

A Matemática, da Minha Varanda
(Volume 2)

Egídio Gonçalves Pereira

Janeiro de 2007

Conteúdo

| | |
|---|------------|
| Introdução | vii |
| 1 Sucessões de Números Reais | 1 |
| 1.1 Limite de uma sucessão | 2 |
| 1.2 Progressões aritméticas | 8 |
| 1.3 Progressões geométricas | 10 |
| 1.4 Progressões aritmético-geométricas | 27 |
| 2 Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy | 35 |
| 3 Séries | 45 |
| 3.1 Séries Geométricas | 45 |
| 3.2 Séries aritmético-geométricas | 47 |
| 3.3 Séries de Mengoli | 50 |
| 3.4 Séries de Termos Positivos | 55 |
| 3.5 Séries Alternadas | 58 |
| 3.6 Séries de MacLaurin | 59 |
| 3.7 Séries de Taylor | 69 |
| 4 Equações de Pell-Fermat | 71 |
| 5 Construção do Polígono Regular de Dezassete Lados | 89 |
| 6 Equações com Diferenças | 97 |
| 6.1 O papel central da sucessão $v_n = a^n$ | 97 |
| 6.2 Resolução de equações com diferenças | 98 |
| 7 Trigonometria Hiperbólica | 123 |
| 7.1 Funções Hiperbólicas | 124 |
| 8 O método das Tangentes de Newton | 129 |
| 9 Polinómios de Colocação | 133 |
| 10 O Anel dos Inteiros Gaussianos | 141 |
| 11 Ternos Pitagóricos | 147 |
| 11.1 A trigonometria e os ternos Pitagóricos | 154 |
| 11.2 Os números complexos e os ternos Pitagóricos | 155 |
| 12 Primitivas | 157 |
| 12.1 Primitivas Imediatas | 157 |
| 12.2 Primitivação por Partes | 160 |
| 12.3 Primitivação de Funções Racionais | 164 |
| 12.4 Primitivação por Substituição | 167 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 12.5 | Expressões com radicais | 174 |
| 13 | Equações diferenciais | 177 |
| 13.1 | Equações lineares de coeficientes constantes | 177 |
| 13.2 | Métodos gerais | 185 |
| 13.2.1 | Equações de variáveis separadas | 185 |
| 13.2.2 | Equação diferencial exacta | 188 |
| 13.2.3 | O método do factor integrante | 192 |
| 13.2.4 | Método de substituição | 195 |
| 13.2.5 | Método da variação das constantes | 196 |
| 13.3 | Métodos formais | 203 |
| 13.3.1 | Equações homogéneas | 203 |
| 13.3.2 | Equações quase homogéneas | 206 |
| 13.3.3 | Equação linear | 210 |
| 13.3.4 | Equação de Bernoulli | 215 |
| 13.3.5 | Equação de Riccati | 217 |
| 13.4 | Equações de 1 ^a ordem não resolvidas | 220 |
| 13.4.1 | Equações resolúveis em ordem a y' | 220 |
| 13.4.2 | Equações resolúveis em ordem a y | 222 |
| 13.4.3 | Equações resolúveis em ordem a x | 225 |
| 13.5 | Equações de ordem superior à 1 ^a | 225 |
| 13.5.1 | Equação de Euler | 227 |
| 14 | Sistemas de equações diferenciais | 231 |
| 15 | Grupóides, Semigrupos e Grupos | 237 |
| 16 | Anéis e Corpos | 245 |
| 17 | Espaços Vectoriais de Dimensão Finita | 251 |
| 18 | Geometria Analítica em \mathbb{A}^4 | 265 |
| 19 | Geometria Analítica no Plano | 271 |
| 20 | Geometria Analítica no Espaço | 279 |
| 21 | Um simples triângulo, mas muito para aprender | 303 |
| 22 | Geometria no Plano | 313 |
| 23 | O Teorema de Napoleão Bonaparte | 331 |
| 24 | Coordenadas polares | 347 |
| 25 | Programação Linear | 373 |
| 25.1 | O método gráfico | 373 |
| 25.2 | O método do Simplex | 382 |
| 25.3 | O Método do Big M | 386 |
| A | The First Appendix | 391 |
| | Bibliografia | 393 |

Prefácio

Este trabalho foi escrito sem a preocupação de obter um livro de texto para acompanhar as aulas de Matemática, nem de seguir o programa de Matemática do Ensino Secundário. Pretendeu-se mostrar que a Matemática no Ensino Secundário pode ir além dos habituais exercícios e que existe um vasto campo que pode ser explorado pelos professores e alunos de Matemática. Tratou-se, também, da resposta a um desafio: que livro sobre Matemática seria capaz de escrever? De qualquer modo, o texto resulta da experiência da sala de aula conjugada com uma grande vontade de procurar novos caminhos.

Pretendeu-se, também, lutar contra uma certa maneira de encarar a Matemática, não havendo nenhuma concessão ao facilitismo que por aí anda. Nos tempos actuais, há que mostrar aos alunos e professores que o mais importante, no Ensino, é o trabalho constante e não o "deixa andar" em que caíram muitos alunos que estão à espera dum milagre que resolva os seus problemas. O mesmo acontece com muitos adultos que veriam os seus problemas resolvidos com um bom prémio no Euromilhões. O pior é que o prémio nunca chega...

Este livro foi escrito sem nenhuma preocupação sobre a sua finalidade: não se pretendia um bom livro, não se pretendia publicar um livro, nem se pretendia qualquer tipo de utilização para além da sala de aula. De qualquer modo, partes do livro foram sendo divulgadas a alguns colegas de Escola. Por falar em Escola, parece-me que, numa Escola de dimensão considerável, como a Escola Secundária Jaime Moniz (onde sou professor), poderíamos fazer o nosso próprio LIVRO DE MATEMÁTICA, que englobaria o contributo dos professores interessados e, se possível, de alguns alunos. Tal livro seria uma resposta à habitual falta de espírito colectivo e uma excelente resposta àqueles que dizem que os professores nada fazem.

Finalizo este pequeno prefácio, referindo que já não sei em que altura comecei a escrever este livro: sei que foi há muito tempo e que passei milhares de horas a escrever nos Computadores (não foi num só). E sem esperar qualquer compensação para esse esforço que, espero, não tenha sido inglório.

Muito sinceramente, gostava que os professores de Matemática pudessem ter acesso a este livro e que se propusessem fazer outro muito melhor e sem os defeitos que este apresenta.

Aproveito estas linhas para a agradecer a todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para este produto final, lendo o texto e apontando gralhas, fazendo com que o seu número seja menor. No entanto, tenha a certeza que elas continuam. Por vezes, abro o livro numa página, ao acaso, e lá está ela, a gralha...

Obrigado a todos os que me incentivaram!

Este livro é dedicado a duas pessoas em particular: À minha professora da instrução primária, D. Estela Castro, e ao Dr. Sérgio Camacho que foi meu professor de Matemática no Liceu.

Introdução

Este texto incide, de modo especial, sobre assuntos de 12º Ano e de 1º Ano do Ensino Universitário. Para isso contribuiu a minha experiência como professor do Ensino Secundário e como assistente na Universidade da Madeira e na Universidade Católica (Funchal).

O livro está dividido em dois volumes, por uma questão do número de páginas. No entanto, o primeiro volume tem mais a ver com o Ensino Secundário e o segundo volume com o Ensino Superior. De qualquer modo, prefiro considerar que se trata dum livro e não de dois, motivo pelo qual os dois volumes têm o mesmo título.

Convém referir que, no Capítulo intitulado **Probabilidades**, estão incluídos exercícios das Brochuras editadas pelo Ministério da Educação, exercícios esses que estão assinalados com *.

Não posso deixar de referir que seria interessante incluir no Programa de Matemática do Ensino Secundário assuntos como a lei dos senos e a fórmula de Heron.

Capítulo 1

Sucessões de Números Reais

Definição 1 Sucessão de números reais é uma aplicação de \mathbb{N} em \mathbb{R} .

São sucessões as seguintes funções:

$$f(n) = n^2$$

$$f(n) = n^2 + 2n$$

$$f(n) = \frac{n^2+1}{2n+3}$$

$$f(n) = \sqrt{n+2}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$f(n) = 2^n - 1$$

$$f(n) = \frac{2^n+3^n}{3^{n+1}}$$

$$f(n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Com a definição apresentada, não são sucessões as seguintes funções:

$$f(n) = \sqrt{n-10}$$

$$f(n) = \sqrt{10-n}$$

$$f(n) = \frac{1}{n-4}$$

$$f(n) = \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n$$

Exemplo 2 Estudo do sinal numa sucessão

A) Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = n^2$. Então, $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

B) Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = n^2 - 16$. Então:

$$u_n > 0, \text{ se } n > 4; \quad u_n < 0, \text{ se } n < 4; \quad u_n = 0, \text{ se } n = 4$$

C) Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n-11}{3n-4}$.

Vamos começar por estudar o sinal da função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x-11}{3x-4}$:

| | | | | | |
|---------|-----------|---------------|-----|----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{4}{3}$ | | $\frac{11}{2}$ | $+\infty$ |
| $2x-11$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $3x-4$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | | $-$ | 0 | $+$ |

Então, $u_n < 0$, para $1 < n \leq 5$ e $u_n > 0$, para $n \geq 6 \vee n = 1$.

Calculemos alguns termos desta sucessão:

$$u_1 = 9 > 0$$

$$u_2 = -\frac{7}{2} < 0$$

$$u_3 = -1 < 0$$

$$u_4 = -\frac{3}{8} < 0$$

$$u_5 = -\frac{1}{11} < 0$$

$$u_6 = \frac{1}{14} > 0$$

Exemplo 3 Estudo da monotonia duma sucessão

Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n-11}{3n-4}$. Então:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+2-11}{3n+3-4} - \frac{2n-11}{3n-4} = \frac{2n-9}{3n-1} - \frac{2n-11}{3n-4} = \frac{(2n-9)(3n-4) - (2n-11)(3n-1)}{(3n-1)(3n-4)} \\ &= \frac{6n^2 - 8n - 27n + 36 - 6n^2 + 2n + 33n - 11}{(3n-1)(3n-4)} = \frac{25}{(3n-1)(3n-4)} \end{aligned}$$

Agora, estudamos o sinal da função real de variável real, definida por $f(x) = \frac{25}{(3x-1)(3x-4)}$:

| | | | | | |
|--------|-----------|---------------|---|---------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{4}{3}$ | $+\infty$ |
| 25 | + | + | + | + | + |
| $3x-1$ | - | 0 | + | + | + |
| $3x-4$ | - | - | - | 0 | + |
| $f(x)$ | + | | - | | + |

Então, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tendo-se $u_2 - u_1 < 0$.

Logo, a sucessão não é monótona!

Repare-se que a condição $u_{n+1} - u_n > 0$ não se verifica num único caso.

No entanto, como é lógico, a sucessão não é monótona (crescente).

1.1 Limite de uma sucessão

Exercício 4 Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$.

1. Quais os termos da sucessão que pertencem ao intervalo $]2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100}[$?
2. Quais os termos da sucessão que pertencem ao intervalo $]2 - \frac{1}{1000}, 2 + \frac{1}{1000}[$?
3. Quais os termos da sucessão que pertencem ao intervalo $]2 - \delta, 2 + \delta[,$ com $\delta > 0$?

Resolução

Começemos por observar que $2 - \delta < u_n < 2 + \delta$ é equivalente a $|u_n - 2| < \delta$.

1.

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{100} < u_n < 2 + \frac{1}{100} &\iff |u_n - 2| < \frac{1}{100} \iff \left| \frac{2n+5}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{100} \\ &\iff \left| \frac{2n+5-2n-2}{n+1} \right| < \frac{1}{100} \iff \left| \frac{3}{n+1} \right| < \frac{1}{100} \\ &\iff \frac{3}{n+1} < \frac{1}{100} \iff \frac{300}{100(n+1)} < \frac{n+1}{100(n+1)} \\ &\iff 300 < n+1 \iff n > 299 \end{aligned}$$

Os termos da sucessão que pertencem a $]2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100}[$ são os termos de ordem superior a 299. Então, no intervalo $]2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100}[$, há uma infinidade de termos, tendo-se que fora desse intervalo há um número finito de termos da sucessão.

2.

$$\begin{aligned} 2 - \frac{1}{1000} < u_n < 2 + \frac{1}{1000} &\iff |u_n - 2| < \frac{1}{1000} \iff \left| \frac{2n+5}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{1000} \\ &\iff \left| \frac{2n+5-2n-2}{n+1} \right| < \frac{1}{1000} \iff \left| \frac{3}{n+1} \right| < \frac{1}{1000} \\ &\iff \frac{3}{n+1} < \frac{1}{1000} \iff \frac{3000}{1000(n+1)} < \frac{n+1}{1000(n+1)} \\ &\iff 3000 < n+1 \iff n > 2999 \end{aligned}$$

Os termos da sucessão que pertencem a $]2 - \frac{1}{1000}, 2 + \frac{1}{1000}[$ são os termos de ordem superior a 2999.

3.

$$\begin{aligned} 2 - \delta < u_n < 2 + \delta &\iff |u_n - 2| < \delta \iff \left| \frac{2n+5}{n+1} - 2 \right| < \delta \\ &\iff \left| \frac{2n+5-2n-2}{n+1} \right| < \delta \iff \left| \frac{3}{n+1} \right| < \delta \\ &\iff \frac{3}{n+1} < \delta \iff 3 < n\delta + \delta \\ &\iff 3 - \delta < n\delta \iff \frac{3-\delta}{\delta} < n \iff n > \frac{3-\delta}{\delta} \end{aligned}$$

Os termos da sucessão que pertencem a $]2 - \delta, 2 + \delta[$ são os termos de ordem superior a $\frac{3-\delta}{\delta}$.

Então, para a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$, podemos concluir que, para todo o número real positivo δ , existe uma ordem a partir da qual, todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]2 - \delta, 2 + \delta[$.

Definição 5 Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e a um número real. Diz-se que u_n tende para a (ou que u_n converge para a ou que limite de u_n é a), se para todo o número real positivo δ , existir uma ordem (que dependerá de δ), a partir da qual, todos os termos da sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verificam a condição $a - \delta < u_n < a + \delta$.

Notation 6 Se u_n tende para a , escrevemos $u_n \rightarrow a$ ou $\lim u_n = a$.

Observação 7 Repare-se que a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$, segundo a definição anterior, tende para 2.

Proposição 8 Uma sucessão de números reais não pode tender para dois limites diferentes.

Prova. Suponhamos que havia uma sucessão u_n que tendia para dois limites a e b . Sem perda de generalidade, podemos supor que $a < b$. Seja $\delta = \frac{b-a}{2}$. Como $u_n \rightarrow a$, existe uma ordem p_1 tal que todos os termos da sucessão, de ordem superior a p_1 , verificam a condição $a - \delta < u_n < a + \delta$. E, como $u_n \rightarrow b$, existe uma ordem p_2 tal que todos os termos da sucessão, de ordem superior a p_2 , verificam a condição $b - \delta < u_n < b + \delta$. Então, a partir da maior das duas ordens p_1 e p_2 , todos os termos da sucessão verificam as duas condições $a - \delta < u_n < a + \delta$ e $b - \delta < u_n < b + \delta$. Então, tais termos verificam a condição $u_n \in]a - \delta, a + \delta[\cap]b - \delta, b + \delta[$. Mas, $a + \delta = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ e $b - \delta = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, pelo que $u_n \in]\frac{3a-b}{2}, \frac{a+b}{2}[\cap]\frac{a+b}{2}, \frac{3b-a}{2}[= \emptyset$.

E chegámos a uma conclusão manifestamente impossível, porque o conjunto vazio não tem elementos. Então, é absurdo supor que existe uma sucessão com dois limites diferentes. Então, uma sucessão de números reais não pode ter mais do que um limite. ■

Definição 9 Sucessão convergente é uma sucessão que tende para um número real. Uma sucessão que não tende para nenhum número real diz-se divergente. Note-se que estamos a considerar, apenas, sucessões de números reais.

Definição 10 Infinitésimo é uma sucessão que tende para zero.

Proposição 11 Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão tal que a partir de certa ordem p , todos os termos são iguais a k , com $k \in \mathbb{R}$. Então, u_n tende para k .

Prova. Seja $\delta > 0$. Para $n > p$, temos $k - \delta < k = u_n < k + \delta$, pelo que $\lim u_n = k$. ■

Observação 12 Em particular, se uma sucessão é constante, então a sucessão converge para esse valor constante (valor comum dos seus termos).

Proposição 13 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim(u_n + v_n) = a + b$.

Prova. Seja $\delta > 0$. Se $u_n \rightarrow a$, existe uma ordem p_1 tal que, para $n > p_1$, temos $a - \frac{\delta}{2} < u_n < a + \frac{\delta}{2}$. Se $v_n \rightarrow b$, existe uma ordem p_2 tal que, para $n > p_2$, temos $b - \frac{\delta}{2} < v_n < b + \frac{\delta}{2}$. Seja $p \geq \max\{p_1, p_2\}$. Então, para $n > p$, temos $a - \frac{\delta}{2} < u_n < a + \frac{\delta}{2}$ e $b - \frac{\delta}{2} < v_n < b + \frac{\delta}{2}$. Então, para $n > p$, temos $a - \frac{\delta}{2} + b - \frac{\delta}{2} < u_n + v_n < a + \frac{\delta}{2} + b + \frac{\delta}{2}$, ou seja, $a + b - \delta < u_n + v_n < a + b + \delta$. Então, $\lim(u_n + v_n) = a + b = \lim u_n + \lim v_n$. ■

Proposição 14 *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, $\lim(-u_n) = -a$.*

Prova. Seja $\delta > 0$. Se $u_n \rightarrow a$, existe uma ordem p tal que, para $n > p$, temos $a - \delta < u_n < a + \delta$. Então, para $n > p$, temos $-a + \delta > -u_n > -a - \delta$. Então, para $n > p$, temos $-a - \delta < -u_n < -a + \delta$. Então, $\lim(-u_n) = -a = -\lim u_n$. ■

Proposição 15 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim(u_n - v_n) = a - b$.*

Prova. Se $v_n \rightarrow b$, então $-v_n \rightarrow -b$. Mas, $u_n \rightarrow a$, pelo que $u_n + (-v_n)$ tende para $a + (-b) = a - b$. E, como $u_n + (-v_n) = u_n - v_n$, temos que $\lim(u_n - v_n) = a - b$. ■

Proposição 16 *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, $u_n - a$ tende para zero.*

Prova. Suponhamos que $u_n \rightarrow a$. Seja $v_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim v_n = a$, pelo que $\lim(u_n - a) = \lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = a - a = 0$. ■

Definição 17 *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. A sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se existirem dois números reais m e M , tais que $m \leq u_n \leq M$, para todo o número natural.*

Proposição 18 *Toda a sucessão limitada e monótona é convergente.*

Prova. A demonstração desta proposição depende do seguinte axioma: Todo o subconjunto de \mathbb{R} , majorado e não vazio, tem supremo. ■

Proposição 19 *O produto dum infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.*

Prova. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada. Então, existe um número positivo M , tal que $|u_n| \leq M$, para todo o número natural n . Suponhamos que $v_n \rightarrow 0$. Então, para qualquer número real positivo δ , existe um número natural p , tal que para qualquer $n > p$, temos $|v_n| < \frac{\delta}{M}$. Então, para $n > p$, temos $|u_n| \leq M$ e $|v_n| < \frac{\delta}{M}$, donde vem $|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| < M \times \frac{\delta}{M} = \delta$.

Logo, $\lim(u_n \times v_n) = 0$, pelo que $u_n \times v_n$ é um infinitésimo. ■

Definição 20 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B_r(a)$ definido por $B_r(a) =]a - r, a + r[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$.*

Proposição 21 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim(u_n \times v_n) = ab$.*

Prova. Seja $\delta > 0$. Queremos determinar $\varepsilon > 0$, de modo que, para $|u_n - a| < \varepsilon \wedge |v_n - b| < \varepsilon$, tenhamos $|u_n v_n - ab| < \delta$.

Note-se, que em vez de termos usado ε , na condição anterior, podíamos ter usado ε_1 e ε_2 , mas só teríamos mais trabalho. Como $\lim u_n = a$, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma ordem p_1 , tal que, para $n > p_1$, temos $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$.

E, como $\lim v_n = b$, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma ordem p_2 , tal que, para $n > p_2$, temos $b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon$.

Seja $p \geq \max\{p_1, p_2\}$. Então, para $n > p$, temos $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \wedge b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon$.

Se escolhermos ε , de modo que $\varepsilon < a \wedge \varepsilon < b$, temos $0 < a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \wedge 0 < b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon$.

Então,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 < a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \\ 0 < b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon \end{cases} &\implies 0 < (a - \varepsilon)(b - \varepsilon) < u_n v_n < (a + \varepsilon)(b + \varepsilon) \\ &\implies 0 < ab - (a + b)\varepsilon + \varepsilon^2 < u_n v_n < ab + (a + b)\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &\implies ab - (a + b)\varepsilon - \varepsilon^2 < u_n v_n < ab + (a + b)\varepsilon + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

E, agora, vamos escolher ε , de modo que $(a + b)\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \delta$, isto é, de modo que $\varepsilon^2 + (a + b)\varepsilon - \delta \leq 0$.

Ora, para $\delta > 0$, a equação $\varepsilon^2 + (a+b)\varepsilon - \delta = 0$ tem duas raízes reais de sinais contrários:

$$\varepsilon^2 + (a+b)\varepsilon - \delta = 0 \iff \varepsilon = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4\delta}}{2}$$

Então, de $(a+b)\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \delta$, vem

$$\frac{-(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + 4\delta}}{2} < \varepsilon < \frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 4\delta}}{2}$$

Mas, devemos ter $0 < \varepsilon < \min\{a, b\}$, pelo que

$$0 < \varepsilon < \min\{a, b\} \wedge 0 < \varepsilon < \frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 4\delta}}{2}$$

Então,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > p \implies ab - \delta < u_n v_n < ab + \delta$$

Então, $\lim(u_n v_n) = ab$. ■

Proposição 22 *Toda a sucessão de números reais que seja convergente é limitada.*

Prova. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, existe uma ordem p , tal que todos os termos de ordem superior a p pertencem ao intervalo $]a-1, a+1[$. Seja $X = \{u_1, u_2, \dots, u_p, a-1, a+1\}$. Como X é finito, X tem mínimo e máximo. Seja $m = \min X$ e $M = \max X$. Então, $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada. ■

Proposição 23 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim(u_n \times v_n) = ab$.*

Prova. Já vimos que a afirmação anterior é verdadeira para a e b positivos. Se $a = 0$, então $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um infinitésimo, porque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um infinitésimo e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada. Analogamente, se $b = 0$.

Suponhamos que $a > 0 \wedge b < 0$. Então, $\lim(-v_n) = -b > 0$.

Então, como vimos, $\lim(u_n \times (-v_n)) = a(-b) = -ab$. Logo, $\lim(-u_n \times v_n) = -ab$, pelo que $\lim(u_n \times v_n) = ab$.

Analogamente, se $a < 0 \wedge b > 0$.

Se $a < 0 \wedge b < 0$, temos que $\lim((-u_n)(-v_n)) = (-a) \times (-b) = ab$.

Então, $\lim((u_n)(v_n)) = \lim((-u_n)(-v_n)) = ab$. ■

Proposição 24 *Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$.*

Prova. Seja $\delta > 0$. Queremos determinar $\varepsilon > 0$, de modo que, para $|u_n - a| < \varepsilon$, seja $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{a} \right| < \delta$.

Seja $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < a$. Como $\lim u_n = a$, existe uma ordem p , tal que para $n > p$, temos $0 < a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$.

Então, para $n > p$, temos $\frac{1}{a-\varepsilon} > \frac{1}{u_n} > \frac{1}{a+\varepsilon}$.

Logo, para $n > p$, temos

$$\frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{a-\varepsilon}$$

Determinemos ε , de modo que $\varepsilon < a \wedge \frac{1}{a} - \delta \leq \frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{a-\varepsilon} \leq \frac{1}{a} + \delta$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a} - \delta \leq \frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{a-\varepsilon} \leq \frac{1}{a} + \delta &\iff \frac{1}{a} - \delta \leq \frac{1}{a+\varepsilon} \wedge \frac{1}{a-\varepsilon} \leq \frac{1}{a} + \delta \\
 &\iff a + \varepsilon - a(a + \varepsilon)\delta \leq a \wedge a - \varepsilon \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \delta} \\
 &\iff \varepsilon - a^2\delta - a\varepsilon\delta \leq 0 \wedge -\varepsilon \geq -a + \frac{a}{1 + a\delta} \\
 &\iff \varepsilon(1 - a\delta) \leq a^2\delta \wedge \varepsilon \leq a - \frac{a}{1 + a\delta} \\
 &\iff \varepsilon(1 - a\delta) \leq a^2\delta \wedge \varepsilon \leq \frac{a + a^2\delta - a}{1 + a\delta} \\
 &\iff \varepsilon(1 - a\delta) \leq a^2\delta \wedge \varepsilon \leq \frac{a^2\delta}{1 + a\delta} \iff \varepsilon \leq \frac{a^2\delta}{1 + a\delta}
 \end{aligned}$$

Logo qualquer que seja o número positivo δ , existe uma ordem p , tal que, para todo o $n > p$, temos $\frac{1}{a} - \delta < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{a} + \delta$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$. ■

Proposição 25 *Seja $a < 0$ e seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$.*

Prova. Seja $v_n = -u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim v_n = -a > 0$ e, pela proposição anterior, temos $\lim \left(\frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$.

Então, $\lim \left(\frac{1}{-u_n} \right) = -\frac{1}{a}$, donde se conclui que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$. ■

Proposição 26 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.*

Prova. Ora, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim \left(u_n \times \frac{1}{v_n} \right) = \lim u_n \times \lim \frac{1}{v_n} = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. ■

Exercício 27 *Calcule o limite de cada uma das seguintes sucessões:*

1. $u_n = \frac{2n+1}{3n+5}$
2. $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+4n+2}$
3. $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{2n+5}$
4. $u_n = \frac{3n^2+2n+1}{\sqrt{n^4+1}}$
5. $u_n = \frac{\sin n}{n+5}$
6. $u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$
7. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
8. $u_n = \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2-n+1}$
9. $u_n = \sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d}$, com a, b, c, d números reais convenientes.
10. $u_n = \sqrt{an^2+bn+c} - \sqrt{an^2+dn+f}$, com b, c, d, f números reais convenientes e $a > 0$.
11. $u_n = \sqrt[3]{n^3+5n+1} - \sqrt[3]{n^3+5n+2}$
12. $u_n = \frac{3^n+5^n}{4^n+5^n}$
13. $u_n = \frac{3^{2n}+6^n}{3^{2n}+8^n}$

Resolução

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n(2+\frac{5}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{2+\frac{5}{n}} = \frac{(+\infty) \times (2+0+0)}{2+0} = +\infty$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+1}{\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$5. \frac{\sin n}{n+5} = \frac{1}{n+5} \times \sin n$$

$\frac{1}{n+5}$ é um infinitésimo e $-1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n+5} = 0$.

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) = \sqrt{+\infty} + \sqrt{+\infty} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

8.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2-n+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+2} + \sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+2} + \sqrt{n^2-n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+2 - n^2+n-1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})} + \sqrt{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} + n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

9. Começamos por referir que a, b, c, d devem ser tais que a expressão $\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d}$ esteja definida para todo o número natural n , de acordo com a definição apresentada no início do Capítulo.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d} \\ &= \frac{(\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d})(\sqrt{n^2+an+b} + \sqrt{n^2+cn+d})}{\sqrt{n^2+an+b} + \sqrt{n^2+cn+d}} \\ &= \frac{n^2+an+b - n^2-cn-d}{\sqrt{n^2(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2})} + \sqrt{n^2(1+\frac{c}{n}+\frac{d}{n^2})}} \\ &= \frac{(a-c)n+b-d}{n\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}} + n\sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{d}{n^2}}} = \frac{a-c+\frac{b-d}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{c}{n}+\frac{d}{n^2}}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d}) = \frac{a-c}{1+1} = \frac{a-c}{2}$$

10. Sejam $u_n = \sqrt{an^2 + bn + c}$ e $v_n = \sqrt{an^2 + dn + f}$. Então,

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \frac{(\sqrt{an^2 + bn + c} - \sqrt{an^2 + dn + f})(\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an^2 + dn + f})}{\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an^2 + dn + f}} \\ &= \frac{an^2 + bn + c - an^2 - dn - f}{\sqrt{n^2(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2})} + \sqrt{n^2(a + \frac{d}{n} + \frac{f}{n^2})}} \\ &= \frac{(b-d)n + c - f}{n\sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}} + n\sqrt{a + \frac{d}{n} + \frac{f}{n^2}}} = \frac{b-d + \frac{c-f}{n}}{\sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}} + \sqrt{a + \frac{d}{n} + \frac{f}{n^2}}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim (\sqrt{an^2 + bn + c} - \sqrt{an^2 + dn + f}) = \frac{b-d}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{a-c}{2\sqrt{a}}$$

11. Começemos por observar que $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$. Então,

$$x - y = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$$

Utilizando a propriedade anterior, temos:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt[3]{n^3 + 5n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 5n + 2} \\ &= \frac{(\sqrt[3]{n^3 + 5n + 1})^3 - (\sqrt[3]{n^3 + 5n + 2})^3}{(\sqrt[3]{n^3 + 5n + 1})^2 + \sqrt[3]{n^3 + 5n + 1}\sqrt[3]{n^3 + 5n + 2} + (\sqrt[3]{n^3 + 5n + 2})^2} \\ &= \frac{n^3 + 5n + 1 - n^3 - 5n - 2}{\left(n\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\right)^2 + n\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}n\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \left(n\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}}\right)^2} \\ &= \frac{-1}{n^2\left(\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\right)^2 + n^2\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + n^2\left(\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \lim (\sqrt[3]{n^3 + 5n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 5n + 2}) = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

$$12. \lim \frac{3^n + 5^n}{4^n + 5^n} = \lim \frac{5^n \left(\frac{3^n}{5^n} + 1\right)}{5^n \left(\frac{4^n}{5^n} + 1\right)} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

$$13. \lim \frac{3^{2n} + 6^n}{3^{2n} + 8^n} = \lim \frac{9^n \left(1 + \frac{6^n}{9^n}\right)}{9^n \left(1 + \frac{8^n}{9^n}\right)} = \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{8}{9}\right)^n} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

1.2 Progressões aritméticas

Definição 28 Progressão aritmética, de razão r , é uma sucessão (u_n) em que cada termo é igual à soma do termo anterior com r .

