1.7.3 Medidas de dispersão(134).

Amplitude (h) é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da variável, ou seja:

$$h = x_{máx.} - x_{mín.}$$

Exemplo 20(134)

Exemplo 20

No conjunto de dados:

13 15 12 10 21 17

a amplitude é $h = 21 - 10 = 11$

Atividade7(135) ~~7.1~~(resolva 7.1) apenas se sobrar tempo)

ATIVIDADE 7

Considere a tabela seguinte, na qual constam as temperaturas médias mensais (T) de uma cidade portuguesa, durante um determinado ano.

Meses	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.	Nov.	Dez.
T (°C)	7	5	10	13	14	18	18	25	18	12	9	8

7.1 Desenhe um gráfico de barras que traduza os dados da tabela.

7.2 Qual o valor máximo da temperatura? E o valor mínimo?

7.3 Determine a amplitude da distribuição das temperaturas médias mensais.

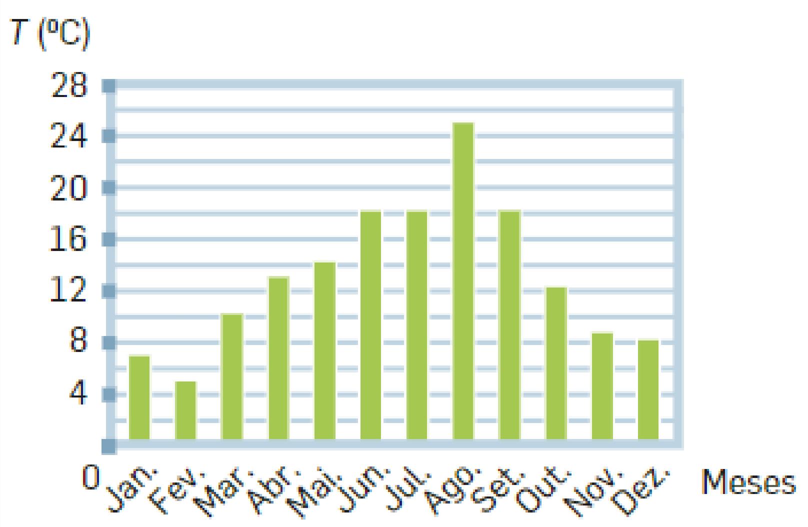
7.4 Qual o valor da temperatura média mais sentida? Em que meses?

7.5 Calcule a média das temperaturas médias mensais. Poderá afirmar que esta é a temperatura média anual? Justifique? (1 c.d.).

7.6 Calcule a mediana desta distribuição.

Solução/sugestão

~~7.1)~~ ??



7.2 Qual o valor máximo da temperatura? E o valor mínimo?

7.2) Valor máximo: 25 °C; Valor mínimo: 5 °C

7.3 Determine a amplitude da distribuição das temperaturas médias mensais.

7.3) A= 25º-5º= 20 °C

7.4 Qual o valor da temperatura média mais sentida? Em que meses?

7.4) 18 °C em junho, julho e setembro

7.5 Calcule a média das temperaturas médias mensais. Poderá afirmar que esta é a temperatura média anual? Justifique? (1 c.d.).

7.5) média (7+5+10+13+14+18+18+25+18+12+9+8)/12≈13.1º
Média das temperaturas mensais: 13,1 °C.
Não podemos dizer que esta é a temperatura média anual, pois nem todos os meses têm o mesmo número de dias. Para determinar a temperatura anual, seria mais adequado utilizar todas as temperaturas médias diárias.

7.6 Calcule a mediana desta distribuição.

7.6) para calcular a mediana, podemos começar por ordenar os valores por ordem crescente:

5; 7; 8, 9; 10; **12; 13**; 14; 18; 18; 18; 25

E calcular a média dos dois elementos centrais (12+13)/2 = 12.5

O valor da mediana é 12,5

Nota:

Quando os dados estão agrupados em classes, a amplitude é a diferença entre o limite superior da última classe e o limite inferior da primeira classe.

Atividade 8(135)

ATIVIDADE 8

Considere a tabela seguinte, que nos mostra a antiguidade (em anos) dos funcionários de uma empresa.

Antiguidade (em anos)	Número de funcionários (f_i)
[0, 2[	15
[2, 4[	23
[4, 6[	18
[6, 8[	40

Determine a amplitude.

↓

↓

Determine a amplitude.

Solução/sugestão

A=8-0=8 A amplitude é 8.

Nota: A **amplitude** é muito **sensíve**l a valores discrepantes.

