€} \quad \text{Paulo } 29000 \times \frac{2}{5} = 11600\text{€}$$

Mas a Rita já tinha o barco e 119 000€. Agora recebeu mais 17400€. Total monetário: $119\ 000 + 17\ 400 = 136\ 400$ €.

O Paulo Já tinha a casa e tinha pago 148 000€. Como agora recebeu 11 600€, o valor a pagar será apenas $148\ 000 - 11\ 600 = 136\ 400$ €

Distribuição final:

Rita: Barco e recebe 136 400€

Paulo: Casa e paga 136 400€.

Sugestão: Para praticar este tipo de exercício com partes diferentes na herança, pode resolver o exercício de exame: <https://pedronoia.net/private/ExPrAss/E21EEQ3.pdf>

Nota muito importante: por vezes, nos exames nacionais, os passos do método da Licitação Secreta surgem ligeiramente diferentes. Nesse caso, é necessário adaptar-se à nova descrição antes de resolver o exercício, e resolver de acordo com a nova descrição.

Método dos marcadores(pág. 83).

Sugestão: pode consultar o vídeo do manual (pág. 83)

Nota: O número de itens deve exceder substancialmente o número de interessados.

ALGORITMO

1º) Alinham-se os objetos a dividir, da esquerda para a direita, e atribui-se um número a cada um deles, ficando o objeto mais à esquerda com o número 1.

2º) Com o auxílio de **marcadores**, cada interveniente divide (secretamente) a fila de objetos num número de segmentos igual ao número de intervenientes, de um modo que considere justo.

3º) Da esquerda para a direita, procura-se o primeiro marcador. O dono do primeiro marcador a aparecer fica com os objetos à esquerda desse marcador, e retiram-se os restantes marcadores desse interveniente.

4º) Observamos de novo a fila de objetos, procurando agora os segundos marcadores de cada interveniente . O primeiro a aparecer determina que o segmento entre o primeiro e o segundo marcador desse interveniente lhe seja atribuído.

5º) Repete-se o processo até que todos os intervenientes tenham uma parte.

6º) Se sobrarem objetos, podem dividir-se por sorteio ou, se forem mais do que os intervenientes, aplica-se novamente o método.

Exemplo 4(pág.83)

Check (pág. 84)

Exercícios de Aplicação (pág. 137) : 5 e 6. (Resolva estes para praticar)

Prova dos 9 (pág. 85)(Tente resolver!...) Métodos: Ajuste na Partilha, Licitação secreta e Marcadores.

2.1.2 Métodos de divisão proporcional(86).

Nota: O tipo de problema que será abordado nos métodos de divisão proporcional é mostrado no exemplo seguinte:

Exemplo(extra) Na eleição para uma assembleia com 10 lugares para distribuir, concorreram 3 partidos A, B e C. O número de votos obtidos por cada um dos partidos foram: A-1250 B-1280 C- 300.

Nessa assembleia, quantos lugares deverão ser distribuídos a cada um dos partidos?

Outro exemplo:

Tarefa inicial(86)

Vejamos alguns métodos para a resolução deste tipo de problema.

Métodos de divisores.

I-Método de Hondt (86)

Nota: Este é o método utilizado nas eleições oficiais portuguesas para assembleias da república, regional, municipal, freguesia,...

Algoritmo:

1º) Contabiliza-se o número de votos recebidos por cada lista.

2º) O número de votos obtido por cada lista é dividido sucessivamente por 1, 2, 3, 4, 5, ..., n , onde n é o número de mandatos a atribuir (pode não ser necessário efetuar todas as divisões).

3º) Escrevem-se os n maiores quocientes obtidos por ordem decrescente.

4º) Associam-se os n maiores quocientes às respetivas listas, obtendo-se assim a distribuição dos mandatos pelas diferentes listas.

5º) No caso de restar apenas um mandato para atribuir e havendo quocientes iguais em diferentes listas, o mandato é atribuído à lista com menor número de votos.

Sugestão: pode consultar o vídeo indicado na página 86

Exemplo 5 (pág. 87)

Sugestão: Calculadora gráfica.

Podemos usar a **calculadora gráfica** para facilitar a construção da tabela.