Então, $u_{n+1} = u_n + r$.

Por aplicação sucessiva da propriedade anterior, temos:

$$u_1 = u_1 + 0r, \quad u_2 = u_1 + r, \quad u_3 = u_1 + 2r, \quad u_4 = u_1 + 3r$$

Então,

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Da igualdade anterior resulta

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

Exemplo 29 *Determine o termo geral da sucessão em que o terceiro termo é 19 e o décimo termo é 40.*

Resolução

$$u_{10} = u_3 + 7r \implies 40 = 19 + 7r \implies 7r = 21 \implies r = 3$$

$$\text{Então, } u_n = u_3 + (n-3)3 = 19 + 3n - 9 = 3n - 10$$

Exemplo 30 *Determine a soma dos primeiros cinquenta termos da progressão aritmética cujo termo geral é $u_n = 3n + 10$.*

Resolução

$$\text{Seja } S_{50} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{49} + u_{50} = u_{50} + u_{49} + \cdots + u_2 + u_1$$

Então,

$$2S_{50} = (u_1 + u_{50}) + (u_2 + u_{49}) + \cdots + (u_{49} + u_2) + (u_{50} + u_1)$$

Mas, todas as cinquenta parcelas são iguais, pelo que vem:

$$S_{50} = \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 = (13 + 160) \times 25 = 173 \times 25 = 4325$$

No caso geral, temos, para a soma dos primeiros termos duma progressão aritmética:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Exemplo 31 *Determine a soma dos primeiros cem números inteiros positivos.*

Resolução

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1 + 100}{2} \times 100 = 101 \times 50 = 5050$$

Exemplo 32 *Determine a soma dos n primeiros números inteiros positivos.*

Resolução

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1 + n}{2} \times n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Exemplo 33 *Suponhamos que temos os números naturais de 1 a 100000, escritos ao lado uns dos outros e que colocamos o sinal de adição (+), entre todos os algarismos. Determine a soma obtida.*

Resolução

Suponhamos, para não complicar o raciocínio, que queríamos "somar os algarismos" dos números de 1 a 99. Podemos começar por considerar que começamos por zero em vez de 1 e que, em vez de 0, 1, 2, \dots , 9 escrevemos 00, 01, 02, \dots , 09. Assim, obtemos a seguinte lista (incompleta):

$$00, 01, 02, 03, \dots, 09, 10, 11, 12, 13, \dots, 19, \dots, 90, 91, 92, \dots, 99$$

Nesta lista, cada algarismo aparece dez vezes escrito em primeiro lugar e outras dez vezes escrito em segundo lugar.

Então, a soma de todos eles é $(0 + 1 + 2 + \cdots + 8 + 9) \times 10 \times 2$, ou seja, $\frac{0+9}{2} \times 10 \times 10 \times 2 = 900$.

Imaginemos, agora, a lista dos números de 00000 até 99999. Cada algarismo aparece 10000 vezes em primeiro lugar, 10000 vezes em segundo lugar, etc..

Então, "a soma de todos os algarismos" dos números de 00000 até 99999 é

$$(0 + 1 + 2 + \cdots + 8 + 9) \times 10000 \times 5 = 45 \times 50000 = 2250000$$

Como a soma pretendida inclui ainda os algarismos do número 100000, o qual contribui com uma unidade para a soma, temos que o valor procurado é de 2250001.

1.3 Progressões geométricas

Definição 34 *Progressão geométrica, de razão r , é uma sucessão (u_n) em que cada termo é igual ao produto do termo anterior por r .*

Então, $u_{n+1} = u_n \times r$.

Por aplicação sucessiva da propriedade anterior, temos:

$$u_2 = u_1 \times r, \quad u_3 = u_1 \times r^2, \quad u_4 = u_1 \times r^3, \dots$$

Então,

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Da igualdade anterior, caso $r \neq 0 \wedge u_1 \neq 0$, resulta que

$$u_n = u_k \times r^{n-k}$$

Suponhamos que pretendemos calcular a soma dos primeiros n termos duma progressão geométrica de razão r diferente de 1.

$$\text{Seja } S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n.$$

Então:

$$\begin{aligned} rS_n &= (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n) \times r \\ &= u_1 \times r + u_2 \times r + u_3 \times r + \dots + u_{n-1} \times r + u_n \times r = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + u_{n+1} \end{aligned}$$

Das igualdades anteriores, vem

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n - u_2 - u_3 - u_4 - \dots - u_n - u_{n+1} \\ &= u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1 \times r^n = u_1 (1 - r^n) \end{aligned}$$

Logo, $S_n (1 - r) = u_1 (1 - r^n)$.

Então,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Problema 35 *Maria e a apanha das maçãs*

Durante 8 dias, a Maria apanha maçãs duma macieira existente junto à sua casa, obedecendo, sempre, à mesma regra: em cada dia apanha metade das maçãs existentes na macieira e, ainda, mais meia maçã. Quantas maçãs havia na macieira, sabendo que, ao fim desses 8 dias, se esgotaram as maçãs. Evidentemente que estamos a considerar que mais ninguém apanhou maçãs, que não nascem maçãs entretanto, que não cai nenhuma maçã ao chão...

Resolução

1. Números bons e números maus

Suponhamos que, num dado dia, há quatro maçãs na macieira. Então, a Maria tem de apanhar duas maçãs e meia, ficando uma maçã e meia na macieira. Esta hipótese mostra-nos que os números pares são "bons", não servindo para solução do problema.

Quanto aos números ímpares, serão todos "bons"?

Os números 1 e 3 são "bons", mas 5 é "mau", porque se houver 5 maçãs, a Maria tem de apanhar 3 maçãs, deixando 2 maçãs e já sabemos que 2 é "mau".

Qual será a sequência dos números "bons"?

Como, em cada dia, Maria apanha pouco mais de metade das maçãs, no dia anterior deve haver pouco mais do dobro das maçãs (será o dobro mais uma?).

Sequência dos números "bons": 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, ...

Resposta: 255 maçãs

2. Se hoje há y maçãs, quantas maçãs havia ontem?

Suponhamos que hoje há y maçãs e que ontem havia x . Então, $x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = y$, equação esta que é equivalente a $x = 2y + 1$.

| | | | | | | | | |
|-----|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| Dia | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| y | 0 | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 |
| x | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 |

3. Quantas maçãs apanhou a Maria em cada dia?

Sejam x, y, z , o número de maçãs existentes no início de três dias consecutivos. Então, $x = 2y + 1$ e $y = 2z + 1$, pelo que $x = 4z + 3$. Então, no primeiro desses três dias havia $4z + 3$ maçãs, enquanto que ficaram para o dia seguinte $2z + 1$ maçãs. Logo, a Maria apanhou $2z + 2$ maçãs nesse dia. E no dia seguinte apanhou $z + 1$ maçãs. Logo, em cada dia, a Maria apanha o dobro das maçãs que apanhará no dia seguinte.

Como no último dia, a Maria apanha uma maçã, temos que o número total de maçãs apanhadas é

$$S_8 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$$

Então, $2S_8 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256$.

Subtraindo membro a membro as duas igualdades, obtemos $S_8 = 256 - 1 = 255$.

4. Bem no cimo da macieira, havia uma maçã escondida...

Suponhamos que a Maria, ao contar as maçãs não se apercebeu duma maçã escondida. Então, para nós que sabemos que há uma maçã a mais, a Maria apanha, em cada dia, metade das maçãs e, no fim, ainda há uma maçã. Então, partindo do fim, temos que o número de maçãs existente na macieira, no início de cada dia, é 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Logo, inicialmente, tínhamos 255 maçãs, porque não havia maçã escondida...

5. As maçãs e as sucessões

Seja n , o dia a contar do fim, isto é, 1 representa o último dia, 2 o penúltimo,...

Seja x_n o número de maçãs existentes no dia n , antes da apanha, e y_n o número de maçãs que ficam na macieira, depois da apanha.

Então, $x_{n+1} = 2y_{n+1} + 1$ e $x_n = y_n$. Repare-se que o número de maçãs que ficam num dia, depois da apanha, é o número de maçãs que a Maria encontra no dia seguinte.

Então, $x_{n+1} = 2x_n + 1$, partindo-se do valor inicial $x_1 = 1$.

Logo, $x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 15, x_5 = 31, x_6 = 63, x_7 = 127, x_8 = 255$

6. Sucessões que "ainda" não são progressões geométricas

Vamos considerar uma sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = ax_n + b, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

É claro, que a equação anterior só nos interessa, quando $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

Vejamos que podemos obter uma progressão geométrica de razão a , somando a x_n uma constante apropriada (β):

Seja $z_n = \beta + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$z_{n+1} = \beta + x_{n+1} = \beta + ax_n + b$$

De $z_n = \beta + x_n$, vem $az_n = a\beta + ax_n$, pelo que, para obtermos uma progressão geométrica de razão a , devemos ter $z_{n+1} = az_n$.

Então, $\beta + ax_n + b = a\beta + ax_n$, donde se conclui que $\beta + b = a\beta$.

Então, $\beta(a-1) = b$, pelo que $\beta = \frac{b}{a-1}$. Então, $z_1 = \beta + x_1 = \frac{b}{a-1} + c$. Logo,

$$z_n = z_1 \times a^{n-1} = \left(\frac{b}{a-1} + c \right) a^{n-1}$$

Então,

$$x_n = z_n - \beta = \left(\frac{b}{a-1} + c \right) a^{n-1} - \frac{b}{a-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

No exemplo das maçãs, tínhamos $a = 2, b = 1, c = 1$.

Então,

$$x_n = \left(\frac{1}{2-1} + 1 \right) 2^{n-1} - \frac{1}{2-1}, \forall n \in \mathbb{N} = 2 \times 2^{n-1} - 1, \forall n \in \mathbb{N} = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $x_8 = 2^8 - 1 = 255$.

7. As maçãs e a calculadora

Comecemos por digitar, numa calculadora gráfica o número 1, carregando-se a seguir na tecla ENTER (ou EXE).

Depois, escrevemos $2 \times \text{Ans} + 1$. Carregando sucessivamente na Tecla ENTER, obtemos:

1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, ...

| F1- Tools | F2- Setup | F3- I/O | F4- Mode | F5- Pr3mID | F6- Clean Up | |
|--------------|--------------|------------|-------------|---------------|-----------------|-----|
| 1. | | | | | | 1. |
| 2. 1. + 1 | | | | | | 3. |
| 2. 3. + 1 | | | | | | 7. |
| 2. 7. + 1 | | | | | | 15. |
| 2. 15. + 1 | | | | | | 31. |
| 2. 31. + 1 | | | | | | 63. |
| 2ans(1)+1 | | | | | | |
| MAIN | RAD APPROX | | FUNC | | 6/7 | |

Problema 36 *O Xadrez e os grãos de trigo*

É bem conhecida a lenda do xadrez e dos grãos de trigo: O inventor do jogo pediu um grão pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda e assim sucessivamente, duplicando o número de grãos por cada nova casa do tabuleiro. Sabendo que há 64 casas, no tabuleiro, quantos grãos de trigo pediu o inventor do xadrez?

Resolução

Embora não pareça, este problema resolve-se da mesma maneira que o problema das maçãs:

$$\begin{cases} S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63} \\ 2S_{64} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} + 2^{64} \end{cases}$$

Então, $S_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

$$\blacksquare 2^{64} - 1 \\ 18446744073709551615$$

O número anterior é extremamente elevado.

Para ter uma ideia da quantidade de trigo envolvida, resolvi contar grãos de arroz, porque o arroz está mais disponível do que o trigo, tendo verificado que 4000 grãos de arroz pesaram 78 g. Então, o peso de $2^{64} - 1$ grãos de arroz será de $\frac{2^{64} - 1}{4000} \times 78 \times 10^{-3}$ kg, ou seja, $3,597\,115\,094 \times 10^{11}$ toneladas. Este arroz corresponde a mais de 55 toneladas por habitante (humano) do planeta Terra, o que significa 5 camiões com pouco mais de 11 toneladas de arroz, cada um. Para obter os resultados anteriores, utilizei o valor de $6,450 \times 10^9$ para a população mundial (valor estimado em Junho de 2005).

Então, seriam necessários $3,270\,104\,631 \times 10^{10}$ camiões para transportar o arroz. Imaginando que cada camião tem 10 metros de comprimento, teríamos uma fila com mais de $3,270\,104\,631 \times 10^{11}$ m, isto é, com cerca de $3,27 \times 10^8$ quilómetros de comprimento.

Como o equador da Terra mede cerca de 40000 quilómetros, teríamos $\frac{3,27 \times 10^8}{40000}$ voltas à Terra, ou seja, cerca de 8175 voltas. Admitindo que cada camião tem 2,5 m de largura, seria necessária uma estrada, seguindo o equador, com mais de 20 quilómetros de largura! Estamos a supor que os camiões estão parados e encostados uns aos outros.

Numa segunda oportunidade, pesei 673 grãos de trigo, tendo obtido o valor de 28 g. Então, o peso de $2^{64} - 1$ grãos de trigo será

$$\frac{2^{64} - 1}{673} \times 28 \text{ g} \approx 7,674\,722\,646 \times 10^{17} \text{ g} \approx 7,674\,722\,646 \times 10^{14} \text{ kg}$$

Obtém-se, então, $7,674\,722\,646 \times 10^{11}$ toneladas de trigo.

Procedendo-se da mesma maneira que no caso dos grãos de arroz, obtemos uma estrada, à volta do equador, com cerca de 43605 m de largura. Esta estrada permitia que se disputasse a prova da maratona (em atletismo) em linha recta e transversalmente, isto é, quem quisesse a travessar a estrada, teria de percorrer uma distância superior àquela que é percorrida por atletas profissionais em mais de duas horas.

Imaginemos uma prova da maratona disputada numa passadeira para peões existente numa estrada situada algures próximo do Equador.

Problema 37 *O Quebra-cabeças das Torres de Hanói*

Suponhamos que temos três hastes metálicas, numa das quais estão colocados n discos numerados de 1 até n . Pretendemos mudar todos os discos para uma (qualquer) das outras duas hastes, respeitando as seguintes regras:

- 1ª) Apenas podemos usar as três hastes referidas.
- 2ª) Quando retiramos um disco duma haste, temos de colocá-lo noutra haste.
- 3ª) Não podemos colocar um disco por cima de outro cujo número seja inferior.

Qual o número mínimo de movimentos, para mudar todos os discos duma haste para outra?

Resolução

Se tivermos um só disco, basta 1 movimento.

Se tivermos 2 discos, movemos o disco superior para uma das hastes, depois movemos o segundo disco para a terceira haste e, por fim, o primeiro disco para a terceira haste. São necessários 3 movimentos.

Se tivermos 3 discos, esquecemos o disco inferior, considerando 2 discos. Para mover esses 2 discos, são necessários 3 movimentos. A seguir, movemos o último disco para a haste vazia (1 movimento) e, depois, movemos os dois discos para a haste que ficou com o último disco (3 movimentos). O número mínimo de movimentos, para mover 3 discos, é 7.

Suponhamos que, para mover n discos são necessários x_n movimentos. Então, para mover $n + 1$ discos são necessários $x_n + 1 + x_n$ movimentos, ou seja, $2x_n + 1$ movimentos, obtendo-se a sucessão 1, 3, 7, 15, 31, ..., que é a sucessão do problema das maçãs.

Logo, $x_n = 2^n - 1$. Observe-se que, nesta sucessão, $x_{n+1} = 2x_n + 1$.

Este problema pode ser resolvido por crianças do primeiro ciclo do Ensino Básico, utilizando 4 ou 5 discos de diâmetros diferentes ou recipientes que caibam uns dentro dos outros. Essa experiência já foi realizada há cerca de quinze anos por uma professora que, nessa altura, era minha aluna de 12º Ano.

Problema 38 Da Terra à Lua numa folha de papel A_4

Se dobrarmos uma folha de papel, a espessura da folha dobrada passa para o dobro. Suponha que a espessura duma folha de papel é 0,1 mm. Qual o número mínimo de dobragens que devem ser feitas para que se obtenha uma espessura superior à distância da Terra à Lua?

Resolução

A distância da Terra à Lua é de, aproximadamente, 384400 km.

Consideremos a progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo $\frac{1}{10}$. O termo geral desta progressão é $x_n = \frac{2^{n-1}}{10}$. Calculemos alguns termos da progressão:

$$x_{20} = \frac{2^{19}}{10} \text{ mm} \approx 52 \text{ m}$$

$$x_{30} = \frac{2^{29}}{10} \text{ mm} \approx 54 \text{ km}$$

$$x_{40} = \frac{2^{39}}{10} \text{ mm} \approx 54976 \text{ km}$$

$$x_{45} = \frac{2^{44}}{10} \text{ mm} \approx 1759\,219 \text{ km}$$

$$x_{46} = \frac{2^{45}}{10} \text{ mm} \approx 3518\,437 \text{ km}$$

$$x_{47} = \frac{2^{46}}{10} \text{ mm} \approx 7036\,874 \text{ km}$$

Logo, ao fim de 47 dobragens, ultrapassamos a distância da Terra à Lua.

Convém chamar a atenção para resultados inesperados que resultam do crescimento muito rápido de algumas sucessões e para alguns jogos (proibidos em Portugal) que prometem o enriquecimento rápido dos seus participantes, desde que arranjem 3 "vítimas" para entrar no jogo.

O problema está em que, mesmo se todos os habitantes (humanos) da Terra participassem no jogo, rapidamente chegaríamos à saturação.

Repare-se que neste tipo de jogos (jogos de soma zero), para alguém ganhar, alguém tem de perder. Note-se que nos jogos em referência, a soma é, mesmo, inferior a zero, porque a entidade organizadora do jogo faz-se pagar por aqueles que entram no jogo.

Exemplo 39 Uma sucessão por recorrência, já nossa conhecida...

Consideremos a sucessão definida por $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = bx_n + c, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, com $b \neq 0 \wedge b \neq 1$. Então, a sucessão (y_n) definida por $y_n = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, é uma progressão geométrica de razão b .

Resolução

$$y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} = (bx_{n+1} + c) - (bx_n + c) = bx_{n+1} - bx_n = b(x_{n+1} - x_n) = by_n$$

Logo, a sucessão (y_n) é uma progressão geométrica de razão b .

Vejamos um exemplo concreto:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Então, } y_1 = x_2 - x_1 = \frac{2}{3} \times 5 + 1 - 5 = -\frac{2}{3}$$

Logo,

$$y_n = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Mas, } y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{2}{3}x_n + 1 - x_n = 1 - \frac{1}{3}x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

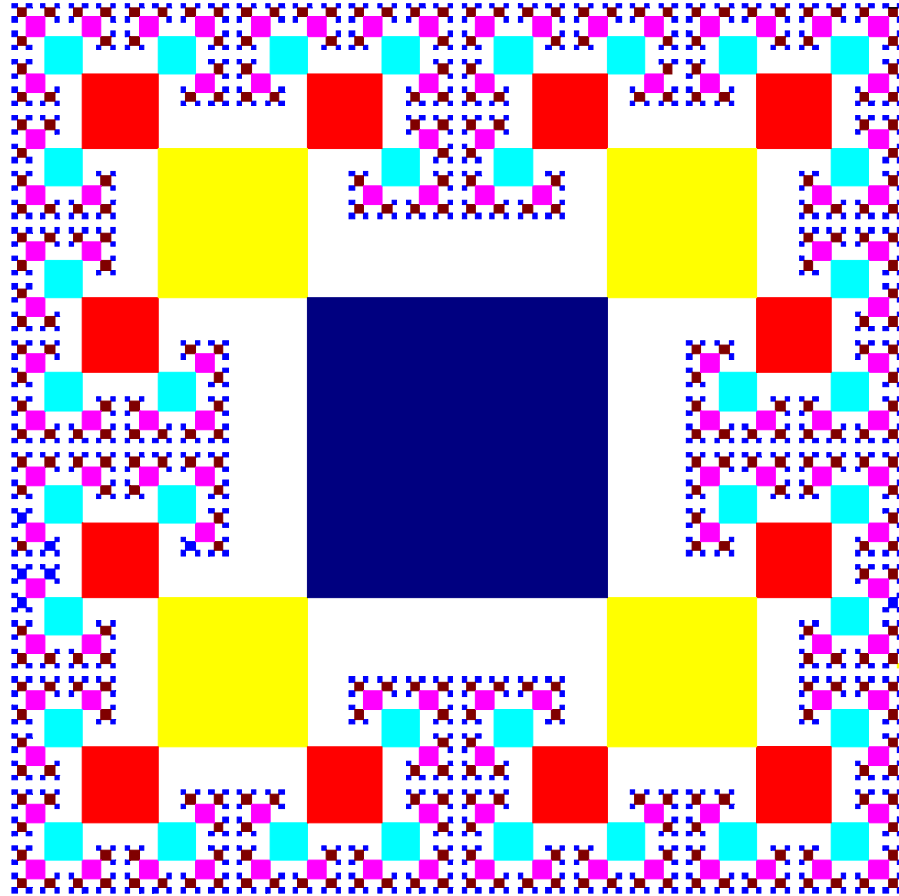
Então, $\frac{1}{3}x_n = 1 - y_n$, donde vem $x_n = 3 - 3y_n$.

Logo,

$$x_n = 3 + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 40 *Uma sucessão de quadrados*

Consideremos a figura seguinte, a qual é constituída por um quadrado central cujo lado se toma para unidade. Em cada vértice do quadrado inicial, construiu-se quatro quadrados de lado metade do lado do anterior. A partir daqui, em todos os quadrados do passo anterior e em cada um dos três vértices que não pertencem a esses quadrados, construímos um quadrado com metade do lado dos quadrados desse passo (anterior). E o processo continua...



Seja A_0 a área do quadrado inicial (de lado 1). Então, $A_0 = 1$.

Seja A_1 a área dos quatro quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{2}$). Então, $A_1 = 4 \times \frac{1}{4} = 1$.

Seja A_2 a área dos quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{4}$). Então, $A_2 = 4 \times 3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{4}$.

Seja A_3 a área dos quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{8}$). Então, $A_3 = 4 \times 3^2 \times \frac{1}{64} = \frac{9}{16}$.

Ao passarmos dum passo para o seguinte (com excepção do primeiro para o segundo) o número de quadrados triplica e a área de cada um deles passa para um quarto da área de cada quadrado do passo anterior. Então, estamos em presença duma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$, excluindo-se o primeiro termo. Logo, $A_0 = 1$ e $A_n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, se $n \geq 1$.

Seja S_n a soma das áreas de todos os quadrados construídos até ao passo n , isto é, $S_n = \sum_{k=0}^n A_k$.

Então, $S_0 = 1$ e $S_n = 1 + 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = 5 - 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$, se $n \geq 1$.

Logo, $\lim S_n = \lim \left(5 - 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 5$.

Vejamos, agora, os perímetros dos quadrados, em vez das suas áreas.

Seja P_0 o perímetro do quadrado inicial (de lado 1). Então, $P_0 = 4$.

Seja P_1 o perímetro dos quatro quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{2}$). Então, $P_1 = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$.

Seja P_2 o perímetro dos quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{4}$). Então, $P_2 = 4 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{4} = 12$.

Seja P_3 o perímetro dos quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{8}$). Então, $P_3 = 4 \times 3^2 \times 4 \times \frac{1}{8} = 18$.

Ao passarmos dum passo para o seguinte (com excepção do primeiro para o segundo) o número de quadrados triplica e o perímetro de cada um deles passa para metade do perímetro de cada quadrado do passo anterior. Então, estamos em presença duma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$, excluindo-se o primeiro termo.

Então, $P_0 = 4$ e $P_n = 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, se $n \geq 1$.

Seja Y_n a soma dos perímetros de todos os quadrados construídos até ao passo n , isto é, $Y_n = \sum_{k=0}^n P_k$.

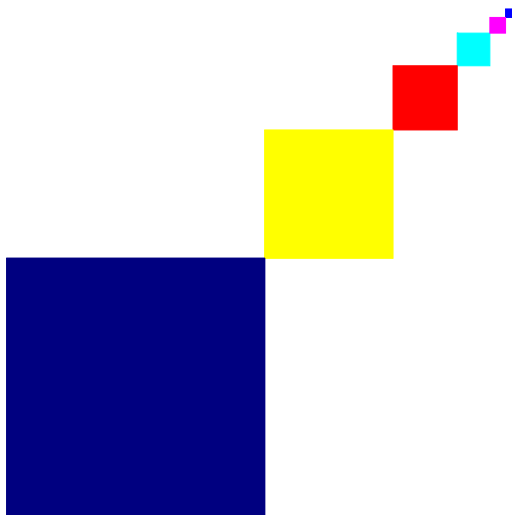
Então, $Y_0 = 4$ e $Y_n = 4 + 8 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 12$, se $n \geq 1$.

Então, $\lim Y_n = \lim \left(16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 12\right) = +\infty$.

Observação 41 *Convém chamar a atenção para um facto muito importante: será que os quadrados (abertos) são todos disjuntos?*

Exemplo 42 *Outra sucessão de quadrados*

Consideremos a seguinte figura em que o quadrado maior tem lado 1 e cada um dos quadrados seguintes tem metade do lado do quadrado anterior:



Sejam $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ as áreas dos quadrados de lados $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$, respectivamente.

Neste caso, temos $A_0 = 1$ e cada quadrado tem um quarto da área do quadrado anterior.

Então, $A_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

A soma das áreas dos quadrados é dada por

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Assim, por exemplo, $S_0 = A_0 = 1$ e $S_1 = A_0 + A_1 = \frac{5}{4}$.

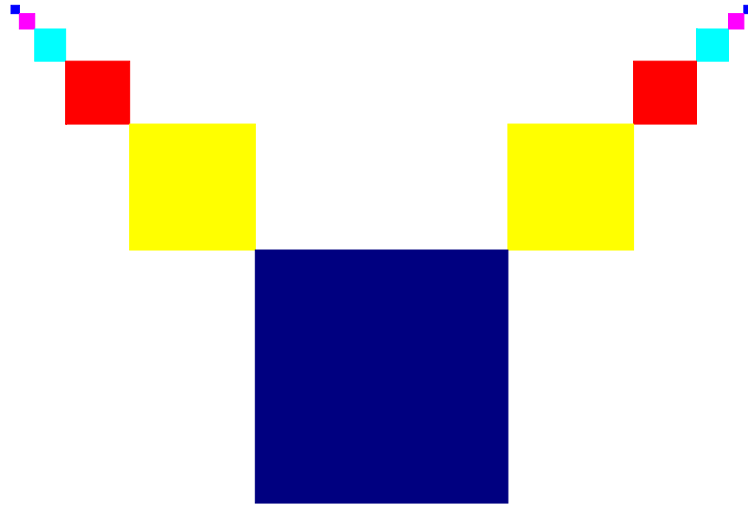
Sejam $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ os perímetros dos quadrados de lados $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$, respectivamente.

Então, $P_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ e Y_n , a sucessão das somas dos perímetros, é dada por

$$Y_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 8 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Então, $\lim S_n = \lim \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) = \frac{4}{3}$ e $\lim Y_n = \lim \left(8 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right) = 8$.

Exemplo 43 *Ainda uma sucessão de quadrados*



Suponhamos que o lado do quadrado maior é 1 e que os sucessivos quadrados (da mesma cor) têm um lado que é metade do lado do(s) quadrado(s) do passo anterior. Seja A'_0 a área do quadrado inicial, A'_1 a área dos dois quadrados seguintes e assim sucessivamente.

Então, $A'_0 = 1$ e cada quadrado seguinte tem um quarto da área do quadrado anterior.

Então, $A'_n = 2 \times \left(\frac{1}{4} \right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Note-se que não se trata duma progressão geométrica, porque $A'_1 = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} A'_0$, embora $A'_{n+2} = \frac{1}{4} A'_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. A soma das áreas dos quadrados é dada por

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=0}^n A'_k = A'_0 + \sum_{k=1}^n A'_k = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $S'_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ e $S'_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{13}{8}$. É claro que $S'_0 = 1$. Outra maneira consiste em verificar que $S'_0 = A'_0 = 1$ e que para $n \geq 1$, temos

$$S'_n = 2S_n - 1 = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} - 1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

A igualdade anterior resulta de ter passado a haver o dobro dos quadrados do exemplo anterior, com exceção do quadrado inicial (de lado 1) que continua a ser único.

Quanto à sucessão dos perímetros, temos $P'_0 = 4$ e $P'_n = 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ e Y'_n

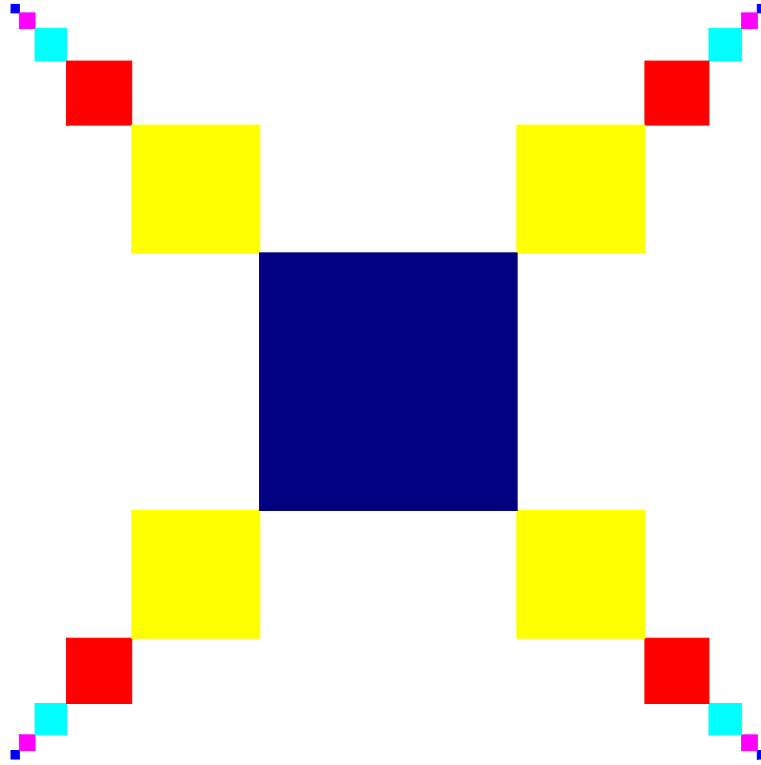
A sucessão das somas dos perímetros, é dada por $Y'_n = 4 + 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 12 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\lim S'_n = \lim \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) = \frac{5}{3}$ e $\lim Y'_n = \lim \left(12 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right) = 12$.