Amplitude interquartil (136).

Amplitude interquartil (A_q) é a diferença entre o 3.º quartil e o 1.º quartil, ou seja:

$$A_q = Q_3 - Q_1$$

Exemplo 21(136)

Exemplo 21

Considere os dados seguintes:

$$12 \quad 15 \quad 15 \quad 18 \quad 23 \quad 30 \quad 35$$

Por observação direta, sabemos que,

$$Q_1 = 15 \qquad \tilde{x} = 18 \qquad Q_3 = 30$$

donde a amplitude interquartil é dada por:

$$A_q = 30 - 15 = 15$$

Atividade 9(136)

ATIVIDADE 9

Considere a tabela seguinte, que mostra o número de vezes que 25 alunos de uma turma utilizaram a biblioteca da escola durante uma determinada semana.

Idas à biblioteca	Número de alunos
0	1
1	3
2	7
3	8
4	4
5	2

9.1 Determine os quartis desta distribuição.

9.2 Calcule a amplitude interquartil.

9.3 Analise a dispersão dos dados em torno dos valores centrais.

9.1 Determine os quartis desta distribuição.

Solução/sugestão

9.1) se ordenarmos os 25 dados, a mediana será o 13º elemento ordenado, que corresponde ao número 3.
O primeiro quartil(Q_1) estará no centro da primeira metade, isto é, entre o 6º e o 7º elementos ordenados. Este corresponde ao número 2.
O terceiro quartil estará no centro da segunda metade, isto é, entre o 19º e o 20º elementos ordenados. Este corresponde a (3+4)/2 = 3.5

Q1 = 2 ; Q2 = 3 ; Q3 = 3,5

9.2 Calcule a amplitude interquartil.

9.2) Aq = $Q_3 - Q_1$=3.5 - 2=1,5   Aq =1.5

9.3 Analise a dispersão dos dados em torno dos valores centrais.

9.3) Os Valores são pouco dispersos.(?).

Variância e Desvio padrão (137).
(Populacional/amostral)

Exemplo1(extra): Variância e desvio padrão **populacional(σ)**.

Consideremos os dados de uma <u>população</u>: 4; 5; 6.

1º calculemos a média populacional:

$$\mu = (4+5+6)/3 = 5$$

Variância:

$$V = \frac{(4-\mathbf{5})^2 + (5-\mathbf{5})^2 + (6-\mathbf{5})^2}{3} = \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{V}$$

Neste caso, $\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816$

Exemplo2(extra): Variância e desvio padrão **amostral(S)**.
Consideremos os dados de uma amostra: 4; 5; 6.
1º calculemos a média amostral.

$$\bar{x} = (4+5+6)/3 = 5$$

Variância amostral:

$$S^2 = \frac{(4-\mathbf{5})^2 + (5-\mathbf{5})^2 + (6-\mathbf{5})^2}{3-1} = \frac{1+0+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância:

$$S = \sqrt{S^2}$$

Neste caso, $S = \sqrt{1} = 1$

Variância populacional (V)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$$

Desvio padrão populacional é a raiz quadrada da variância. $\sigma = \sqrt{V}$
Ou

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}}$$

Nota: No caso de uma amostra, dividimos por **(n-1)** em vez de n.

Variância amostral (S^2)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Desvio padrão amostral (S)

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Exemplo (extra) Desvio padrão amostral.
Consideremos os dados da amostra: 2; 3; 7.
1º calculemos a média da amostra:

$$\bar{x} = (2+3+7)/3 = 4$$

Variância:

$$S^2 = \frac{(2-\mathbf{4})^2 + (3-\mathbf{4})^2 + (7-\mathbf{4})^2}{3-1} = \frac{4+1+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância:

$$S = \sqrt{S^2}$$

Neste caso, $S = \sqrt{7} \approx 2.646$

Nota: se os **dados** forem discretos e estiverem **agrupados**, usamos o mesmo raciocínio, agrupando os respetivos valores:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n-1}}$$

ou

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{M}(x_i - \mu)^2 \cdot f_i}{n}}$$

Exemplo 22 (137).

Exemplo 22

No concurso «Pé-de-dança» estiveram presentes 20 pares que, depois da sua atuação, obtiveram pontuações de 1 a 10. Os resultados encontram-se na tabela seguinte.

Pontuação	Número de pares
3	2
5	1
7	4
8	8
9	4
10	1

Temos uma **população**-desvio padrão populacional(σ).

(Resolver, indicando todos os cálculos.)