Casio/Texas:

A ideia é usar secção de Estatística/ Editar.

A lista 1 (L1) é será os números 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

A lista 2 será 10000/L1.

Numworks:

Estatística. V1: 1 2 3 ...9. Enter.

V2 (enter) “preencher com uma fórmula” 10000/V1

Check(pág. 87) (Sugestão: basta dividir até 7...)

II-Método Saint Lague.(88)

O método de Saint-Laguë tem uma aplicação semelhante à do método de Hondt, mas em que a série de divisores é 1, 3, 5, 7, etc. números ímpares.

Sugestão: pode consultar o vídeo indicado na página 88

Exemplo 6 (pág. 88)

Check (88)

Exemplo 7(pág.89)(Métodos Hondt e Saint Lague).

(Resolver o exemplo 7, comparar e concluir)

Nota: O método de Hondt favorece ligeiramente os maiores partidos. O método de Saint Lague favorece os partidos pequenos.

Exemplos 8 e 9(pág. 90 e 92)- Exemplos reais...Apenas para consultar!

Prova dos 9(pág. 93)(Hondt e Saint Lague) Resolver na aula: nº2 (importante!). Resolva o nº1 para praticar.

Sugestão Para o nº **2.3)** $0.2 \times 30400 = 6080$ $0.34 \times 30400 = 10336$

(... a partir da tabela com o método de Hondt...)

$$\frac{6080+x}{3} = \frac{10336-x}{5} \Leftrightarrow 5 \times (6080 + x) = 3 \times (10336 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30400 + 5x = 31008 - 3x \Leftrightarrow 5x + 3x = 31008 - 30400 \Leftrightarrow x = 8x = 608 \Leftrightarrow x = 76 (...)$$

Exercícios de aplicação (137): 7, 8, 9. (Resolva para praticar)

Métodos de quota(pág. 94).

Nota: vejamos alguns conceitos para os métodos que se seguem (pág. 94)

Divisor padrão (DP): é o quociente entre o número de votos válidos e o número de lugares a atribuir.

$$DP = \frac{\text{Número de votos válidos.}}{\text{Número de lugares.}}$$

Quota padrão (QP): é o quociente entre o número de votos de cada lista e o divisor padrão.

$$QP = \frac{\text{Número de votos da lista.}}{DP}$$

Uma quota pode sofrer dois tipos de **arredondamento**:

Quota inferior (QI), se o arredondamento for feito por defeito (ao maior número inteiro inferior ou igual à quota padrão).

Quota Superior (QS), se o arredondamento for feito por excesso (ao menor número inteiro superior ou igual à quota padrão).

Exemplos: $QI(2,65) = 2$ $QI(5,15) = 5$ $QS(2,65) = 3$ $QS(5,15) = 6$

I. Método de Hamilton (pág. 94).

ALGORITMO:

1º) Calcula-se o divisor padrão(DP).

2º) Calcular a quota padrão(QP) de cada lista.

3º) Atribuir a cada estado a sua quota inferior(QI) (que é o número de lugares provisórios a que cada um tem direito).

4º) Se sobraem lugares, estes devem atribuir-se, um a um, às listas por ordem decrescente da parte decimal da respetiva quota padrão.

Exemplo 10 (pág. 95).

Regra da quota: (pág. 96)

Diz-se que um método de partilha obedece à regra da quota quando atribui sempre a cada lista um número de lugares igual à quota superior ou à quota inferior.

Exemplo: (extra)

Partidos A, B e C para atribuir 8 mandatos.

A-450 votos B-300 C-250 Total=450+300+250=1000

Partidos	A	B	C
Votos:	450	300	250
DP= 1000/8 =125			
Quota padrão(Q.P)	450/125 =3.6	300/125 =2.4	250/125 =2
Quota inferior(QI)	3	2	2
Quota superior(QS)	4	3	3

Nota1: No exemplo anterior é verificada a regra da quota. Por acaso, todos os partidos ficaram com um número de lugares igual à respetiva quota superior.

Nota 2: a soma das quotas padrão é sempre igual ao número total de lugares a atribuir. No exemplo anterior, temos: $3.6+2.4+2=8$

Check (pág. 96)

Exercícios de aplicação (138): 10, 11, 12 (Resolva para praticar)

II.Método de Lowndes (pág. 96).