Os limites anteriores podiam ser calculados da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \lim S'_n = 2 \lim S_n - 1 = 2 \times \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3} \\ \lim Y'_n = 2 \lim Y_n - 4 = 2 \times 8 - 4 = 12 \end{cases}$$

Exemplo 44 *Mais uma sucessão de quadrados*



De modo análogo aos anteriores, temos $A_0'' = 1$ e $A_n'' = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Então,

$$\begin{aligned} S_n'' &= \sum_{k=0}^n A_k'' = A_0'' + \sum_{k=1}^n A_k'' = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \\ &= \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

É claro que $S_0'' = 1$ e $\lim S_n'' = \frac{7}{3}$.

Por outro lado, temos $P_0'' = 4$ e $P_n'' = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Y_n'' , a sucessão das somas dos perímetros, é dada por

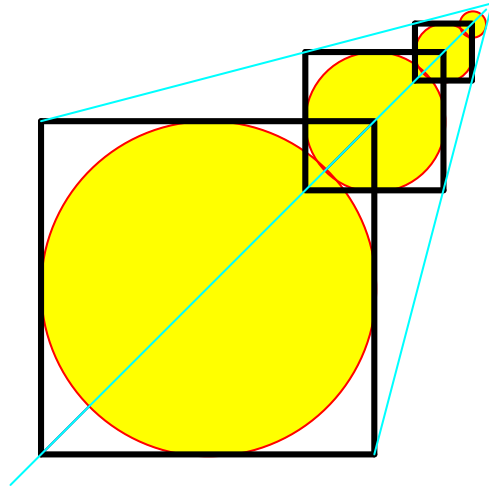
$$Y_n'' = 4 + 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 20 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então, $\lim S_n'' = \frac{7}{3}$ e $\lim Y_n'' = 20$.

Note-se que os limites anteriores podem ser calculados do seguinte modo:

$$\begin{cases} \lim S_n'' = 4 \lim S_n - 3 \times 1 = 4 \times \frac{4}{3} - 3 \times 1 = \frac{7}{3} \\ \lim Y_n'' = 4 \lim Y_n - 3 \times 4 = 4 \times 8 - 12 = 20 \end{cases}$$

Exemplo 45 *Uma sucessão de círculos*



Consideremos um quadrado de lado 1 e uma recta que contém uma diagonal do mesmo.

Começamos por desenhar uma circunferência tangente aos lados do quadrado.

Depois, com centro num dos vértices do quadrado inicial, desenhamos uma nova circunferência tangente à anterior e com raio menor.

Depois, voltamos a construir um quadrado com os lados tangentes à nova circunferência e paralelos aos lados do quadrado inicial.

E o processo continua indefinidamente, como na figura.

Como se relacionam os sucessivos raios?

Seja R_n o raio de uma circunferência. Então, o lado do quadrado envolvente é $2R_n$, enquanto que a diagonal é $2R_n\sqrt{2}$.

Então, o raio da circunferência seguinte é $R_n\sqrt{2} - R_n$, ou seja, $R_n(\sqrt{2} - 1)$.

Então, $R_{n+1} = R_n(\sqrt{2} - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Mas, $R_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pelo que $R_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Então, $A_n = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (\sqrt{2} - 1)^{2n} = \frac{\pi}{2} (3 - 2\sqrt{2})^n$, pelo que as áreas dos círculos definem uma progressão geométrica de razão $3 - 2\sqrt{2}$.

Seja $S_n = \sum_{k=0}^n A_k$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Então,

$$\begin{aligned} S_n &= A_0 \times \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1}}{1 - (3 - 2\sqrt{2})} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2} - 2} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(\sqrt{2} + 1) (1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1})}{2(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(\sqrt{2} + 1) (1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1})}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \lim S_n = \lim \frac{(\sqrt{2} + 1) (1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1})}{2 \times 2} \pi = \frac{\pi(1 + \sqrt{2})}{4}.$$

Calculemos a soma dos diâmetros:

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{k=0}^n R_k &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^n (\sqrt{2} - 1)^k = \sqrt{2} \times 1 \times \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{1 - (\sqrt{2} - 1)} \\
 &= \sqrt{2} \times \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2})\sqrt{2}}{2} \times \left(1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}\right) \\
 &= (1 + \sqrt{2}) \times \left(1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

O limite da sucessão anterior é $1 + \sqrt{2}$.

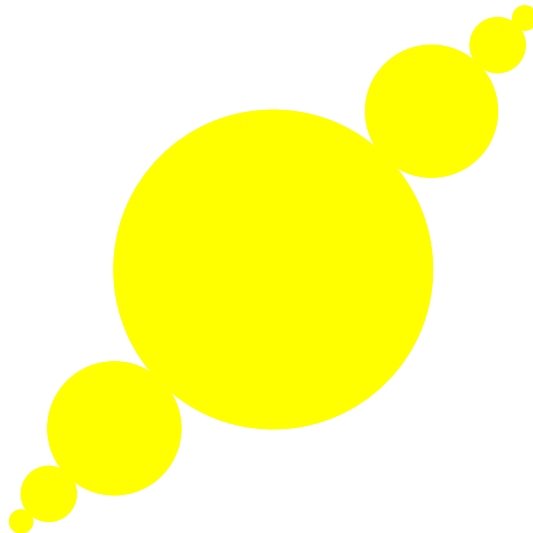
Quanto a P_n , o comprimento de cada circunferência, temos

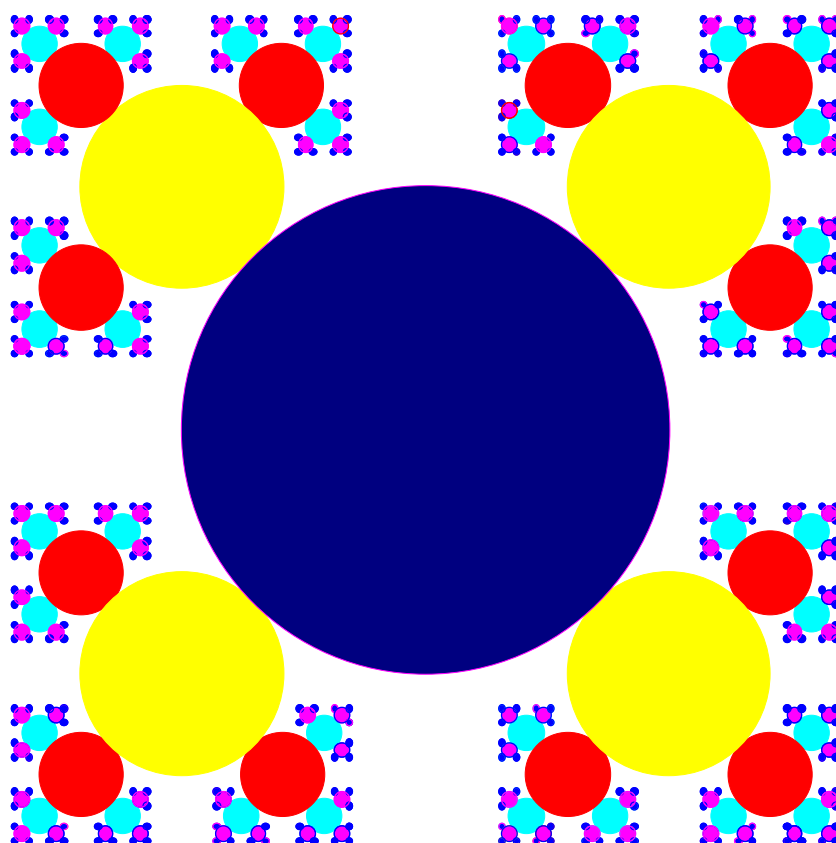
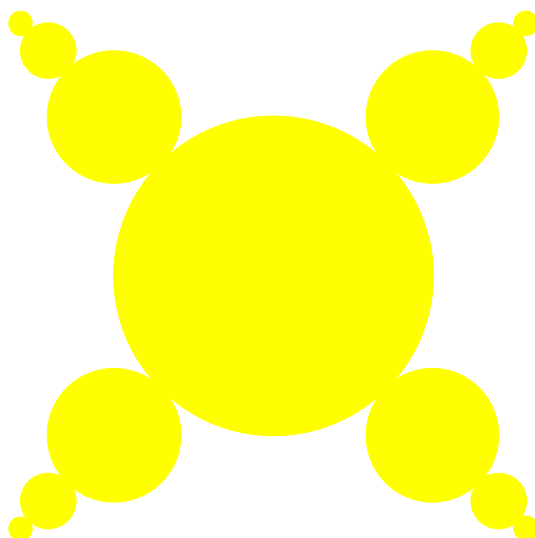
$$P_n = 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} - 1)^n = \pi\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

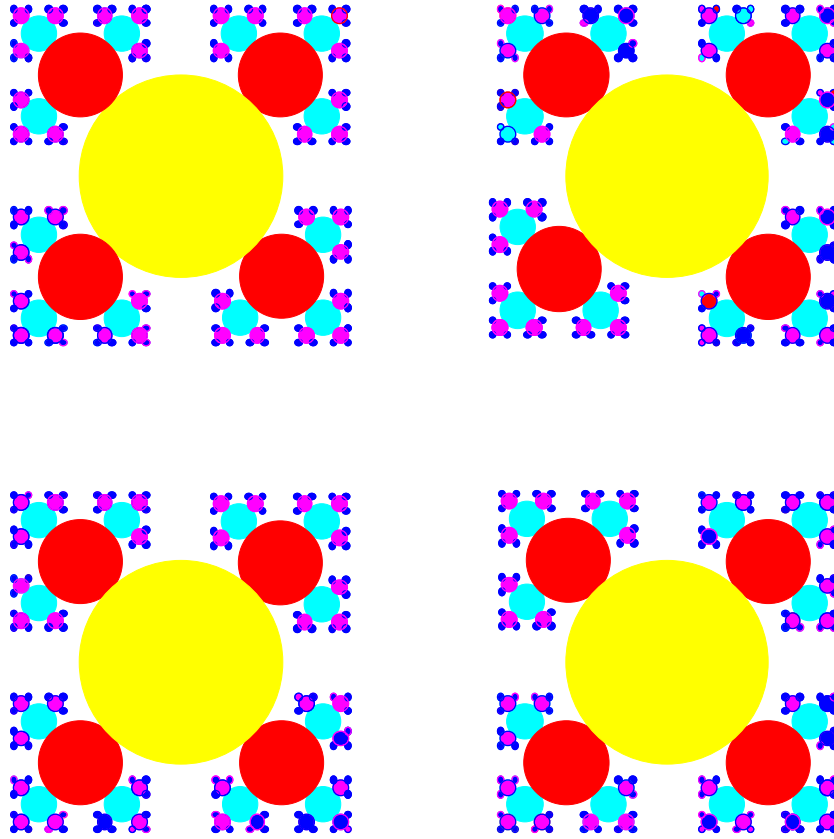
Logo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n P_k &= \sum_{k=0}^n \pi\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^k = \pi\sqrt{2} \sum_{k=0}^n (\sqrt{2} - 1)^k \\
 &= \pi\sqrt{2} \times \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2 - \sqrt{2}} = \pi (1 + \sqrt{2}) \times \left(1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n P_k = \pi (1 + \sqrt{2})$, o que está de acordo com o facto que o comprimento duma circunferência é o produto de π pelo diâmetro.







Observação 46 *A exemplo do que fizemos para o caso dos quadrados, convém chamar a atenção para um facto muito importante: será que os círculos (abertos) são todos disjuntos?*

Exemplo 47 *A sucessão φ de Euler*

A sucessão de Euler é uma sucessão importantíssima em Teoria dos Números e pode ser definida do seguinte modo: $\varphi(n)$ é o número de elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ que são primos com n .

Recordamos que dois números inteiros são primos entre si (ou coprimos) se o máximo divisor comum entre os dois números é 1.

A sucessão anterior é mais conhecida por função φ de Euler e tem uma propriedade importante: se dois números naturais m e n são primos entre si, então $\varphi(m \times n) = \varphi(m) \times \varphi(n)$.

Além da propriedade anterior temos que, $\varphi(p) = p - 1$ e $\varphi(p^a) = p^{a-1}(p - 1)$, com a um número natural e p um número primo. Então:

$$\begin{aligned}\varphi(5) &= 4; & \varphi(25) &= \varphi(5^2) = 5 \times 4 = 20 \\ \varphi(35) &= \varphi(7 \times 5) = \varphi(7) \times \varphi(5) = 6 \times 4 = 24\end{aligned}$$

Exemplo 48 *A sucessão $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$*

Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Calculemos alguns termos desta sucessão, através do desenvolvimento do binómio:

$$u_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 1 + 1, \quad u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4}$$

$$u_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1 + 3 \times 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times 1 \times \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27}$$

$$u_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 1 + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = 1 + 1 + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{256}$$

Vamos dar uma pequena ideia da demonstração da convergência desta sucessão.

Observando os desenvolvimentos anteriores, temos que:

1º) O número de parcelas aumenta uma unidade de termo para termo.

2º) Todas as parcelas são positivas

3º) Em todos os termos, as duas primeiras parcelas são iguais a 1.

4º) A terceira parcela aparece no segundo termo e seguintes e aumenta de um termo para outro, mantendo-se inferior a $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \dots < \frac{1}{2}$).

5º) A quarta parcela aparece no terceiro termo e seguintes e aumenta de um termo para outro, mantendo-se inferior a $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{27} < \frac{1}{16} < \dots < \frac{1}{4}$).

6º) As restantes parcelas comportam-se de modo análogo, sendo inferiores a sucessivas potências de $\frac{1}{2}$.

7º) Deste modo, a sucessão é estritamente crescente e é majorada pela "soma" das potências de $\frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots < 1$, temos que $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$.

8º) Como toda a sucessão limitada e monótona é convergente, temos que esta sucessão é convergente, tendo-se que $\lim u_n \leq 3$. O limite desta sucessão representa-se por e e é conhecido por constante de Neper. O seu valor é, aproximadamente, 2,71828182846.

$$\blacksquare e^1 \qquad 2.71828182846$$

A constante de Neper é um dos números mais importantes da História da Matemática. Trata-se dum número irracional não algébrico. Como exemplo de número irracional algébrico, temos $\sqrt{2}$, número este que é uma raiz ou zero do polinómio de coeficientes inteiros $x^2 - 2$. O número e não é zero de nenhum polinómio de coeficientes inteiros.

Há outra sucessão interessante cujo limite é a constante de Neper:

$$v_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

A sucessão anterior tende para e , de modo muito mais rápido que a sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Repare-se no décimo termo de cada uma das sucessões e na boa aproximação de v_{10} :

$$\begin{aligned} u_{10} &= \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = \frac{25\,937\,424\,601}{10\,000\,000\,000} \approx 2,593\,742\,46 \\ v_{10} &= \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} = \frac{9864\,101}{3628\,800} \approx 2,718\,281\,801 \end{aligned}$$

Curiosamente, o número $e - 1$ é, duma certa maneira, mais interessante que o número e .

O número $e - 1$ é o limite da sucessão

$$w_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Com uma Calculadora, podemos desenvolver o número e em fracção contínua (se não sabe o que é uma fracção contínua, passe adiante).

A sequência obtida, para e , é a seguinte:

$$2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \dots$$

E a sequência, para $e - 1$, é:

$$1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \dots$$

É claro que esta segunda sequência é mais interessante que a anterior.

Registe-se que a regularidade da sequência se mantém, aparecendo duas vezes o número 1, seguindo-se um número par que vai aumentando duas unidades, pelo que, na lista anterior, se seguem os números 1, 1, 14, 1, 1, 16, ...

Proposição 49 A sucessão de termo geral $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ é convergente.

Demonstração

É claro que $u_1 = 2$. Para $n \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! \times (n-k)! \times n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! \times n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

Seja $T_k = \frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$, para $2 \leq k \leq n$. É claro que estamos a supor $T_0 = T_1 = 1$.

Consideremos, agora, u_{n+1} . Então,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k! \times (n+1-k)! \times (n+1)^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n+1) n(n-1) \cdots (n+2-k)}{k! \times (n+1)^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \right) \end{aligned}$$

Seja $T'_k = \frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$, para $2 \leq k \leq n$. É claro que estamos a supor $T'_0 = T'_1 = 1$.

Então, $T'_0 = T_0 = 1$ e $T'_1 = T_1 = 1$. A partir daqui, temos $T_k < T'_k$, porque T_k e T'_k têm o mesmo número de factores (positivos) e, com excepção de $\frac{1}{k!}$, todos os factores de T'_k são maiores que os correspondentes factores de T_k .

Então, para $2 \leq k \leq n$, temos $u_{n+1} > u_n$. Logo, a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente.

$$\text{Mas, } T_2 = \frac{n(n-1)}{2n^2} < \frac{1}{2}, T_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} < \frac{1}{3!} < \frac{1}{4}, \dots, T_k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! \times n^k} < \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Observe-se que para $k > 2$, temos $k! > 2^{k-1}$. Esta afirmação pode ser demonstrada (facilmente) por indução.

Então, $u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots < 1 + 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

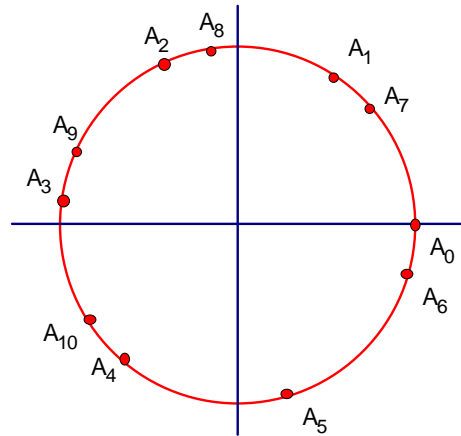
Mas, toda a sucessão limitada e monótona é convergente, pelo que a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, tendo-se $1 < \lim u_n \leq 3$.

Exemplo 50 A sucessão $u_n = \sin n$

Consideremos a sucessão definida por $u_n = \sin n$, com $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\text{Então, } \begin{cases} u_0 = \sin 0 = 0 \\ u_1 = \sin 1 \approx 0,841\,470\,984\,8 \\ u_2 = \sin 2 \approx 0,909\,297\,426\,8 \\ u_3 = \sin 3 \approx 0,141\,120\,008\,1 \\ u_4 = \sin 4 \approx -0,756\,802\,495\,3 \\ \dots \end{cases}.$$

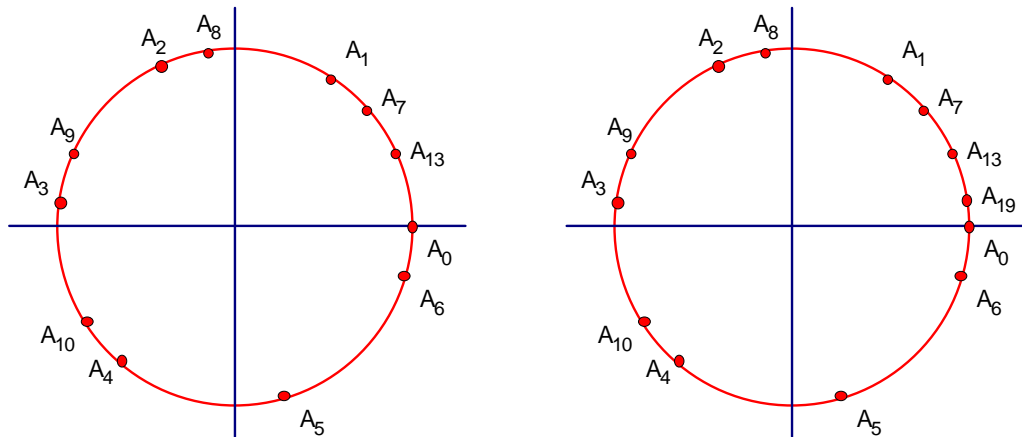
A sucessão $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma sucessão limitada, porque $-1 < \sin n < 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Será uma sucessão convergente? E que tipo de conjunto formam os seus termos?



Consideremos, numa circunferência de centro na origem dum referencial ortonormado e raio 1, os pontos A_n de coordenadas $(\cos n, \sin n)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, como na figura anterior. É fácil de provar que, para $n \neq m$, temos que A_n e A_m são pontos distintos:

Se A_n e A_m , com $n \neq m$, fossem o mesmo ponto, então $n = m + 2k\pi$, para certo $k \in \mathbb{Z}$, o que é impossível, pois só pode verificar-se $n - m = 2k\pi$, para $n = m \wedge k = 0$.

Na figura, o ponto A_i mais próximo de A_0 é A_6 , o qual pertence ao 4º quadrante; este ponto A_6 , quando marcado, forma com um dos pontos anteriores uma corda (e um arco) de comprimento mínimo. Refira-se que esse tal ponto anterior é sempre A_0 e que o outro ponto pode estar no 4º ou no 1º quadrante. Por exemplo, A_{13} fica no 1º quadrante e poderá ou não estar mais próximo de A_0 do que A_6 . Registe-se que a distância entre A_6 e A_0 é a mesma que entre A_7 e A_1 , etc..



Depois de marcarmos A_{13} , vemos que, afinal, era óbvio que o ponto A_6 continuaria a ser aquele que fica mais próximo de outro de outro dos pontos já marcados, pois os pontos A_1 , A_7 e A_{13} vão "recuando". Parece que A_{19} passará a ser o ponto que estará mais próximo de outro (que continuará a ser A_0).

É claro que a distância entre A_0 e A_{19} é a mesma que entre A_1 e A_{20} , etc..

E o processo continua até obtermos um ponto mais próximo de A_0 do que A_{19} . E assim por diante...

Como temos infinitos pontos A_n sobre a circunferência e todos distintos, a distância entre A_0 e os sucessivos pontos que ficam mais próximo de A_0 tende para zero. Logo, em qualquer vizinhança de A_0 , há infinitos pontos $A_k, k \in \mathbb{N}$. E o mesmo acontece com qualquer outro ponto. Por outro lado, dado um ponto da circunferência, então, em qualquer vizinhança desse ponto há um ponto $A_k, k \in \mathbb{N}$ (na verdade, há infinitos). Repare-se que a partir do "momento" em que temos um ponto muito próximo de A_0 , podemos marcar a partir de qualquer ponto A_k , já marcado, sucessivos pontos a essa distância. Por exemplo, partindo de A_0 , temos sucessivamente, A_{19} , A_{38} , A_{57} , A_{76} , A_{95} , A_{114} , etc..

A propriedade anterior significa que o conjunto $X = \{A_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ é um conjunto denso na circunferência, que a sucessão $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é divergente e que o conjunto dos sublimites da sucessão $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é $[-1, 1]$.

Assim, haverá uma subsucessão da sucessão dada que tende para -1 , por exemplo. O facto de haver uma tal subsucessão não significa que seja fácil ou possível defini-la duma forma explícita.

Exemplo 51 (A "minha" sucessão) Considere a sucessão definida por $u_{n+2} = \frac{4 + u_{n+1}^2}{u_n}$, com $u_0 = 1$ e $u_1 = 5$. Quais são os primeiros dez termos da sucessão?

É claro que $u_0 = 1$ e $u_1 = 5$. Quanto aos termos seguintes, vem:

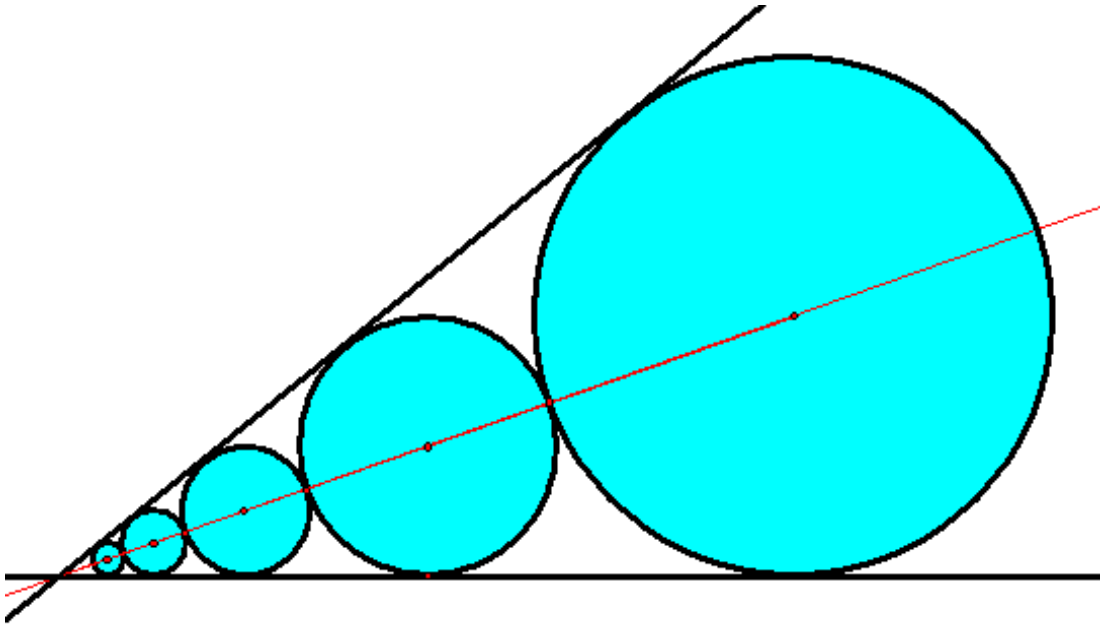
$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{4 + u_1^2}{u_0} = \frac{4 + 5^2}{1} = 29, & u_3 &= \frac{4 + u_2^2}{u_1} = \frac{4 + 29^2}{5} = 169 \\ u_4 &= \frac{4 + u_3^2}{u_2} = \frac{4 + 169^2}{29} = \frac{4 + 28\,561}{29} = 985, & u_5 &= \frac{4 + u_4^2}{u_3} = \frac{4 + 985^2}{169} = 5741 \\ u_6 &= \frac{4 + u_5^2}{u_4} = \frac{4 + 5741^2}{985} = \frac{4 + 32\,959\,081}{985} = 33\,461, & u_7 &= \frac{4 + u_6^2}{u_5} = \frac{4 + 195\,025^2}{5741} = 195\,025 \\ u_8 &= \frac{4 + u_7^2}{u_6} = \frac{4 + 195\,025^2}{33\,461} = \frac{4 + 38\,034\,750\,625}{33\,461} = 1\,136\,689 \\ u_9 &= \frac{4 + u_8^2}{u_7} = \frac{4 + 1\,136\,689^2}{195\,025} = \frac{4 + 1292\,061\,882\,721}{195\,025} = 6\,625\,109 \end{aligned}$$

O interessante é que todos os termos que foram obtidos são números naturais. E impõe-se a pergunta "Será que todos os termos da sucessão são números naturais?" E, a ser verdadeira, como provar essa afirmação?

Esta sucessão está estudada no Capítulo intitulado "Equações de Pell-Fermat", pelo que, neste Capítulo, não adiantamos mais pormenores.

Exercício 52 Suponha que, na figura seguinte, os dois círculos maiores têm raios de 4 cm e 2 cm. Considere a sucessão das áreas dos círculos sugeridos pela figura.

1. Mostre que essa sucessão é uma progressão geométrica.
2. Determine a "soma" de todas essas áreas.



Resolução

Como cada círculo é tangente ao anterior e é tangente às duas rectas a preto, a razão de semelhança entre dois círculos consecutivos (do maior para o menor) é $\frac{1}{2}$. Esta afirmação pode parecer óbvia, mas será melhor

justificá-la. A homotetia de centro no ponto de intersecção das três rectas desenhadas e de razão $\frac{1}{2}$ transforma o círculo de raio 4 cm no círculo de raio 2 cm, círculos estes que são tangentes. A mesma homotetia transforma estes dois círculos noutros dois que têm de ser tangentes entre si. Tais círculos são o 2º e o 3º (da direita para a esquerda).

Logo, a área de cada círculo é um quarto da área do círculo anterior. Logo, $A_1 = 16\pi \text{ cm}^2$, pelo que $A_n = 16\pi \times \frac{1}{2^{n-1}} \text{ cm}^2$, ou seja, $A_n = \frac{\pi}{2^{n-5}} \text{ cm}^2$. Então,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n A_k = 16\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \text{ cm}^2 = 16\pi \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ cm}^2 \\ &= \frac{64}{3}\pi \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Então, $\lim S_n = \frac{64}{3}\pi \text{ cm}^2$.

1.4 Progressões aritmético-geométricas

Exemplo 53 Consideremos a seguinte soma, em que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma progressão aritmética de razão r :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8$$

Como obter uma expressão simples para a soma anterior?

Resolução

Seja $S_9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por x , obtemos

$$xS_9 = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + a_5x^6 + a_6x^7 + a_7x^8 + a_8x^9$$

Então,

$$\begin{aligned} S_9 - xS_9 &= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + rx^3 + rx^4 + rx^5 + rx^6 + rx^7 + rx^8 + a_8x^9 \\ &= a_0 + rx + rx^2 + rx^3 + rx^4 + rx^5 + rx^6 + rx^7 + rx^8 - a_8x^9 \\ &= a_0 - a_8x^9 + rx \times \frac{1 - x^8}{1 - x} \end{aligned}$$

Então, $S_9(1 - x) = a_0 + a_8x^9 + rx \times \frac{1 - x^8}{1 - x}$, donde vem

$$S_9 = \frac{a_0 - a_8x^9}{1 - x} + rx \times \frac{1 - x^8}{(1 - x)^2}$$

Exercício 54 Obtenha a fórmula que dá a soma dos termos consecutivos duma progressão aritmético-geométrica.

Resolução

Seja $S_n = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^k$, em que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma progressão aritmética de razão r .

Então,

$$xS_n = a_0x + a_1x^2 + \dots + a_{n-1}x^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_kx^{k+1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_n - xS_n &= (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}) - (a_0x + a_1x^2 + \dots + a_{n-1}x^n) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \dots + (a_{n-1} - a_{n-2})x^{n-1} - a_{n-1}x^n \\ &= a_0 + rx + rx^2 + \dots + rx^{n-1} - a_{n-1}x^n \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}(1-x)S_n &= a_0 - a_{n-1}x^n + rx + rx^2 + \dots + rx^{n-1} \\ &= a_0 - a_{n-1}x^n + rx \times \frac{1-x^{n-1}}{1-x}\end{aligned}$$

Logo,

$$S_n(x) = \frac{a_0 - a_{n-1}x^n}{1-x} + rx \times \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}$$

Na fórmula anterior x é uma variável, mas pode ser interpretado como um número real diferente de 1.

