Escola Secundária Jaime Moniz

Ficha de Trabalho de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
Grafos e Modelos populacionais

11º ano XXX

1) A junta de freguesia de Freixo promoveu atividades desportivas entre os habitantes da vila de Freixo (F) e das aldeias A, B, C e D.
Na Tabela 4, estão indicadas as distâncias, em quilómetros, entre A, B, C, D e F

	B	C	D	F
A	28	38	30	18
B	—	36	32	26
C	—	—	48	20
D	—	—	—	24

Para transportar os habitantes, o presidente da junta de freguesia pretende encontrar um percurso que ligue todos os locais referidos. De modo a encontrar esse percurso, o presidente da junta apoiou-se nos dados da Tabela acima e no algoritmo seguinte.

Passo 1: define-se a vila de Freixo como ponto de partida.

Passo 2: seleciona-se a aldeia mais próxima, tendo em conta que, se houver duas aldeias à mesma distância, a seleção é aleatória.

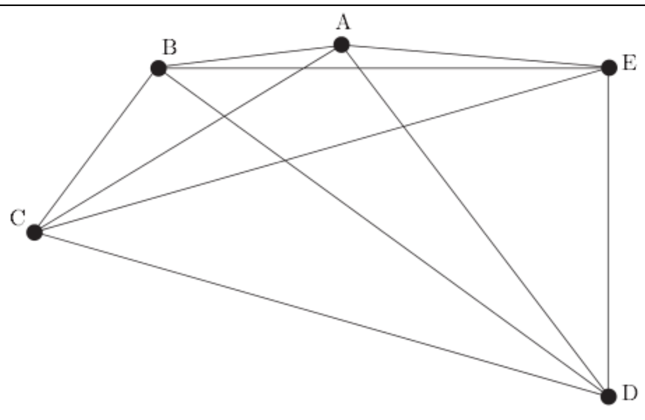
Passo 3 e passos seguintes: procede-se como foi indicado no passo anterior, não se repetindo nenhuma aldeia, e regressando-se ao ponto de partida depois de visitadas todas as aldeias.

Uma semana antes do início do serviço de transporte, é feito o anúncio seguinte.

«Se a estrada que liga a aldeia A à aldeia B estiver intransitável, é necessário percorrer mais quilómetros para utilizar um percurso alternativo.» Justifique a veracidade ou a falsidade da informação, aplicando o algoritmo acima descrito aos dois casos:

- a estrada que liga A a B está transitável;
- a estrada que liga A a B está intransitável.

2) O senhor Manuel ofereceu o capital acumulado no final de 2008 ao seu filho Miguel. Esse dinheiro foi investido pelo Miguel na sua empresa de distribuição de congelados.
Na Figura, encontra-se o grafo que serve de modelo à volta utilizada pelo camião da empresa do Miguel, para efectuar a distribuição de congelados pelos supermercados que fornece.



No grafo, o vértice A representa a sede da empresa do Miguel, e os vértices B, C, D e E representam os supermercados. Cada aresta representa um trajecto directo que liga dois supermercados, ou que liga um supermercado à sede da empresa do Miguel.

O Miguel elaborou uma lista com as voltas de distribuição, que começam e terminam na sede da sua empresa, visitando todos os supermercados, e não repetindo nenhum deles. Para o Miguel, o que importa é o número de quilómetros percorridos, por isso, é indiferente, por exemplo, percorrer ABCDEA ou percorrer AEDCBA. Mostre que o grafo da Figura admite, exatamente, doze voltas distintas, que podem fazer parte da lista do Miguel.

3) Cinco localidades, que designaremos pelas letras A, B, C, D, E, estão ligadas entre si por diversas estradas. As estradas existentes e as respectivas distâncias são:

[AB] 7km, [AE] 17km, [BC] 10Km , [BD] 21Km, [CE] 8Km, [CD] 12 Km, [ED] 33Km, [EB] 11Km.

3.1) Representando as localidades por vértices e as estradas por arestas, represente as referidas ligações através de um grafo. Indique também os pesos das arestas.

3.2) Admita que a equipe de manutenção das estradas pretende inspeccionar o estado de conservação do asfalto e, para tal, precisa de passar por todas as estradas. Será possível começar e acabar em A, passando uma única vez em cada uma das estradas? justifique. Se achar que sim, indique um percurso possível. Se achar que não, apresente uma eulerização que repita o mínimo de arestas possível.