ALGORITMO:

1º) Calcula-se o divisor padrão(DP).

2º) Calcular a quota padrão(QP) de cada lista.

3º) Atribuir a cada estado a sua quota inferior(QI) (que é o número de lugares provisórios a que cada um tem direito).

4º) Divide-se o número de votos de cada lista pela quota inferior. Se der zero, divide-se por 1.

5º) Se sobrarem lugares, estes devem atribuir-se, um a um, às listas por ordem decrescente dos valores encontrados no passo anterior.

Exemplo 11 (pág.97).

Check (pág. 97) (Nos arredondamentos, conserve 3 casas decimais)

Exemplo 12 (98) (importante: paradoxo do Alabama)

Nota: Como vimos no exemplo 12, o aumento de um novo lugar fez com que um dos colégios perdesse um professor, segundo o método de Hamilton. **Paradoxo.**

Curiosamente no método de Lowndes, tal paradoxo não ocorreu.

Paradoxo de Alabama (pág. 99)

Um aumento no número total de lugares a distribuir pode provocar a perda de lugares de uma lista.

Paradoxo da população: quando há a perda de lugares de uma lista por aumento do respetivo número de votos.

Paradoxo dos novos estados: quando a introdução de uma nova lista, bem como dos lugares que lhe pertencem, afeta o número de lugares atribuídos às outras listas.

Prova dos 9 (pág. 100)(Resolva para praticar e encontrar paradoxos. Métodos de Hamilton e Lowndes.

Exercício de aplicação (pág. 138): 13, 14, 15. (Resolva para praticar)

Métodos de divisor(pág. 101)

(A ideia a modificar o valor do divisor “padrão” para ajustar o número total de lugares)

I. Método de Jefferson. (pág. 101)

ALGORITMO

1º) Calcula-se o divisor padrão(DP).

2º) Calcula-se a quota padrão de cada lista(QP).

3º) Atribuir a cada lista a sua quota inferior(QI).

4º) Se a soma das quotas inferiores for igual ao número de lugares, a partilha está feita; caso contrário, é necessário encontrar por tentativas um número— **o divisor modificado (DM)** — para substituir o divisor padrão, de modo que, quando procedermos ao arredondamento das quotas modificadas (QM), a soma de todas as quotas, arredondadas por defeito(QMI), seja exatamente o número de lugares a atribuir.

Exemplo 13 (pág. 101)- (No final, o “P” viola a regra da quota)

Notas:

Nota1: Neste método, como o total de lugares inicial costuma ser inferior ao número de lugares a distribuir, o **divisor modificado** (DM)deverá ser **menor** que o divisor padrão.

Nota 2: Como podemos constatar no exemplo 13, este método **viola a regra da quota**, pois, a quota padrão do estado P é 102.594 e , no final este estado fica com 104 representantes. Este valor não corresponde à sua quota inferior nem à quota superior.

Sugestão: Calculadora gráfica.

Podemos usar a **calculadora gráfica** para facilitar a construção da tabela.

A ideia é usar secção de estatística/ Editar

$L1=(10000, 59000, 90000, 957000, 50000)$ e $L2=L1/9328$

(Obter L2: Casio-SHIFT 1 ou OPTN/LIST. Texas 2nd 1.)

Também pode fazer L3 como a parte inteira de L2.

$L3=Int(L2)$.

Casio-Optn/F2/Numeric/Int.

Texas-Math/Num/Int.

Sugestão Numworks:

V1: 10000, 59000, 90000, 957000, 50000

V2 “preencher com uma fórmula” $V2=V1/9328$

Aqui poderá experimentar vários valores para DM.

Check (pág. 102) (sugestão: pode usar a C.G. para ser mais rápido...)

Exercício de aplicação (139): 16 (Resolver para praticar)

II. Método de Adams (pág. 103)

Este método é idêntico ao método de Jefferson, mas utiliza quotas superiores (em vez de quotas inferiores).

Exemplo 14 (pág. 103) (Atenção à regra da quota...)