Se tivermos $-1 < x < 1$, o limite de $S_n(x)$ será $\frac{a_0}{1-x} + rx \times \frac{1}{(1-x)^2}$.

Assim, para $x = \frac{9}{10}$ e $a_n = 2n + 3$, vem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{3}{1 - \frac{9}{10}} + 2 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{9}{10}\right)^2} = 30 + \frac{9}{5} \times 100 = 210$$

Observação

Se $-1 < x < 1$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nx^n) = 0$. Então, se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma progressão aritmética e $-1 < x < 1$, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 - a_{n-1}x^n}{1-x} = \frac{a_0}{1-x} - 0 = \frac{a_0}{1-x}$$

Logo, nas condições anteriores, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) &= \lim \left(\frac{a_0 - a_{n-1}x^n}{1-x} + rx \times \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2} \right) \\ &= \frac{a_0}{1-x} + rx \times \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{a_0}{1-x} + \frac{rx}{(1-x)^2} \\ &= \frac{a_0(1-x) + rx}{(1-x)^2} = \frac{a_0 - (a_0 - r)x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Se representarmos $a_0 - r$ por a_{-1} , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{a_0 - a_{-1}x}{(1-x)^2}$$

Note-se que para $x = 0$, podemos ter um problema com a parcela $0x^0$, razão pela qual poderíamos impor $x \neq 0$.

Exemplo 55 Calcular $\sum_{k=0}^n \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5}\right)^k \right)$.

Resolução

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^n \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) \Rightarrow \frac{3}{5}S_{n+1} = \sum_{k=0}^n \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} \right)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - \frac{3}{5}S_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) - \sum_{k=0}^n \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} \right) \\
&= 7 + \sum_{k=1}^n \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) - \sum_{k=1}^{n+1} \left((7-4(k-1)) \times \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) \\
&= 7 + \sum_{k=1}^n \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) - \sum_{k=1}^n \left((11-4k) \times \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) - (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \\
&= 7 + \sum_{k=1}^n \left(-4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) - (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \\
&= 7 - 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{5}\right)^k - (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Então, $\frac{2}{5}S_{n+1} = 7 - 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{5}\right)^k - (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$, donde vem

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{35}{2} - 10 \times \frac{3}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{5}{2} (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \\
&= \frac{35}{2} - 6 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{2}{5}} - \frac{5}{2} (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \\
&= \frac{35}{2} - 15 + 15 \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(10n - \frac{35}{2}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \\
&= \frac{5}{2} + \left(15 + \frac{3}{5} \times 10n - \frac{21}{2}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n \\
&= \frac{5}{2} + \left(\frac{9}{2} + 6n\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

Observação

Aplicando a fórmula anteriormente apresentada, temos

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{a_0 - a_n x^{n+1}}{1-x} + rx \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2} \\
&= \frac{7 - (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} - 4 \times \frac{3}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(1 - \frac{3}{5}\right)^2} \\
&= \frac{7 - (7-4n) \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{4}{25}} \\
&= \frac{35}{2} - \frac{5}{2} (7-4n) \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{12}{5} \times \frac{25}{4} \times \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) \\
&= \frac{35}{2} - \frac{3}{2} (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 15 \times \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) \\
&= \frac{35}{2} - \frac{3}{2} (7-4n) \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 15 + 15 \left(\frac{3}{5}\right)^n \\
&= \frac{5}{2} + \left(6n + \frac{9}{2}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

Exemplo 56 Calcular $\sum_{k=2}^n \left((7-3k) \times \left(\frac{2}{5}\right)^k \right)$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n \left((7-3k) \times \left(\frac{2}{5} \right)^k \right) &= \left(\frac{2}{5} \right)^2 \sum_{k=2}^n \left((7-3k) \times \left(\frac{2}{5} \right)^{k-2} \right) \\
&= \left(\frac{2}{5} \right)^2 \sum_{k=0}^{n-2} \left((7-3(k+2)) \times \left(\frac{2}{5} \right)^k \right) = \frac{4}{25} \sum_{k=0}^{n-2} \left((1-3k) \times \left(\frac{2}{5} \right)^k \right) \\
&= \frac{4}{25} \left(\frac{1 - (1-3(n-2)) \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{5}} - 3 \left(\frac{2}{5} \right) \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n-2}}{\left(1 - \frac{2}{5} \right)^2} \right) \\
&= \frac{4}{25} \left(\frac{1 - (7-3n) \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1}}{\frac{3}{5}} - \frac{6}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n-2}}{\frac{9}{25}} \right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n \left((7-3k) \times \left(\frac{2}{5} \right)^k \right) &= \frac{4}{25} \times \frac{5}{3} \times \left(1 - (7-3n) \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right) - \frac{4}{25} \times \frac{6}{5} \times \frac{25}{9} \times \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n-2} \right) \\
&= \frac{4}{15} \times \left(1 - (7-3n) \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} \right) - \frac{4}{25} \times \frac{6}{5} \times \frac{25}{9} + \frac{6}{5} \times \frac{25}{9} \left(\frac{2}{5} \right)^n \\
&= \frac{4}{15} - \frac{4}{15} (7-3n) \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} - \frac{8}{15} + \frac{10}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \\
&= -\frac{4}{15} - \frac{28}{15} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} + \frac{4n}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} + \frac{10}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \\
&= -\frac{4}{15} - \frac{14}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n + 2n \left(\frac{2}{5} \right)^n + \frac{10}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n \\
&= -\frac{4}{15} - \frac{4}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n + 2n \left(\frac{2}{5} \right)^n
\end{aligned}$$

Exemplo 57 Consideremos a seguinte soma, em que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de razão r :

$$a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 + a_3x^6 + a_4x^7 + a_5x^8 + a_6x^9 + a_7x^{10} + a_8x^{11}$$

Como obter uma expressão simples para a soma anterior?

Resolução

Seja $S_9 = a_0x^3 + a_1x^4 + a_2x^5 + a_3x^6 + a_4x^7 + a_5x^8 + a_6x^9 + a_7x^{10} + a_8x^{11}$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por x , obtemos

$$xS_9 = a_0x^4 + a_1x^5 + a_2x^6 + a_3x^7 + a_4x^8 + a_5x^9 + a_6x^{10} + a_7x^{11} + a_8x^{12}$$

Então,

$$\begin{aligned}
S_9 - xS_9 &= a_0x^3 + (a_1 - a_0)x^4 + (a_2 - a_1)x^5 + rx^6 + rx^7 + rx^8 + rx^9 + rx^{10} + rx^{11} + a_8x^{12} \\
&= (a_0 + rx + rx^2 + rx^3 + rx^4 + rx^5 + rx^6 + rx^7 + rx^8 - a_8x^9)x^3 \\
&= \left(a_0 - a_8x^9 + rx \times \frac{1-x^8}{1-x} \right) x^3
\end{aligned}$$

Exemplo 58 Consideremos a seguinte soma, em que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma progressão aritmética de razão r e $m \in \mathbb{N}_0$:

$$a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \dots + a_nx^{m+n}$$

Resolução

Seja $S_{n+1} = a_0x^m + a_1x^{m+1} + a_2x^{m+2} + \dots + a_nx^{m+n} = \sum_{k=0}^n a_kx^{m+k}$.

Então,

$$xS_{n+1} = a_0x^{m+1} + a_1x^{m+2} + a_2x^{m+3} + \dots + a_nx^{m+n+1} = \sum_{k=0}^n a_kx^{m+k+1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - xS_{n+1} &= a_0x^m + a_1x^{m+1} + \dots + a_nx^{m+n} - a_0x^{m+1} - a_1x^{m+2} - \dots - a_nx^{m+n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n a_kx^{m+k} - \sum_{k=0}^n a_kx^{m+k+1} = \sum_{k=0}^0 a_kx^{m+k} + \sum_{k=1}^n a_kx^{m+k} - \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}x^{m+k} \\ &= a_0x^m + \sum_{k=1}^n a_kx^{m+k} - \sum_{k=1}^n a_{k-1}x^{m+k} - \sum_{k=n+1}^{n+1} a_{k-1}x^{m+k} \\ &= a_0x^m - a_nx^{m+n+1} + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})x^{m+k} \\ &= a_0x^m - a_nx^{m+n+1} + \sum_{k=1}^n (rx^{m+k}) \\ &= a_0x^m - a_nx^{m+n+1} + rx^{m+1} \times \frac{1-x^n}{1-x} \end{aligned}$$

Então,

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_kx^{m+k} = \frac{a_0x^m - a_nx^{m+n+1}}{1-x} + rx^{m+1} \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$$

Fazendo $m = 0$, obtemos $S_{n+1} = \frac{a_0 - a_nx^{n+1}}{1-x} + rx \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$.

Então, $S_n = \frac{a_0 - a_{n-1}x^n}{1-x} + rx \times \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}$ (expressão obtida antes).

Exemplo 59 Calculemos $\sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k$

Resolução

Aplicando a fórmula anterior, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n-3} (5-4(k+3)) \left(\frac{3}{4}\right)^{k+3} = \sum_{k=0}^{n-3} (-7-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^{k+3} \\ &= \frac{-7\left(\frac{3}{4}\right)^3 - (5-4n)\left(\frac{3}{4}\right)^{3+n-2}}{1 - \frac{3}{4}} - 4\left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}}{\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)\right)^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k &= -28 \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 4(5-4n) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \frac{81}{64} \times 16 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}\right) \\
&= -\frac{27 \times 7}{16} - 3(5-4n) \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{81}{4} \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}\right) \\
&= -\frac{189}{16} - 15 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 12n \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{81}{4} + \frac{81}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \\
&= -\frac{189}{16} - 15 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 12n \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{324}{16} + 48 \left(\frac{3}{4}\right)^n \\
&= -\frac{513}{16} + (12n + 33) \left(\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Se não conhecermos a fórmula aplicada, podemos seguir o seguinte método:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{3}{4} \sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k &= \sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum_{k=4}^{n+1} (5-4(k-1)) \left(\frac{3}{4}\right)^k
\end{aligned}$$

Ora, $\sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{3}{4} \sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k$, pelo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k &= \sum_{k=3}^3 (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k + \sum_{k=4}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum_{k=4}^{n+1} (9-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= -7 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \sum_{k=4}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum_{k=4}^n (9-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum_{k=n+1}^{n+1} (9-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= -7 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \sum_{k=4}^n (5-4k-9+4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k - (9-4(n+1)) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\
&= -7 \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 4 \sum_{k=4}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k - (5-4n) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^n (5-4k) \left(\frac{3}{4}\right)^k &= -28 \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 16 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}}{1 - \frac{3}{4}} - 4(5-4n) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\
&= -7 \times \frac{27}{16} - \frac{81}{16} \times 4 \times \left(1 - \frac{64}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) - 3(5-4n) \left(\frac{3}{4}\right)^n \\
&= -\frac{189}{16} - \frac{324}{16} + \frac{81}{4} \times \frac{64}{27} \left(\frac{3}{4}\right)^n - 15 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 12n \left(\frac{3}{4}\right)^n \\
&= -\frac{513}{16} + 33 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 12n \left(\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

Exemplo 60 Calculemos $\sum_{k=3}^n (5k-4) \left(\frac{4}{3}\right)^k$

Resolução

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n (5k-4) \left(\frac{4}{3}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n-2} (5(k+2)-4) \left(\frac{4}{3}\right)^{k+2} = \sum_{k=0}^{n-2} (5k+6) \left(\frac{4}{3}\right)^{k+2} = \frac{16}{9} \sum_{k=0}^{n-2} (5k+6) \left(\frac{4}{3}\right)^k \\
&= \frac{16}{9} \left(\frac{6 - (5(n-2) + 6) \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{3}} + 5 \times \frac{4}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}}{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2} \right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n (5k-4) \left(\frac{4}{3}\right)^k &= -3 \times \frac{16}{9} \left(6 - (5n-4) \times \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^n \right) + \frac{16}{9} \times \frac{20}{3} \times \frac{1 - \frac{9}{16} \left(\frac{4}{3}\right)^n}{\frac{1}{9}} \\
&= -\frac{16}{3} \left(6 - \frac{15}{4}n \left(\frac{4}{3}\right)^n + 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n \right) + \frac{320}{3} \left(1 - \frac{9}{16} \left(\frac{4}{3}\right)^n \right) \\
&= -\frac{96}{3} + 20n \left(\frac{4}{3}\right)^n - 16 \left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{320}{3} - 60 \left(\frac{4}{3}\right)^n \\
&= \frac{224}{3} + 20n \left(\frac{4}{3}\right)^n - 76 \left(\frac{4}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Exemplo 61 Vejamos como obter a fórmula que dá $\sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k$, embora esta sucessão não seja uma progressão aritmético-geométrica:

Resolução

Suponhamos que $\sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + (Bn^2 + Cn + D) \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{k=0}^0 k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + D \\ \frac{2}{3} = \sum_{k=0}^1 k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + \frac{2}{3} (B + C + D) \\ \frac{22}{9} = \sum_{k=0}^2 k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + \frac{4}{9} (4B + 2C + D) \\ \frac{46}{9} = \sum_{k=0}^3 k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + \frac{8}{27} (9B + 3C + D) \end{array} \right.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} D = -A \\ A + \frac{2}{3} (B + C - A) = \frac{2}{3} \\ A + \frac{4}{9} (4B + 2C - A) = \frac{22}{9} \\ A + \frac{8}{27} (9B + 3C - A) = \frac{46}{9} \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} D = -A \\ 3A + 2B + 2C - 2A = 2 \\ 9A + 16B + 8C - 4A = 22 \\ 27A + 72B + 24C - 8A = 138 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} D = -A \\ A + 2B + 2C = 2 \\ 5A + 16B + 8C = 22 \\ 19A + 72B + 24C = 138 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} D = -A \\ A = -2B - 2C + 2 \\ -10B - 10C + 10 + 16B + 8C = 22 \\ -38B - 38C + 38 + 72B + 24C = 138 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} D = -A \\ A = -2B - 2C + 2 \\ 6B - 2C = 12 \\ 34B - 14C = 100 \end{cases} \iff \begin{cases} D = -A \\ A = -2B - 2C + 2 \\ C = 3B - 6 \\ 34B - 42B + 84 = 100 \end{cases} \iff \begin{cases} D = -30 \\ A = 30 \\ C = -12 \\ B = -2 \end{cases}$$

Então, $\sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = 30 + (-2n^2 - 12n - 30) \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Exemplo 62 Vejamos como obter a fórmula que dá $\sum_{k=0}^n k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k$, de modo análogo ao exemplo anterior:

Resolução

Suponhamos que $\sum_{k=0}^n k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + (Bn^3 + Cn^2 + Dn + E) \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Então,

$$\begin{cases} 0 = \sum_{k=0}^0 k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + E \\ \frac{2}{3} = \sum_{k=0}^1 k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + \frac{2}{3}(B + C + D + E) \\ \frac{38}{9} = \sum_{k=0}^2 k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + \frac{4}{9}(8B + 4C + 2D + E) \\ \frac{110}{9} = \sum_{k=0}^3 k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + \frac{8}{27}(27B + 9C + 3D + E) \\ \frac{2014}{81} = \sum_{k=0}^4 k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = A + \frac{16}{81}(64B + 16C + 4D + E) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} E = -A \\ 3A + 2B + 2C + 2D + 2E = 2 \\ 9A + 32B + 16C + 8D + 4E = 38 \\ 27A + 216B + 72C + 24D + 8E = 330 \\ 81A + 1024B + 256C + 64D + 16E = 2014 \end{cases} \iff \begin{cases} E = -A \\ 3A + 2B + 2C + 2D - 2A = 2 \\ 9A + 32B + 16C + 8D - 4A = 38 \\ 27A + 216B + 72C + 24D - 8A = 330 \\ 81A + 1024B + 256C + 64D - 16A = 2014 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = -A \\ A = 2 - 2B - 2C - 2D \\ 10 - 10B - 10C - 10D + 32B + 16C + 8D = 38 \\ 38 - 38B - 38C - 38D + 216B + 72C + 24D = 330 \\ 130 - 130B - 130C - 130D + 1024B + 256C + 64D = 2014 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = -A \\ A = 2 - 2B - 2C - 2D \\ 22B + 6C - 2D = 28 \\ 178B + 34C - 14D = 292 \\ 894B + 126C - 66D = 1884 \end{cases} \iff \begin{cases} E = -A \\ A = 2 - 2B - 2C - 2D \\ D = 11B + 3C - 14 \\ 178B + 34C - 154B - 42C + 196 = 292 \\ 894B + 126C - 726B - 198C + 924 = 1884 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = -A \\ A = 2 - 2B - 2C - 2D \\ D = 11B + 3C - 14 \\ 24B - 8C = 96 \\ 168B - 72C = 960 \end{cases} \iff \begin{cases} E = -A \\ A = 2 - 2B - 2C - 2D \\ D = 11B + 3C - 14 \\ C = 3B - 12 \\ 7B - 9B + 36 = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} E = -222 \\ A = 222 \\ D = -90 \\ C = -18 \\ B = -2 \end{cases}$$

Logo, $\sum_{k=0}^n k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = 222 + (-2n^3 - 18n^2 - 90n - 222) \left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 2

Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy

Proposição 63 (*Princípio do encaixe*) Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais tais que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente (em sentido lato), $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente (em sentido lato), $\lim (u_n - v_n) = 0$ e $u_n < v_n$, para todo o número natural n . Consideremos os intervalos da forma $I_n = [u_n, v_n]$. Então,

1. $I_n \supseteq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
2. As duas sucessões $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ têm o mesmo limite, digamos c .
3. O limite anterior (c) é o único número real que pertence a todos os intervalos I_n , com $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$.

Proposição 64 (*Teorema de Bolzano-Weierstrass*) Todo o subconjunto de \mathbb{R} , limitado e infinito, admite, pelo menos, um ponto de acumulação em \mathbb{R} .

Proposição 65 (*Teorema de Weierstrass*) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e $I = [a, b]$. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Então, f admite máximo e mínimo nesse intervalo.

Observação

A afirmação anterior, embora comum, é perigosa: não significa que o máximo e o mínimo pertencem ao intervalo I , mas que em $I = [a, b]$ existe um ponto de máximo (maximizante) e um ponto de mínimo (minimizante).

Proposição 66 (*Teorema de Weierstrass, versão alternativa*) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e $I = [a, b]$. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Então, a restrição de f ao intervalo $I = [a, b]$ admite máximo e mínimo.

Proposição 67 (*Teorema de Bolzano*) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e $I = [a, b]$. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Então, a função f assume todos os valores reais entre $f(a)$ e $f(b)$.

Observação

A afirmação anterior, não significa que a função não possa tomar valores que não estejam entre $f(a)$ e $f(b)$.

Corolário 68 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e $I = [a, b]$. Seja f uma função contínua em $[a, b]$, tal que $f(a) \times f(b) < 0$. Então, no intervalo $]a, b[$, a função f admite, pelo menos, um zero.

Observação

O corolário anterior e o princípio do encaixe estão na origem do conhecido método da bissecção (para encontrar um zero de certas funções, como, por exemplo, a função $f(x) = x^2 - 3$, definida em $[1, 2]$).

Exemplo 69 Determine com duas casas decimais exactas o valor de $\sqrt{3}$, usando o método da bissecção.

Resolução

Começamos por notar que $\sqrt{3}$ é o (único) zero da função $f(x) = x^2 - 3$, no intervalo $]0, +\infty[$.

Além disso, temos que $f(1) = -2$ e $f(2) = 1$, pelo que $f(1) \times f(2) = -2 < 0$. E, por fim, f é uma função contínua em $[1, 2]$.

Seja $I_1 = [1, 2]$. O ponto médio de I_1 é $\frac{1+2}{2}$, ou seja, $\frac{3}{2}$. Ora, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$, pelo que $f\left(\frac{3}{2}\right) \times f(2) = -\frac{3}{4} \times 1 < 0$.

Então, seja $I_2 = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Voltemos a aplicar o corolário anterior, calculando o ponto médio de $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ e a sua imagem por f :

Como, $f\left(\frac{\frac{3}{2}+2}{2}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{49}{16} - 3 = \frac{1}{16}$, temos que $f\left(\frac{3}{2}\right) \times f\left(\frac{7}{4}\right) = -\frac{3}{4} \times \frac{1}{16} < 0$.

Então, $\frac{3}{2} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$. Seja $I_3 = \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$. Ora, $\frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{13}{4}$, pelo que o ponto médio de $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ é $\frac{13}{8}$.

Ora, $f\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{169}{64} - 3 = -\frac{23}{64} < 0$. Logo, $f\left(\frac{13}{8}\right) \times f\left(\frac{7}{4}\right) = -\frac{23}{64} \times \frac{1}{16} < 0$. Logo, f admite um zero em $I_4 = \left[\frac{13}{8}, \frac{7}{4}\right]$, ou seja, $\frac{13}{8} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$.

O ponto médio de I_4 é $\frac{27}{16}$, tendo-se que $f\left(\frac{27}{16}\right) = \left(\frac{27}{16}\right)^2 - 3 = -\frac{39}{256} < 0$. Logo, $f\left(\frac{27}{16}\right) \times f\left(\frac{7}{4}\right) < 0$.

Então, fazemos $I_5 = \left[\frac{27}{16}, \frac{7}{4}\right]$, tendo-se $\frac{27}{16} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$. E o processo continua, tendo-se que os comprimentos dos sucessivos intervalos vão passando para metade. Neste caso, o processo termina, quando descobrirmos duas casas decimais exactas.

O ponto médio de I_5 é $\frac{55}{32}$, tendo-se que $f\left(\frac{55}{32}\right) = \left(\frac{55}{32}\right)^2 - 3 = -\frac{47}{1024} < 0$. Então, $f\left(\frac{55}{32}\right) \times f\left(\frac{7}{4}\right) < 0$.

Logo, $\frac{55}{32} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$. Como, $\frac{7}{4} = 1,75$ e $\frac{55}{32} = 1,71875$, temos que $\sqrt{3} = 1,7\dots$

Então, $I_6 = \left[\frac{55}{32}, \frac{7}{4}\right]$ e o ponto médio de I_6 é $\frac{111}{64}$, tendo-se que $f\left(\frac{111}{64}\right) = \left(\frac{111}{64}\right)^2 - 3 = \frac{33}{4096} > 0$.

Então, $f\left(\frac{55}{32}\right) \times f\left(\frac{111}{64}\right) = -\frac{47}{1024} \times \frac{33}{4096} < 0$. Logo, $\frac{55}{32} < \sqrt{3} < \frac{111}{64}$.

Ora, $\frac{55}{32} = 1,71875$ e $\frac{111}{64} = 1,734375$, pelo que ainda não terminámos.

Seja $I_7 = \left[\frac{55}{32}, \frac{111}{64}\right]$, cujo ponto médio é $\frac{221}{128}$.

Ora, $f\left(\frac{221}{128}\right) = \left(\frac{221}{128}\right)^2 - 3 = -\frac{311}{16384}$ e $f\left(\frac{111}{64}\right) = \frac{33}{4096}$, pelo que $f\left(\frac{221}{128}\right) \times f\left(\frac{111}{64}\right) < 0$.

Então, $\frac{221}{128} < \sqrt{3} < \frac{111}{64}$. Ora, $\frac{221}{128} = 1,7265625$ e $\frac{111}{64} = 1,734375$.

Seja $I_8 = \left[\frac{221}{128}, \frac{111}{64}\right]$, cujo ponto médio é $\frac{443}{256}$.

Ora, $f\left(\frac{443}{256}\right) = \left(\frac{443}{256}\right)^2 - 3 = -\frac{359}{65536}$ e $f\left(\frac{111}{64}\right) = \frac{33}{4096}$, pelo que $f\left(\frac{443}{256}\right) \times f\left(\frac{111}{64}\right) < 0$.

Então, $\frac{443}{256} < \sqrt{3} < \frac{111}{64}$. Ora, $\frac{443}{256} = 1,73046875$ e $\frac{111}{64} = 1,734375$.

Logo, $\sqrt{3} = 1,73\dots$

Este processo é razoavelmente lento, havendo outros mais rápidos (por exemplo, o método das tangentes de Newton, em determinadas situações).

Proposição 70 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função derivável em $]a, b[$ e suponhamos que f admite um máximo no ponto $x = c$, com $a < c < b$. Então, $f'(c) = 0$.*

Demonstração

Se a função f admite um máximo no ponto $x = c$, com $a < c < b$, temos que $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in]a, b[$.

Ora, $f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ e $f'_e(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. Então, como tem de ser $f'_d(c) = f'_e(c)$, concluímos que $f'_d(c) = f'_e(c) = f'(c) = 0$.

Proposição 71 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função derivável em $]a, b[$ e suponhamos que f admite um mínimo no ponto $x = c$, com $a < c < b$. Então, $f'(c) = 0$.*

Demonstração

Se a função f admite um mínimo no ponto $x = c$, com $a < c < b$, temos que $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in]a, b[$.

Ora, $f'_d(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ e $f'_e(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$. Então, como tem de ser $f'_d(c) = f'_e(c)$, concluímos que $f'_d(c) = f'_e(c) = f'(c) = 0$.

Proposição 72 (Teorema de Rolle) *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe um número real c pertencente a $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração

Começamos por referir que, pelo Teorema de Weierstrass, f admite máximo e mínimo.

Se f é constante em $[a, b]$, então $f'(c) = 0$, qualquer que seja c pertencente a $]a, b[$.

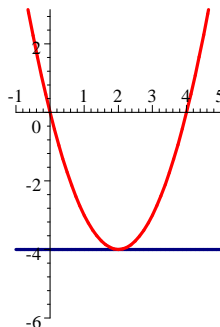
Se f não é constante em $[a, b]$, então verifica-se, pelo menos, uma das duas hipóteses seguintes: o máximo de f é maior que $f(a)$ ou o mínimo de f é menor que $f(a)$.

Se o máximo de f é maior que $f(a)$, então o máximo é imagem dum ponto c pertencente a $]a, b[$. Logo, pela penúltima proposição, temos que $f'(c) = 0$.

Se o mínimo de f é menor que $f(a)$, então o mínimo é imagem dum ponto c pertencente a $]a, b[$. Logo, pela proposição anterior, temos que $f'(c) = 0$.

Em qualquer dos casos, existe um número real c pertencente a $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Interpretação geométrica



Se f satisfaz as condições do Teorema de Rolle em $[a, b]$, existe um ponto c pertencente a $]a, b[$ tal que a recta tangente ao gráfico de f nesse ponto é horizontal.

Corolário 73 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e com dois zeros em $[a, b]$. Então, entre esses dois zeros, existe um número real c , tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração

Consequência imediata do Teorema de Rolle.

Corolário 74 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Se x_1 e x_2 forem zeros consecutivos de $f'(x)$, então entre x_1 e x_2 há, no máximo, um zero da função.*

Demonstração

Se houvesse dois zeros da função, existiria entre eles um novo zero da derivada, pelo que os dois zeros da derivada não eram consecutivos. Logo, há, no máximo, um zero da função.

Proposição 75 (Teorema de Lagrange) *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então, existe um número real c pertencente a $]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Demonstração

Seja $\varphi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(x)$. É claro que φ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

Calculemos $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$:

$$\varphi(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a - f(a) = \frac{af(b) - af(a) - bf(a) + af(a)}{b - a} = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$$

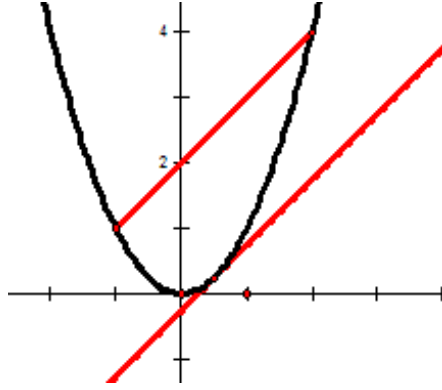
$$\varphi(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b - f(b) = \frac{bf(b) - bf(a) - bf(b) + af(b)}{b - a} = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$$

Então, $\varphi(a) = \varphi(b)$. Logo, pelo Teorema de Rolle, existe c pertencente a $]a, b[$ tal que $\varphi'(c) = 0$.

Mas, $\varphi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x)$, pelo que $0 = \varphi'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c)$.

Então, existe c pertencente a $]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interpretação geométrica



Se f satisfaz as condições do Teorema de Lagrange em $[a, b]$, existe um ponto c pertencente a $]a, b[$ tal que a recta tangente ao gráfico de f nesse ponto é paralela à corda definida pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Observação

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} , limitado e fechado e f uma função contínua em I e derivável no interior de I . Seja $a \in I$ um ponto que se fixou. Então, para qualquer $x \in I \setminus \{a\}$, temos que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x), \text{ com } \xi_x \text{ entre } a \text{ e } x$$

A igualdade anterior é equivalente a

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi_x), \text{ com } \xi_x \text{ entre } a \text{ e } x$$

Substituindo $x - a$ por h , vem

$$f(a + h) - f(a) = h f'(\xi_h), \text{ com } \xi_h \text{ entre } 0 \text{ e } h$$

As igualdades anteriores podem ser escritas do seguinte modo:

$$\begin{cases} f(x) - f(a) = (x - a) f'(a + \theta_x h), \text{ com } 0 < \theta_x < 1 \\ f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta_h), \text{ com } 0 < \theta_h < 1 \end{cases}$$

A colocação dos índices x e h em ξ_x e θ_h deve-se ao facto de ξ_x e θ_h dependerem de x e h , respectivamente.

Corolário 76 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) = 0$, para qualquer x pertencente a $]a, b[$. Então, f é constante em $[a, b]$.*

Demonstração

Se f não fosse constante em $[a, b]$, existiam $x_1, x_2 \in [a, b]$, tais que $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Como f é uma função contínua em $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ e derivável em $]x_1, x_2[$, existiria $c \in]x_1, x_2[$, tal que $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$.

Mas, $f'(x) = 0$, para qualquer x pertencente a $]a, b[$, pelo que é absurdo supor que f não é constante em $[a, b]$.

Logo, f é uma função constante em $[a, b]$.

