

Cap. 1- Teoria Matemática das Eleições. (pág. 8)

Introdução (pág. 9)

1.1 Sistemas de votação(pág. 10).

Eleitores- Todos os que podem votar.

Votantes- Os eleitores que votaram.

Abstenção- Os eleitores que não votaram.

Os **votos** podem ser: **nulos**, **brancos** ou **validamente expressos**.

Nota: deve haver sempre um critério previsto para desempatar, em caso de empate.

1.1.1- Sistema maioritário.(pág.10).

Método da maioria simples ou relativa-Vence o candidato com maior número de votos.

Exemplo 1(pág. 11)

Check(pág. 11)

Método da maioria absoluta-Vence a opção que com mais de 50% da totalidade dos votos.

Nota: Neste método, quando nenhum candidato obtém maioria absoluta, é costume realizar uma segunda volta apenas com os dois candidatos mais votados.

Exemplo 2(pág. 12)

Check (pág. 12).

Nota: Os resultados de uma votação podem ser diferentes se os sistemas de votação utilizados não forem os mesmos.

Maioria qualificada(pág. 14)- Seguimos os critérios exigidos. Exemplo: em alguns casos, pode corresponder a $\frac{2}{3}$ dos votos...

Exemplo 3(pág. 14)

Check (pág.14)

Prova do 9(pág. 15-16): 1, 2, 3.

Exercícios de aplicação(pág. 62) 1, 4, 6. (Tente resolver)

Exemplo 4(pág. 17).

Nota: Este exemplo ilustra o **paradoxo do voto** ou **paradoxo de Condorcet**. Nenhuma das opções pode obter maioria. (pág. 17)

1.1.2-Sistema preferencial.(pág.18)

Sistema preferencial

O votante não escolhe apenas um candidato, mas expressa a sua ordem de preferências relativamente a todos, ou a alguns dos candidatos.

Método da pluralidade (pág. 19)

Vence o candidato com maior número de primeiros lugares.

Exemplo 5(pág. 19)

Exemplo 6 (pág. 20)

Check(pág. 21).

Métodos de eliminação run-off (pág. 22)

Dentro deste método podemos distinguir duas variantes)

I. Eliminação run-off simples: (pág. 22)

1º) Faz-se a contagem do número de primeiras preferências de cada candidato. Se algum deles obtém maioria absoluta, este é o vencedor, caso contrário, vamos para o passo seguinte.

2º) São eliminados todos os candidatos à exceção dos dois que reúnem maior número de primeiras preferências e reorganizamos os esquemas, mantendo a ordem relativa dos restantes candidatos.

3º) Faz-se a contagem do número de primeiras preferências de cada candidato e vence o candidato que obtiver maior número de votos em primeiro lugar.

Exemplo 7(pág.22)

II. Eliminação run-off sequencial(ou método de Hare)(pág. 23):

1º) Faz-se a contagem do número de primeiras preferências de cada candidato. Se algum deles obtém maioria absoluta, este é o vencedor, caso contrário, vamos para o passo seguinte.

2º) Eliminamos o candidato com menor número de primeiras preferências e reorganizamos os esquemas. Em caso de empate, eliminamos os vários empatados com menor número de primeiras preferências.

3º) Fazemos novamente a contagem do número de primeiras preferências de cada candidato. Se algum deles obtém maioria absoluta, este é o vencedor, caso contrário, voltamos ao 2º passo e vamos repetindo o procedimento até encontrarmos o vencedor.

Exemplo 8 (pág. 24)

Check (pág. 25)

III. Método de Coombs(pág. 26)

1º) Faz-se a contagem do número de primeiras preferências de cada candidato. Se algum deles obtém maioria absoluta, este é o vencedor, caso contrário, vamos para o passo seguinte.

2º) Eliminamos o candidato com maior número de últimas preferências e reorganizamos os esquemas. Em caso de empate, eliminamos os vários empatados com maior número de últimas preferências.

3º) Fazemos novamente a contagem do número de primeiras preferências de cada candidato. Se algum deles obtém maioria absoluta, este é o vencedor, caso contrário, voltamos ao 2º passo e vamos repetindo o procedimento até encontrarmos o vencedor.

Exemplo 9(pág. 26)

Check (pág. 28)

Método de Borda(pág. 29)

1º) Consideremos N alternativas (candidatos). O último recebe 1 ponto, o penúltimo recebe 2 pontos, e assim sucessivamente. O segundo recebe $N - 1$ pontos e o primeiro recebe N pontos.