Nota 1: Neste método, como o total de lugares inicial costuma ser superior ao número de lugares a distribuir, o **divisor modificado** (DM) deverá ser **maior** que o divisor padrão.

Nota 2: Como podemos constatar no exemplo 14, este método **viola a regra da quota**, pois, a quota padrão do estado P é 102.594 e , no final este estado fica com 100 representantes. Este valor não corresponde à sua quota inferior nem à quota superior.

Check (pág. 104)

Exercício de aplicação (139): 17 (Resolver para praticar)

III. Método de Webster (pág. 105)

Parecido aos dois anteriores, mas com o arredondamento habitual às unidades, isto é, a **regra dos arredondamentos**.

Exemplos- de aplicação da regra dos arredondamentos:

3.5 arredondamos para 4. 3.1 arredondamos para 3. 3.7 arredondamos para 4.

Exemplo 15-Método de Webster.(pág. 105)

Check (pág. 106).

Exercício de aplicação (140): 18 (Resolver para praticar)

IV. Método de Huntington-Hill (pág. 107)

Nota: **média geométrica** (M_G) de dois números "a" e "b".

$$M_G(a,b)=\sqrt{a \times b}$$

$$\text{Exemplo: } M_G(2, 8)=\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

Algoritmo:

1º) Calcular o **D.P.**

2º) Calcular a **Q.P.** de cada lista.

3º) Se a quota padrão é um número inteiro, atribuímos esse número, caso contrário, vamos para o passo seguinte.

4º) Atribuimos a cada lista um número de lugares igual:

- à sua **quota inferior (Q.I.)**, se a sua quota padrão for inferior à média geométrica entre a sua quota inferior e a sua quota superior.
- à sua **quota superior (Q.S.)**, se a sua quota padrão for maior ou igual à média geométrica entre a sua quota inferior e a sua quota superior.

5º) Se a soma das quotas arredondadas for igual ao número de lugares a atribuir, a distribuição está encontrada; caso contrário, é necessário encontrar, por tentativas, um divisor modificado (para substituir o divisor padrão), de modo a calcular a quota modificada de cada lista.

6º) As quotas modificadas são de acordo com o 3º e 4º passos acima referidos.

Exemplo 16 (pág. 107)

Check (pág. 108)

Exercício de aplicação (140): 19 (Resolver para praticar)

V. Método de Dean (pág. 109)

Nota: **média harmónica (M_H)** de dois números “a” e “b”.

$$M_H(a,b) = \frac{2 \times a \times b}{a+b}$$

Exemplo: $M_H(2, 8) = \frac{2 \times 2 \times 8}{2+8} = \frac{32}{10} \approx 3.2$

O **método de Dean** é semelhante ao método de Huntington Hill, mas utiliza a **média harmónica** em vez da média geométrica.

Exemplo 17 (pág. 109).

Check (pág. 110). (Resolver parte 1.)

Prova dos 9(pág. 111). (Resolva para praticar)

Exercício de aplicação (140): 20, 21, 22 (Resolva para praticar)

Nota: É impossível encontrar um método de partilha sem falhas: ou beneficia as listas mais votadas, ou produz algum paradoxo, ou viola a regra da quota.

Teorema da impossibilidade de Balinski e Young (pág. 110)

Se um método de partilha não viola a regra da quota, então pode produzir paradoxos.

Se um método de partilha não produz paradoxos, então pode violar a regra da quota.

Prova dos 9(pág. 111) Métodos: Jefferson, Adams, Webster, Huntington Hill, Dean.

2.2 Partilha no caso contínuo(112).

Nota 1: tal como vimos na página 74, no caso contínuo, o conjunto é formado por objetos que podem ser divididos de infinitas maneiras. Ex: terremos, Bolos, pizzas, ...

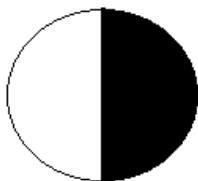
Nota 2: Consideremos que, muitas vezes a divisão destes objetos não é uma divisão geométrica, em que ambos ficam com áreas iguais. Pode haver partes que sejam mais valiosas do que outras. Também os gostos ou preferências dos intervenientes podem não ser iguais.

