

Cap. 2- Teoria da partilha equilibrada. (pág. 34)

2.1 problemas de partilha.(pág. 34)

 **Atividade 1**(pág. 34)

 **Atividade 2**(pág. 35)

 **Atividade 3**(pág. 35)

 **Atividade 4**(pág. 35)

 **Atividade 5**(pág. 36)

2.2 Métodos de partilha (pág. 36)

Partilha é o processo pelo qual se repartem de igual modo objetos, indivisíveis ou não, por sujeitos com direito a partes equivalentes.

- **Caso discreto:** o conjunto C é formado por objetos indivisíveis.
- **Caso contínuo:** o conjunto C é formado por objetos que podem ser divididos de infinitas maneiras.
- **Caso misto.**

2.3 Partilhas no caso discreto.(pág. 36)

- **Divisão justa**
- **Divisão proporcional**

2.3.1-Métodos de divisão justa.(pág. 37)

- **Ajuste na partilha**
- **Licitação secreta.**
- **Marcadores.**

Método de ajuste na partilha(pág.37)

Nota: Este método pode aplicar-se à divisão de um certo número finito de itens entre dois intervenientes da forma mais justa possível.

ALGORITMO

1º) Definir claramente os itens a dividir.

2º) Cada um dos intervenientes tem 100 pontos para distribuir secretamente pelos itens.

3º) Cada item é atribuído (temporariamente) ao interveniente que mais o valorizou (em caso de empate é atribuído ao que tiver menos pontos no final).

4º) Faz-se um balanço:

- se ambos tiverem o mesmo número de pontos, a partilha está feita;
- se não tiverem o mesmo número de pontos, o que tiver mais transfere itens (ou parte) para o outro até igualar o número de pontos.

5º) A transferência — calculam-se os quocientes referentes a cada um dos itens atribuídos ao interveniente que ficou com mais pontos:

Número de pontos atribuídos ao item pelo vencedor inicial

Número de pontos atribuídos ao item pelo perdedor inicial

e colocam-se por ordem decrescente.

6º) Faz-se a transferência do item a que corresponde o menor quociente e contabilizam-se novamente os pontos.

7º) Se a transferência total de um item der vantagem à parte que o recebe, terá de se efetuar a transferência apenas de uma percentagem do item, de forma a igualar o número de pontos.

Exemplo 1(pág. 38)

Propriedades importantes: **Eficiente, Equitativo, Livre de inveja.**(pág. 39)


Exemplo 2(pág. 40)

Exemplo 3(pág. 41)

 **Exercício 1**(pág. 74)

 **Atividade 1**(pág. 42)

Nota muito importante: por vezes, nos exames nacionais, os passos do método do ajuste na partilha surgem ligeiramente diferentes. Nesse caso, é necessário adaptar-se à nova descrição antes de resolver o exercício, e resolver de acordo com a nova descrição.

 **Exercício global 11** (pág. 81) **Nota:** *Pode resolver este exercício para praticar. Mais à frente, depois do método dos marcadores, veremos este exercício como revisão.*

Licitações Secretas (pág.43)

Nota: Este método pode aplicar-se à divisão de um certo número finito de itens entre **dois ou mais** intervenientes da forma mais justa possível.

ALGORITMO

1º) Cada um dos intervenientes atribui, secretamente, um valor em dinheiro a cada um dos itens a dividir. A parte que cada um dos intervenientes considera ser justa receber — **valor justo** — será igual ao quociente entre o valor total que atribuiu aos itens e o número de intervenientes.

2º) Cada um dos itens é **atribuído** ao interveniente que mais o valorizou. Se o valor total dos itens recebidos por um interveniente ultrapassa o que considerou como valor justo a receber, terá de pagar aos outros a diferença. Se, pelo contrário, o valor dos itens for inferior ao valor justo, serão os outros intervenientes a pagar-lhe a diferença.

3º) O dinheiro excedente — montante disponível — é dividido igualmente por todos os intervenientes.


Nota: Neste método estamos a admitir que os intervenientes têm direito a partes iguais. Por vezes não têm todos direito a partes iguais. Posteriormente veremos um exemplo...