3.3) Suponha que um vendedor pretende visitar as cinco localidades e procura o caminho mais curto possível. Ajude-o a encontrar a solução usando o método:

3.3.1) mínimos sucessivos. (apresente todas as possibilidades).

3.3.2) ordenação dos pesos das arestas. Comece por apresentar todas as arestas ordenadas por ordem crescente de pesos.

3.4) Suponha agora que o vendedor pretende visitar as cinco localidades mas já decidiu começar e terminar em "A". Use o método das árvores para encontrar o caminho mais curto possível. Apresente todas as possibilidades de forma organizada e as respectivas distâncias.

3.5) Nesta mesma zona vai ser construída uma canalização para abastecimento de água e pretendemos planear a obra de modo a usar a menor quantidade possível de tubos. Admita que só pode construir tubagens de acordo com as ligações e as distâncias acima indicadas. Utilize o algoritmo de Kruskal para resolver o problema. Apresente a arvore abrangente mínima correspondente e o seu comprimento total.

4) Uma comissão de exames nacionais pretende calendarizar os exames, de modo que os alunos não tenham dois exames no mesmo dia. A tabela que se segue mostra os exames que os alunos A, B, C e D têm de realizar.

	Português	Matemática	IDES	História	Biologia	Psicologia
A	X	X			X	
B	X			X		X
C	X		X	X		
D	X	X				X

4.1) Desenha um grafo que sirva de modelo à informação disponível.

4.2) Considerando que cada aluno não pode fazer mais do que um exame por dia, diz qual é o número mínimo de dias necessários para a realização dos exames e apresenta a distribuição dos exames pelos vários dias.

5) Para a execução de um determinado projecto, são necessárias 10 tarefas.

Sabemos que a tarefa T10 demora 16 dias e depende das tarefas T5 e T7.

A Tarefa T5, assim como as Tarefas T1, T2, T4 e T6 demoram, cada uma, 12 dias.

A tarefa T2 depende de T1. A tarefa T3 depende de T2 e demora 11 dias.

A tarefa T5 depende da tarefa T3. A tarefa T9 demora 6 dias e depende das tarefas T4 e T6. A tarefa T8 depende da tarefa T9 e demora 7 dias. A Tarefa T7 depende da tarefa T8 e demora 17 dias. As tarefas T1, T4 e T6 não têm qualquer dependência.

5.1) Apresente uma tabela em que na primeira coluna coloque as tarefas T1 a T10, na segunda coluna indique a duração (em dias) e na terceira coluna indique as dependências de cada uma.

5.2) Apresente o digrafo correspondente.

5.3) Ao fim de quanto tempo terá concluídas as seguinte tarefas:

T1? T2? T3? T4? T5? T6? T7? T8? T9? T10?

5.4) Determine o tempo mínimo necessário para concluir o projecto.

6) Um economista estudou, durante 24 meses, o número de desempregados inscritos numa delegação do Instituto do Emprego e Formação Profissional (IEFP). Concluiu que o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, no início do estudo e no final de cada mês, t, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades

$$P(t) = \frac{8000}{3 + 21e^{-0,5t}} \qquad t = 0, 1, 2, ..., 24$$

Considera-se t = 0 como o início do estudo.

6.1) Determine, a partir do modelo P, ao fim de quantos meses após o início do estudo o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP é superior a 2600.
6.2) Ao longo dos 24 meses em que decorreu o estudo, o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP não foi constante.
Num pequeno texto, analise a evolução do número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, com base na representação gráfica do modelo P.
Na sua resposta, deve:
*reproduzir, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora;
*reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
*indicar o número máximo de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, nos 24 meses em que decorreu o estudo;
*apresentar a diferença entre os números de desempregados inscritos no início e no final do estudo;
*descrever a forma como evoluiu o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, nos 24 meses em que decorreu o estudo.

