

Tema 3-Modelos Matemáticos.

Capítulo- Modelos financeiros (pág.180)

1.1 Introdução(180)

1.2 Problemas matemáticos da área financeira(180).

1.2.1 Impostos(180).

Imposto é uma prestação obrigatória, com vista à cobertura das despesas públicas.

Ex: IRS/IRC, IMI e IMT, IVA, Imposto de Selo.

Impostos sobre a despesa; capital; rendimento.

IVA

IVA- é um imposto indireto e sobre a despesa (181).

Portugal continental- 6%. 13% e 23%


Açores-5%, 10% e 18%

Madeira-5%, 12% e 22%

Exemplo 1(182)

Exemplo 2 (182)

 **Atividade 1(183)**

 **Exercício 1(220)** (Taxa máxima nos Açores: 18%)

 **Atividade 3 (183)**

IMT

IMT (183).(Imposto municipal sobre transmissões)

Aplica-se na transmissão de bens imóveis.

Calcula-se a partir das tabelas oficiais.

Tabelas 2014: (pág. 184)

Exemplo 3 (185)-Portugal continental.

Sugestão: utilizar a parcela a abater.

Exemplo 3-Outro processo, utilizando a parcela a abater.

$$98740 \times 0.02 = 1974.8 \quad 1974.8 - 1848.14 = 126.66$$

Exemplo 4 (185) (Sugestão: utilizar a parcela a abater)

Exemplo 5(186)

 **Exercício 2**(220).

 **Exercício 3**(220)

 **Atividade 6**(186)

 **Atividade 7**(186)

IRS(187).

O IRS (Imposto sobre o Rendimento das Pessoas Singulares) é um **imposto direto e sobre o rendimento**, com características progressivas até determinado montante, passando depois a tomar características proporcionais.

Tabela 2014:

| Rendimento coletável (€) (*) | Continente | | Madeira | | Açores | |
|------------------------------|------------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|
| | Taxas (%) | Parcelas a abater | Taxas (%) | Parcelas a abater | Taxas (%) | Parcelas a abater |
| Até 7000 | 14,5 | 0 | 14,5 | 0 | 11,6 | 0 |
| De mais de 7000 até 20 000 | 28,5 | 980 | 28,5 | 980 | 22,8 | 784 |
| De mais de 20 000 até 40 000 | 37,0 | 2680 | 37,0 | 2680 | 29,6 | 2144 |
| De mais de 40 000 até 80 000 | 45,0 | 5880 | 45,0 | 5880 | 36,0 | 4704 |
| Superior a 80 000 | 48,0 | 8280 | 48,0 | 8280 | 38,4 | 6624 |

Existem ainda taxas adicionais para o último escalão — os trabalhadores com rendimentos:

- ▶ superiores a 80 000 € anuais são obrigados a pagar uma taxa adicional de solidariedade no valor de 2,5%;
- ▶ superiores a 250 000 € anuais são alvo de uma taxa adicional de solidariedade de 5%.

Rendimento coletável
Valor sobre o qual incide
a taxa de IRS.

*) Depois de dividido pelo
coeficiente conjugal no caso
de contribuintes casados,
unidos de facto ou separados
de facto que façam
declaração conjunta.

Exemplo 6(187) (Portugal continental).

Exemplo 7(188)

Exemplo 8(188)

Exemplo 9(189)

 **Exercício 4**(220)

 **Exercício 5**(220)

 **Exercício 6**(220)

1.2.2 Inflação e custo de vida(190).

Inflação representa o crescimento contínuo e generalizado dos preços dos bens.

Exemplo: (extra). Um pacote de leite custava 1 euro. Tenho 6 euros e consigo comprar 6 pacotes de leite. Se o leite passar a custar 1.5 euros, com os mesmo 6 euros apenas consigo comprar 4 pacotes...(mas aplicado a um cabaz...)..

Comentários pág. 190

Oposto da inflação é a **deflação**.

Exemplo: extra. Um pacote de leite custava 1.5 euros. Tenho 6 euros e consigo comprar 4 pacotes de leite. Se o leite passar a custar 1 euro, com os mesmo 6 euros já consigo comprar 6 pacotes...(mas aplicado a um cabaz...)..

(191) Índice de Preços no Consumidor (IPC).

Este índice toma em consideração um «cabaz de bens de consumo corrente» fixo (bens alimentares, habitação, vestuário e cuidados médicos) e mede o seu custo.

(Pág. 191)

Taxa de inflação no período compreendido entre os anos A e B:

$$\frac{\text{IPC}_{\text{ano B}} - \text{IPC}_{\text{ano A}}}{\text{IPC}_{\text{ano A}}} \times 100$$

Nota: Para uma melhor comparação das taxas de inflação entre os países da União Europeia (UE) utiliza-se o **Índice Harmonizado de Preços** no Consumidor (**IHPC**).