Exemplo 4(pág. 43)

Sugestão: pode analisar os exemplos 5 e 6, ou ir diretamente para o exercício 2.

 **Exercício 2**(pág 74)

 **Atividade 2**(pág. 48)

 **Exercício global 9** (pág. 80) **Nota:** *Pode resolver este exercício para praticar. Mais à frente, depois do método dos marcadores, veremos este exercício como revisão.*

Nota importante: Se os intervenientes não tiverem todos direito a partes iguais, a parte justa e as sobras serão atribuídas de acordo com a respetiva proporção.

✎ Exemplo(extra):Partes diferentes na herança.

A Rita e o Paulo são os únicos herdeiros de uma casa e um barco e vão efetuar a divisão dos bens pelo método da Licitação Secreta.

Cada um atribui valores(em euros) aos bens conforme a tabela seguinte:

	Rita	Paulo
Casa	225 000	270 000
Barco	40 000	35 000

Admita que a Rita tem direito a 3 quintos da herança e o Paulo tem direito ao restante.

Proceda à distribuição, indicando todos os cálculos.

****Sugestão(esboço da resolução):**

Repare que $1-(3/5)=2/5$

TOTAL	265000	305000	
--------------	---------------	---------------	--

	RITA	Paulo
J:	$265000 \times \frac{3}{5}$ = 159000€	$305000 \times \frac{2}{5}$ = 122000
B:	Barco	CASA
J-B	119000	- 148000

$29000 \times \frac{3}{5} = 17400$ (RITA)

$29000 \times \frac{2}{5} = 11600$ (Paulo)

RITA: BARCO e 136400€
[119000 + 17400]

PAULO: CASA e PAGA: 136400€
[148000 - 11600]

PAGAMENTO $148000 - 119000 =$
- 29000 (sobra)

✎ Exercício global 10(pág. 81) **Nota:** Pode resolver este exercício para praticar. Mais à frente, depois do método dos marcadores, veremos este exercício como revisão.

Nota muito importante: por vezes, nos exames nacionais, os passos do método da Licitação Secreta surgem ligeiramente diferentes. Nesse caso, é necessário adaptar-se à nova descrição antes de resolver o exercício, e resolver de acordo com a nova descrição.

Método dos marcadores.

Nota: O número de itens deve exceder substancialmente o número de interessados.

ALGORITMO

1º) Alinham-se os objetos a dividir (pode atribuir-se um número a cada um, da esquerda para a direita, para melhor identificação).

2º) Com o auxílio de marcadores, cada interveniente divide (secretamente) a fila de objetos num número de segmentos igual ao número de interessados, considerando que todos os segmentos definidos têm associados valores equivalentes.

3º) Da esquerda para a direita, procuram-se os primeiros marcadores de cada interveniente. O dono do primeiro marcador a aparecer fica com os objetos à esquerda (o seu primeiro segmento) e retiram-se todos os seus restantes marcadores.

4º) Observamos de novo a fila de objetos, procurando agora os segundos marcadores de cada interveniente. O primeiro a aparecer determina que o segmento entre o primeiro e o segundo marcador desse interveniente lhe seja atribuído.

5º) Repete-se o processo até que todos tenham a parte que consideram justa.

6º) As sobras podem dividir-se por sorteio ou, se ainda forem mais do que os intervenientes, aplica-se de novo o método.

Exemplo 7(pág.49)

Exemplo 8(pág. 51)



 **Exercício 3**(pág. 74)



 **Atividade 3**(pág. 52)



Revisão Importante:

Métodos do ajuste na partilha e da Licitação secreta.

Exercícios globais (pág. 80 e 81): 9, 10, 11

  **Exercício Global 9** (pág. 80)- Licitações secretas com partes iguais.

  **Exercício global 10** (pág. 81) Licitações secretas com partes diferentes.

  **Exercício Global 11** (pág. 81) -Ajuste na partilha.

2.3.2 Métodos de divisão proporcional(53).

(leitura-introdução).