Método do divisor-selecionador (pág. 112)

ou «*eu corto, tu escolhes*». Válido para dois jogadores.

ALGORITMO

- 1º) O divisor é escolhido aleatoriamente (por exemplo, atirando uma moeda ao ar).
- 2º) O divisor efetua a divisão do objeto em duas partes que considera serem iguais.
- 3º) O selecionador escolhe uma das partes e o divisor fica com a que sobra.



Nota 1: Imagine que uma pessoa que adora chocolate e detesta coco e que outra pessoa adora coco e detesta chocolate. Se estiver sobre uma mesa uma tarte de chocolate e uma tarte de coco, a avaliação que cada um faz a cada uma das tartes não irá coincidir.

Nota 2: Nos dois exemplos que se seguem, os intervenientes têm preferências diferentes, pelo que os valores que atribuem a cada uma das partes não são iguais.

Exemplo 18 (pág. 113)

Exemplo 19 (pág. 114) (explorar sobretudo a parte 1)

Sugestão: pode ser útil colocar as avaliações das partes em tabelas.

Check (pág. 115). (Resolver-Importante!) (Engano resol. Bruno-salmão 6€ ~~3€~~)

Sugestão: use uma tabela e preencha depois de fazer os cálculos: $s=2a$

$$s+a=9 \Leftrightarrow 2a+a=9 \Leftrightarrow 3a=9 \Leftrightarrow a=3$$

	Atum	Salmão	Total
André	9	0	9
Bruno	6	3	9

Exercício de aplicação (140): ~~23~~, 24(Resolva para praticar).

Nota: Vejamos agora alguns métodos válidos para três ou mais intervenientes (ou jogadores).

Método do divisor único.(pág. 116)

Para três ou mais jogadores.

Algoritmo:

Seja n o número de jogadores.

- 1º) Um dos jogadores é escolhido, aleatoriamente, para ser o divisor, ficando os restantes com o papel de selecionadores.
- 2º) O divisor divide o objeto a partilhar em n partes que considera terem o mesmo valor.
- 3º) Cada selecionador elabora secretamente uma lista, atribuindo um valor que considera adequado a cada uma das partes resultantes da divisão.
- 4º) As partes são atribuídas aos selecionadores de acordo com as escolhas de cada um. Em caso de empate, juntam-se as duas partes e utiliza-se o método do divisor-selecionador.

Exemplo 20 (pág. 117)

Nota 1: No exemplo 20, entre I e J, parece que J foi prejudicado. Reparemos que I não tinha mais nenhuma parcela com avaliação não inferior a 25%, e J tinha duas, tendo ficando com uma delas. Basta receber pelo menos a parte justa.

Nota 2: Se um interveniente recebe, pelo menos o que é justo receber, não pode reclamar. No entanto, por vezes pode ser feita uma partilha diferente que beneficie o maior número possível de jogadores.

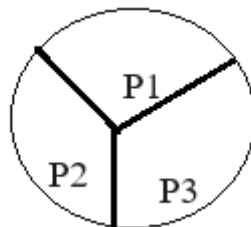
Check (pág. 117). (Repare que para a Diana, todas valem 20%)

Exercício de aplicação (140): 25, 26, 27. (Importante-Resolver na sala)

Exemplo (Extra)

Sejam J_1 , J_2 e J_3 os jogadores.

Suponhamos que, por exemplo J_1 corta um bolo em três partes, que para ele valem 33.33% cada.



Se J_2 avaliar: P1-55%, P2-25% e P3-20% e

se J_3 avaliar exatamente igual, P1-55%, P2-25% e P3-20%,

Então J_2 e J_3 deveriam juntar as partes P1 e P2 e novamente e dividir pelo método do divisor-selecionador. J_1 ficaria com a parte restante, P3.

Método do selecionador único. (pág. 118)

Para três ou mais jogadores.

Algoritmo:

Seja n o número de jogadores.

1º) Um dos jogadores é escolhido, aleatoriamente, para ser o selecionador, ficando os restantes com o papel de divisores.

2º) Os divisores procedem à divisão do item a partilhar entre si usando, por exemplo:

- o método do divisor-selecionador, no caso de serem dois divisores;
- o método do divisor único, no caso de serem mais do que dois divisores.