Exemplo 10 (191)

 **Atividade 12**(191)

 **Exercício 7**(220).

1.3 Atividade bancária(192).

1.3.1 Depósitos e juros(192).

Alguns tipos de contas:...

Sobre o dinheiro depositado irá incidir uma **taxa de juro**. (193)

Capitalização de juros

Processo pelo qual se adiciona, ao capital, os juros produzidos em consequência da aplicação desse capital. Este processo pode ocorrer em dois regimes:

Juro simples/ Juro composto. (193)

Juro simples: o juro produzido pelo capital, em cada período de tempo, é depositado na conta à ordem;

Juro:

- **juro simples:** o juro produzido pelo capital, em cada período de tempo, é depositado na conta à ordem;

- **juro composto:** o juro produzido em cada período de tempo é adicionado ao capital e, conseqüentemente, a próxima taxa de juro incide sobre o montante acumulado.

Juro Simples.

(EXTRA)

Cálculo do juro (ao fim de n anos).

$$J_n = C_0 \times T_x \times n$$

Capital ao fim de n anos:

$$C_n = C_0 + C_0 \times T_x \times n$$

$$[\text{ou } C_n = C_0 \times (1 + T_x \times n)]$$

onde **n** é o número de anos, **C₀** é o capital inicial e **T_x** é a taxa de juro na forma decimal, isto é,

$$T_x = (i/100),$$

onde **i** é a taxa em percentagem.

Exemplo(EXTRA)

Suponhamos que eu deposito 5000 euros em regime de juro simples a uma taxa de 6% ao ano.

- 1) Quanto ganharei de juro ao fim de 1 ano?
- 2) Quanto ganharei de juro ao fim de 5 anos?
- 3) Qual será o meu capital ao fim de 8 anos?

Resolução

1) $J_1 = 5000 \times 0.06 = 300$ Ganharei 300 € de juro.

2) $J_5 = 5000 \times 0.06 \times 5 = 1500$ Ganharei 1500 € de juro.

3) $C_8 = 5000 + 5000 \times 0.06 \times 8 = 7400$ ao fim de 8 anos o meu capital será 7400€.

$$[\text{Ou, diretamente } C_8 = 5000 \times (1 + 0.06 \times 8) = 7400]$$

Nota:

Também podemos utilizar uma fórmula mais geral que permite o cálculo do juro em n dias. Admitimos que um ano tem 365 dias.

➔ **Fórmula geral para o cálculo do juro a receber por determinado capital depositado:**

$$J = \frac{C \cdot n \cdot i}{36\,500}$$

em que:

- **J** é o juro a receber;
- **C** é o capital depositado;
- **n** é o período de tempo (em dias);
- **i** é a taxa de juro anual (em percentagem).

Exemplo 1 (193) (Tempo em anos-Resolução por 2 processos)

Resolução(1º processo)

$C_0=2000$ $T_x=0.1$ Juro simples.

1.1 Quanto receberá o sr. Dias de juros ao fim de um ano?

Resolução(1º processo)

$$J_1=2000 \times 0.1=200\text{€}$$

2º processo: usamos a fórmula da página 192, onde $n=365$ dias e $i=10\%$.

1.1 Ao fim de um ano (365 dias), o sr. Dias terá de juros:

$$J = \frac{2000 \times 365 \times 10}{36\,500} = 200$$

Receberá 200 €.

1.2 Qual será o capital do sr. Dias na sua conta a prazo no final de um ano?

Resolução:

1.2 Como o regime de capitalização de juros escolhido foi o regime simples, o juro acumulará na conta à ordem, pelo que a sua conta a prazo permanece com o capital inalterado, isto é, com 2000 €.

1.3 Ao fim de um ano, qual será o capital na sua conta à ordem, sabendo que, à data do vencimento dos juros da sua conta, o seu saldo era de 770 €?

Resolução:

1.3 A sua conta à ordem terá, em euros:

$$770 + 200 = 970$$

1.4 O sr. Dias resolve manter este depósito por mais três anos. Qual será o valor total de juros que receberá ao fim de três anos?

Resolução:

1.4 Como o capital sobre o qual é aplicada a taxa de juro permanece inalterado, o juro que o sr. Dias recebe, por ano (desde que a taxa de juro se mantenha), é sempre o mesmo, isto é, 200 €. Ao fim de três anos terá recebido de juros, em euros:

$$200 \times 3 = 600$$

Exercício 9(220)

Exemplo 2(193)-Com cálculos feitos manualmente,

Resolução (manualmente...)