Método de Hondt (53)

Nota: Este é o método utilizado nas eleições oficiais portuguesas para assembleias da república, regional, municipal, freguesia,...

ALGORITMO

1º) Apura-se em separado o número de votos recebidos por cada lista no respetivo círculo eleitoral.

2º) O número de votos apurados por cada lista é dividido sucessivamente por 1, 2, 3, 4, 5, ... até ao número de mandatos a atribuir (se necessário), sendo os quocientes ordenados por ordem decrescente da sua grandeza, numa sequência de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao respetivo círculo eleitoral.

3º) Os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da sequência estabelecida no passo anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na sequência.

4º) No caso de restar apenas um mandato para atribuir e de os termos seguintes da sequência serem iguais e pertencerem a listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Exemplo 9 (pág. 54)

Sugestão: Calculadora gráfica.

Podemos usar a **calculadora gráfica** para facilitar a construção da tabela.

Pág. 226(casio) e 229(Texas) do livro. A ideia é usar secção de Estatística/ Editar.

A lista 1 (L1) é será os números 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

A lista 2 será $10000/L1$

Numworks: Estatística. V1: 1 2 3 ...9. Enter.

V2 (enter) “preencher com uma fórmula” $1000/V1$

Método Saint Lague.(55)

O método de Sainte-Laguë tem uma aplicação semelhante à do método de Hondt, mas em que a série de divisores é 1, 3, 5, 7, etc.

Exemplo 10 (pág. 55)

 **Atividade 4**(pág. 58)

Nota: vejamos alguns conceitos para os métodos que se seguem (pág. 58)

Divisor padrão (DP): é o quociente entre o número de elementos da população (sujeitos) e o número de lugares (objetos) a atribuir.

$$DP = \frac{\text{População}}{\text{Número de lugares}}$$

Quota padrão (QP): é o número de lugares a que cada estado teria direito se pudesse receber um número não inteiro de lugares.

$$QP = \frac{\text{População do estado}}{DP}$$

Uma quota pode sofrer dois tipos de **arredondamento**:

Quota inferior (QI), se o arredondamento for feito ao maior número inteiro contido na quota padrão (arredondar por defeito);

Quota superior (QS), se o arredondamento for feito adicionando o valor 1 ao maior número inteiro contido na quota padrão (arredondar por excesso).

Exemplo:

$$QI (2,65) = 2 \quad QS (2,65) = 3$$

Regra da quota: (pág. 58)

Diz-se que um método de partilha obedece à regra da quota quando atribui sempre a cada estado um número de lugares igual à quota superior ou à quota inferior.

Exemplo: (extra)

Partidos A, B e C para atribuir 8 mandatos.

A-450 votos B-300 C-250 Total=450+300+250=1000

Partidos	A	B	C
Votos:	450	300	250
DP= 1000/8 =125			
Quota padrão(Q.P)	450/125 =3.6	300/125 =2.4	250/125 =2
Quota inferior(QI)	3	2	2

Quota superior(QS)	4	3	3
--------------------	---	---	---

Método de Hamilton (pág. 59).

ALGORITMO

- 1º) Calcular o divisor padrão(DP).
- 2º) Calcular a quota padrão(QP) de cada estado.
- 3º) Atribuir a cada estado a sua quota inferior(QI), que é o número de lugares a que cada um tem direito.
- 4º) Se sobraem lugares, estes devem atribuir-se, um a um, aos estados por ordem decrescente da parte decimal da sua quota padrão.

Exemplo 12(pág. 59).(Sugestão: complete o exemplo.)

 **Atividade 5**(pág. 59)

 **Atividade 6** (pág. 60)

Nota: Como certamente verificou (At6-pág.60), a criação de um novo lugar fez com que um dos colégios perdesse um professor. **Paradoxo.**

Paradoxo de Alabama (pág. 60)

Um aumento no número total de lugares a distribuir pode provocar a perda de um lugar a um estado.

Outros paradoxos: Paradoxo da população e Paradoxo dos novos estados (pág. 60.)