7) O nível N, em decibéis, de um som audível pode ser dado por: $N = 120 + 10 \times \log_{10} I$,
onde *I* é a intensidade do som emitido, em watts por m^2
7.1) Determine o nível de um som de intensidade I=0,002.
7.2) Admita que o nível de ruído de um avião a jacto a que está exposta uma pessoa que se encontra na varanda do aeroporto é de 145 decibéis. Determine a intensidade desse som, em watts por metro quadrado. Resolva esta questão analiticamente, isto é indicando todos os cálculos.
8) Suponha que a altura A (em metros) de uma pessoa do sexo masculino pode ser definida, em função do seu peso p (em quilogramas), pela seguinte expressão: A(p) = 0,56 In (p) - 0,53
Recorrendo à expressão, determine: **8.1-** A altura do Rafael, sabendo que o seu peso é de 65 kg
8.2 - O peso do David, sabendo que tem 167cm de altura. . Resolva esta questão analiticamente, isto é indicando todos os cálculos.
9) O aluguer de uma máquina "A" custa 100 euros no primeiro dia, 120 euros no segundo dia, 140 euros no terceiro dia, 160 euros no quarto dia e 180 euros no quinto dia. A partir do sexto dia será sempre 200 euros por dia.
O aluguer de uma outra máquina B custa 300 euros no primeiro dia e 150 euros em cada um dos restantes dias.
9.1) Indique o valor a pagar pelo aluguer de cada uma das máquinas, por uma duração de
9.1.1) 3 dias **9.1.2)** 5 dias **9.1.3)** 10 dias
9.2) Quanto pagará de aluguer em cada uma das máquinas no 5º dia? e no 10º dia?
9.3) Apresente uma expressão para o valor a pagar pelo aluguer da máquina B durante ***x*** dias.
9.4) Se tivesse 3 500 euros, durante quantos dias podia alugar a máquina A e a máquina B?

10) Uma empresa produziu 20 000 unidades de certo produto no primeiro trimestre de 2003. Sabemos que a produção diminuiu 20% a cada trimestre.

10.1) Quantas unidades foram produzidas no ano de 2003?

10.2) Quantas unidades foram produzidas no último trimestre de 2006?

11) Imagine que deposita 5 000 euros num banco que lhe paga 4,8 % de juros anuais(juro composto). Calcule quanto ganhará de juro ao fim de 1 ano supondo que o banco paga os juros:

11.1) anualmente **11.2)** mensalmente **11.3)** hora a hora.

12) Um Petroleiro encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Consequentemente, começou a derramar crude. Considere que **t** horas após o acidente, a área, em km^2, de crude espalhado sobre o oceano é dada pela seguinte expressão: $A(t) = 18e^{0,1t}$,

12 .1 - Qual a área de crude ao fim de 5 horas? E ao fim de meio dia?

12.2 - Ao fim de quantas horas se atinge uma área de 80 km^2de crude? Pode apresentar uma resposta usando uma tabela ou um gráfico da calculadora. Explique como obteve.

12.3) Ao fim de quantas horas se atinge uma área de 100 km^2de crude? Resolva esta questão analiticamente, isto é indicando todos os cálculos.

13) Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existente numa área reservada desde a sua criação:

<table>
<tr><th>Número de meses decorridos desde a criação da área reservada(x)</th><th>Número de animais existentes na área reservada(y)</th><td rowspan="12">Com o auxílio da calculadora, determine o modelo de regressão linear y=ax+b, que se ajusta a estes valores. Apresente os valores de "a" e de "b" arredondados à milésimas.

De seguida, utilize a equação obtida para estimar quantos animais existiam ao fim de 19 meses.</td></tr>
<tr><td>0</td><td>220</td></tr>
<tr><td>2</td><td>224</td></tr>
<tr><td>4</td><td>228</td></tr>
<tr><td>6</td><td>232</td></tr>
<tr><td>8</td><td>235</td></tr>
<tr><td>10</td><td>240</td></tr>
<tr><td>12</td><td>246</td></tr>
<tr><td>14</td><td>252</td></tr>
<tr><td>16</td><td>258</td></tr>
<tr><td>18</td><td>263</td></tr>
<tr><td>20</td><td>270</td></tr>
</table>

14) Considere o modelo de crescimento de uma população de animais, dado pela expressão:

$$P(t) = \frac{210}{1+6e^{-0,5t}}, t \geq 0$$ com t - tempo em semanas

14.1 - Quantos animais existiam inicialmente?

14.2 - Quantos animais existirão ao fim de 21 dias?

14.3 – Descreva a evolução desta população ao longo do tempo, recorrendo à calculadora gráfica. Explique tomo procedeu para tirar tal conclusão.