2º) A alternativa (candidato) vencedora será a que contabilizar o maior número de pontos.

Nota: Quando nada é dito em contrário, as pontuações são exatamente as que estão indicadas no 1º passo, mas por vezes podem ser definidas no próprio enunciado. Por exemplo, podemos definir 5 pontos para o primeiro, 3 para o segundo 2 para o terceiro e 1 para o quarto...

Exemplo 10(pág. 29).

Check (pág. 30-31) 1 e 2

Método de Condorcet(pág. 32).

1º) Confrontamos os candidatos dois a dois. Vence o confronto o candidato que obtiver maior números de votos à frente do outro.

2º) O candidato que vence mais confrontos diretos é o vencedor.

Exemplo 11(Pág. 32)

Um candidato diz-se **vencedor de Condorcet** se vence todos os outros candidatos em confronto direto, e diz-se **perdedor de Condorcet** se perder em confronto direto com todos os outros candidatos.

Notas:

- 1) Muitas vezes não há vencedor de Condorcet, isto é, nenhum vence todos os outros.
- 2) Por vezes surge a seguinte situação inesperada: “A vence B”, “B vence C”, mas “C vence A”. Esta situação é designada **Paradoxo de Condorcet**.

Exemplo 12(Pág. 33)

Check (pág. 33)

Método de confronto a pares sequencial com agenda(pág. 34)

Neste método, fazemos um primeiro confronto entre dois candidatos e o candidato vencido é eliminado. O vencedor defronta o candidato seguinte da lista. E assim sucessivamente. Quem ganhar o último confronto é o vencedor.

Exemplo 13(pág. 34)

Nota: Este método não é muito justo pois, se um candidato vencer quase todos os confrontos e perder o último, não será vencedor. O último candidato da lista será o vencedor, tendo apenas disputado um único confronto.

Assim, a sorte na sequência dos confrontos (ou agenda), terá muita influência na escolha do vencedor final.

Nota: Se, por acaso existir um vencedor de Condorcet, isto é, um candidato que vence os confrontos com todos os adversários, este será sempre vencedor, qualquer que seja a agenda utilizada.

Check (pág. 35).

Nota: (pág. 36-37) Perante métodos diferentes, os vencedores escolhidos podem ser diferentes. Por esta razão, antes de qualquer votação, deve ser explicado com muito rigor, qual o método a utilizar.

Check (pág. 37).

Prova dos 9 (pág. 38) Resolver na aula: 4.1, 4.2 e 5.1.

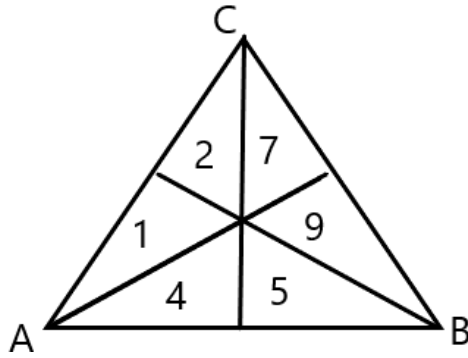
(Resolva os restantes para praticar)

Representação triangular.(pág. 41)

Quando temos listas de preferências com 3 possibilidades, em vez de as representarmos numa tabela, podemos representar na forma de um triângulo.

Exemplo(extra). Sejam os candidatos A, B e C.

Começamos por colocar o primeiro (A) em baixo à esquerda, o segundo (B) em baixo à direita e o terceiro (C) em cima.



Esta representação indica que:

“1” votante coloca em primeiro o A, pois é o que está mais próximo do 1, em segundo o C, pois é o segundo mais próximo do 1 e em terceiro o B, pois é o que está mais afastado do 1.

“4” votantes colocam em primeiro o A, pois é o que está mais próximo do 4, em segundo o B, pois é o segundo mais próximo do 4 e em terceiro o C, pois é o que está mais afastado do 4.

Do mesmo modo, 5 votantes escolhem a sequência (B; A; C)

(...) O mesmo raciocínio para os restantes.