Sugestão: pode praticar resolvendo os exercícios(pág. 75): 5 a 9


Método de Jefferson (pág. 60)

ALGORITMO

- 1º) Calcular o divisor padrão(DP).
- 2º) Calcular a quota padrão de cada estado(QP).
- 3º) Atribuir a cada estado a sua quota inferior(QI).

4º) Se a soma das quotas inferiores for igual ao número de lugares, a partilha está feita; caso contrário, é necessário encontrar por tentativas um número— o divisor modificado (DM) — para substituir o divisor padrão, de modo que, quando procedermos ao arredondamento das quotas modificadas (QM), a soma de todas as quotas, arredondadas por defeito(QMI), seja exatamente o número de lugares a atribuir.

Exemplo 13(pág. 60)

 **Exercício 11.2** (pág. 76)

Nota importante: o divisor modificado (DM) é obtido por tentativa e erro. Se o total de lugares é menor que 15, fazemos um DM menor. Se desse maior que 15, seria um DM maior.

Sugestão: Calculadora gráfica.

Podemos usar a **calculadora gráfica** para facilitar a construção da tabela.

A ideia é usar secção de estatística/ Editar

$L1=(13, 27, 32, 8)$ e $L2=L1/4.55$.

(Obter L2: Casio-SHIFT 1 ou OPTN/LIST. Texas 2nd 1.)

Também pode fazer L3 como a parte inteira de L2.

$L3=Int(L2)$.

Casio-Optn/F2/Numeric/Int.

Texas-Math/Num/Int.

Sugestão Numworks: V1: 13 27 32 8

V2 “preencher com uma fórmula” $V2=V1/4.55$

Aqui poderá experimentar vários valores para DM.

Para mais informações sobre a calculadora gráfica, consulte as páginas 226(Casio) ou 229(Texas).

 **Atividade 7** (pág. 61)

Método de Adams (pág. 62)

Este método é idêntico ao método de Jefferson, mas utiliza quotas superiores (em vez de quotas inferiores).

Exemplo 14 (pág. 62)

 **Exercício 12**(pág. 76)

 **Atividade 8**(pág. 63)

Método de Webster (pág. 63)

Parecido aos dois anteriores, mas com o arredondamento habitual...

Algoritmo:

1º) Calcular o **D.P.**

2º) Calcular a **Q.P.** para cada Estado.

3º) - Atribuir a cada Estado: (o arredondamento habitual)

- a sua **Q.I.**, se a parte decimal da **Q.P.** for menor que 0,5.
- a sua **Q.S.**, se a parte decimal da **Q.P.** for maior que 0,5.

4º)- Se ainda houver lugares a atribuir (ou a mais) é preciso encontrar o **D.M.** e arredondar as **Q.M.** da forma acima descrita.

Exemplo 15(pág. 64)

 **Exercício 13**(pág. 76)

 **Atividade 9**(pág. 64)

Método de Huntington-Hill (pág. 65)

Nota: **média geométrica (M_G)** de dois números “a” e “b”.

$$M_G(a,b)=\sqrt{a \times b}$$

$$\text{Exemplo: } M_G(2, 8)=\sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

Algoritmo:

1º) Calcular o **D.P.**

2º) Calcular a **Q.P.** para cada Estado

3º)

- a sua **Q.I.**, se $Q.P. < \sqrt{Q.I. \times Q.S}$ (média geométrica).
- a sua **Q.S.**, se $Q.P. > \sqrt{Q.I. \times Q.S}$ (média geométrica).

4º) Se ainda houver lugares a atribuir

(ou a mais) é preciso encontrar


o **D.M.** e arredondar as **Q.M.**

da forma acima descrita,

comparando agora as **Q.M.** com $\sqrt{Q.M.I. \times Q.M.S}$

Exemplo 16 (pág. 65) (Resolver apresentando todos os passos...)

 **Exercício 14** (pág. 77)

 **Atividade 10** (pág. 66)

Nota: É impossível encontrar um método de partilha sem falhas: ou beneficia as listas mais votadas, ou produz algum paradoxo, ou viola a regra da quota.