Corolário 77 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) > 0$, para qualquer x pertencente a $]a, b[$. Então, f é estritamente crescente em $[a, b]$.*

Demonstração

Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ e suponhamos, com vista a um absurdo, que existem dois números reais x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$. Ora, f é uma função contínua em $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ e derivável em $]x_1, x_2[$, pelo que existiria $c \in]x_1, x_2[$, tal que $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$, obtendo-se uma contradição. Logo, é absurdo supor que $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$. Então, se $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$.

Logo, f é estritamente crescente em $[a, b]$.

Corolário 78 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) \geq 0$, para qualquer x pertencente a $]a, b[$. Então, f é crescente (em sentido lato) em $[a, b]$.*

Demonstração

Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ e suponhamos, com vista a um absurdo, que existem dois números reais x_1 e x_2 tais que $x_1 \leq x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$. Ora, f é uma função contínua em $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ e derivável em $]x_1, x_2[$, pelo que existiria $c \in]x_1, x_2[$, tal que $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, obtendo-se uma contradição. Logo, é absurdo supor que $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \geq f(x_2)$. Então, se $x_1 < x_2$, temos que $f(x_1) < f(x_2)$.

Logo, f é crescente (em sentido lato) em $[a, b]$.

Corolário 79 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) < 0$, para qualquer x pertencente a $]a, b[$. Então, f é estritamente decrescente em $[a, b]$.*

Corolário 80 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) \leq 0$, para qualquer x pertencente a $]a, b[$. Então, f é decrescente (em sentido lato) em $[a, b]$.*

Demonstração

A demonstração destes dois Corolários é análoga à demonstração dos dois Corolários anteriores.

Observe-se que, se $f'(x) \leq 0$, para qualquer x pertencente a $]a, b[$, a função f pode ser estritamente decrescente em $[a, b]$, mesmo que a derivada se anule num ponto. E, analogamente, se $f'(x) \geq 0$.

Corolário 81 *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$, tais que $f'(x) \leq g'(x)$, para qualquer $x \in]a, b[$. Então, $f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$.*

Demonstração

Seja $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Então, φ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

Mas, $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Logo, φ é decrescente em $[a, b]$, razão pela qual, temos que $\varphi(a) \geq \varphi(b)$.

Então, $f(a) - g(a) \geq f(b) - g(b)$. Logo, $f(a) - f(b) \geq g(a) - g(b)$.

E, por fim, temos $f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$.

Proposição 82 (Teorema de Cauchy) *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$, tendo-se que $g'(x) \neq 0$ para qualquer x pertencente a $]a, b[$. Então, existe um número real c pertencente a $]a, b[$ tal que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.*

Demonstração

Seja $\psi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x) - f(x)$. É claro que ψ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

Calculemos $\psi(a)$ e $\psi(b)$:

$$\psi(a) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(a) - f(a) = \frac{f(b)g(a) - f(a)g(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b)g(a) - f(a)g(b)}{g(b) - g(a)}$$

$$\psi(b) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(b) - f(b) = \frac{f(b)g(b) - f(a)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b)g(a) - f(a)g(b)}{g(b) - g(a)}$$

Então, $\psi(a) = \psi(b)$. Logo, pelo Teorema de Rolle, existe c pertencente a $]a, b[$ tal que $\psi'(c) = 0$.

Mas, $\psi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x) - f'(x)$, pelo que $0 = \psi'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) - f'(c)$.

Então, como $g'(c) \neq 0$, existe c pertencente a $]a, b[$ tal que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Observe-se que o Teorema de Lagrange é um caso particular do Teorema de Cauchy (basta fazer $g(x) = x$).

Proposição 83 (Regra de Cauchy) *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e sejam f e g duas funções deriváveis em $]a, b[$, tendo-se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$. Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Então, se existir $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então também existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, tendo-se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Observação

Não apresentamos a demonstração (a qual pode ser encontrada em quase todos os livros de Análise Matemática).

Refira-se que se não existir $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pode existir (ou pode não existir) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Consideremos as funções $f(x) = \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, ambas de domínio $]0, \pi[$.

Então, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin \frac{1}{x}}{1} = 1$. Repare-se que x é um infinitésimo e que $\sin \frac{1}{x}$ é uma função limitada.

E, por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \cos \frac{1}{x}\right)$$

Evidentemente não existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \cos \frac{1}{x}\right)$.

Note-se que no enunciado da regra de Cauchy, em vez de termos considerado a , o extremo inferior de $]a, b[$, podemos usar b , o extremo superior de $]a, b[$.

Proposição 84 (Regra de L'Hospital) *Sejam A e B dois números reais com $A < B$ e sejam f e g duas funções deriváveis no ponto a , com $A < a < B$, tendo-se $g'(a) \neq 0$, $f(a) = g(a) = 0$ e $g(x) \neq 0$ em $]A, B[\setminus \{a\}$.*

Então, existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e este limite é dado por $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Demonstração

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Proposição 85 *Seja f uma função definida num intervalo I (qualquer). Suponhamos que f é n vezes derivável no ponto $a \in I$ e que $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$. Então, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.*

Demonstração

A demonstração é feita por indução em n .

Para $n = 1$, temos $f(a) = 0$, pelo que $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$.

Então, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^1} = \frac{f'(a)}{1!}$, pelo que a propriedade é válida para $n = 1$.

Hipótese de indução: Suponhamos que se f é n vezes derivável no ponto $a \in I$ e que $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Tese: Se f é $n+1$ vezes derivável no ponto $a \in I$ e que $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$.

Ora, como $f(a) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Então, pela regra de Cauchy e, aplicando a hipótese de indução à função f' , temos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n+1} \times \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$$

Está, assim, demonstrada a proposição.

Proposição 86 (Teorema de Darboux) *Sejam a e b dois números reais com $a < b$ e seja f uma função derivável em $[a, b]$. Então, em $]a, b[$, $f'(x)$ assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.*

Demonstração

Evidentemente que o resultado é imediato, no caso em que $f'(x)$ seja uma função contínua em $[a, b]$. Só que a afirmação é verdadeira, mesmo que a derivada não seja contínua.

Suponhamos que $f'(a) < f'(b)$. Seja k um número real tal que $f'(a) < k < f'(b)$.

Consideremos a função $\varphi(x) = kx - f(x)$. É claro que φ é diferenciável e contínua em $[a, b]$.

Mas, de $\varphi'(x) = k - f'(x)$, vem $\varphi'(a) = k - f'(a) > 0$ e $\varphi'(b) = k - f'(b) < 0$.

Como $\varphi'(a) > 0$, então existe x pertencente a $]a, b[$, tal que $\varphi(x) > \varphi(a)$.

E, como $\varphi'(b) < 0$, então existe x pertencente a $]a, b[$, tal que $\varphi(x) > \varphi(b)$.

Então, a função φ tem máximo em $[a, b]$ (por ser contínua) e esse máximo é imagem dum ponto c pertencente a $]a, b[$. Então, $\varphi'(c) = 0$, pelo que $k - f'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = k$.

Suponhamos que $f'(a) > f'(b)$. Seja k um número real tal que $f'(a) > k > f'(b)$.

Consideremos a função $\varphi(x) = kx - f(x)$. É claro que φ é diferenciável e contínua em $[a, b]$.

Mas, de $\varphi'(x) = k - f'(x)$, vem $\varphi'(a) = k - f'(a) < 0$ e $\varphi'(b) = k - f'(b) > 0$.

Como $\varphi'(a) < 0$, então existe x pertencente a $]a, b[$, tal que $\varphi(x) < \varphi(a)$.

E, como $\varphi'(b) > 0$, então existe x pertencente a $]a, b[$, tal que $\varphi(x) < \varphi(b)$.

Então, a função φ tem mínimo em $[a, b]$ (por ser contínua) e esse mínimo é imagem dum ponto c pertencente a $]a, b[$. Então, $\varphi'(c) = 0$, pelo que $k - f'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = k$.

Exercício 87 Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^4 - 16}$.

Resolução

Começemos por verificar que $\lim_{x \rightarrow 2} (8 - x^3) = 0$ e que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4 - 16) = 0$. Ora,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(8 - x^3)'}{(x^4 - 16)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x^2}{4x^3} = \frac{-12}{32} = -\frac{3}{8}$$

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^4 - 16} = -\frac{3}{8}.$$

Em vez da regra de Cauchy, podemos aplicar a regra de L'Hospital:

Sejam $f(x) = 8 - x^3$ e $g(x) = x^4 - 16$. Estas funções são deriváveis em \mathbb{R} , tendo-se $f'(x) = -3x^2$ e $g'(x) = 4x^3$.

$$\text{Logo, } f'(2) = -12 \text{ e } g'(2) = 32. \text{ Então, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^4 - 16} = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{-12}{32} = -\frac{3}{8}.$$

Exercício 88 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5 - x^6}$.

Resolução

Começemos por calcular os limites do numerador e do denominador (que neste caso são imediatos):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x - x + \frac{x^3}{6} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x^5 - x^6)$$

Calculemos o limite do quociente entre as derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{5x^4 - 6x^5} = \frac{0}{0}$$

Calculemos o limite do quociente entre as segundas derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{20x^3 - 30x^4} = \frac{0}{0}$$

Calculemos o limite do quociente entre as terceiras derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 1}{60x^2 - 120x^3} = \frac{0}{0}$$

Calculemos o limite do quociente entre as quartas derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{120x - 360x^2} = \frac{0}{0}$$

Calculemos o limite do quociente entre as quintas derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{120 - 720x} = \frac{1}{120}$$

Como existe este último limite, então existem todos os anteriores os quais são iguais a $\frac{1}{120}$.

Observação

Embora seja mais rápido (e seja comum), não é muito correcto escrever

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5 - x^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{5x^4 - 6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + x}{20x^3 - 30x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 1}{60x^2 - 120x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{120x - 360x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{120 - 720x} = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

O motivo é o facto de, só depois de calcularmos o último limite, sabermos que todos os limites são iguais.

Exercício 89 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \sin(3x)}{2x^3 + 5x^4}$.

Resolução

É claro que $\lim_{x \rightarrow 0} ((e^{x^2} - 1) \sin(3x)) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + 5x^4) = 0$.

Então, podemos tentar a regra de Cauchy, mas é mais fácil calcular o limite directamente, usando propriedades conhecidas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \sin(3x)}{2x^3 + 5x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \times \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{3x \times x^2}{2x^3 + 5x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{x^3(2 + 5x)} \\ &= 1 \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2 + 5x} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Exercício 90 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) \sin(3x)}{1 - \cos(2x)}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) \sin(3x)}{1 - \cos(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \times \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{6x^2}{2 \sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \times 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \\ &= 1 \times 1 \times 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = 3 \end{aligned}$$

Exercício 91 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x \ln x}) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

Ora, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$. Mas, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$. Logo, pela regra de Cauchy, temos $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$.
Então, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x) = e^0 = 1$.

Exercício 92 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \right)$.

Resolução

É claro que o limite dado é uma indeterminação do tipo 0^0 . Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln \left((\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} \ln \sin x \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x}} \end{aligned}$$

E, agora, temos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Tentemos a regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \sin x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \times 1 = 1$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x}$, pelo que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \right) = e$.

Exercício 93 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1+2x)^{\frac{3}{x}} \right)$.

Resolução

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo 1^∞ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1+2x)^{\frac{3}{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln \left((1+2x)^{\frac{3}{x}} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{x} \ln(1+2x) \right)} \\ &= e^{3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^{3 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln(1+2x)}{2x}} = e^{3 \times 2} = e^6 \end{aligned}$$

Outra resolução

Fazendo a mudança de variável $x = \frac{1}{t}$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1+2x)^{\frac{3}{x}} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{t} \right)^{3t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{6}{3t} \right)^{3t} = e^6$$

Neste exemplo, foi mais fácil não utilizar a regra de Cauchy, embora a mesma permitisse calcular o limite pretendido.

Exercício 94 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \ln(1+3x)}{1-\cos(4x)} \right)$.

Resolução

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Ora, $(x \ln(1+3x))' = \ln(1+3x) + x \times \frac{3}{1+3x}$ e $(1-\cos(4x))' = 4 \sin(4x)$.

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x \ln(1+3x))'}{(1 - \cos(4x))'} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x}{1+3x} + \ln(1+3x)}{4 \sin(4x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3x}{1+3x}}{4 \sin(4x)} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{4 \sin(4x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{4(1+3x) \sin(4x)} + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{4x}{\sin(4x)} \times \frac{3}{4} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{4(1+3x)} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(4x)} + \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{4x}{\sin(4x)} \times \frac{3}{4} \right) \\
&= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{\sin(4x)} + \frac{1}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{16} \times 1 + \frac{3}{16} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Então, pela regra de Cauchy, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x \ln(1+3x)}{1 - \cos(4x)} \right) = \frac{3}{8}$.

Outra resolução

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \ln(1+3x)}{1 - \cos(4x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \ln(1+3x)}{2 \sin^2(2x)} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \ln(1+3x)}{8 \sin^2 x \cos^2 x} \right) \\
&= \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \times \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{3}{\cos^2 x} \right) \\
&= \frac{1}{8} \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Exercício 95 Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^2} - 3^{x^2}}{3x^2}$.

Resolução

Neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^2} - 3^{x^2}}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^{x^2} - 1}{3x^2} - \frac{3^{x^2} - 1}{3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2 \ln 5} - 1}{3x^2} - \frac{e^{x^2 \ln 3} - 1}{3x^2} \right) \\
&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2 \ln 5} - 1}{x^2 \ln 5} \ln 5 \right) - \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2 \ln 3} - 1}{x^2} \ln 3 \right) \\
&= \frac{1}{3} \ln 5 - \frac{1}{3} \ln 3 = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Pela regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5^{x^2} - 3^{x^2})'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x5^{x^2} \ln 5 - 2x3^{x^2} \ln 3}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^2} \ln 5 - 3^{x^2} \ln 3}{3} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{3}$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^2} - 3^{x^2}}{3x^2} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{3}$.

Capítulo 3

Séries

Uma questão que intrigou os matemáticos durante muitos séculos foi a seguinte: Se percorrermos uma certa distância, depois metade da distância inicial, depois um quarto da distância inicial e assim sucessivamente, que distância teremos percorrido? Esta é uma questão análoga a um dos paradoxos de Zenão.

A questão anterior corresponde a calcular $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

$$\text{Ora, } \begin{cases} 1 = 2 - 1 \\ 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8} \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 2 - \frac{1}{16} \end{cases}, \text{ pelo que, intuitivamente, vemos que } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots < 2.$$

À expressão $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ chamamos série. Intuitivamente, série é uma "soma" com infinitas parcelas.

Definição 96 Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Então, $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é o limite de $\sum_{k=1}^n u_k$, caso este limite exista (em \mathbb{R}). O valor (real) desse limite é a soma da série (a qual se diz convergente).

Observação 97 Observe-se que se $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é uma série convergente, então $\lim u_n = 0$. No entanto, se $\lim u_n = 0$, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ pode ser convergente ou divergente.

3.1 Séries Geométricas

Um caso particular das séries são as chamadas séries geométricas, como, por exemplo, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$.

Seja, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma progressão geométrica de razão r . Então, $\sum_{k=1}^n u_k = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$.

Então, no caso de termos $|r| < 1$, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \right) = u_1 \times \frac{1}{1-r}$.

Exemplo 98 Calculemos $\sum_{k=1}^{+\infty} (2 \times 3^{-2k+1})$

Resolução

Seja $u_k = 2 \times 3^{-2k+1}$. Então, $u_{k+1} = 2 \times 3^{-2(k+1)+1} = 2 \times 3^{-2k-1}$. Logo,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2 \times 3^{-2k-1}}{2 \times 3^{-2k+1}} = \frac{3^{-2k-1}}{3^{-2k+1}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Logo, trata-se duma série geométrica, pelo que temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} (2 \times 3^{-2k+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (2 \times 3^{-2k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \times 3^{-1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Exemplo 99 Calculemos $\sum_{k=1}^{+\infty} (5 \times 2^{-3k+1})$

Resolução

Seja $u_k = 5 \times 2^{-3k+1}$. Então, $u_{k+1} = 5 \times 2^{-3(k+1)+1} = 5 \times 2^{-3k-2}$. Logo,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{5 \times 2^{-3k-2}}{5 \times 2^{-3k+1}} = \frac{2^{-3k-2}}{2^{-3k+1}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Logo, trata-se duma série geométrica, pelo que temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} (5 \times 2^{-3k+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (5 \times 2^{-3k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 \times 2^{-2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n}{1 - \frac{1}{8}} \right) \\ &= \frac{5}{4} \times \frac{1}{\frac{7}{8}} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{10}{7}\end{aligned}$$

Exemplo 100 Calculemos $\sum_{k=-2}^{+\infty} \left(7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+3} \right)$.

Resolução

Seja $u_k = 7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+3}$. Então, $u_{k+1} = 7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2(k+1)+3} = 7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+1}$. Logo,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+1}}{7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+3}} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+1}}{\left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+3}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{25}, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2\}$$

Logo, trata-se duma série geométrica, pelo que temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \left(7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2k+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^7 \times \frac{1 - \left(\frac{9}{25}\right)^n}{1 - \frac{9}{25}} \right) \\ &= 7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^7 \times \frac{1}{\frac{16}{25}} = 7 \times \left(\frac{5}{3}\right)^7 \times \frac{25}{16} = \frac{7 \times 5^9}{16 \times 3^7} = \frac{13\,671\,875}{34\,992}\end{aligned}$$

Exemplo 101 Calculemos $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(3 \times 4^{-k+1} + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \right)$

Resolução

Sejam $u_k = 3 \times 4^{-k+1}$ e $v_k = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^k$. Então, $\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{3 \times 4^{-k-1+1}}{3 \times 4^{-k+1}} = \frac{4^{-k}}{4^{-k+1}} = 4^{-1} = \frac{1}{4}, \forall k \in \mathbb{N} \\ \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^k} = \frac{2}{3}, \forall k \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(3 \times 4^{-k+1} + 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 \times 4^{-k+1} + 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^k \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n (3 \times 4^{-k+1}) + \sum_{k=1}^n \left(2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^k \right) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (3 \times 4^{-k+1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^k \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\
 &= 3 \times \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \times \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \times 3 = 4 + 4 = 8
 \end{aligned}$$

Exemplo 102 Calculemos $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(2 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{3k+1} \right)$

Resolução

Seja $u_k = 2 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{3k+1}$. Então,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{3k+3+1}}{2 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{3k+1}} = \frac{\left(-\frac{2}{3} \right)^{3k+3+1}}{\left(-\frac{2}{3} \right)^{3k+1}} = \left(-\frac{2}{3} \right)^3 = -\frac{8}{27}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(2 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{3k+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{3k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 \times \frac{16}{81} \times \frac{1 - \left(-\frac{8}{27} \right)^n}{1 + \frac{8}{27}} \right) \\
 &= \frac{32}{81} \times \frac{1-0}{\frac{35}{27}} = \frac{32}{81} \times \frac{27}{35} = \frac{32}{105}
 \end{aligned}$$

3.2 Séries aritmético-geométricas

Exemplo 103 Consideremos a seguinte soma, em que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de razão r :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8$$

Como obter uma expressão simples para a soma anterior?

Resolução

Seja $S_9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por x , obtemos

$$xS_9 = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + a_5x^6 + a_6x^7 + a_7x^8 + a_8x^9$$

Então,

$$\begin{aligned}
 S_9 - xS_9 &= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + rx^3 + rx^4 + rx^5 + rx^6 + rx^7 + rx^8 + a_8x^9 \\
 &= a_0 + rx + rx^2 + rx^3 + rx^4 + rx^5 + rx^6 + rx^7 + rx^8 - a_8x^9 \\
 &= a_0 - a_8x^9 + rx \times \frac{1 - x^8}{1 - x}
 \end{aligned}$$

Então, $S_9(1 - x) = a_0 + a_8x^9 + rx \times \frac{1 - x^8}{1 - x}$, donde vem

$$S_9 = \frac{a_0 - a_8x^9}{1 - x} + rx \times \frac{1 - x^8}{(1 - x)^2}$$

Exercício 104 Obtenha a fórmula que dá a soma de n termos consecutivos duma progressão aritmético-geométrica.

Resolução

Seja $S_n = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, em que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de razão r .

Então,

$$xS_n = a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_{n-1}x^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k+1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_n - xS_n &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k - \sum_{k=1}^n a_{k-1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^0 a_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} x^k - \sum_{k=n}^n a_{k-1} x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1}) x^k - a_{n-1} x^n \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (rx^k) - a_{n-1} x^n = a_0 + r \sum_{k=1}^{n-1} x^k - a_{n-1} x^n \end{aligned}$$

Então,

$$(1-x)S_n = a_0 - a_{n-1}x^n + r \sum_{k=1}^{n-1} x^k = a_0 - a_{n-1}x^n + rx \times \frac{1-x^{n-1}}{1-x}$$

Logo,

$$S_n = S_n(x) = \frac{a_0 - a_{n-1}x^n}{1-x} + rx \times \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}$$

Na fórmula anterior x é uma variável (ou indeterminada), mas pode ser interpretado como um número real diferente de 1.

Se tivermos $-1 < x < 1$, o limite de $S_n(x)$ será $\frac{a_0}{1-x} + rx \times \frac{1}{(1-x)^2}$.

Assim, para $x = \frac{9}{10}$ e $a_n = 2n + 3$, vem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{3}{1-\frac{9}{10}} + 2 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{\left(1-\frac{9}{10}\right)^2} = 30 + \frac{9}{5} \times 100 = 210$$

Observação

Se $-1 < x < 1$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nx^n) = 0$. Então, se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética e $-1 < x < 1$, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0 - a_{n-1}x^n}{1-x} = \frac{a_0}{1-x} - 0 = \frac{a_0}{1-x}$$

Logo, nas condições anteriores, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) &= \lim \left(\frac{a_0 - a_{n-1}x^n}{1-x} + rx \times \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2} \right) \\ &= \frac{a_0}{1-x} + rx \times \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{a_0}{1-x} + \frac{rx}{(1-x)^2} \\ &= \frac{a_0(1-x) + rx}{(1-x)^2} = \frac{a_0 - (a_0 - r)x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Se representarmos $a_0 - r$ por a_{-1} , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{a_0 - a_{-1}x}{(1-x)^2}$$

Exemplo 105 Calcular $\sum_{k=0}^{+\infty} \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5} \right)^k \right)$.

Resolução

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5} \right)^k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left((7-4k) \times \left(\frac{3}{5} \right)^k \right) \\ &= \frac{7}{1 - \frac{3}{5}} - 4 \times \frac{\frac{3}{5}}{\left(1 - \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{35}{2} - \frac{12}{5} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \\ &= \frac{35}{2} - \frac{12}{5} \times \frac{25}{4} = \frac{35}{2} - 15 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Exercício 106 Prove, por indução em n , que $\sum_{k=0}^n a_k x^{m+k} = \frac{a_0 x^m - a_n x^{m+n+1}}{1-x} + r x^{m+1} \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$, em que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética de razão r e $m, n \in \mathbb{N}$.

Resolução

Para $n = 1$, temos $\sum_{k=0}^1 a_k x^{m+k} = a_0 x^m + a_1 x^{m+1}$.

Por outro lado, para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{a_0 x^m - a_n x^{m+n+1}}{1-x} + r x^{m+1} \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2} &= \frac{a_0 x^m - a_1 x^{m+2}}{1-x} + r x^{m+1} \times \frac{1-x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{a_0 x^m - a_1 x^{m+2}}{1-x} + \frac{r x^{m+1}}{1-x} \\ &= \frac{a_0 x^m + r x^{m+1} - a_1 x^{m+2}}{1-x} \\ &= \frac{a_0 + r x - a_1 x^2}{1-x} x^m \\ &= \frac{a_0 + (a_1 - a_0) x - a_1 x^2}{1-x} x^m \\ &= \frac{a_0 - a_0 x + a_1 x - a_1 x^2}{1-x} x^m \\ &= \frac{a_0 (1-x) + a_1 x (1-x)}{1-x} x^m \\ &= a_0 x^m + a_1 x^{m+1} \end{aligned}$$

Hipótese de indução: suponhamos que $\sum_{k=0}^n a_k x^{m+k} = \frac{a_0 x^m - a_n x^{m+n+1}}{1-x} + r x^{m+1} \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2}$, para certo natural n .

Tese: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{m+k} = \frac{a_0 x^m - a_{n+1} x^{m+n+2}}{1-x} + r x^{m+1} \times \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{m+k} &= \sum_{k=0}^n a_k x^{m+k} + \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k x^{m+k} \\ &= \frac{a_0 x^m - a_n x^{m+n+1}}{1-x} + r x^{m+1} \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2} + a_{n+1} x^{m+n+1} \\ &= \frac{a_0 x^m - a_n x^{m+n+1} + a_{n+1} x^{m+n+1} - a_{n+1} x^{m+n+2}}{1-x} + r x^{m+1} \times \frac{1-x^n}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{m+k} &= \frac{a_0 x^m + r x^{m+n+1} - a_{n+1} x^{m+n+2}}{1-x} + \frac{r x^{m+1} (1-x^n)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{a_0 x^m - a_{n+1} x^{m+n+2}}{1-x} + \frac{r x^{m+n+1}}{1-x} + \frac{r x^{m+1} - r x^{m+n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{a_0 x^m - a_{n+1} x^{m+n+2}}{1-x} + \frac{r x^{m+n+1} - r x^{m+n+2} + r x^{m+1} - r x^{m+n+1}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{a_0 x^m - a_{n+1} x^{m+n+2}}{1-x} + \frac{r x^{m+1} - r x^{m+n+2}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{a_0 x^m - a_{n+1} x^{m+n+2}}{1-x} + r x^{m+1} \times \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Está, assim, terminada a demonstração.

3.3 Séries de Mengoli

Outras séries convergentes em que é fácil obter o valor da soma da série são as chamadas séries de Mengoli.

Definição 107 Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão convergente de números reais. Série de Mengoli é a série $\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k+r})$, com $r \in \mathbb{Z}$.

É claro que, na expressão $\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k+r})$, só interessa o caso em que $r \neq 0$, pois o caso $r = 0$ é trivial.

Proposição 108 (Propriedade Telescópica) Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Então, $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Para $n = 1$, temos $\sum_{k=1}^1 (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_2$ (o que é verdadeiro).

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}$, para certo $n \in \mathbb{N}$.

Tese: $\sum_{k=1}^{n+1} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+2}$.

Ora,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (u_k - u_{k+1}) &= \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) + \sum_{k=n+1}^{n+1} (u_k - u_{k+1}) \\
&= u_1 - u_{n+1} + u_{n+1} - u_{n+2} = u_1 - u_{n+2}
\end{aligned}$$

Logo, $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 109 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \right)$.

Resolução

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \right) = 2$$

Exemplo 110 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3\sqrt{k}} - \frac{1}{3\sqrt{k+1}} \right)$.

Resolução

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3\sqrt{k}} - \frac{1}{3\sqrt{k+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3\sqrt{k}} - \frac{1}{3\sqrt{k+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3\sqrt{1}} - \frac{1}{3\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{3}$$

Exemplo 111 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2k+3}{k+2} - \frac{2k+5}{k+3} \right)$.

Resolução

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2k+3}{k+2} - \frac{2k+5}{k+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k+3}{k+2} - \frac{2k+5}{k+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3} - \frac{2n+5}{n+3} \right) = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3}$$

Proposição 112 (*Propriedade Telescópica, caso particular*) Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais.

Então, $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+2}) = u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Para $n = 1$, temos $\sum_{k=1}^1 (u_k - u_{k+2}) = u_1 + u_2 - u_2 - u_3$ (o que é verdadeiro).

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+2}) = u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}$, para certo $n \in \mathbb{N}$.

Tese: $\sum_{k=1}^{n+1} (u_k - u_{k+2}) = u_1 + u_2 - u_{n+2} - u_{n+3}$.

Ora,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (u_k - u_{k+2}) &= \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+2}) + \sum_{k=n+1}^{n+1} (u_k - u_{k+2}) \\ &= u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+1} - u_{n+3} \\ &= u_1 + u_2 - u_{n+2} - u_{n+3} \end{aligned}$$

Logo, $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+2}) = u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposição 113 (*Propriedade Telescópica, caso geral*) Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. Então,

$$\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+r}) = \sum_{k=1}^r u_k - \sum_{k=1}^r u_{n+k}, \forall n, r \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

Para $r = 1$, temos $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^1 u_k - \sum_{k=1}^1 u_{n+k} = u_1 - u_{n+1}$ (o que já foi demonstrado).

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+r}) = \sum_{k=1}^r u_k - \sum_{k=1}^r u_{n+k}$, para certo $r \in \mathbb{N}$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Tese: $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+r+1}) = \sum_{k=1}^{r+1} u_k - \sum_{k=1}^{r+1} u_{n+k}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Ora,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+r+1}) &= \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+r} + u_{k+r} - u_{k+r+1}) = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+r}) + \sum_{k=1}^n (u_{k+r} - u_{k+r+1}) \\ &= \sum_{k=1}^r u_k - \sum_{k=1}^r u_{n+k} + (u_{r+1} - u_{n+r+1}) = \sum_{k=1}^r u_k + u_{r+1} - \sum_{k=1}^r u_{n+k} - u_{n+r+1} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} u_k - \sum_{k=1}^{r+1} u_{n+k} \end{aligned}$$

Está, assim, terminada a demonstração.

Exemplo 114 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+4}} \right)$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+4}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^{k+4}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^{k+4}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+3}} - \frac{1}{3^{n+4}} \right) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - 4 \times 0 = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{80}{81} = \frac{40}{81}
 \end{aligned}$$

É claro que $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{27}{81} + \frac{9}{81} + \frac{3}{81} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81}$.

Exemplo 115 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.

Resolução

Começemos por transformar $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ numa diferença do tipo $\frac{A}{k(k+1)(k+2)} - \frac{A}{(k+1)(k+2)(k+3)}$. Ora,

$$\frac{A}{k(k+1)(k+2)} - \frac{A}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{A(k+3) - Ak}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{3A}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

Então, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{k(k+1)(k+2)} - \frac{\frac{1}{3}}{(k+1)(k+2)(k+3)}$, pelo que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\frac{1}{3}}{k(k+1)(k+2)} - \frac{\frac{1}{3}}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 2 \times 3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 \times 2 \times 3} - 0 \right) = \frac{1}{18}
 \end{aligned}$$

Exemplo 116 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{A}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} &= \frac{A(k+4) - Ak}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \\
 &= \frac{4A}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}
 \end{aligned}$$

Então, $A = 1$, pelo que $\frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \right) \\
&= \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - 0 = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Exemplo 117 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6}{k(k+2)(k+3)}$.