1º Calculemos o valor médio populacional:

μ=(3×2+5×1+7×4+8×8+9×4+10×1)/20 = 149/20= 7.45

Variância:

$$V = \frac{(3-7.45)^2 \times 2 + (5-7.45)^2 \times 1 + (7-7.45)^2 \times 4 + (8-7.45)^2 \times 8 + (9-7.45)^2 \times 4 + (10-7.45)^2 \times}{20}$$

$$\frac{39.605 + 6.0025 + 0.81 + 2.42 + 9.61 + 6.5025}{20} = \frac{64.95}{20} = 3.2475$$

Desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{3.2475} \approx 1.8$$

Nota: se preferir, pode usar os cálculos intermédios com uma tabela, tal como é feito no final da página 137 do livro.

Pontuação (x_i)	Número de pares (f_i)	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$	$(x_i - \mu)^2 \cdot f_i$
3	2	−4,45	19,8025	39,6050
5	1	−2,45	6,0025	6,0025
7	4	−0,45	0,2025	0,8100
8	8	0,55	0,3025	2,4200
9	4	1,55	2,4025	9,6100
10	1	2,55	6,5025	6,5025

Nota: como veremos a seguir, também podemos calcular o desvio padrão com a calculadora gráfica, no entanto, por vezes será pedido explicitamente para calcular apresentando todos os cálculos, como acabámos de fazer.

Calculadora gráfica:

Pode calcular do mesmo modo que calcula a média. O símbolo do desvio padrão populacional é σx e o amostral é Sx.

✐**Exercício(extra)**: Resolva o exemplo anterior utilizando a calculadora gráfica. Comece por introduzir as duas listas. Na calculadora Casio, não esqueça de ir ao "SET" confirmar que a segunda lista contém as frequências. Na Calculadora Texas, Não esqueça de indicar "L1 e L2".
Os procedimentos são os mesmos que utilizámos anteriormente para a média.

Exemplo 23 (138)- Desvio padrão populacional. Com a calculadora gráfica.
Usamos as marcas das classes.

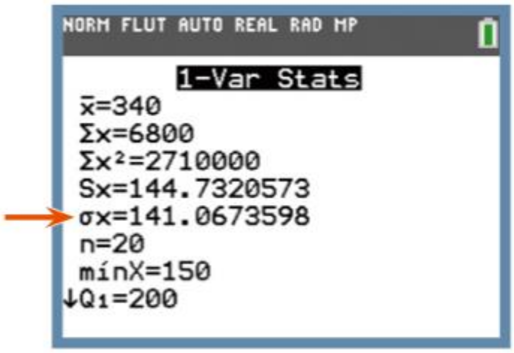
Exemplo 23

A tabela ao lado fornece-nos os diferentes pesos de 20 livros da Parágrafo Editora, agrupados em classes.

Peso (em g)	Número de livros
[100, 200[	5
[200, 300[	3
[300, 400[	4
[400, 500[	5
[500, 600[	3

Para calcular o desvio padrão, determinamos a marca de cada classe e introduzimos os valores na calculadora gráfica (como se mostra ao lado).

Os resultados obtidos são:



Ou seja, o desvio padrão é aproximadamente 141,07 g.

Elementos que pertencem ao intervalo] $\mu-\sigma$, $\mu+\sigma$[.

Exercício 22(163). O número de animais de estimação dos alunos de uma turma encontra-se na tabela.

Número de animais	Número de alunos
0	6
1	5
2	7
3	3
4	2

22.1) Calcule a média e o desvio padrão populacional para esta distribuição(2 c.d.). Pode usar a calculadora gráfica.

22.2) Quantos alunos têm um número de animais pertencente ao intervalo

] $\mu-\sigma$, $\mu+\sigma$[?

<u>Resposta:</u>

22.1) Usamos a calculadora gráfica e lançamos a primeira coluna como lista de x e a segunda como valores das frequências. Obtemos, (com 2c.d.) os valores:

$$\mu \approx 1{,}57\ ; \quad \sigma \approx 1{,}25$$

22.2) Basta agora fazer

$$]\,\mu-\sigma,\ \mu+\sigma[\,=\,]1.57-1.25;\ 1.57+1.25[\ =\,]0.32;\ 2.82[$$

neste intervalo temos os valores "1" e "2", que correspondem às frequências 5 e 7 respetivamente. Assim, 5+7=12

R: 12 alunos têm um número de animais pertencente ao intervalo $]\,\mu-\sigma,\ \mu+\sigma[$.

Nota: Não vamos estudar os exemplos indicados na página 139 referentes a dados agrupados em classes com intervalos, por estar fora do programa do 10º ano.