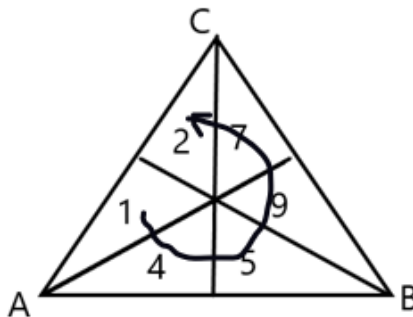
Resumindo numa tabela:

1	4	5	9	7	2
A	A	B	B	C	C
C	B	A	C	B	A
B	C	C	A	A	B

Se começarmos no primeiro número de A, podemos escrever o perfil (**p**) :

$$p=(1, 4, 5, 9, 7, 2)$$

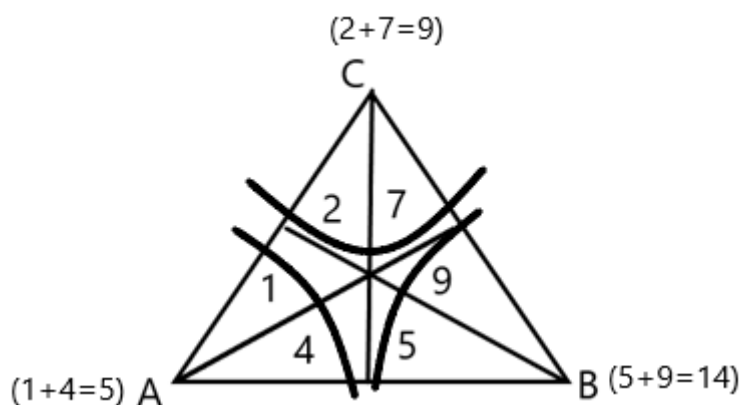
Começamos no primeiro do “A” e seguimos no sentido contrário aos ponteiros do relógio



Nota: A representação triangular pode facilitar alguns métodos eleitorais.

Pluralidade:

Os primeiros lugares de um candidato são os que estão junto do respetivo vértice.

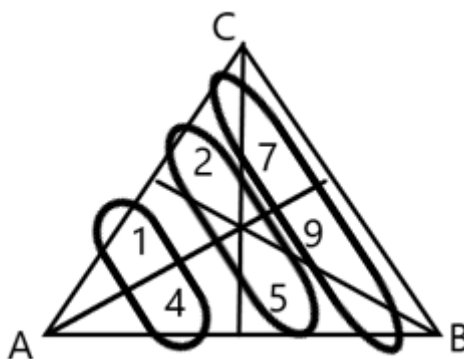


Primeiros lugares A: 5 B: 14 C: 9

Borda

Admitindo que o primeiro lugar corresponde a 3 pontos, o segundo a 2 e o terceiro a 1, podemos visualizar estas pontuações pela proximidade dos vértices.

Por exemplo, para A, teremos:



$$\text{Pontos do A: } (1+4) \times 3 + (2+5) \times 2 + (7+9) \times 1 = 45$$

Usamos o mesmo raciocínio para os restantes.

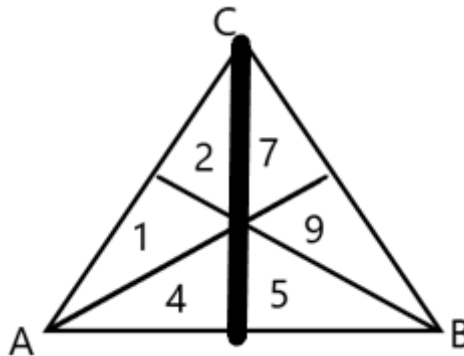
Sugestão: complete pontos do B: $(5+9) \times 3 + (\dots+\dots) \times 2 + (\dots+\dots) \times 1 = \dots$

pontos do C: $(\dots+\dots) \times 3 + (\dots+\dots) \times 2 + (\dots+\dots) \times 1 = \dots$

Condorcet.

Para os confrontos dois a dois, facilmente visualizamos os votos que estão mais favoráveis a cada um dos candidatos.

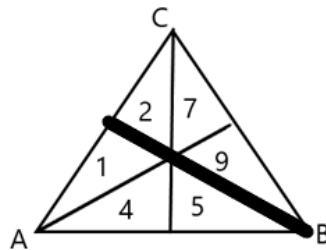
Por exemplo, para o confronto A-B, usamos a altura do triângulo que passa no ponto médio do segmento [AB]:



Favoráveis a A- os que estão do lado esquerdo do traço grosso: $4+1+2=7$

Favoráveis a B- Os que estão do lado direito: $5+9+7=21$ Ganha B

Para o confronto A-C, usamos:



A: $1+4+5=10$ C: $9+7+2=18$ Ganha C

Sugestão: Obtenha o confronto B-C. (resposta B:18 C:10)

Exemplo 14 (pág. 41).