Resolução

Começemos por decompor $\frac{6}{k(k+2)(k+3)}$ numa soma do tipo $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} + \frac{C}{k+3}$.

Ora,

$$\frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} + \frac{C}{k+3} = \frac{A(k+2)(k+3) + Bk(k+3) + Ck(k+2)}{k(k+2)(k+3)}$$

Logo, devemos ter $A(k+2)(k+3) + Bk(k+3) + Ck(k+2) = 6$.

Então, para $k = -2$, vem $-2B = 6$, pelo que $B = -3$.

Para $k = -3$, vem $3C = 6$, pelo que $C = 2$.

Para $k = 0$, vem $6A = 6$, pelo que $A = 1$.

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{6}{k(k+2)(k+3)} &= \frac{1}{k} - \frac{3}{k+2} + \frac{2}{k+3} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} - \frac{2}{k+2} + \frac{2}{k+3} \\
&= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) - \left(\frac{2}{k+2} - \frac{2}{k+3} \right) \\
&= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \left(\frac{2}{k+2} - \frac{2}{k+3} \right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k+2} - \frac{2}{k+3} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{n+3} \\
&= \frac{5}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+3}
\end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6}{k(k+2)(k+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+2)(k+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{2}{n+3} \right) = \frac{5}{6}$$

Exemplo 118 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$.

(Outra) Resolução

Embora não tenha interesse prático, vamos resolver esta questão de modo diferente daquele que já apresentámos.

$$\frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} + \frac{D}{k+3} + \frac{E}{k+4}$$

Representando $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} + \frac{D}{k+3}$ por Y e efectuando os cálculos vem:

$$Y = \frac{A(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) + Bk(k+2)(k+3)(k+4) + Ck(k+1)(k+3)(k+4) + Dk(k+1)(k+2)(k+4) + Ek(k+1)(k+2)(k+3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

Para $k = 0$, temos $24A = 4$, pelo que $A = \frac{1}{6}$.

Para $k = -1$, temos $-6B = 4$, pelo que $B = -\frac{2}{3}$.

Para $k = -2$, temos $4C = 4$, pelo que $C = 1$.

Para $k = -3$, temos $-6D = 4$, pelo que $D = -\frac{2}{3}$.

Para $k = -4$, temos $24E = 4$, pelo que $E = \frac{1}{6}$.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} &= \frac{1}{6} - \frac{\frac{2}{3}}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{\frac{2}{3}}{k+3} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} - \frac{\frac{1}{2}}{k+3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} - \frac{\frac{1}{2}}{k+3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} + \frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{n+3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} - \frac{\frac{1}{6}}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} - \frac{\frac{1}{2}}{n+3} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{4-6+4-1}{24} = \frac{1}{24}$$

Exemplo 119 Calcular $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k(k+1)(k+3)(k+4)}$.

Resolução

$$\frac{4}{k(k+1)(k+3)(k+4)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+3} + \frac{D}{k+4}$$

O segundo membro da igualdade anterior é

$$\frac{A(k+1)(k+3)(k+4) + Bk(k+3)(k+4) + Ck(k+1)(k+4) + Dk(k+1)(k+3)}{k(k+1)(k+3)(k+4)}$$

Logo, $A(k+1)(k+3)(k+4) + Bk(k+3)(k+4) + Ck(k+1)(k+4) + Dk(k+1)(k+3) = 4, \forall k \in \mathbb{R}$.

Para $k = 0$, vem $12A = 4$, pelo que $A = \frac{1}{3}$.

Para $k = -1$, vem $-6B = 4$, pelo que $B = -\frac{2}{3}$.

Para $k = -3$, vem $6C = 4$, pelo que $C = \frac{2}{3}$.

Para $k = -4$, vem $-12D = 4$, pelo que $D = -\frac{1}{3}$.

Então,

$$\frac{4}{k(k+1)(k+3)(k+4)} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{3}}{k+4} + \frac{\frac{2}{3}}{k+3} - \frac{\frac{2}{3}}{k+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+1} \right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k(k+1)(k+3)(k+4)} &= \lim \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4} \right) + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{3} \left(2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{12+6+4+3}{12} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{25}{36} - \frac{20}{36} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

Observação sobre séries geométricas e séries de Mengoli

Voltemos às séries geométricas e verifiquemos um facto curioso:

Seja $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma progressão geométrica de razão r , com $r \neq 1$. Vamos calcular $\sum_{k=1}^n u_k$, utilizando a propriedade telescópica. Ora,

$$\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = u_1 - u_{n+1}$$

Então, $\sum_{k=1}^n (u_k - r \times u_k) = u_1 - u_1 \times r^n$, donde vem

$$(1 - r) \sum_{k=1}^n u_k = u_1 - u_1 \times r^n$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Utilizando as séries de Mengoli, no casos em que $|r| < 1$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k &= \frac{1}{1 - r} \sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \lim \left(\frac{1}{1 - r} \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) \right) \\ &= \frac{1}{1 - r} \times \lim (u_1 - u_{n+1}) = \frac{1}{1 - r} \times (u_1 - 0) = \frac{u_1}{1 - r} \end{aligned}$$

Logo, toda a série geométrica pode ser transformada numa série de Mengoli.

Reparemos, por fim, na demonstração habitual da fórmula que dá a soma de termos consecutivos duma progressão geométrica e comparemo-la com a demonstração que acabámos de fazer:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \implies rS_n = ru_1 + ru_2 + \cdots + ru_n$$

Então,

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) - (ru_1 + ru_2 + \cdots + ru_n) \\ &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) - (u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1}) \\ &= u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1 \times r^n \end{aligned}$$

Logo, $(1 - r) S_n = u_1 (1 - r^n)$, donde vem $S_n = \frac{u_1 (1 - r^n)}{1 - r}$.

Ao fim e ao cabo, nesta demonstração, aplicámos a propriedade telescópica (mesmo que essa propriedade nos seja desconhecida).

3.4 Séries de Termos Positivos

Proposição 120 (*Critério da razão*) *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos, tal que existe um número positivo $l < 1$ tal que, para todo o número natural n , temos $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l$. Então, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é convergente.*

Demonstração

Seja $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de termos positivos, s_n é crescente. A série geométrica associada à progressão geométrica $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de razão l e primeiro termo $v_1 = u_1$, é convergente, tendo-se que $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n v_k, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\sum_{k=1}^n u_k \leq \lim \sum_{k=1}^n v_k$, pelo que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Então, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente (por ser limitada e monótona).

É claro que $\lim \sum_{k=1}^n u_k \leq \lim \sum_{k=1}^n v_k$.

Observação

Não é necessário termos $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l < 1$, para todo o número natural. Basta que tal aconteça, a partir de certa ordem.

Corolário 121 (Critério de D'Alembert) *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos, tal que existe um número positivo $l < 1$ tal que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Então, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é convergente.*

Demonstração

Consequência imediata da observação anterior e do facto de existir uma ordem a partir da qual $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \frac{1-l}{2} < 1$.

Proposição 122 (Critério da raiz) *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos, tal que existe um número positivo $l < 1$ tal que, para todo o número natural n , temos $\sqrt[n]{u_n} \leq l$. Então, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é convergente.*

Demonstração

De $\sqrt[n]{u_n} \leq l, \forall n \in \mathbb{N}$, vem $u_n \leq l^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n l^k = l \times \frac{1-l^n}{1-l} \leq \frac{l}{1-l}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\sum_{k=1}^n u_k$ é uma sucessão limitada e monótona. Logo, $\sum_{k=1}^n u_k$ é uma sucessão convergente.

Observação

Não é necessário termos $\sqrt[n]{u_n} \leq l$, para todo o número natural. Basta que tal aconteça, a partir de certa ordem.

Corolário 123 (Critério de Cauchy) *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos, tal que existe um número positivo $l < 1$ tal que $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$. Então, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é convergente.*

Demonstração

Consequência imediata da observação anterior e do facto de existir uma ordem a partir da qual $\sqrt[n]{u_n} \leq l + \frac{1-l}{2} < 1$.

Proposição 124 (Critério de Raabe-Duhamel) *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos, tal que existe um número real l tal que $\lim \left(n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right) = l$. Então, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é convergente se $l > 1$ e é divergente se $l = 1$.*

Proposição 125 (Critério geral de comparação) *Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais. Se, a partir de certa ordem, tivermos $0 \leq u_n \leq v_n$, então*

1. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é uma série divergente, então $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ também é divergente.
2. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ é uma série convergente, então $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ também é convergente.

Proposição 126 (Critério de comparação) *Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais positivos. Se existir um número real l positivo, tal que $\lim \frac{u_n}{v_n} = l$, então as séries $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ são da mesma natureza (ambas convergentes ou ambas divergentes).*

Proposição 127 (Critério de comparação de razões) Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões de números reais positivos, tais que, a partir de certa ordem, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Então,

1. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ é uma série convergente, então $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ também é convergente.
2. Se $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ é uma série divergente, então $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ também é divergente.

Proposição 128 (Séries de Dirichlet) A série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ é convergente se $\alpha > 1$ e é divergente se $\alpha \leq 1$.

Exercício 129 Qual a natureza da série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^3+2k+1}{k^5+3k^2+2k}$?

Resolução

Comparemos a série dada com $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2k^3+2k+1}{k^5+3k^2+2k}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^5 + 2k^3 + k^2}{k^5 + 3k^2 + 2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^3}}{1 + \frac{3}{k^3} + \frac{2}{k^4}} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo, as duas séries são da mesma natureza. Mas, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é uma série convergente (por ser uma série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$).

Então, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^3+2k+1}{k^5+3k^2+2k}$ é uma série convergente.

Exercício 130 Qual a natureza da série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^2+2k+1}{(k^5+3k^2+2k+1) \sin \frac{1}{k}}$?

Resolução

Comparemos a série dada com $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2k^2+2k+1}{(k^5+3k^2+2k+1) \sin \frac{1}{k}}}{\frac{1}{k^2}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^4 + 2k^3 + k^2}{(k^5 + 3k^2 + 2k + 1) \sin \frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^4 \left(2 + \frac{2}{k} + \frac{2}{k^2}\right)}{k^5 \left(1 + \frac{3}{k^3} + \frac{2}{k^4} + \frac{1}{k^5}\right) \sin \frac{1}{k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{k} + \frac{2}{k^2}}{k \left(1 + \frac{3}{k^3} + \frac{2}{k^4} + \frac{1}{k^5}\right) \sin \frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{k} + \frac{2}{k^2}}{\left(1 + \frac{3}{k^3} + \frac{2}{k^4} + \frac{1}{k^5}\right) \frac{\sin \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{2 + 0 + 0}{(1 + 0 + 0 + 0) \times 1} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Logo, as duas séries são da mesma natureza. Mas, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é uma série convergente (por ser uma série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$).

Então, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^2+2k+1}{(k^5+3k^2+2k+1) \sin \frac{1}{k}}$ é uma série convergente.

Note-se que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1$, porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercício 131 Qual a natureza da série $\sum_{k=1}^{+\infty} k \sin \frac{k}{k^4+1}$?

Resolução

Comparemos $\sum_{k=1}^{+\infty} k \sin \frac{k}{k^4+1}$ com $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Ora,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \sin \frac{k}{k^4+1}}{\frac{1}{k^2}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k^3 \sin \frac{k}{k^4+1} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k^3 \frac{\frac{k}{k^4+1} \sin \frac{k}{k^4+1}}{\frac{k}{k^4+1}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^4}{k^4+1} \times \frac{\sin \frac{k}{k^4+1}}{\frac{k}{k^4+1}} \right) = 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

Logo, as duas séries são da mesma natureza. E, como $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente, então $\sum_{k=1}^{+\infty} k \sin \frac{k}{k^4+1}$ é convergente.

Exercício 132 Qual a natureza da série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^2}$?

Resolução

A série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\sin k|}{k^2}$ é convergente, porque $0 \leq \frac{|\sin k|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$, para qualquer número natural k e $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente.

Então, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ é absolutamente convergente, pelo que é convergente.

3.5 Séries Alternadas

Definição 133 Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos. Às séries $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} u_k$ chamamos séries alternadas.

É claro que, numa série alternada, os termos são alternadamente positivos e negativos.

Proposição 134 (Critério de Leibniz) Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão estritamente decrescente e que tende para zero. Então, $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ é uma série convergente.

Convém referir que, do facto da sucessão ser estritamente decrescente e tender para zero, se conclui que os termos da sucessão têm de ser positivos.

Exemplo 135 Verifique que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ satisfaz as condições da proposição anterior.

Resolução

Seja $u_n = \frac{1}{n}$. Ora, $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$. Quanto à monotonia, temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente decrescente e tende para zero. Então, pelo critério de Leibniz, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ é convergente.

Calculemos a soma dos primeiros 6 termos da sucessão:

$$\sum_{k=1}^6 \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$$

Um resultado curioso é o seguinte: Quando se considera que a soma da série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ é $\frac{37}{60}$, comete-se um erro inferior a $\frac{1}{7}$ (valor absoluto do primeiro termo desprezado). Note-se que $\frac{37}{60} \approx 0,616666667$ e que, como veremos adiante, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 \approx 0,6931471806$ e que $\frac{1}{7} \approx 0,1428571429$.

O erro cometido é de $|\frac{37}{60} - \ln 2| \approx 0,0764805139 < 0,1428571429$.
Note-se que a convergência é muito lenta.

3.6 Séries de MacLaurin

Exemplo 136 *Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \arctan x$, cujo domínio é \mathbb{R} . Para que valores de x a série é convergente?*

Resolução

Como $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$, com $-1 < x < 1$, vem (por primitivação):

$$\begin{aligned} \arctan x &= x + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \text{ com } -1 < x < 1 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \text{ com } -1 < x < 1 \end{aligned}$$

A série é convergente para $-1 < x < 1$. Observe-se que $\arctan 0 = 0$.

Exemplo 137 *Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \sin x$, cujo domínio é \mathbb{R} . Para que valores de x a série é convergente?*

Resolução

Começamos por referir que f admite derivadas de todas as ordens.

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$$

E, a partir daqui, tudo se repete.

Logo, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$.

Então, $f^{(4n)}(0) = f^{(4n+2)}(0) = 0$, $f^{(4n+1)}(0) = 1$ e $f^{(4n+3)}(0) = -1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \sin x &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

A série dos módulos é dada por $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Aplicando o critério de D'Alembert, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{|x|^{2n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x|^2}{(2n+3)(2n+2)} \right) = 0 < 1$$

Logo, a série é absolutamente convergente, para qualquer valor real de x .

Exemplo 138 *Obtenha o desenvolvimento em série de Maclaurin da função $f(x) = \cos x$, cujo domínio é \mathbb{R} . Para que valores de x a série é convergente?*

Resolução

$$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x \quad f''(x) = -\cos x \quad f'''(x) = \sin x \quad f^{(4)}(x) = \cos x = f(x)$$

E, a partir daqui, tudo se repete.

Logo, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$.

Então, $f^{(4n)}(0) = 1$, $f^{(4n+2)}(0) = -1$, $f^{(4n+1)}(0) = f^{(4n+3)}(0) = 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \cos x &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

Analogamente ao exemplo anterior, a série é absolutamente convergente, para qualquer valor real de x .

Exemplo 139 Calculemos um valor aproximado de $\sin 1$, usando o desenvolvimento em série de MacLaurin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} = 0,841\,468\,254$$

O erro cometido é inferior a $\frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} \approx 0,000002755\,731\,922$.

$$\left| \sin 1 - \frac{4241}{5040} \right| \approx 0,000\,002\,730\,8 < 0,000002755\,731\,922$$

$$\text{Então, } \frac{4241}{5040} < \sin 1 < \frac{4241}{5040} + 0,000002755\,731\,922.$$

Exemplo 140 Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Como desenvolver $\frac{1}{1-x}$ numa série de potências de x ? E, para que valores de x tal série é convergente?

Resolução

Se nos ocorrer que $\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$, temos que, para $-1 < x < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} x^k$$

Regra prática:

$$\begin{array}{r} 1 \\ -1 \quad +x \\ \hline x \\ -x \quad +x^2 \\ \hline x^2 \\ -x^2 \quad +x^3 \\ \hline x^3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \quad -x \\ 1 \quad +x \quad +x^2 \\ \hline \end{array}$$

Usando a fórmula de MacLaurin:

De $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$, vem $f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = 3!(1-x)^{-4}$, etc..

Logo, $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $f^{(n)}(0) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Logo,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} x^k, \text{ com } -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Note-se que a expressão $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ levanta um problema para $x = 0$, por causa de 0^0 .

Exemplo 141 Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Como desenvolver $\frac{1}{1+x^2}$ numa série de potências de x ? E, para que valores de x tal série é convergente?

Resolução

Usando as séries geométricas, vem

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots + (-1)^k x^{2k} + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}, \text{ com } x^2 < 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}, \text{ com } -1 < x < 1\end{aligned}$$

Neste exemplo é mais complicado calcular a derivada de ordem n da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Outra maneira de resolver esta questão consiste em desenvolver em série a função $g(x) = \frac{1}{1+x}$ e, depois, substituir x por x^2 .

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k x^k, \text{ com } -1 < x < 1.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}, \text{ com } -1 < x^2 < 1.\end{aligned}$$

Logo, a série é convergente para $-1 < x < 1$.

Exemplo 142 Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \ln(1+x)$, cujo domínio é $] -1, +\infty[$. Para que valores de x a série é convergente?

Resolução

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}, \quad f''(x) = -(x+1)^{-2}, \quad f'''(x) = 2(x+1)^{-3}.$$

Então, $f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)! (x+1)^{-n}$, pelo que $f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!$.

Logo,

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

A série dos módulos é dada por $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k}$. Aplicando o critério de D'Alembert, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{|x|^n} \right) = |x|$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$.

Para $x = 1$, obtemos $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$.

Esta série é simplesmente convergente (série harmónica alternada).

Outra resolução

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$$

Então,

$$f(x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = C + \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Mas, $f(0) = \ln 1 = 0$, pelo que $C = 0$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

Observe-se que, para $x = 1$, obtemos a série harmónica alternada que é convergente.

Então, $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2$.

Exemplo 143 *Obtenha a fórmula de MacLaurin para a função $f(x) = \tan x$, usando potências de x de expoente menor ou igual a 7.*

Resolução

Começemos por observar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan^n x) &= n \tan^{n-1} x (\sec^2 x) = n \tan^{n-1} x (1 + \tan^2 x) = n \tan^{n-1} x + n \tan^{n+1} x \\ \frac{d^2}{dx^2}(\tan^n x) &= n^2 \tan^{n-2} x + 2n^2 \tan^n x - n \tan^{n-2} x + n^2 \tan^{n+2} x + n \tan^{n+2} x \\ &= (n^2 - n) \tan^{n-2} x + 2n^2 \tan^n x + (n^2 + n) \tan^{n+2} x \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= 1 + \tan^2 x \\ \frac{d^3}{dx^3}(\tan x) &= \frac{d^2}{dx^2}(\tan^2 x) = (4 - 2) + 8 \tan^2 x + (4 + 2) \tan^4 x = 2 + 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x \\ \frac{d^5}{dx^5}(\tan x) &= \frac{d^2}{dx^2}(2 + 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x) = 8(2 + 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x) + 6(12 \tan^2 x + 32 \tan^4 x + 20 \tan^6 x) \\ \text{Logo, } \frac{d^5}{dx^5}(\tan x) &= 16 + 136 \tan^2 x + 240 \tan^4 x + 120 \tan^6 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^7}{dx^7}(\tan x) &= \frac{d^2}{dx^2}(16 + 136 \tan^2 x + 240 \tan^4 x + 120 \tan^6 x) \\ &= 136(2 + 8 \tan^2 x + 6 \tan^4 x) + \cdots \\ &= 272 + \cdots \end{aligned}$$

Então,

$$\tan x = 1 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + O(x^7) = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^7)$$

Na expressão anterior, $O(x^7)$ é um infinitésimo com x , de ordem superior a 7, isto é, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{O(x^7)}{x^7} = 0$.

Observe-se que $\tan x$ é uma função ímpar e, por isso, o mesmo acontece com as derivadas de ordem par (2^a , 4^a , 6^a , ...), as quais se anulam no ponto $x = 0$. Logo, apenas interessa calcular as derivadas de ordem ímpar (1^a , 3^a , 5^a , ...).

Exemplo 144 *Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \sqrt{1+x}$, cujo domínio é $[-1, +\infty[$. Para que valores de x a série é convergente?*

Resolução

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \implies f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} \implies f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \implies f'''(0) = \frac{3}{8}$$

Então, $f(x) = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8} \times \frac{x^3}{3!} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)x^n + \dots$, onde $\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}-1) \times \dots \times (\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Logo, a série de MacLaurin de $f(x)$ é:

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \frac{33}{2048}x^7 - \frac{429}{32768}x^8 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)x^n + \dots$$

Calculemos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left|\left(\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}\right|}{\left|\left(\frac{1}{n}\right)x^n\right|}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left|\left(\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}\right|}{\left|\left(\frac{1}{n}\right)x^n\right|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left|\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| \times |x|^{n+1}}{\left|\left(\frac{1}{n}\right)\right| \times |x|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!} \times |x|}{\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}} \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)(\frac{1}{2}-n)}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)} \times \frac{n!}{(n+1)!} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(\frac{1}{2}-n)}{n+1} \right| = |x| \end{aligned}$$

Logo, para $-1 < x < 1$, a série é absolutamente convergente.

Observação 1

Mais geralmente, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Assim, por exemplo, $\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} = \frac{1}{6}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha$

Observação 2

Uma questão importante que não referimos é a seguinte: Em que condições uma função é representada pela sua série de MacLaurin?

Exemplo 145 (Este exemplo foi retirado do livro "Curso de Análise Matemática" do professor Santos Guerreiro)

Consideremos a função definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & \Leftarrow x \neq 0 \\ 0 & \Leftarrow x = 0 \end{cases}$. Determinemos a série de MacLaurin desta função:

Resolução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 2x^{-3}e^{-x^{-2}} & \Leftarrow x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^{-2}}}{x} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0 & \Leftarrow x = 0 \end{cases} \\ f''(x) &= \begin{cases} -\frac{6x^2-4}{x^6}e^{-x^{-2}} & \Leftarrow x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{-3}e^{-x^{-2}}}{x} = 0 & \Leftarrow x = 0 \end{cases} \\ f'''(x) &= \begin{cases} \frac{4(6x^4-9x^2+2)}{x^9}e^{-x^{-2}} & \Leftarrow x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{6x^2-4}{x^7}e^{-x^{-2}}\right) = 0 & \Leftarrow x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

E assim por diante, obtendo-se $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$, para qualquer valor de n . Então, a série de MacLaurin desta função é a série identicamente nula, a qual, manifestamente, não representa a função f (a não ser nos zeros de f).

Observação

Seja x um número real diferente de zero. Então:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^{-x^{-2}} \right) = \frac{2}{x^3} e^{-x^{-2}}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{x^3} e^{-x^{-2}} \right) = \frac{-6x^2+4}{x^6} e^{-x^{-2}}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-6x^2+4}{x^6} e^{-x^{-2}} \right) = \frac{24x^4-36x^2+8}{x^9} e^{-x^{-2}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{24x^4-36x^2+8}{x^9} e^{-x^{-2}} \right) = \frac{-120x^6+300x^4-144x^2+16}{x^{12}} e^{-x^{-2}}$$

Suponhamos que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-x^{-2}}$. Então,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{x^{3n} P'_n(x) - 3nx^{3n-1} P_n(x)}{x^{6n}} e^{-x^{-2}} + \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}} e^{-x^{-2}} \\ &= \frac{x^3 P'_n(x) + (2 - 3nx^2) P_n(x)}{x^{3n+3}} e^{-x^{-2}} \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}} e^{-x^{-2}}, \text{ com } P_{n+1}(x) = x^3 P'_n(x) + (2 - 3nx^2) P_n(x) \end{aligned}$$

Suponhamos que o termo de maior grau de $P_n(x)$ é $(-1)^{n+1} (n+1)! x^{2n-2} = M_n(x)$, que o termo independente de $P_n(x)$ é 2^n e que em $P_n(x)$ não ocorre nenhum termo de grau ímpar.

Termo de maior grau de $P_{n+1}(x)$:

$$\begin{aligned} M_{n+1}(x) &= x^3 (-1)^{n+1} (2n-2)(n+1)! x^{2n-3} - 3nx^2 (-1)^{n+1} (n+1)! x^{2n-2} \\ &= (-1)^{n+1} (2n-2)(n+1)! x^{2n} - 3n (-1)^{n+1} (n+1)! x^{2n} \\ &= (-1)^{n+1} x^{2n} (n+1)! (2n-2-3n) \\ &= -(-1)^{n+1} x^{2n} (n+1)! (n+2) = (-1)^{n+2} x^{2n} (n+2)! \end{aligned}$$

O termo independente de $P_{n+1}(x)$ é 2×2^n , ou seja, 2^{n+1} .

Os termos de $P'_n(x)$ têm grau ímpar, pelo que os termos de $x^3 P'_n(x)$ têm grau par. E o mesmo acontece com $(2 - 3nx^2) P_n(x)$.

Logo, todos os termos de $P_{n+1}(x)$ têm grau par.

Então, uma vez que as afirmações são verdadeiras para $n = 1$, podemos concluir que todas são válidas para qualquer número natural.

Suponhamos que $f^{(n)}(0) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} e^{-x^{-2}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{P_n\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^{3n+1}}} e^{-t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{3n+1} P_n\left(\frac{1}{t}\right)}{e^{t^2}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{3n+1}}{e^{t^2}} \right) \times \lim_{t \rightarrow \infty} P_n\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \times 2^n = 0 \end{aligned}$$

Logo, por indução, temos que $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, uma vez que $f'(0) = 0$.

Vejamos, agora, quais os valores de $f^{(n+1)}\left(\frac{1}{10}\right)$:

$$f(x) = e^{-x^{-2}}$$

$$f'\left(\frac{1}{10}\right) \approx 7,440\,151\,952 \times 10^{-41}$$

$$f''\left(\frac{1}{10}\right) \approx 1,465\,709\,935 \times 10^{-37}$$

$$f'''\left(\frac{1}{10}\right) \approx 2,843\,030\,864 \times 10^{-34}$$

$$f^{(4)}\left(\frac{1}{10}\right) \approx 5,427\,546\,208 \times 10^{-31}$$

$$\begin{aligned}
f^{(5)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 1,019\,351\,678 \times 10^{-27} \\
f^{(6)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 1,882\,527\,019 \times 10^{-24} \\
f^{(7)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 3,416\,959\,879 \times 10^{-21} \\
f^{(8)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 6,092\,424\,279 \times 10^{-18} \\
f^{(9)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 1,066\,462\,928 \times 10^{-14} \\
f^{(10)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 1,831\,649\,013 \times 10^{-11} \\
f^{(11)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 3,084\,570\,169 \times 10^{-8} \\
f^{(12)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 5,089\,731\,968 \times 10^{-5} \\
f^{(13)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 8,222\,593\,672 \times 10^{-2} \\
f^{(14)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 129,948\,832\,3 \\
f^{(15)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 200718,459\,1 \\
f^{(16)}\left(\frac{1}{10}\right) &\approx 302702358,4 \\
\text{Logo, } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}\left(\frac{1}{10}\right) &= +\infty.
\end{aligned}$$

E o mesmo acontece com as sucessivas derivadas de f no ponto $x = \frac{1}{100}$:

$$\begin{aligned}
f'\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 2,270\,967\,73 \times 10^{-4337} \\
f''\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 4,541\,254\,17 \times 10^{-4331} \\
f'''\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 9,079\,783\,451 \times 10^{-4325} \\
f^{(4)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 1,815\,139\,428 \times 10^{-4318} \\
f^{(5)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 3,628\,100\,362 \times 10^{-4312} \\
f^{(6)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 7,250\,757\,483 \times 10^{-4306} \\
f^{(7)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 1,448\,846\,034 \times 10^{-4299} \\
f^{(8)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 2,894\,648\,577 \times 10^{-4293} \\
f^{(9)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 5,782\,347\,563 \times 10^{-4287} \\
f^{(10)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 1,154\,907\,654 \times 10^{-4280} \\
f^{(100)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 6,808\,036\,541 \times 10^{-3714} \\
f^{(200)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 8,764\,038\,096 \times 10^{-3085} \\
f^{(300)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 2,325\,275\,963 \times 10^{-2456} \\
f^{(400)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 1,217\,538\,741 \times 10^{-1828} \\
f^{(500)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 1,201\,356\,965 \times 10^{-1201} \\
f^{(550)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 1,987\,608\,147 \times 10^{-888} \\
f^{(580)}\left(\frac{1}{100}\right) &\approx 1,376\,661\,924 \times 10^{-700}
\end{aligned}$$

Embora a convergência seja muito lenta, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}\left(\frac{1}{100}\right) = +\infty$.

Proposição 146 *Se uma função f admite derivadas de todas as ordens e existe um número positivo k , tal que numa vizinhança de zero, todas as derivadas verificam a condição $|f^{(n)}(x)| \leq k$, então f é representada pela sua série de MacLaurin, nessa vizinhança.*

Observação

A hipótese da proposição anterior é uma condição suficiente para que f seja representada pela sua série de MacLaurin, mas não é necessária.

$$\text{Seja } f(x) = \sin(2x). \text{ Então, } \begin{cases} f'(x) = 2 \cos(2x) \\ f''(x) = -4 \sin(2x) = 4 \sin(-2x) = 4 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) = -8 \cos(2x) = 8 \cos(2x + \pi) \\ f^{(4)}(x) = 16 \sin(2x) = 16 \cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) \\ f^{(5)}(x) = 32 \sin(2x) = 16 \cos(2x + 2\pi) \end{cases}.$$

Logo, $f^{(n)}(x) = 2^n \cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$, como pode ser provado por indução em n .

Neste caso, as derivadas não são majoradas em módulo, como acontece com a função $g(x) = \sin x$.

No entanto, se $\sin x$ é representada pela sua série de MacLaurin, então $\sin(2x)$ também é (quando muito, o raio de convergência vem reduzido a metade).

Ora,

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \frac{128x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}\end{aligned}$$

Neste caso, o raio de convergência de ambas as séries é $+\infty$.

Proposição 147 *Se uma função f admite derivadas de todas as ordens e existem dois números positivos k e r , tal que, numa vizinhança de zero, todas as derivadas verificam a condição $|f^{(n)}(x)| \leq kr^n$, então f é representada pela sua série de MacLaurin, nessa vizinhança.*

Observação

A proposição anterior é um caso particular desta (basta fazer $r = 1$). No entanto, a penúltima proposição implica a última:

É claro que se $0 < r \leq 1$, temos que $|f^{(n)}(x)| \leq k$, para qualquer n .