Revisão Importante:

Métodos de divisão proporcional: Hondt, Saint Lague, Hamilton, Jefferson, Adams, Webster, Huntington-Hill.

 **Exercícios de revisão Extra**-Distribuição de mandatos.

Para uma assembleia com 8 deputados obtiveram-se os seguintes resultados numa votação: A: 1500 B: 495 C: 290 D: 245.

Proceda à distribuição dos mandatos pelos partidos A, B, C e D usando os métodos:

a) Hondt b) Saint Lague. c) Hamilton d) Jefferson. e) Adams f) Webster.

g) Huntington Hill.

****Sugestão(esboço da resolução):**

8 Mandatos.

a)

	A	B	C	D
	1500	495	290	245
:2	750	247,5	145	122,5
:3	500	165	96,67	81,67
:4	375	123,75	72,5	61,25
:5	300	99	58	49
:6	250	82,5	48,33	40,83
:7	214,29	70,71	41,43	35
:8	187,5	61,88	36,25	30,63
	6	1	1	0

b)

	A	B	C	D
:1	1500	495	290	245
:3	500	165	96,67	81,67
:5	300	99	58	49
:7	214,29	70,71	41,43	35
:9	166,67	55	32,22	27,22
:11	136,36	45	26,36	22,27
:13	115,38	38,08	22,31	18,85
:15	100	33	19,33	16,33
	5	1	1	1

c) ~~B~~ TOTAL: 2530 D.P. $\frac{2530}{8} = 316,25$

	UP	US	Hamilton							ME	PM	
A	4,74	4	5	6	6	3,75	4	4,50	5	4,47	5	4,35
B	1,57	1	1	1,98	1	1,23	2	1,44	1	1,4142	2	1,43
C	0,92	0	1	1,16	1	0,775	1	0,87	1	0	1	0,84
D	0,77	0	1	0,98	0	0,6125	1	0,74	1	0	1	0,71
		5	8	9	9		9		9			

d) Jefferson D.M. = 250

e) Adams D.M. = 400

f) Webster: D.M. = 333

g) D.M. ~~345~~ 345

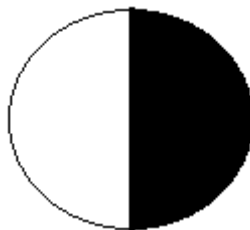
2.4 Partilhas no caso contínuo.

2.4.1- Método do divisor-selecionador (pág. 67)

ou «*eu corto, tu escolhes*». Válido para dois jogadores.

ALGORITMO

- 1º) O divisor é escolhido aleatoriamente (por exemplo, atirando uma moeda ao ar).
- 2º) O divisor efetua a divisão do objeto em duas partes que considera serem iguais.
- 3º) O selecionador escolhe uma das partes e o divisor fica com a que sobra.

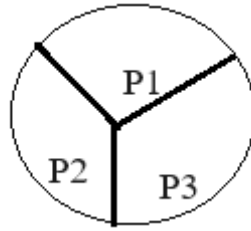


2.4.2- Método do divisor único.(pág. 68)

Para três ou mais jogadores.

Sejam J1, J2 e J3 os jogadores.

Suponhamos que, por exemplo J1 corta um bolo em três partes.




*Se J2 e J3 aceitarem partes diferentes, cada um recebe a sua, e J1 fica com a restante.

*Se J2 e J3 quiserem a mesma parte, seja P1. Então J1 escolhe uma das partes P2 ou P3 e J2 e J3 juntam as duas partes restantes e voltam a dividir pelo processo anterior («eu corto, tu escolhes»).

Exemplo: consulte a partilha indicada no início da página 68 com Francisco, Joaquim e Tomé.