Três anos...

Hipótese 1

Podemos usar diretamente a fórmula:

$$C_n = C_0 + C_0 \times T_x \times n \quad [\text{ou } C_n = C_0 \times (1 + T_x \times n)]$$

$$C_3 = 2000 + 2000 \times 0.028 \times 3 = 2168 \quad [\text{ou simplesmente } C_3 = 2000 \times (1 + 0.028 \times 3 = 2168)]$$

Nota: Como o juro apenas é acrescentado ao capital no final dos 3 anos, esta modalidade utilizada na hipótese 1 é classificada de **juro simples**.

Hipótese 2:

$$C_1 = 2000 + 2000 \times 0.0275 \times 1 = 2055 \quad (\text{ou } C_1 = 2000 \times 1.0275 = 2055)$$

$$C_2 = 2055 + 2055 \times 0.0275 \times 1 = 2111.525 \quad (\text{ou } C_2 = 2055 \times 1.0275 = 2111.525)$$

$$C_3 = 2111.525 + 2111.525 \times 0.0275 = 2169.579097 \approx 2169.58$$

$$(\text{ou } C_3 = 2111.525 \times 1.0275 = 2169.579097 \approx 2169.58)$$

Para simplificar, podíamos fazer diretamente:

$$C_3 = 2000 \times 1.0275^3 \approx 2169.58$$

Nota: Como no final de cada ano, o juro é acrescentado ao capital, esta modalidade utilizada na hipótese 2 é classificada de **juro composto**.

Hipótese 3:

São 3 anos, logo 6 semestres. O juro semestral é de 1.35%

$$C1=2000+2000\times 0.0135=2027$$

$$C2=2027+2027\times 0.0135=2054.3645$$

$$C3=2054.3645+2054.3645\times 0.0135=2082.098421$$

$$C4=2082.098421+2082.098421\times 0.0135=2110.206749$$

$$C5=2110.206749+2110.206749\times 0.0135=2138.694541$$

$$C6=2138.694541+2138.694541\times 0.0135=2167.566917\approx 2167.57$$

Para simplificar, podíamos fazer diretamente:

$$C3=2000\times 1.0135^6\approx 2167.57$$

Nota: Como no final de cada semestre, o juro é acrescentado ao capital, esta modalidade utilizada na hipótese 3 é classificada de **juro composto**.

R: A melhor opção é a hipótese 2, pois é a mais rentável.

Exemplo 3(194).Cálculos de juros em dias.

Nota: Recordemos que, no juro composto, o juro produzido em cada período de tempo é adicionado ao capital e, conseqüentemente, a próxima taxa de juro incide sobre o montante acumulado.

Juro Composto. (EXTRA)

Capital ao fim de n anos:

$$C_n=C_0\times(1+tx)^n$$

Cálculo do **juro** (ao fim de n anos).

$$J_n=C_n-C_0.$$

onde **n** é o número de anos, **C₀** é o capital inicial e **Tx** é a taxa de juro na forma decimal, isto é, $Tx=(i/100)$, onde **i** é a taxa em percentagem.

Nota: outra forma de representar o capital obtido no caso do juro composto(pág. 196):



$$C_N = C_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^N$$

em que:

- N é o número de anos;
- C_0 é o capital inicial;
- C_N é o capital ao fim de N anos;
- i é a taxa de juro anual (em percentagem).

Exemplo (EXTRA)

Suponhamos que eu deposito 5000 euros em regime de juro composto a uma taxa de 6% ao ano. Qual será o meu capital ao fim de 8 anos? E qual é o valor do juro ganho?

Resolução:

$$C_8 = 5000 \times (1 + 0.06)^8 = 5000 \times (1.06)^8 \approx 7969.24$$

Ao fim de 8 anos o capital é de 7969.24

O juro ganho é:

$$7969.24 - 5000 = 2969.24 \text{ euros.}$$

Atividade 1(195).

~~Exemplo 4(195)~~

Exemplo 5(197)-Juro composto-resolver.

Resolução:

Aplicação A

$$43500 \times 1.07^4 \approx 57019.63 \text{ €}$$

Aplicação B

$$42000 \times 1.07^5 \approx 58907.17 \text{ €}$$

A aplicação B é mais vantajosa.

Exemplo 6(197)

Atividade 2(198).

Atividade 3(198)

Exercício 10(pág. 220).(Tentativa e erro ou tabela).

Calculadora gráfica-Tabela

2º processo: Calculadora gráfica-Tabela.

Colocar na calculadora gráfica a função $Y_1= 1020000 \times 1.1^x$ e pedir uma tabela com valores para x a varia entre 0 e 20. Colocar o cursor sobre a tabela para procurar o número.