Atividade 10- População(pág. 140) ~~10.1 10.2~~(só se tiver tempo) 10.3 10.4 ~~10.5~~(não resolver)

ATIVIDADE 10

A tabela ao lado diz respeito aos ordenados dos funcionários de uma empresa, consoante o género.

Ordenados (em euros)	Homens	Mulheres
[300, 400[	5	7
[400, 500[	7	10
[500, 600[	10	14
[600, 700[	9	16
[700, 800[	12	9
[800, 900[	16	5
[900, 1000[	14	1

10.1 Quantos funcionários tem a empresa?

10.2 Qual a percentagem de homens? E a de mulheres? (1 c.d.)

10.3 Calcule o desvio padrão para cada uma das distribuições: a dos vencimentos dos homens e a dos vencimentos das mulheres (2 c.d.).

10.4 Compare, quanto à dispersão, os vencimentos dos funcionários dos dois géneros.

10.1 Quantos funcionários tem a empresa?

***Solução/sugestão**

10.1)(??) Basta somar: 5+7+10+9+…=135.
Resposta: A empresa tem 135 funcionários

10.2 Qual a percentagem de homens? E a de mulheres? (1 c.d.)

10.2)**(??)** São 73 homens $73/135 \approx 0.541$ corresponde a 54,1%
São 62 mulheres $62/135 \approx 0.459$ corresponde a 45,9%

10.3 Calcule o desvio padrão para cada uma das distribuições: a dos vencimentos dos homens e a dos vencimentos das mulheres (2 c.d.).

10.3) Desvio padrão para os homens.
Na C.G. colocamos na lista 1 as marcas, isto é, os valores 350; 450; 550; 650; 750; 850, 950.
Na lista 2 colocamos as frequências 5; 7; 10; 9; 12; 16; 14.
Usamos o desvio padrão populacional $\sigma H \approx 186,80$;
Para as mulheres usamos os mesmos valores na lista 1. Na lista 2 colocamos as frequências 7; 10; 14, 16, 9; 5; 1.
Usamos o desvio padrão populacional $\sigma M \approx 148,89$

10.4 Compare, quanto à dispersão, os vencimentos dos funcionários dos dois géneros.

10.4) Mais dispersa nos homens, pois apresenta um valor mais alto para o desvio padrão.
~~**10.5)**~~

<u>Nota1:</u>

1) Tal como a média, o desvio padrão também é uma medida **pouco resistente** pois é influenciado por valores discrepantes. No que diz respeito a **valores discrepantes** e comparando as três medidas de dispersão estudadas (amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão), podemos afirmar que a amplitude interquartil é a mais robusta(ou resistente) das três.

2) O desvio padrão toma sempre valores <u>maiores ou iguais a zero</u>.

3)Se todos os dados forem iguais, o desvio padrão é zero.

Sugestão: experimente com a CG para a população 5; 5; 5; 5; 5.

4) Para amostras com a mesma média, quanto **mais dispersos** forem os dados, **maio**r é o valor do **desvio padrão**. ***Sugestão:*** experimente com a CG para as populações: 9; 10; 11 e 5; 10; 15. Obtenha a média e o desvio padrão para cada uma.

Propriedades do desvio padrão.(Extra) -Muito importante!

Exemplo(Extra) Média-Resolva

Considere a população com os dados: 10; 12; 14; 17; 22.

1) Calcule o desvio padrão populacional. (R: $\sigma \approx 4.195$)

2) Adicione 3 unidades a cada um dos elementos e calcule novamente o desvio padrão populacional . Comente os resultados obtidos. (R: $\sigma \approx 4.195$)

3) Adicione 5 unidades a cada um dos elementos e calcule novamente o desvio padrão populacional. Comente os resultados obtidos. (R: $\sigma \approx 4.195$)

1.4) Multiplique por 2 cada um dos dados e calcule o desvio padrão populacional. Comente os resultados obtidos.(R: $\sigma \approx 8.39 = 2 \times 4.195$)

1.5) Multiplique por 3 cada um dos dados e calcule o desvio padrão populacional. Comente os resultados obtidos.(R: $\sigma \approx 12.586 \approx 3 \times 4.195$)

Propriedades do desvio padrão:

Propriedade1: Se adicionarmos a cada um dos valores uma constante k, o novo desvio padrão não se altera.

Propriedade2: Se multiplicarmos cada um dos valores por uma constante k, o novo desvio padrão será igual ao desvio padrão original, multiplicado por k.