 **Atividade 1** (pág. 68)

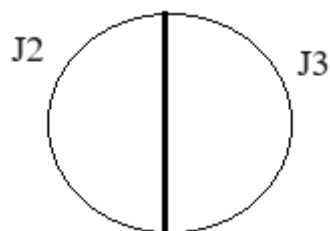
 **Exercício 15** (pág. 77)

2.4.3- Método do selecionador único. (pág. 68)

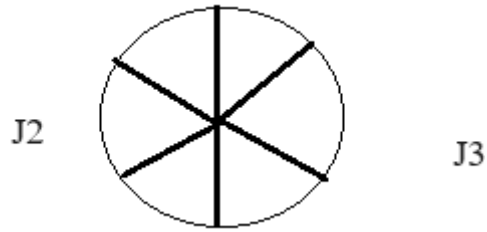
Para três ou mais jogadores.

Sejam J1, J2 e J3 os jogadores. Começamos com dois jogadores, sejam J2 e J3.

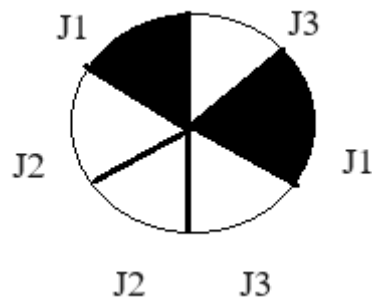
Um corta a meio e o outro escolhe. Suponhamos que ficou:



Cada um divide a sua parte em três, que considera iguais. Por exemplo:



Finalmente o J1 escolhe uma parte de J2 e uma parte de J3.

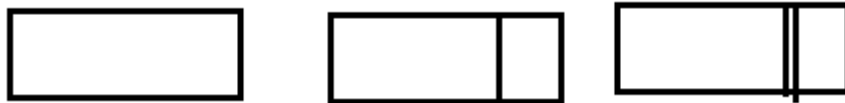


Nota: agora que cada um dos três jogadores tem a sua parte, se surgisse mais um jogador, cada um deveria cortar a sua parte em 4 pedaços e deixar o novo jogador escolher um pedaço de cada. $1/12 + 1/12 + 1/12 = 3/12 = 1/4$.

 **Exercício 16**(pág. 77)

 **Atividade 2**(pág. 69)

2.4.4- Método do último a diminuir.(pág. 69)



1º) Ordenar os jogadores: A, B, C, D, E.

2º) "A" corta uma parte que acha justa para si e passa a B.

3º) Se "B" acha que é justo, passa ao seguinte. Se acha que tem muito, "apara", isto é, retira o que acha ter a mais e passa a C.

4º) "C" faz o mesmo que "B" e passa a "D" que repete o procedimento.


5º) Se nenhum dos jogadores B, C, D, E diminuiu, a parte fica para "A". Se algum diminuiu, a parte fica para o último a diminuir. Quem recebe a sua parte retira-se do jogo.

6º) O processo repete-se com menos um jogador. Quando só existirem dois jogadores, um corta e o outro escolhe.

Exemplo: Analise o exemplo da pág. 69

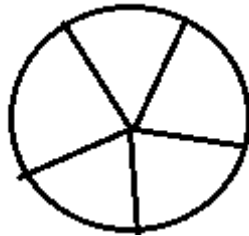
 **Atividade 3**(pág. 69)

Nota: Nos exames nacionais, por vezes, este método apresenta pequenas alterações que deverão ser tidas em conta. (sugestão: consulte questões de exame sobre este método)

 **Exercício 17** (pág. 77)

2.4.5- Método livre de inveja. (pág. 70)

Nota: Na partilha, invejar é achar que a parte do outro é melhor do que a nossa.



Vamos aplicar para 4 jogadores: A, B, C, D.

1º) Suponhamos a ordem A, B, C, D e que o divisor é "A".

2º) "A" divide o bolo em cinco partes.

3º) B observa o corte e "apara" no máximo duas das cinco fatias e passa para C.

4º) C apara no máximo uma fatia e passa a D.

5º) D escolhe uma das cinco fatias, a que acha melhor.

6º) C escolhe uma das restantes quatro. Se C aparou alguma dessas quatro fatias, tem de a escolher.

7º) B Escolhe uma das restantes três fatias. Se B aparou alguma dessas três fatias, tem de a escolher.

8º) finalmente A escolhe uma das duas fatias que restam.