Casio:

Menu/ tabela (ou table)/

Se houver alguma função escrita, apague (Delete).

Introduzir $Y_1= 1020000 \times 1.1^x$. (EXE).

Nota: o x é com a tecla: $[X, \theta, T]$ e o “elevado a” é com $[\wedge]$.

Use o [SET] para definir: Start:1 | End: 10 | e Step: 1. (EXE).

[TABLE]

Coloque o cursor sobre os valores da tabela e para ler os números ...

Texas:

Tecla [Y=]

Se houver alguma função escrita, apague [CLEAR].

Introduzir $Y_1= 1020000 \times 1.1^x$. (ENTER).

Nota: o x é com a tecla: $[X, \theta, T, n]$ e o “elevado a” é com $[\wedge]$.

Use o [TBLSET](por cima de Window) para definir: TblStart:1 Δ TBL=1 (ENTER).

[TABLE] (por cima de [GRAPH])

Coloque o cursor sobre os valores da tabela e para ler os números ...

TI-Nspire:

Utilizar os materiais sobre tabelas como exemplo 5 pág. 197:

<https://pedronoia.net/nspire/10li197ex5.pdf>

ou procurar nas instruções.

NumWorks:


<https://www.numworks.com/pt/professores/tutoriais/>

funções/

<https://www.numworks.com/pt/professores/tutoriais/funcoes/>

“obter a tabela de valores de uma função”

<https://youtu.be/UofH2hQ0uik?si=xuR-vDrFVa555-NF>

 **Exercício 12** (pág. 221).

Conta poupança-habitação.(199).

Exemplo 7(199).

Nota: Os juros que se recebe numa conta a prazo estão sujeitos a imposto. Atualmente são taxados a 28%.

1.3.2 Empréstimos(200)

Nota: Quando um banco nos empresta dinheiro somos obrigados a devolvê-lo numa ou em várias contraprestações, acrescido de um juro.

Crédito individual(200).

É um crédito a curto ou médio prazo, em que, na generalidade, o prazo de pagamento não ultrapassa os cinco anos.

Exemplo 8(201).

Crédito para habitação(201).

É um crédito a longo prazo e destina-se à compra de habitação ou à realização de obras.

Exemplo 9(202).

 **Exercício 13**(221).

Empréstimo com carência.

Durante um determinado período de tempo paga apenas os juros.

Exemplo 10(202).

 **Exercício 14** (221).

Cartão de crédito (203).

Modalidades:

(A) 15% (B) 30% (C) 50% (D) 100%

Exemplo 11(204).

Nota: recordemos a fórmula do juro “ao dia”, indicada na página 192:

$$J = \frac{C \cdot n \cdot i}{36\ 500}$$

Que será muito útil nos cálculos que se seguem:

Exemplo 12(204).

Exemplo 13(205).

 **Exercício 15** (221)

1.3.3 Fundos de investimento(205)

(ex: “Ações da bolsa”).

Fundos de investimento- O rendimento não é fixo.

Cada investidor compra um certo número de unidade de participação (**UP**).

Ao longo do tempo, o valor das UP vão variando. Podem aumentar ou diminuir.

Cotação da UP.

(pág.206)

$$\text{Cotação da UP} = \frac{\text{Valor total da carteira}}{\text{Número de UP em circulação}}$$

Exemplo 14(206).

O valor da subscrição. (206).

Valor da subscrição = Número de UP × Cotação da UP

Nota: Existem também taxas a pagar ou comissões a pagar:

$$\begin{array}{c} \text{Comissão de subscrição} \\ = \\ \text{Valor da subscrição} \\ \times \\ \text{Taxa de comissão} \\ \text{de subscrição} \end{array}$$

Normalmente, também existem as **comissões de resgate**, que são taxas que pagamos quando queremos levantar o nosso dinheiro.

Nota: Todos estes cálculos estão apresentados de forma simplista, intervêm muitos outros fatores que não abordaremos.

Algumas designações...(pág. 207)

Exemplo 15(207)

 **Atividade 6**(208).

 **Exercício 16**(221). (~~16.3.3~~)

1.3.4 Alugar ou comprar?(208).

Aluguer ALD/ Leasing.

 **Atividade 7**(pág. 209)

Compra(pág. 210)

1.4 Tarifários(211).

Exemplo 1(211).

 **Exercício 17**(221)

Exemplo 2(213).

 **Exercício 18**(221).

Atividade 2(214)

Exemplo 3(215)

NOTA: Aos valores indicados ao lado acresce o IVA, quando devido, à taxa legal em vigor.

NOTA: Ao valor final (14,89€) são acrescentadas tarifas relativas a águas residuais e gestão de resíduos.