3º) Cada divisor divide a sua parte em n parcelas, considerando cada uma delas uma parte justa.

4º) O selecionador escolhe uma parcela de cada um dos divisores, ficando cada divisor com as parcelas que o selecionador não escolheu.

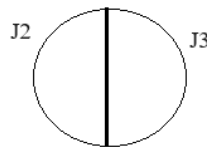
Sugestão: consulte o vídeo indicado na página 118.

Exemplo 21 (pág. 118)

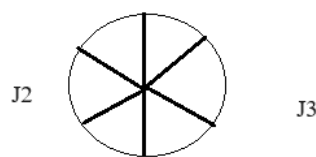
Exemplo extra (3 Jogadores)

Sejam J_1 , J_2 e J_3 os jogadores. Começamos com dois jogadores, sejam J_2 e J_3 .

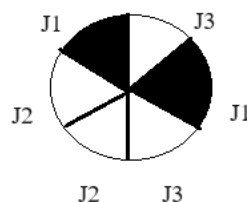
Um corta a meio e o outro escolhe. Suponhamos que ficou:



Cada um divide a sua parte em três, que considera iguais. Por exemplo:



Finalmente o J_1 escolhe uma parte de J_2 e uma parte de J_3 .



Exemplo 22 (pág. 119) (Exemplo importante!...)

Check (pág. 121). (Tente resolver!...)

Exercício de aplicação (142): 28 (Tente resolver!...)

Método do último a diminuir.(pág. 122)



Algoritmo:

- 1º) Os jogadores são ordenados de forma aleatória.
- 2º) O primeiro jogador escolhe uma parte que considera justa.
- 3º) Quanto aos restantes jogadores, e seguindo a ordem definida, se um jogador achar que a parte em questão tem um valor superior ao valor justo, diminui essa parte, de modo que fique uma parte justa; caso contrário, passa a sua vez.
- 4º) Se nenhum jogador diminuir a parte escolhida pelo primeiro jogador, este fica com ela e sai do jogo; caso contrário, o último jogador a diminuir essa parte, fica com ela e sai do jogo. A ordem inicialmente definida é preservada entre os jogadores que se mantêm em jogo. Repete-se o processo a partir do 2.º passo, sem o jogador e a respetiva parte excluída, até que restem apenas dois jogadores. Aí, a divisão é feita pelo método do divisor-selecionador.

Exemplo 23 (pág. 122).

Check (pág. 123).

Exercício de aplicação (142): 29, 30. (Resolva o 29 e o 30- sugestão use uma tabela para organizar os passos da resolução)

Nota muito importante: Nos *exames* nacionais, por vezes, o método do *último a diminuir* este método apresenta pequenas alterações que deverão ser tidas em conta. Sugestão: consulte questões de exame sobre este método:

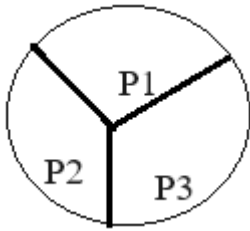
<https://pedronoia.net/private/ExPrAss/E22F2Q2.pdf>

Método livre de inveja. (pág. 123)

Nota: Na partilha, invejar é achar que a parte do outro é melhor do que a nossa. Até aqui, apenas o método do divisor selecionador, com dois intervenientes, era livre de inveja.

Um método de partilha diz-se **livre de inveja** se cada um dos n jogadores considera não só que recebeu $1/n$ do valor total, mas também que nenhum dos outros jogadores tem uma parcela mais valiosa do que a sua.

Algoritmo (livre de inveja para três jogadores):



1º) O divisor, jogador A, divide o bolo em três partes que considera terem o mesmo valor.

2º) O «aparador» *, jogador B, avalia as três fatias e se, na sua opinião, uma fatia vale mais do que qualquer uma das outras duas, aparada, de modo que haja pelo menos duas fatias com o maior valor; caso contrário, não aparada nenhuma fatia. A aparada, se houver, é colocada de parte e dividida posteriormente.

3º) O selecionador, jogador C, escolhe, de entre as três fatias, a que considera mais valiosa.