Suponhamos que existem dois números positivos k e r , tal que, numa vizinhança de zero, $|f^{(n)}(x)| \leq kr^n$.

Seja, $g(x) = f\left(\frac{x}{r}\right)$. Então, $g'(x) = \frac{1}{r}f'\left(\frac{x}{r}\right)$, pelo que $|g'(x)| \leq k$.

E, $g''(x) = \frac{1}{r^2}f''\left(\frac{x}{r}\right)$, pelo que $|g''(x)| \leq k$.

Então, numa vizinhança de zero, todas as derivadas verificam a condição $|g^{(n)}(x)| \leq k$, pelo que g é representada pela sua série de MacLaurin, nessa vizinhança.

Mas se $f\left(\frac{x}{r}\right)$ é representada pela sua série de MacLaurin, então $f(x)$ também é (numa vizinhança conveniente).

Exemplo 148 *Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, cujo domínio é \mathbb{R} . Para que valores de x a série é convergente?*

Resolução

A série de MacLaurin da função $g(x) = \sqrt{1+x}$ é

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \frac{33}{2048}x^7 - \frac{429}{32768}x^8 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)x^n + \cdots$$

Então, a série de MacLaurin da função $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ é

$$1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \frac{7}{256}x^{10} - \frac{21}{1024}x^{12} + \frac{33}{2048}x^{14} - \frac{429}{32768}x^{16} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)x^{2n} + \cdots$$

A série anterior é absolutamente para $-1 < x < 1$. Para $x = \pm 1$, a série é simplesmente convergente.

Exemplo 149 *Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, cujo domínio é $] -1, +\infty[$. Para que valores de x a série é absolutamente convergente?*

Resolução

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ f'''(x) = -\frac{15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}} \\ \dots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \times (1+x)^{\frac{1-2n}{2}} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -\frac{1}{2} \\ f''(0) = \frac{3}{4} \\ f'''(0) = -\frac{15}{8} \\ \dots \\ f^{(n)}(0) = (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \end{cases}$$

Então, a série de Mac-Laurin de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ é

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \times \frac{x^2}{2!} - \frac{15}{8} \times \frac{x^3}{3!} + \frac{105}{16} \times \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \times \frac{x^n}{n!} + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots + (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} \times \frac{x^n}{n!} + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots + (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^n + \dots \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n) \times (2n+2)} |x|^{n+1}}{\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} |x|^n} &= \frac{\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n) \times (2n+2)}}{\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}} |x| \\ &= \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n) \times (2n+2)} \times \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} |x| \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} |x| \end{aligned}$$

Então, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} |x| \right) = |x|$, pelo que a série é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$.

Exemplo 150 Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, cujo domínio é $] -\infty, 1[$. Para que valores de x a série é absolutamente convergente?

Resolução

Basta-nos, na série do exemplo anterior, substituir x por $-x$:

$$\sigma(-x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots + \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^n + \dots$$

A série é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$.

Exemplo 151 Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, cujo domínio é $] -1, 1[$. Para que valores de x a série é absolutamente convergente?

Resolução

Basta-nos, na série correspondente à função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, substituir x por $-x^2$:

$$\sigma(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \dots + \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^{2n} + \dots$$

A série é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$.

Exemplo 152 Obtenha o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \arcsin x$, cujo domínio é $[-1, 1]$. Para que valores de x a série é absolutamente convergente?

Resolução

Ora, $\arcsin x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, tendo-se $\arcsin 0 = 0$.

Primitivemos a série anterior:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = C + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

É claro que $C = 0$, pelo que

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

A série é absolutamente convergente para $-1 < x < 1$.

Consideremos $x = 1$.

A série anterior dá origem a

$$1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \times \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

Seja $u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \times \frac{1}{2n+1}$. Então,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n) \times (2n+2)} \times \frac{1}{2n+1}$$

Calculemos a razão entre dois termos consecutivos da sucessão das parcelas da série anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n) \times (2n+2)} \times \frac{1}{2n+3}}{\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \times \frac{1}{2n+1}} &= \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n) \times (2n+2)} \times \frac{1}{2n+3} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n) \times (2n+1)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)} \\ &= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \end{aligned}$$

Calculemos a razão entre dois termos consecutivos da ducessão de termo geral $v_n = \left(n^{-\frac{4}{3}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{-\frac{4}{3}}}{n^{-\frac{4}{3}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{4}{3}}$$

Então,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}}{\frac{u_n}{v_n}}\right)^3 &= \left(\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{4}{3}}\right)^3 \\ &= \frac{(2n+1)^6}{(2n+2)^3(2n+3)^3} \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \\ &= \frac{(2n+1)^6}{8(2n+3)^3} \times \frac{n+1}{n^4} \\ &= \frac{64n^7 + 256n^6 + 432n^5 + 400n^4 + 220n^3 + 72n^2 + 13n + 1}{64n^7 + 288n^6 + 432n^5 + 216n^4} \end{aligned}$$

Ora, a diferença entre o numerador e o denominador é $-32n^6 + 184n^4 + 220n^3 + 72n^2 + 13n + 1$, cujo limite é $-\infty$.

Então, a partir de certa ordem, temos que $\left(\frac{\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}}{\frac{u_n}{v_n}}\right)^3 < 1$, pelo que $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < 1$.

Logo, a partir de certa ordem, temos $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Como as duas séries são de termos positivos e a série $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ é convergente, então a série $\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ também é convergente (critério de comparação de razões).

É claro que para $x = -1$, obtemos uma série convergente.

Então, a série $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots + \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$ é absolutamente convergente para $-1 \leq x \leq 1$.

3.7 Séries de Taylor

As séries de MacLaurin são um caso particular das séries de Taylor, pelo que podíamos ter começado pelas séries de Taylor e não pelas séries de MacLaurin. No entanto, a série de Taylor duma função pode ser obtida da série de MacLaurin duma função adequada.

Definição 153 Se f é uma função que admite derivadas de todas as ordens no ponto a , temos que a série de Taylor da função f é dada por

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

desde que a série seja convergente.

Também aqui se põe a questão de saber em que condições a função f é representada pela sua série de Taylor!

Exemplo 154 Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no ponto $x = 1$. Para que valores de x a série é convergente?

Resolução

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \implies f'(x) = -x^{-2} \implies f''(x) = 2x^{-3}$$

$$\text{Então, } f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}, \text{ pelo que } f^{(n)}(1) = (-1)^n n!.$$

Logo, a série de Taylor da função $f(x) = \frac{1}{x}$, no ponto $x = 1$ é

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1) + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!}f^{(n)}(1) + \dots \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n + \dots \end{aligned}$$

Ou seja, $\varphi(x)$ é uma série geométrica de razão $1-x$. Esta série é absolutamente convergente para $|1-x| < 1$, ou seja, $|x-1| < 1$.

Logo, $-1 < x-1 < 1$, ou seja, $0 < x < 2$. A série é absolutamente convergente em $]0, 2[$.

Note-se que $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$, pelo que, substituindo x por $x-1$, obtemos

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^n (x-1)^n + \dots$$

Exemplo 155 Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto $x = 1$. Para que valores de x a série é convergente?

Resolução

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \implies f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \implies f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

Logo, a série de Taylor é

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16} \times \frac{1}{4!}(x-1)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)(x-1)^n + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)(x-1)^n + \dots \end{aligned}$$

Note-se que a série anterior pode ser obtida a partir da série de MacLaurin para a função $g(x) = \sqrt{1+x}$, substituindo x por $x-1$.

Ora, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8} \times \frac{x^3}{3!} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)x^n + \dots$, pelo que teremos

$$\sqrt{1+x-1} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4} \times \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{3}{8} \times \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)(x-1)^n + \dots$$

Logo, para $-1 < x-1 < 1$, a série é absolutamente convergente.

Ou seja, a série é absolutamente convergente para $0 < x < 2$.

Exemplo 156 *Obtenha o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(x) = \sin x$, no ponto $x = \frac{\pi}{2}$. Para que valores de x a série é convergente?*

Resolução

$$f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x \wedge f''(x) = -\sin x \wedge f'''(x) = -\cos x \wedge f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$$

E, apartir daqui, tudo se repete. Então, a série de Taylor de $f(x)$ é

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} f^{(2n)}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots \end{aligned}$$

A série anterior é convergente para qualquer valor de x e, devido à proposição seguinte, representa $f(x)$, ou seja, $f(x) = \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Proposição 157 *Se uma função f admite derivadas de todas as ordens e existe um número positivo k , tal que numa vizinhança de a , todas as derivadas verificam a condição $|f^{(n)}(x)| \leq k$, então f é representada pela sua série de Taylor, nessa vizinhança.*

Proposição 158 *Se uma função f admite derivadas de todas as ordens e existem dois números positivos k e r , tal que, numa vizinhança de a , todas as derivadas verificam a condição $|f^{(n)}(x)| \leq kr^n$, então f é representada pela sua série de Taylor, nessa vizinhança.*

Capítulo 4

Equações de Pell-Fermat

Vejamos como resolver as equações $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, com $x, y \in \mathbb{N}$.

Começemos pela equação $x^2 - 2y^2 = -1$. Como esta equação admite a solução $x_0 = 1, y_0 = 1$ e 2 não é quadrado perfeito, então admite infinitas soluções, o mesmo acontecendo com a equação $x^2 - 2y^2 = 1$, a qual admite a solução trivial $x = 1, y = 0$. Para obtermos as soluções das duas equações, procedemos do seguinte modo:

Consideramos a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, (na qual $b_{11} = b_{22} = x_0 = 1, b_{21} = y_0 = 1, b_{12} = 2y_0 = 2$) e, ainda, as duas sucessões (x_n) e (y_n) definidas por $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, com $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Então:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Se prestarmos atenção, verificamos que, alternadamente, obtemos soluções de cada uma das equações. Se pretendemos as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$, multiplicamos a matriz $A = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, obtendo-se $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, depois multiplicamos $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ pela solução $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e assim sucessivamente. Se pretendemos as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = -1$, multiplicamos $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtendo-se $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, depois multiplicamos $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ pela solução $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, etc.

Ao sistema $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, ou a outro análogo, chamamos um sistema de equações com diferenças.

Os cálculos para obtenção das soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$, podem ser efectuados numa folha de cálculo:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---|---|----|----|-----|------|-------|--------|--------|---------|
| x | 1 | 3 | 17 | 99 | 577 | 3363 | 19601 | 114243 | 665857 | 3880899 |
| y | 0 | 2 | 12 | 70 | 408 | 2378 | 13860 | 80782 | 470832 | 2744210 |

É possível encontrar o termo geral das soluções das equações $x^2 - 2y^2 = -1$ e $x^2 - 2y^2 = 1$, determinando a matriz A^n , para o que procedemos à diagonalização da matriz A . Os valores próprios de A são as raízes do polinómio característico $\lambda^2 - 6\lambda + 1$ que são $3 \pm 2\sqrt{2}$.

Os termos gerais das duas sucessões que dão as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$ são

$$\begin{cases} x_n = c_1 (3 + 2\sqrt{2})^n + c_2 (3 - 2\sqrt{2})^n \\ y_n = c_3 (3 + 2\sqrt{2})^n + c_4 (3 - 2\sqrt{2})^n \end{cases}$$

com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, constantes estas que podem ser obtidas a partir das condições iniciais.

Neste caso, temos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $c_4 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, pelo que

$$\begin{cases} x_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2} \\ y_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Também podemos definir as duas sucessões anteriores, por meio de duas equações com diferenças, a dois passos:

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 3, y_0 = 0, y_1 = 2 \\ x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0 \\ y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 0 \end{cases}$$

E obtinhamos, novamente, $\begin{cases} x_n = c_1 (3+2\sqrt{2})^n + c_2 (3-2\sqrt{2})^n \\ y_n = c_3 (3+2\sqrt{2})^n + c_4 (3-2\sqrt{2})^n \end{cases}$

De modo análogo se encontram as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = -1$.

As equações do tipo $x^2 - Ny^2 = 1$, com N um número natural não quadrado perfeito, são conhecidas por equações de Pell-Fermat e estão relacionadas com as Fracções Contínuas, um outro tópico da Teoria dos Números.

De qualquer modo, podemos adiantar que os termos gerais das soluções da equação $x^2 - Ny^2 = 1$, com N não quadrado, são dadas por

$$\begin{cases} x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{N})^n + (x_1 - y_1\sqrt{N})^n}{2} \\ y_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{N})^n - (x_1 - y_1\sqrt{N})^n}{2\sqrt{N}} \end{cases}$$

onde x_1 e y_1 são os menores inteiros positivos que satisfazem a condição $x^2 - Ny^2 = 1$ (a esse par de números chama-se solução fundamental).

Exemplo 159 Determine os números triangulares que são quadrados perfeitos.

Resolução

Número triangular é um número da forma $\frac{n(n+1)}{2}$, o que corresponde à soma $1 + 2 + \dots + n$. Então devemos ter $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$. Ora:

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2 \iff n^2 + n = 2m^2 \iff 4n^2 + 4n + 1 = 8m^2 + 1 \iff (2n+1)^2 - 8m^2 = 1$$

Esta equação é do tipo $x^2 - 8y^2 = 1$, mas pode ser resolvida a partir da equação $x^2 - 2y^2 = 1$. Para isso, basta observarmos que, em qualquer solução desta última equação, temos x ímpar e y par.

Então, $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_k + 4y_k \\ 2x_k + 3y_k \end{bmatrix}$, com $x_0 = 1, y_0 = 0$.

Como $\begin{cases} 2n_k + 1 = x_k \\ y_k = 2m_k \end{cases}$, temos $\begin{cases} n_k = \frac{x_k - 1}{2} \\ m_k = \frac{y_k}{2} \end{cases}$, pelo que $\begin{cases} n_0 = \frac{x_0 - 1}{2} = 0 \\ m_0 = \frac{y_0}{2} = 0 \end{cases}$

De $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_k + 4y_k \\ 2x_k + 3y_k \end{bmatrix}$, vem $\begin{bmatrix} 2n_{k+1} + 1 \\ 2m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2n_k + 1) + 4(2m_k) \\ 2(2n_k + 1) + 3(2m_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n_k + 8m_k + 3 \\ 4n_k + 6m_k + 2 \end{bmatrix}$

E daqui obtemos, $\begin{bmatrix} 2n_{k+1} + 1 \\ 2m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n_k + 8m_k + 3 \\ 4n_k + 6m_k + 2 \end{bmatrix}$, donde se conclui que $\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3n_k + 4m_k + 1 \\ 2n_k + 3m_k + 1 \end{bmatrix}$

Recorrendo a uma folha de cálculo, vem:

| k | n | m | m^2 |
|-----|--------|--------|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 8 | 6 | 36 |
| 3 | 49 | 35 | 1225 |
| 4 | 288 | 204 | 41616 |
| 5 | 1681 | 1189 | 1413721 |
| 6 | 9800 | 6930 | 48024900 |
| 7 | 57121 | 40391 | 1631432881 |
| 8 | 332928 | 235416 | 554220693056 |

Vejamos como resolver a equação $x^2 - 8y^2 = 1$, directamente:

Esta equação admite a solução trivial $(1, 0)$ e a solução $(3, 1)$, dita solução fundamental. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Então, $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_n + 8y_n \\ x_n + 3y_n \end{bmatrix}$, com $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$.

Na tabela seguinte, indicam-se algumas soluções da equação:

| | | | | | | | | | |
|-----|---|---|----|----|-----|------|-------|--------|--------|
| x | 1 | 3 | 17 | 99 | 577 | 3363 | 19601 | 114243 | 665857 |
| y | 0 | 1 | 6 | 35 | 204 | 1189 | 6930 | 40391 | 235416 |

Observe-se que a equação $x^2 - 8y^2 = -1$ não tem soluções inteiras, uma vez que, se x é ímpar, então $x^2 \equiv -1 \pmod{8}$.

Note-se, também, que obter a solução fundamental duma equação do tipo $x^2 - Ny^2 = -1$, com N não quadrado, pode ser bastante complicado, para quem não conhecer o respectivo algoritmo. Uma terceira observação é que a equação $x^2 - Ny^2 = -1$, com N não quadrado, é impossível sempre que N admita um divisor da forma $4n + 3$, ou que N seja múltiplo de 4. Finalmente, registre-se que o facto da equação $x^2 - Ny^2 = -1$ ter ou não ter soluções inteiras depende do comprimento do período do desenvolvimento de \sqrt{N} em fracção contínua ser ímpar ou ser par. Mas, o que é uma fracção contínua?

Intuitivamente, diremos que fracção contínua é uma expressão da forma $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$, com a_0 um

inteiro qualquer e $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ inteiros positivos.

As fracções contínuas podem ser finitas (que representam números racionais), infinitas periódicas (que representam as chamadas irracionalidades quadráticas) ou infinitas não periódicas (que representam os restantes números irracionais). Seguem-se dois exemplos da determinação da fracção contínua correspondente a um número irracional:

Vejamos como obter a expansão de $3 - 2\sqrt{2}$, em fracção contínua:

$\alpha = \alpha_0 = 3 - 2\sqrt{2} = 0, 17 \dots$ Então, $a_0 = 0$.

$\alpha_1 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} = 5, 82 \dots$ Então, $a_1 = 5$.

$\alpha_2 = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} - 5} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{8 - 4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = 1, 20 \dots$ Então, $a_2 = 1$.

$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2 + 2\sqrt{2} = 4, 8 \dots$ Então, $a_3 = 4$.

$\alpha_4 = \frac{1}{2 + 2\sqrt{2} - 4} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = \alpha_2 = 1, 20 \dots$ Então, $a_4 = 1$.

A partir daqui, tudo se repete, obtendo-se uma fracção contínua periódica. Então, $\alpha_0 = 0 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$.

Logo, $\alpha_0 = \langle 0, 5, 1, 4, 1, 4, \dots \rangle = \langle 0, 5, \overline{1, 4} \rangle$

Como exercício, vejamos a maneira de obter a expansão de $\sqrt{41}$, em fracção contínua:

$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{41} = 6, 40 \dots$ Então, $a_0 = 6$.

$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{6 + \sqrt{41}}{5} = 2, 48 \dots$ Então, $a_1 = 2$.

$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{6 + \sqrt{41}}{5} - 2} = \frac{5}{\sqrt{41} - 4} = \frac{5(\sqrt{41} + 4)}{25} = \frac{4 + \sqrt{41}}{5} = 2, 08 \dots$ Então, $a_2 = 2$.

$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{4 + \sqrt{41}}{5} - 2} = \frac{5}{\sqrt{41} - 6} = \frac{5(6 + \sqrt{41})}{5} = 6 + \sqrt{41} = 12, 40 \dots$ Então, $a_3 = 12$.

$\alpha_4 = \frac{1}{6 + \sqrt{41} - 12} = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \alpha_1 = 2, 48 \dots$ Então, $a_1 = 2$.

Logo, $\alpha = \alpha_0 = \langle 6, 2, 2, 12, 2, 2, 12, \dots \rangle = \langle 6, \overline{2, 2, 12} \rangle$

Obtivemos, assim, uma fracção contínua periódica, cujo período tem comprimento 3.

Como 3 é ímpar, a equação $x^2 - 41y^2 = -1$ tem infinitas soluções inteiras, o mesmo acontecendo com a equação $x^2 - 41y^2 = 1$. Essas soluções estão indicadas na seguinte tabela em que

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \\ q_{-2} = 1, p_{-2} = 0, q_{-1} = 0, p_{-1} = 1 \end{cases}$$

| n | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------------------|---------|---------|---|------|------|----------|----------|------------|------------|
| a_n | \dots | \dots | 6 | 2 | 2 | 12 | 2 | 2 | 12 |
| p_n | 0 | 1 | 6 | 13 | 32 | 397 | 826 | 2049 | 25 414 |
| q_n | 1 | 0 | 1 | 2 | 5 | 62 | 129 | 320 | 3969 |
| $\frac{p_n}{q_n}$ | \dots | \dots | 6 | 6, 5 | 6, 4 | 6, 403 2 | 6, 403 1 | 6, 403 125 | 6, 403 124 |

Como o período tem comprimento 3, as soluções das equações $x^2 - 41y^2 = \pm 1$ aparecem nas colunas correspondentes a $n = -1, 2, 5, 8, 11, \dots$. Refira-se, ainda, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{41}$ e que às fracções $\frac{p_n}{q_n}$ chamamos convergentes.

Se o leitor quiser dar-se ao trabalho de obter a expansão de $\sqrt{1609}$ em fracção contínua, irá verificar que, mesmo para números razoavelmente pequenos como 1609, o trabalho poderá ser razoavelmente grande. Aqui, uma folha de cálculo não é de grande utilidade (a menos que se saiba mais sobre fracções contínuas), mas podemos utilizar a calculadora TI 92 ou outra que permita trabalhar com valores exactos de $\sqrt{1609}$.

Seguidamente, apresentamos os cálculos para a determinação da fracção contínua que representa $\sqrt{1609}$. Note-se que, dado $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ representa o maior número inteiro não superior a x .

$$\alpha_0 = \sqrt{1609} \Rightarrow a_0 = \lfloor \sqrt{1609} \rfloor = 40$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1609} - \lfloor \sqrt{1609} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} \Rightarrow a_1 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} \rfloor = 8$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 40}{9} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 32}{65} \Rightarrow a_2 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 32}{65} \rfloor = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 32}{65} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 32}{65} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 33}{8} \Rightarrow a_3 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 33}{8} \rfloor = 9$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 33}{8} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 33}{8} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 39}{11} \Rightarrow a_4 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 39}{11} \rfloor = 7$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 39}{11} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 39}{11} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 38}{15} \Rightarrow a_5 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 38}{15} \rfloor = 5$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 38}{15} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 38}{15} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 37}{16} \Rightarrow a_6 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 37}{16} \rfloor = 4$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 37}{16} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 37}{16} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 27}{55} \Rightarrow a_7 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 27}{55} \rfloor = 1$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 27}{55} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 27}{55} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 28}{15} \Rightarrow a_8 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 28}{15} \rfloor = 4$$

$$\alpha_9 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 28}{15} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 28}{15} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 32}{39} \Rightarrow a_9 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 32}{39} \rfloor = 1$$

$$\alpha_{10} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 32}{39} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 32}{39} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 7}{40} \Rightarrow a_{10} = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 7}{40} \rfloor = 1$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+7}{40} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+7}{40} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+33}{13} \Rightarrow a_{11} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{13} \rfloor = 5 \\
\alpha_{12} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+33}{13} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{13} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+32}{45} \Rightarrow a_{12} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{45} \rfloor = 1 \\
\alpha_{13} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+32}{45} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{45} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+13}{32} \Rightarrow a_{13} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+13}{32} \rfloor = 1 \\
\alpha_{14} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+13}{32} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+13}{32} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+19}{39} \Rightarrow a_{14} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+19}{39} \rfloor = 1 \\
\alpha_{15} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+19}{39} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+19}{39} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+20}{31} \Rightarrow a_{15} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+20}{31} \rfloor = 1 \\
\alpha_{16} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+20}{31} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+20}{31} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+11}{48} \Rightarrow a_{16} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+11}{48} \rfloor = 1 \\
\alpha_{17} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+11}{48} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+11}{48} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+37}{5} \Rightarrow a_{17} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{5} \rfloor = 15 \\
\alpha_{18} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+37}{5} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{5} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+38}{33} \Rightarrow a_{18} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{33} \rfloor = 2 \\
\alpha_{19} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{33} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{33} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+28}{25} \Rightarrow a_{19} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{25} \rfloor = 2 \\
\alpha_{20} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+28}{25} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{25} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+22}{45} \Rightarrow a_{20} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+22}{45} \rfloor = 1 \\
\alpha_{21} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+22}{45} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+22}{45} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+23}{24} \Rightarrow a_{21} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{24} \rfloor = 2 \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+23}{24} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{24} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+25}{41} \Rightarrow a_{22} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+25}{41} \rfloor = 1 \\
\alpha_{23} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+25}{41} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+25}{41} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+16}{33} \Rightarrow a_{23} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+16}{33} \rfloor = 1 \\
\alpha_{24} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+16}{33} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+16}{33} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+17}{40} \Rightarrow a_{24} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{40} \rfloor = 1 \\
\alpha_{25} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+17}{40} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{40} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+31}{24} \Rightarrow a_{25} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+31}{24} \rfloor = 1 \\
\alpha_{26} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+31}{24} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+31}{24} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+17}{55} \Rightarrow a_{26} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{55} \rfloor = 1 \\
\alpha_{27} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+17}{55} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{55} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+38}{3} \Rightarrow a_{27} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{3} \rfloor = 26
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{28} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{3} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{3} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+40}{3} \implies a_{28} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+40}{3} \rfloor = 26 \\
\alpha_{29} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+40}{3} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+40}{3} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+38}{55} \implies a_{29} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{55} \rfloor = 1 \\
\alpha_{30} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{55} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{55} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+17}{24} \implies a_{30} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{24} \rfloor = 2 \\
\alpha_{31} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+17}{24} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{24} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+31}{27} \implies a_{31} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+31}{27} \rfloor = 2 \\
\alpha_{32} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+31}{27} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+31}{27} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+23}{40} \implies a_{32} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{40} \rfloor = 1 \\
\alpha_{33} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+23}{40} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{40} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+17}{33} \implies a_{33} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{33} \rfloor = 1 \\
\alpha_{34} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+17}{33} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{33} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+16}{41} \implies a_{34} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+16}{41} \rfloor = 1 \\
\alpha_{35} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+16}{41} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+16}{41} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+25}{24} \implies a_{35} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+25}{24} \rfloor = 2 \\
\alpha_{36} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+25}{24} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+25}{24} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+23}{45} \implies a_{36} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{45} \rfloor = 1 \\
\alpha_{37} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+23}{45} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{45} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+22}{25} \implies a_{37} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+22}{25} \rfloor = 2 \\
\alpha_{38} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+22}{25} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+22}{25} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+28}{33} \implies a_{38} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{33} \rfloor = 2 \\
\alpha_{39} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+28}{33} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{33} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+38}{5} \implies a_{39} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{5} \rfloor = 15 \\
\alpha_{40} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{5} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{5} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+37}{48} \implies a_{40} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{48} \rfloor = 1 \\
\alpha_{41} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+37}{48} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{48} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+11}{31} \implies a_{41} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+11}{31} \rfloor = 1 \\
\alpha_{42} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+11}{31} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+11}{31} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+20}{39} \implies a_{42} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+20}{39} \rfloor = 1 \\
\alpha_{43} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+20}{39} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+20}{39} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+19}{32} \implies a_{43} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+19}{32} \rfloor = 1 \\
\alpha_{44} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+19}{32} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+19}{32} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+13}{45} \implies a_{44} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+13}{45} \rfloor
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{45} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+13}{45} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+13}{45} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+32}{13} \Rightarrow a_{45} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{13} \rfloor = 5 \\
\alpha_{46} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+32}{13} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{13} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+33}{40} \Rightarrow a_{46} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{40} \rfloor = 1 \\
\alpha_{47} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+33}{40} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{40} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+7}{39} \Rightarrow a_{47} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+7}{39} \rfloor = 1 \\
\alpha_{48} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+7}{39} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+7}{39} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+32}{15} \Rightarrow a_{48} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{15} \rfloor = 4 \\
\alpha_{49} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+32}{15} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{15} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+28}{55} \Rightarrow a_{49} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{55} \rfloor = 1 \\
\alpha_{50} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+28}{55} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{55} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+27}{16} \Rightarrow a_{50} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+27}{16} \rfloor = 4 \\
\alpha_{51} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+27}{16} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+27}{16} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+37}{15} \Rightarrow a_{51} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{15} \rfloor = 5 \\
\alpha_{52} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+37}{15} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{15} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+38}{11} \Rightarrow a_{52} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{11} \rfloor = 7 \\
\alpha_{53} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{11} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{11} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+39}{8} \Rightarrow a_{53} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+39}{8} \rfloor = 9 \\
\alpha_{54} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+39}{8} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+39}{8} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+33}{65} \Rightarrow a_{54} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{65} \rfloor = 1 \\
\alpha_{55} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+33}{65} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{65} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+32}{9} \Rightarrow a_{55} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{9} \rfloor = 8 \\
\alpha_{56} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+32}{9} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{9} \rfloor} = \sqrt{1609} + 40 \Rightarrow a_{56} = \lfloor \sqrt{1609} + 40 \rfloor = 80 \\
\alpha_{57} &= \frac{1}{\sqrt{1609} + 40 - \lfloor \sqrt{1609} + 40 \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} = \alpha_1 \Rightarrow a_{57} = a_1 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} \rfloor = 8
\end{aligned}$$

A partir daqui, tudo se repete, pelo que $\sqrt{1609}$ se escreve como uma fracção contínua periódica, tendo-se que o período é constituído por 56 números.

Convém registar que o comprimento do período não tem nada a ver com a ordem de grandeza dos números de que estamos a achar a fracção contínua. Vejamos a fracção contínua correspondente ao número $\sqrt{1613}$, número este que é próximo de $\sqrt{1609}$:

Exemplo 160 Determine a expansão de $\sqrt{1613}$ em fracção contínua.

Resolução

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \sqrt{1613} \Rightarrow b_0 = \lfloor \sqrt{1613} \rfloor = 40 \\
\beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{1613} - \lfloor \sqrt{1613} \rfloor} = \frac{\sqrt{1613} + 40}{13} \Rightarrow b_1 = \lfloor \frac{\sqrt{1613} + 40}{13} \rfloor = 6 \\
\beta_2 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1613} + 40}{13} - \lfloor \frac{\sqrt{1613} + 40}{13} \rfloor} = \frac{\sqrt{1613} + 38}{13} \Rightarrow b_2 = \lfloor \frac{\sqrt{1613} + 38}{13} \rfloor = 6
\end{aligned}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1613} + 38}{13} - \lfloor \frac{\sqrt{1613} + 38}{13} \rfloor} = \sqrt{1613} + 40 \implies b_3 = \lfloor \sqrt{1613} + 40 \rfloor = 80$$

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt{1613} + 40 - \lfloor \sqrt{1613} + 40 \rfloor} = \frac{\sqrt{1613} + 40}{13} = \beta_1$$

Então, $\sqrt{1613} = \langle 40, 6, 6, 80 \rangle = 40 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{80 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$.