Exemplo 15 (pág. 44).

Check (pág. 46).

Exercícios de aplicação (pág.64 a 67): 7, 9, 10, 13, 20 (Tente resolver)

Critérios de justiça e o teorema de Arrow(pág. 47)

Teorema de Arrow ou da impossibilidade

Em eleições com três ou mais candidatos, é impossível constituir um sistema de votação democrático que obedeça a condições básicas que se espera que sejam verificadas numa democracia.

1. Critério da maioria: se, numa eleição, um candidato obtém a maioria absoluta dos votos em primeira preferência, esse candidato deve ser o vencedor.

Exemplo 16(pág. 47).

Nota: Pelo exemplo 16, concluímos que o método de Borda pode não verificar o critério da maioria.

2. Critério de Condorcet: se, numa eleição, um candidato é o vencedor em confronto direto, a pares, com cada um dos outros candidatos (vencedor de Condorcet), então esse candidato deve ser o vencedor.

Exemplo 17(pág. 48).

Nota: Pelo exemplo 17, concluímos que o método da Pluralidade pode não verificar o critério de Condorcet.

3. Critério da monotonia: se, numa primeira eleição, um candidato é o vencedor e se, numa segunda eleição, as únicas alterações nas preferências são a favor desse candidato (sem alterar as ordens relativas dos restantes candidatos), então este deverá continuar a ser o vencedor.

Exemplo 18(pág. 49).

Nota: Pelo exemplo 18, concluímos que o método de run-off simples pode não verificar o critério da monotonia.

4. Critério da independência das alternativas irrelevantes: se, numa eleição, o candidato X vence o candidato Y, a inclusão ou eliminação de um ou mais candidatos (que não X nem Y) não pode conduzir à vitória de Y sobre X.

Exemplo 19(pág. 51).

Nota: Pelo exemplo 19, concluímos que o método run-off sequencial pode não verificar o critério da independência das alternativas irrelevantes.

Prova do 9(pág. 54): 1, 2, 3.

Exercícios de aplicação (pág. 67): 22, 23 (Tente resolver)

1.1.3-Sistema de aprovação (pág. 55).

1º) Os eleitores podem votar em tantos candidatos quantos queiram. Cada candidato recebe um voto (ou aprovação).

2º) Vence o candidato com mais votos(ou aprovações).

Nota: No sistema de aprovação, podemos escolher mais do que um candidato, o que é bom para quem está indeciso entre dois candidatos- vota em ambos.

Exemplo 20 (pág. 56).

Notas: No sistema de aprovação:

- 1) A adição ou a exclusão de candidatos/alternativas não altera a pontuação total dos outros candidatos/alternativas.
- 2) Se um candidato/alternativa é excluído, este é simplesmente retirado da lista.
- 3) Se novos candidatos/alternativas são adicionados à lista, o total de votos dos candidatos/alternativas iniciais permanece igual e os eleitores só têm de dar a sua aprovação, ou não, em relação aos que foram adicionados.
- 4) A principal desvantagem deste método é que, se eu aprovar dois candidatos, mas valorizar mais um do que o outro, não consigo distinguir na pontuação, pois dou um voto igual a ambos.

Prova do 9(pág. 57): 1, 2.

Exercícios de aplicação (pág. 68 e 69): 26, 27. (Tente resolver)

Nota: Para o " Pensamento computacional"- pág. 59 os apontamentos estão separados e a abordagem será feita à parte.

Síntese do capítulo: pág. 60-61.

Exercícios de aplicação (todo o capítulo): pág. 62 a 69:
1, 4, 6, 7, 9, 10, 13, 20, 22, 23, 26, 27.

Preparado?(página 70)- Ficha geral de conhecimentos com alguns exercícios para praticar. Pode resolver de forma autónoma para praticar.

A pensar no exame (página 146)
Resolver 1, 2, 3 e 4.

Questões de exame nacional:

<https://www.pedronoia.net/ExPrAss1Elei.htm>

Sistemas de votação: maioritário, pluralidade, run-off; Borda; Condorcet