4º) O jogador B escolhe a seguir e, se aparou, terá de ficar com essa fatia se a mesma ainda estiver entre as duas disponíveis; caso contrário, retira a que considera ser mais valiosa.

5º) O jogador “A” retira a fatia que ainda resta.

Nota: É importante reconhecer que nenhum jogador tem razão para invejar a parte do outro.

O “A”, porque fez a divisão inicial e teve a possibilidade de ficar com uma fatia cortada por si.

O “C”, porque foi o primeiro a escolher..

O “B”, porque tem disponíveis para escolha duas fatias, sendo que pelo menos uma delas foi considerada, por si, como mais valiosa.

Nota: Se existir uma “aparada”, esta deve ser dividida:

1º) O jogador que ficou com a fatia aparada, que só pode ser B ou C, será o segundo selecionador e o outro será o segundo divisor.

2º) O segundo divisor divide a aparada em três partes que considera de igual valor.

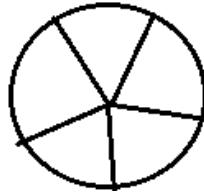
3º) O segundo selecionador escolhe a parte que, para ele, tem mais valor.

4º) O jogador “A” escolhe, das duas partes sobrantas, a que considera mais valiosa.

5º) O segundo divisor fica com a última parte.

Nota: Não pode haver inveja: (pág. 124)

Método livre de inveja por quatro jogadores (pág. 125)



Algoritmo:

1º) Estabelecer a ordem de jogada de forma aleatória, suponhamos A (divisor), B, C e, por fim, D.

2º) O jogador A divide o bolo em cinco fatias que considera terem o mesmo valor.

3º) O jogador B aparar, no máximo, duas fatias de entre as cinco, de modo a garantir que haja, pelo menos, três fatias com o maior valor. Havendo aparas, são colocadas de parte.

4º) O jogador C aparar, no máximo, uma fatia de entre as cinco, para que haja pelo menos duas fatias que, na sua opinião, têm o maior valor. A aparar, se houver, é colocada de parte.

5º) O jogador D escolhe a fatia que mais valoriza.

6º) O jogador C escolhe, de entre as quatro fatias restantes, a que, para si, tem mais valor; se aparou uma fatia e esta não foi escolhida por D, tem de ficar com ela.

7º) O jogador B escolhe uma das três fatias que ainda restam, tendo de ficar com uma das que aparou, caso tenha aparado alguma e se ainda estiver entre as três fatias à escolha.

8º) O jogador A escolhe, de entre as duas últimas fatias, uma não aparada, que foi cortada por si.

Nota: No final, sobrar uma fatia e, eventualmente algumas aparas. Para essas sobras, pode ser repetido o mesmo processo até que as sobras se tornem insignificantes e sejam sorteadas.

Check (Pág. 125)

Prova dos 9 (pág. 126) (Resolver na aula)

Quiz(pág. 127)- Partilhas no caso contínuo. (Tentar resolver)

Pensamento computacional-ExcelPág. 128.

Síntese: Pág. 130.

PARTILHA NO CASO DISCRETO(130)

MÉTODOS DE DIVISÃO JUSTA(130)

Ajuste na partilha. Licitações secretas. Marcadores

MÉTODOS DE DIVISÃO PROPORCIONAL(131).

Hondt; Sainte-Laguë; Hamilton; Lowndes; Jefferson; Adams; Webster; Huntington-Hill; Dean

PARTILHA NO CASO CONTÍNUO(134)

MÉTODOS NÃO LIVRES DE INVEJA(134)

Divisor-selecionador; Divisor único; Seleccionador único; Último a diminuir.

MÉTODOS LIVRES DE INVEJA(135)

Selfridge-Conway (3 jogadores); Brams-Taylor (4 jogadores).

Exercícios de aplicação (pág. 136)

Preparado? (pág. 143).

Teste interativo (pág. 143)

A pensar no Exame (pág. 146).

No fim de cada tópico da matéria, deve procurar **exercícios de exames** referente a esse tópico, como forma de testar, aperfeiçoar e consolidar os seus conhecimentos.

Procure em [exames por assuntos](https://www.pedronoia.net/ExPrAss.htm):

<https://www.pedronoia.net/ExPrAss.htm>