Tudo o que resta será novamente distribuído...

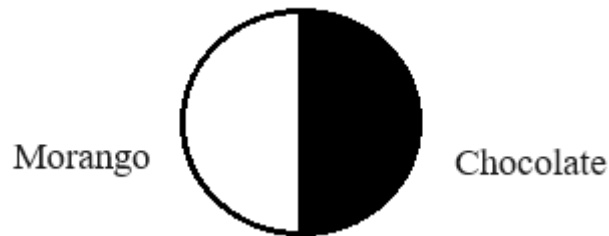
Exemplo: analise o exemplo da página 70.

Nota: É importante reconhecer que nenhum jogador tem razão para invejar a parte do outro.

 **Atividade 4** (pág. 70)

 **Problema (Muito importante):**

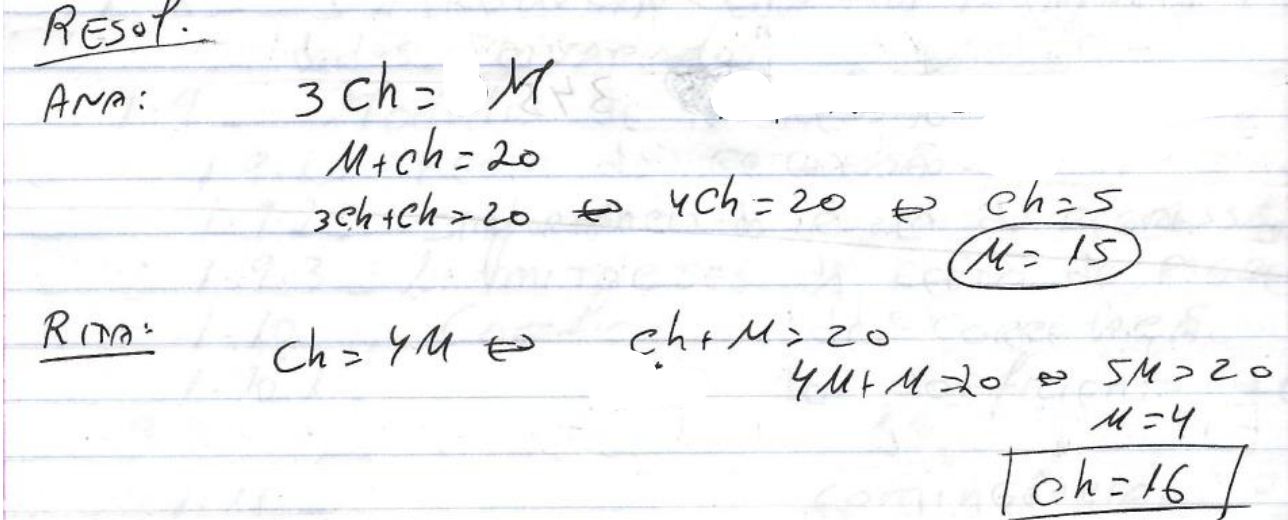
A Ana e a Rita compraram um bolo por 20€ com metade morango e metade chocolate.



A Ana gosta 3 vezes mais de morango do que chocolate. A Rita gosta quatro vezes mais de chocolate do que morango.

- a) Quanto vale a parte de morango para a Ana?
- b) Quanto vale a parte de chocolate para a Rita?

**** Sugestão(esboço da resolução)**



RESOL.

ANA: $3ch = M$
 $M + ch = 20$
 $3ch + ch = 20 \Leftrightarrow 4ch = 20 \Leftrightarrow ch = 5$
 $M = 15$

RITA: $ch = 4M \Leftrightarrow ch + M = 20$
 $4M + M = 20 \Leftrightarrow 5M = 20$
 $M = 4$
 $ch = 16$

Resposta: a) 15€ b) 16€

Nota importante:

No fim de cada tópico da matéria, deve procurar **exercícios de exames** referente a esse tópico, como forma de testar, aperfeiçoar e consolidar os seus conhecimentos.

Procure em exames por assuntos:

<https://www.pedronoia.net/ExPrAss.htm>