3. Desde que a Associação Ambientalista de Avelares (AAA) começou a fazer a manutenção do lago do parque municipal de Avelares, a qualidade da água melhorou. Com a diminuição do número de um certo tipo de micro-organismos, o número de peixes no lago começou a aumentar.

Admita que, ao fim de t dias após a AAA começar a fazer a manutenção do lago, o número desses micro-organismos por cada 100 ml de água do lago e o número de peixes existentes no lago, em milhares, são dados, respetivamente, por

$$c(t) = 1200e^{-0{,}25t} \text{ e por } p(t) = \frac{5}{1+e^{-0{,}21t}} \qquad t \geq 0$$

3.1. A qualidade da água do lago é considerada boa se o número desses micro-organismos por cada 100 ml for igual ou inferior a 99.

Prove que, no instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, o número de peixes existentes no lago é superior a 4400.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

3.2. Com o passar do tempo, o número de peixes no lago tende a estabilizar num certo valor. A AAA decidiu que, quando o número de peixes do lago for igual a esse valor menos 400, se pode introduzir uma nova espécie de peixes no lago.

Determine ao fim de quantos dias, após a manutenção do lago passar a ser feita pela AAA, se pode fazer a introdução de novos peixes.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) que lhe permitem resolver o problema;

– as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

Resolução (Absolutamente.net)

3.1. Para determinar o instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, ou seja, o tempo correspondente ao instante em que o número de micro-organismos por cada 100 ml é igual a 99, devemos resolver a equação $c(t) = 99$

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = 1200e^{-0,25t}$ e a reta $y = 99$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com duas casas decimais) das coordenadas do ponto de interseção: $(9{,}98\,;\,99)$

Assim, temos que o instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, é $t \approx 9{,}98$ dias, e calculando o número de peixes existentes no lago, neste instante, temos:

$$p(9{,}98) \approx \frac{5}{1 + e^{-0{,}21 \times 9{,}98}} \approx 4{,}45 \text{ milhares}$$

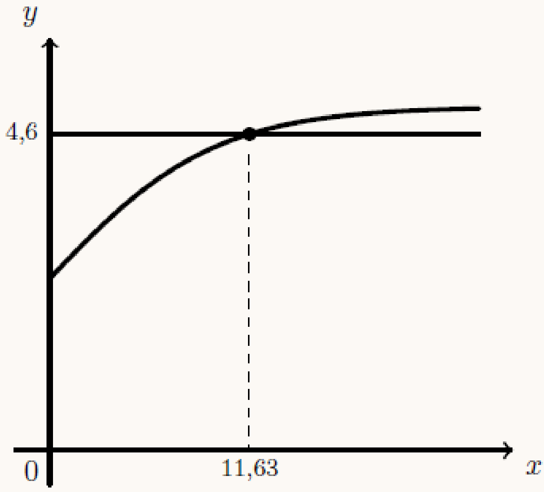
Logo, como 4400 peixes são 4,4 milhares, temos que $p(9{,}98)$ é maior que 4,4, ou seja, no instante em que a qualidade da água é considerada boa pela primeira vez, o número de peixes existentes no lago é superior a 4400.

3.2. Observando a expressão algébrica da função p (ou a sua representação gráfica), podemos verificar que o número de peixes no lago tende a estabilizar no valor 5 milhares.

Assim, a introdução da nova espécie de peixes deve acontecer quando a população da espécie existente no lago for de $5000 - 400 = 4600$, ou seja, de 4,6 milhares.

Para determinar o instante em que a população é de 4,6 milhares, devemos resolver a equação $p(t) = 4{,}6$

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = \frac{5}{1 + e^{-0{,}21t}}$ e a reta $y = 4{,}6$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(11{,}63\,;\,4{,}6)$



Assim, temos que ao fim de 12 dias, após a manutenção do lago passar a ser feita pela AAA, pode-se fazer a introdução de novos peixes (porque foi no decorrer do 11.º dia que a população dos peixes existentes atingiu o valor de 4600).

Sugestões/comentários abaixo:

E20EE-Questão 3

	Conteúdo
	Modelo Logístico. (Assunto 6 'Modelos populacionais -11º ano)

Comentário:

3.1) Para determinarmos o instante que temos C(t)=99, só temos de pedir o gráfico com

$$Y_1 = 1200e^{-0.25x} \quad \text{e } Y_2=99$$

Se tiver dificuldade em visualizar o gráfico, pode começar por pedir o zoom automático (Zoom auto ou Zoom fit).
Se ainda não der, observe a tabela ("Table") e repare que quando o x está entre 10 e 11, já temos o valor que procuramos. Então, na nossa janela, devemos usar um x superior a 10 e um y superior a 99. Pode, por exemplo usar a janela:

xmin: 0 xmáx: 15 y min: 0 ymáx: 500

Depois é só pedir a interseção, que dá aprox. 9.98.

Depois, substituímos este valor na expressão do p, isto é, p(9.98) que dá 4.45 milhares, isto é , 4 450 unidades, que é superior a 4400.

3.2) Se olharmos novamente para a expressão

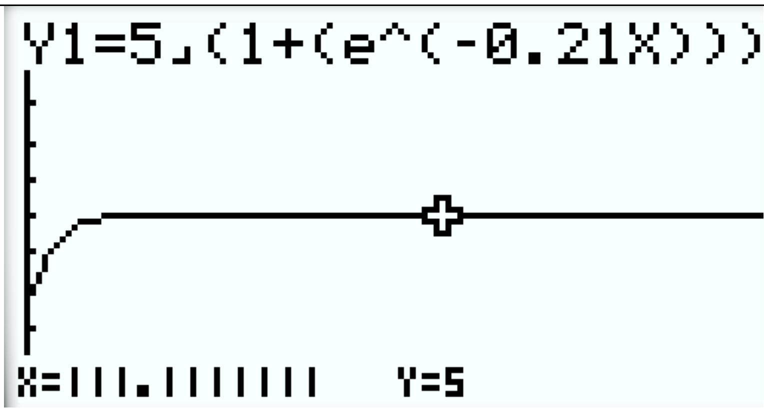
$$y = \frac{5}{1+e^{-0,21t}},$$

que corresponde a um modelo de crescimento logístico, podemos lembrar-nos que, para valores altos de *t*, esta expressão tende para 5.
Caso contrário, podemos fazer:

$$Y1=5\div(1+e^{-0.21X})$$

E pedir uma tabela com valores de x a variarem de 1 a 200 e veremos que a partir de certa altura, os valores tendem para 5.

Assim, fazendo um gráfico com a janela
xmin: 0 xmáx: 200 y min: 0 ymáx: 10 e usando a opção "trace", obtemos



Sabemos então que, com o passar do tempo, o número de peixes no lago tende a estabilizar nos 5 milhares, isto é, 5000 unidades.

Fazendo agora 5000-400=4600, vejamos ao fim de quanto tempo teremos este valor.
Seja **y_2=4.6** porque estamos em milhares.
Voltando à calculadora, e mantendo a janela anterior e pedindo a interseção, obtemos:

Aproximadamente 11.63

…

Ao longo do 11º dia, logo, ao fim de 12 dias teremos atingido o valor pretendido.