Exemplo 161 Determine os Ternos Pitagóricos da forma $(x, x+1, y)$.

Resolução

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 = y^2 &\iff x^2 + x^2 + 2x + 1 = y^2 \iff 2x^2 + 2x + 1 = y^2 \\ &\iff 4x^2 + 4x + 1 = 2y^2 - 1 \iff (2x+1)^2 - 2y^2 = -1 \end{aligned}$$

Neste caso temos de resolver a equação $X^2 - 2Y^2 = -1$.

Dos problemas anteriores já sabemos que

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3X_n + 4Y_n \\ 2X_n + 3Y_n \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 2x_{n+1} + 1 \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2x_n + 1) + 4y_n \\ 2(2x_n + 1) + 3y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_n + 3 + 4y_n \\ 4x_n + 2 + 3y_n \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_n + 2y_n + 1 \\ 4x_n + 3y_n + 2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Também podemos calcular directamente os valores de X e Y e, depois, os valores de x , como se indica na tabela seguinte:

| n | X | Y | x | $x+1$ | y |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 7 | 5 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 41 | 29 | 20 | 21 | 29 |
| 3 | 239 | 169 | 119 | 120 | 169 |
| 4 | 1393 | 985 | 696 | 697 | 985 |
| 5 | 8119 | 5741 | 4059 | 4060 | 5741 |
| 6 | 47321 | 33461 | 23660 | 23661 | 33461 |
| 7 | 275807 | 195025 | 137903 | 137904 | 195025 |
| 8 | 1607521 | 1136689 | 803760 | 803761 | 1136689 |
| 9 | 9369319 | 6625109 | 4684659 | 4684660 | 6625109 |
| 10 | 54608393 | 38613965 | 27304196 | 27304197 | 38613965 |
| 11 | 318281039 | 225058681 | 159140519 | 159140520 | 225058681 |

Neste ponto, é muito natural que achemos que o problema está resolvido e queiramos ficar por aqui. Mas, também pode acontecer que achemos que pode haver mais para descobrir.

Se nos lembrarmos da sucessão de Fibonnaci e das suas propriedades, talvez nos apeteça calcular o quadrado dum termo da sucessão que nos dá os valores de y e comparar o resultado com o produto dos termos "adjacentes".

Assim, $5^2 = 29 \times 1 - 4$, $29^2 = 169 \times 5 - 4$, $169^2 = 985 \times 29 - 4$, ...

É natural supor que, para todo o número natural n , tenhamos $y_{n+2} = \frac{4+y_{n+1}^2}{y_n}$, o que nos permite calcular qualquer termo, conhecidos os dois primeiros.

Mas, se estivermos fora de contexto e olharmos para a sucessão definida por $y_{n+2} = \frac{4+y_{n+1}^2}{y_n}$, com $y_0 = 1$ e $y_1 = 5$, uma dúvida nos surgirá: Serão todos os termos desta sucessão números inteiros?

Uma propriedade curiosa desta sucessão é a seguinte:

$$5 = 2^2 + 1^2, 29 = 5^2 + 2^2, 169 = 12^2 + 5^2, 985 = 29^2 + 12^2, \dots$$

Com alguma intuição, consideramos as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por
$$\begin{cases} u_1 = 1, v_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_{n+1} + v_n = 2u_n + 5v_n \end{cases},$$
 cujos primeiros termos (a partir do terceiro) estão indicados na seguinte tabela:

| n | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|----|-----|------|-------|-------|--------|---------|----------|
| u_n | 29 | 169 | 985 | 5741 | 33461 | 195025 | 1136689 | 6625109 |
| v_n | 70 | 408 | 2378 | 13860 | 80782 | 470832 | 2744210 | 15994428 |

Os valores de u são os valores de y . Mas, como obter os valores de x ?

A resposta está neste quadro:

| | | | | | | | | | |
|-------|---|----|-----|-----|------|-------|--------|---------|---------|
| u | 1 | 5 | 29 | 169 | 985 | 5741 | 33461 | 195025 | 1136689 |
| v | 2 | 12 | 70 | 408 | 2378 | 13860 | 80782 | 470832 | 2744210 |
| x | 3 | 20 | 119 | 696 | 4059 | 23660 | 137903 | 803760 | 4684659 |
| $x+1$ | 4 | 21 | 120 | 697 | 4060 | 23661 | 137904 | 803761 | 4684660 |
| y | 5 | 29 | 169 | 985 | 5741 | 33461 | 195025 | 1136689 | 6625109 |

Os elementos da última linha da tabela anterior são os da primeira linha, eliminando o 1º elemento (1) e deslocando os restantes uma casa para a esquerda. O primeiro elemento da terceira linha (3) é a soma de 1 com 2. O segundo elemento da terceira linha (20) é a soma dos números 1, 2, 5 e 12, ou dos números 3, 5 e 12. O terceiro elemento da terceira linha (119) é a soma dos números 20, 29 e 70, ...

E os três últimos elementos de cada coluna dão-nos os sucessivos ternos Pitagóricos que pretendíamos. Mas há mais:

Cada elemento da 2ª linha é o dobro da soma dos elementos da 1ª linha até à respectiva coluna:

$$2 = 2 \times 1, 12 = 2 \times (1 + 5), 70 = 2 \times (1 + 5 + 29), \dots$$

Cada elemento da 1ª linha (com excepção do 1º) é a soma de 1 com o dobro da soma dos elementos da 2ª linha que estão nas colunas anteriores:

$$5 = 1 + 2 \times 2, 29 = 1 + 2 \times (2 + 12), 169 = 1 + 2 \times (2 + 12 + 70), \dots$$

Mas voltemos às sucessões definidas por

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3X_n + 4Y_n \\ 2X_n + 3Y_n \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_n + 2y_n + 1 \\ 4x_n + 3y_n + 2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

É fácil verificar que
$$\begin{cases} X_{n+2} - 6X_{n+1} + X_n = 0 \\ y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 0 \\ x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 2 \end{cases},$$
 pelo que é possível obter o termo geral das três sucessões,

se tivermos alguns conhecimentos de equações com diferenças. Refira-se que as duas primeiras são equações lineares homogêneas, enquanto que a terceira é uma equação linear não homogênea. A equação característica, $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$, é a mesma para as três equações. As raízes da equação característica são $3 \pm 2\sqrt{2}$, ou seja, $(1 \pm \sqrt{2})^2$.

Seja $\alpha = \alpha_0 = 1 + \sqrt{2}$. Como $2 < 1 + \sqrt{2} < 3$, temos $a_0 = 2$. Então,

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2} = \alpha_0$$

Então, $\alpha = 1 + \sqrt{2} = \langle 2, 2, 2, 2, \dots \rangle = \langle \overline{2} \rangle$.

Se o leitor está familiarizado com fracções contínuas, sabe preencher a seguinte tabela, cujas duas últimas linhas são bastante curiosas, pois nela aparecem os valores de u e de v , alternadamente:

| | | | | | | | | | | | | |
|-------|-----|-----|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|------|
| n | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| a_n | ... | ... | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| p_n | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 |
| q_n | 1 | 0 | 1 | 2 | 5 | 12 | 29 | 70 | 169 | 408 | 985 | 2378 |

Vejam os termos gerais das sucessões envolvidas.

$$X_n = C_1 (3 + 2\sqrt{2})^n + C_2 (3 - 2\sqrt{2})^n$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = 7 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 (3 + 2\sqrt{2}) + C_2 (3 - 2\sqrt{2}) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ C_1 (3 + 2\sqrt{2}) + (1 - C_1) (3 - 2\sqrt{2}) = 7 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ C_1 (3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}) = 7 - 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ C_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$X_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2} (3 + 2\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2} (3 - 2\sqrt{2})^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$y_n = C_3 (3 + 2\sqrt{2})^n + C_4 (3 - 2\sqrt{2})^n$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 5 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_3 + C_4 = 1 \\ C_3 (3 + 2\sqrt{2}) + C_4 (3 - 2\sqrt{2}) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = 1 - C_3 \\ C_3 (3 + 2\sqrt{2}) + (1 - C_3) (3 - 2\sqrt{2}) = 5 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} C_4 = 1 - C_3 \\ C_3 (3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}) = 5 - 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ C_3 = \frac{2+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$y_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4} (3 + 2\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4} (3 - 2\sqrt{2})^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$x_n = C_5 (3 + 2\sqrt{2})^n + C_6 (3 - 2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_5 + C_6 - \frac{1}{2} = 0 \\ C_5 (3 + 2\sqrt{2}) + C_6 (3 - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_6 = \frac{1}{2} - C_5 \\ C_5 (3 + 2\sqrt{2}) + (\frac{1}{2} - C_5) (3 - 2\sqrt{2}) = \frac{7}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} C_6 = \frac{1}{2} - C_5 \\ C_5 (3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}) = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_6 = \frac{1-\sqrt{2}}{4} \\ C_5 = \frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$x_n = \frac{1+\sqrt{2}}{4} (3 + 2\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4} (3 - 2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Exemplo 162 Determine as unidades do Anel $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

Resolução

Relembramos que unidade dum anel com identidade é um elemento invertível. Calculemos o inverso de $a + b\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2}$$

Então, $a^2 - 2b^2$ tem de dividir a e b . Então, $a^2 - 2b^2$ tem de dividir o máximo divisor comum entre a e b .

Por outro lado, o máximo divisor comum entre a e b divide $a^2 - 2b^2$, pelo que $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

E, assim, fomos conduzidos às equações $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, com $x, y \in \mathbb{Z}$, o que (como já sabemos) mostra que há infinitas unidades no Anel considerado.

Como curiosidade, note-se que uma das unidades é $1 + \sqrt{2}$, a partir da qual obtemos outras unidades, como por exemplo, $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, $(1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$, $(1 + \sqrt{2})^4 = 17 + 12\sqrt{2}$, obtendo-se, também, as soluções (inteiras e positivas) das equações $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. As outras unidades obtêm-se através dos conjugados e dos simétricos das unidades acima referidas.

Exemplo 163 Na minha Rua, só há casas num dos lados. As casas estão numeradas $(1, 2, 3, \dots)$ e verifica-se um facto curioso: a soma dos números das casas que estão antes da minha é exactamente igual à soma dos números das casas que estão depois da minha. Em que número moro e quantas casas tem a minha Rua?

Resolução

Suponhamos que moro na casa número n e que há k casas depois da minha. Então:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1+n+k)k}{2} &\iff n^2 - n = 2nk + k^2 + k \iff n^2 - (1+2k)n - (k^2 + k) = 0 \\ &\iff n = \frac{1+2k \pm \sqrt{(1+2k)^2 + 4(k^2 + k)}}{2} \iff n = \frac{1+2k \pm \sqrt{8k^2 + 8k + 1}}{2} \end{aligned}$$

Neste problema, apenas interessa a solução positiva, com a condição de $8k^2 + 8k + 1$ ser um quadrado perfeito. Então $8k^2 + 8k + 1 = x^2$, para certo inteiro x .

$$8k^2 + 8k + 1 = x^2 \iff 2(4k^2 + 4k + 1) = x^2 + 1 \iff 2(2k+1)^2 - x^2 = 1 \iff x^2 - 2(2k+1)^2 = -1$$

E, mais uma vez, obtivemos a equação de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = -1$, com $y = 2k+1$. Note-se que $n = \frac{1+2k+x}{2}$, com x um inteiro positivo ou nulo.

Na tabela seguinte, apresentam-se algumas soluções da equação e onde estão indicadas algumas soluções do problema proposto:

| | | | | | | | | | |
|-------|---|---|----|-----|------|------|-------|--------|---------|
| x | 1 | 7 | 41 | 239 | 1393 | 8119 | 47321 | 275807 | 1607521 |
| y | 1 | 5 | 29 | 169 | 985 | 5741 | 33461 | 195025 | 1136689 |
| k | 0 | 2 | 14 | 84 | 492 | 2870 | 16730 | 97512 | 568344 |
| n | 1 | 6 | 35 | 204 | 1189 | 6930 | 40391 | 235416 | 1372105 |
| $n+k$ | 1 | 8 | 49 | 288 | 1681 | 9800 | 57121 | 332928 | 1940449 |

Exemplo 164 Moro numa Rua onde há casas nos dois lados. Num dos lados, as casas têm números pares e no outro números ímpares; eu moro numa casa de número par, enquanto o meu tio mora numa casa de número ímpar que, por sinal, é o número a seguir ao meu. Além disso, verifica-se que a soma dos números das casas pares que não estão depois da minha é igual à soma dos números das casas ímpares que não estão antes da casa do meu tio. Qual o número da minha casa?

Resolução

Suponhamos que moro na casa número $2n$ e que há k casas de número ímpar que não estão antes da casa do meu tio.

$$\text{Então, } \begin{cases} 2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1) \\ (2n+1) + \dots + (2n+2k-1) = \frac{2n+1+2n+2k-1}{2} \times k = (2n+k)k = 2nk + k^2 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned} n^2 + n = 2nk + k^2 &\iff n^2 + (1-2k)n - k^2 = 0 \iff n = \frac{2k-1 \pm \sqrt{4k^2 - 4k + 1 + 4k^2}}{2} \\ &\iff n = \frac{2k-1 \pm \sqrt{8k^2 - 4k + 1}}{2} \end{aligned}$$

Então $8k^2 - 4k + 1 = y^2$, para certo inteiro y .

$$8k^2 - 4k + 1 = y^2 \iff 16k^2 - 8k + 1 = 2y^2 - 1 \iff (4k-1)^2 - 2y^2 = -1$$

E mais uma vez obtivemos $x^2 - 2y^2 = -1$, agora com $x = 4k-1$.

Na tabela seguinte apresentam-se algumas soluções da equação que resolve o problema proposto:

| | | | | | | | | |
|------|-----|---|------|-----|-------|------|---------|--------|
| x | 1 | 7 | 41 | 239 | 1393 | 8119 | 47321 | 275807 |
| y | 1 | 5 | 29 | 169 | 985 | 5741 | 33461 | 195025 |
| k | 0,5 | 2 | 10,5 | 60 | 348,5 | 2030 | 11830,5 | 68952 |
| n | 0,5 | 4 | 24,5 | 144 | 840,5 | 4900 | 28560,5 | 166464 |
| $2n$ | 1 | 8 | 49 | 288 | 1681 | 9800 | 57121 | 332928 |

Observe-se que n tem de ser um número inteiro e x deve ser da forma $4k - 1$, pelo que as soluções do problema (8, 288, 9800, 332928, ...) aparecem em colunas alternadas.

Exemplo 165 *É fácil verificar que a soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado. Determine os quadrados que são soma de quatro números triangulares consecutivos.*

Resolução

Seja $f(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n+3)(n+4)}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(n+1)(2n+2)}{2} + \frac{(n+3)(2n+6)}{2} = \frac{2(n+1)^2}{2} + \frac{2(n+3)^2}{2} \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 2 + 2n^2 + 12n + 18}{2} = \frac{4n^2 + 16n + 20}{2} = 2n^2 + 8n + 10 \end{aligned}$$

Então, $2n^2 + 8n + 10 = t^2 = 4y^2$, com $t = 2y$.

$$2n^2 + 8n + 10 = 4y^2 \iff n^2 + 4n + 4 + 1 = 2y^2 \iff (n+2)^2 - 2y^2 = -1$$

E, mais uma vez, obtivemos a equação $x^2 - 2y^2 = -1$, tendo-se que uma das soluções do problema é constituída pelos quatro números 15, 21, 28 e 36 cuja soma é 100.

| | | | | | | |
|------------------------|-----|------|---------|----------|-------------|--------------|
| x | 7 | 41 | 239 | 1393 | 8119 | 47321 |
| y | 5 | 29 | 169 | 985 | 5741 | 33461 |
| n | 5 | 39 | 237 | 1391 | 8117 | 47319 |
| $\frac{n(n+1)}{2}$ | 15 | 780 | 28 203 | 968 136 | 32 946 903 | 1119 567 540 |
| $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ | 21 | 820 | 28 441 | 969 528 | 32 955 021 | 1119 614 860 |
| $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ | 28 | 861 | 28 680 | 970 921 | 32 963 140 | 1119 662 181 |
| $\frac{(n+3)(n+4)}{2}$ | 36 | 903 | 28 920 | 972 315 | 32 971 260 | 1119 709 503 |
| $2n^2 + 8n + 10$ | 100 | 3364 | 114 244 | 3880 900 | 131 836 324 | 4478 554 084 |

Exemplo 166 *Determine os números triangulares que são dados pela soma de dois números triangulares consecutivos.*

Resolução

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \iff (n+1)^2 = \frac{m(m+1)}{2}$$

Então, basta-nos determinar os números triangulares que são quadrados, o que foi feito num dos exemplos anteriores.

Exemplo 167 *Seja n um quadrado, tal que a soma dos primeiros n números naturais (positivos) é outro quadrado. Determine os dois quadrados.*

Resolução

$$\sum_{k=1}^{x^2} k = \frac{x^2(x^2+1)}{2} = t^2, \text{ pelo que temos de resolver a equação } x^2(x^2+1) = 2t^2.$$

Suponhamos, por absurdo, que x^2 é par. Então o factor primo 2 ocorre, no primeiro membro, um número par de vezes e, no segundo membro, um número ímpar de vezes. Logo, x^2 é ímpar.

Então, $\text{mdc}(x, 2) = 1 = \text{mdc}(x^2, 2)$, pelo que x^2 divide t^2 e daqui se conclui que x divide t , pelo que $t = yx$, para certo natural y .

Logo, $x^2(x^2+1) = 2y^2x^2$, pelo que $x^2+1 = 2y^2$, ou seja, $x^2 - 2y^2 = -1$.

E, mais uma vez, obtivemos a equação $x^2 - 2y^2 = -1$.

Na seguinte tabela, apresentam-se algumas soluções do problema:

| | | | | | |
|--------------------|---|------|----------|--------------|------------------|
| x | 1 | 7 | 41 | 239 | 1393 |
| y | 1 | 5 | 29 | 169 | 985 |
| $t = xy$ | 1 | 35 | 1189 | 40 391 | 1372 105 |
| $n = x^2$ | 1 | 49 | 1681 | 57 121 | 1940 449 |
| $\frac{n(n+1)}{2}$ | 1 | 1225 | 1413 721 | 1631 432 881 | 1882 672 131 025 |
| t^2 | 1 | 1225 | 1413 721 | 1631 432 881 | 1882 672 131 025 |

Exemplo 168 Resolva a equação $(2x^2 + 1)^2 - 8t^2 = 1$, com $x, t \in \mathbb{N}$.

Resolução

$$\begin{aligned} (2x^2 + 1)^2 - 8t^2 = 1 &\iff 4x^4 + 4x^2 + 1 - 8t^2 = 1 \iff 4x^4 + 4x^2 = 8t^2 \iff x^4 + x^2 = t^2 \\ &\iff x^2(x^2 + 1) = t^2 \end{aligned}$$

E obtivemos a equação do problema anterior.

Exemplo 169 Determine os números hexagonais que são números triangulares.

Resolução

Recordamos que número k -gonal é um número natural da forma $\frac{((k-2)n + 4 - k)n}{2}$. Então, para $k = 6$, vem que número hexagonal é um número da forma $\frac{(4n-2)n}{2}$, ou seja, da forma $(2n-1)n$. Logo:

$$\begin{aligned} 2n^2 - n = \frac{m(m+1)}{2} &\iff 4n^2 - 2n = m^2 + m \iff 16n^2 - 8n = 4m^2 + 4m \\ &\iff 16n^2 - 8n + 1 = 4m^2 + 4m + 1 \iff (4n-1)^2 = (2m+1)^2 \\ &\iff 4n-1 = 2m+1 \vee 4n-1 = -2m-1 \iff 4n = 2m+2 \vee 4n = -2m \\ &\iff m = 2n+1 \vee m = -2n \end{aligned}$$

É claro que só interessam as soluções positivas, pelo que $m = 2n + 1$, ou seja, m pode ser qualquer número natural, pelo que todo o número hexagonal é um número triangular.

Exemplo 170 A soma dos primeiros n números triangulares positivos é igual ao produto de n por um quadrado. Determine n e o tal quadrado.

Resolução

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = nt^2 &\iff \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = nt^2 \iff \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = nt^2 \\ &\iff \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = nt^2 \iff \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = nt^2 \\ &\iff \frac{(n+1)(n+2)}{6} = t^2 \iff n^2 + 3n + 2 = 6t^2 \iff 4n^2 + 12n + 8 = 24t^2 \\ &\iff 4n^2 + 12n + 9 = 24t^2 + 1 \iff (2n+3)^2 - 24t^2 = 1 \end{aligned}$$

O problema consiste na resolução da equação $X^2 - 24Y^2 = 1$, equação esta que admite a solução fundamental $(5, 1)$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5X_k + 24Y_k \\ X_k + 5Y_k \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \begin{bmatrix} 2n_{k+1} + 3 \\ t_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2n_k + 3 \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10n_k + 24t_k + 15 \\ 2n_k + 5t_k + 3 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então, $\begin{bmatrix} 2n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10n_k + 24t_k + 12 \\ 2n_k + 5t_k + 3 \end{bmatrix}$, donde vem $\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5n_k + 12t_k + 6 \\ 2n_k + 5t_k + 3 \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Logo, $\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ t_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_2 \\ t_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_3 \\ t_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 241 \\ 99 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_4 \\ t_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 241 \\ 99 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2399 \\ 980 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 171 Determine os números pentagonais que são quadrados.

Resolução

Número pentagonal é um número da forma $\frac{(3n-1)n}{2}$. Então:

$$\frac{(3n-1)n}{2} = t^2 \iff 3n^2 - n = 2t^2 \iff 36n^2 - 12n + 1 = 24t^2 + 1 \iff (6n-1)^2 - 24t^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5X_k + 24Y_k \\ X_k + 5Y_k \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \begin{bmatrix} 6n_{k+1} - 1 \\ t_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6n_k - 1 \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30n_k + 24t_k - 5 \\ 6n_k + 5t_k - 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então, $\begin{bmatrix} 6n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30n_k + 24t_k - 4 \\ 6n_k + 5t_k - 1 \end{bmatrix}$, donde vem

$$\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5n_k + 4t_k - \frac{2}{3} \\ 6n_k + 5t_k - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ t_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E temos um problema: Para que valores de k , n_k é inteiro?

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_{k+2} \\ t_{k+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ t_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ t_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49n_k + 40t_k - 8 \\ 60n_k + 49t_k - 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, n_k é inteiro, quando k é ímpar.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_3 \\ t_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 99 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_5 \\ t_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81 \\ 99 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7921 \\ 9701 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_7 \\ t_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7921 \\ 9701 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 776161 \\ 950599 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_9 \\ t_9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 776161 \\ 950599 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76055841 \\ 93149001 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Os números pentagonais e quadrados são, $1, 99^2, 9701^2, 950599^2, 93149001^2, \dots$

É claro que só nos interessa conhecer os valores de t_k e de t_k^2 , com k ímpar.

$$\begin{cases} t_{k+1} = 6n_k + 5t_k - 1 \\ t_{k+2} = 60n_k + 49t_k - 10 \end{cases} \implies \begin{cases} 10t_{k+1} = 60n_k + 50t_k - 10 \\ t_{k+2} = 60n_k + 49t_k - 10 \end{cases} \implies t_{k+2} = 10t_{k+1} - t_k$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 99 \\ 10 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 99 \\ 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9701 \\ 980 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9701 \\ 980 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 950\,599 \\ 96\,030 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 950\,599 \\ 96\,030 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 93\,149\,001 \\ 9409\,960 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 93\,149\,001 \\ 9409\,960 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9127\,651\,499 \\ 922\,080\,050 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Resposta: $1^2, 99^2, 9701^2, 950\,599^2, 93\,149\,001^2, 9127\,651\,499^2, \dots$

$$1^2 = 1, \quad 99^2 = 9801, \quad 9701^2 = 94\,109\,401, \quad 950\,599^2 = 903\,638\,458\,801$$

$$93\,149\,001^2 = 8676\,736\,387\,298\,001, \quad 9127\,651\,499^2 = 83\,314\,021\,887\,196\,947\,001$$

Exemplo 172 *Determine os números pentagonais que são números triangulares.*

Resolução

$$\begin{aligned}
\frac{(3n+2)(n+1)}{2} &= \frac{m(m+1)}{2} &\iff 3n^2 + 5n + 2 &= m^2 + m \\
&&\iff 36n^2 + 20n + 24 &= 12m^2 + 12m \\
&&\iff 36n^2 + 20n + 25 &= 12m^2 + 12m + 1 \\
&&\iff (6n+5)^2 &= 3(4m^2 + 4m + 1) - 2 \\
&&\iff (6n+5)^2 - 3(2m+1)^2 &= -2
\end{aligned}$$

A resolução desta equação implica o estudo prévio da equação $x^2 - 3y^2 = -2$, a qual admite a solução $(1, 1)$.

A solução fundamental da equação $x^2 - 3y^2 = 1$ é $(2, 1)$. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Então, $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71 \\ 41 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vejamos como obter os valores de m e n :

$$\begin{bmatrix} 6n_{k+1} + 5 \\ 2m_{k+1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6n_k + 5 \\ 2m_k + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12n_k + 6m_k + 13 \\ 6n_k + 4m_k + 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 6n_{k+1} = 12n_k + 6m_k + 8 \\ 2m_{k+1} = 6n_k + 4m_k + 6 \end{cases} &\implies \begin{cases} n_{k+1} = 2n_k + m_k + \frac{4}{3} \\ m_{k+1} = 3n_k + 2m_k + 3 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} n_{k+2} = 2n_{k+1} + m_{k+1} + \frac{4}{3} \\ m_{k+2} = 3n_{k+1} + 2m_{k+1} + 3 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} n_{k+2} = 4n_k + 2m_k + \frac{8}{3} + 3n_k + 2m_k + 3 + \frac{4}{3} \\ m_{k+2} = 6n_k + 3m_k + 4 + 6n_k + 4m_k + 6 + 3 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} n_{k+2} = 7n_k + 4m_k + 7 \\ m_{k+2} = 12n_k + 7m_k + 13 \end{cases}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} n_{k+2} \\ m_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ m_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7n_k + 4m_k + 7 \\ 12n_k + 7m_k + 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \end{bmatrix} & \dots & \frac{20 \times 21}{2} = 210 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 164 \\ 285 \end{bmatrix} & \dots & \frac{285 \times 286}{2} = 40\,755 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 164 \\ 285 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2295 \\ 3976 \end{bmatrix} & \dots & \frac{3976 \times 3977}{2} = 7906\,276 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2295 \\ 3976 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 31\,976 \\ 55\,385 \end{bmatrix} & \dots & \frac{55\,385 \times 55\,386}{2} = 1533\,776\,805
\end{aligned}$$

Resposta: 1, 210, 40 755, 7906 276, 1533 776 805, ...

Exemplo 173 Determine os números octogonais que são quadrados.

Resolução

Número octogonal é um número da forma $\frac{(6n-4)n}{2}$. Então:

$$(3n-2)n = m^2 \iff 3n^2 - 2n = m^2 \iff 9n^2 - 6n + 1 = 3m^2 + 1 \iff (3n-1)^2 - 3m^2 = 1$$

Neste caso, temos de resolver a equação $x^2 - 3y^2 = 1$, equação esta que tem a solução fundamental $(2, 1)$.

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Então, $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x_k + 3y_k \\ x_k + 2y_k \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 3n_{k+1} - 1 \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3n_k - 1) + 3m_k \\ 3n_k - 1 + 2m_k \end{bmatrix} \\
&\implies \begin{bmatrix} 3n_{k+1} - 1 \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n_k + 3m_k - 2 \\ 3n_k + 2m_k - 1 \end{bmatrix} \\
&\implies \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n_k + m_k - \frac{1}{3} \\ 3n_k + 2m_k - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} n_{k+2} \\ m_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n_{k+1} + m_{k+1} - \frac{1}{3} \\ 3n_{k+1} + 2m_{k+1} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4n_k + 2m_k - \frac{2}{3} + 3n_k + 2m_k - 1 - \frac{1}{3} \\ 6n_k + 3m_k - 1 + 6n_k + 4m_k - 2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7n_k + 4m_k - 2 \\ 12n_k + 7m_k - 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}, & \dots & 15^2 = 225 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 121 \\ 209 \end{bmatrix}, & \dots & 209^2 = 43\,681 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 121 \\ 209 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1681 \\ 2911 \end{bmatrix}, & \dots & 2911^2 = 8473\,921 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1681 \\ 2911 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 23\,409 \\ 40\,545 \end{bmatrix}, & \dots & 40\,545^2 = 1643\,897\,025
\end{aligned}$$

Exemplo 174 Determine os números pentagonais que são números decagonais.

Resolução

Número decagonal é um número da forma $\frac{(8m-6)m}{2}$, enquanto que um número pentagonal é da forma $\frac{(3n-1)n}{2}$. Então:

$$\begin{aligned}
(3n-1)n &= (8m-6)m &\iff 3n^2 - n &= 8m^2 - 6m \\
&\iff 144n^2 - 48n &= 384m^2 - 288m \\
&\iff 144n^2 - 48n + 4 &= 384m^2 - 288m + 54 - 50 \\
&\iff (12n-2)^2 &= 6(64m^2 - 48m + 9) - 50 \\
&\iff (12n-2)^2 - 6(8m-3)^2 &= -50
\end{aligned}$$

Uma maneira de obter soluções da equação anterior é resolver a equação $x^2 - 6y^2 = -2$ e multiplicar essas soluções por 5.

Neste caso, só interessam as soluções em que $12n - 2$ e $8m - 3$ sejam múltiplos de 5, correspondendo a m e n números inteiros positivos. Isto significa que $n = 5s + 1$ e $m = 5t + 1$, para certos inteiros s e t . Logo:

$$\begin{aligned} (60s + 12 - 2)^2 - 6(40t + 8 - 3)^2 = -50 &\iff (60s + 10)^2 - 6(40t + 5)^2 = -50 \\ &\iff (12s + 2)^2 - 6(8t + 1)^2 = -2 \end{aligned}$$

E obtivemos, assim, uma equação do tipo $x^2 - 6y^2 = -2$. Como resolvê-la?

É imediato verificar que a equação anterior admite a solução $(2, 1)$, pelo que a equação não é impossível. Por outro lado, a equação $x^2 - 6y^2 = 1$ admite a solução fundamental $(5, 2)$.

Consideremos a dupla sucessão definida por $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_k + 12y_k \\ 2x_k + 5y_k \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vamos provar, por indução, que $x_n^2 - 6y_n^2 = -2, \forall n \in \mathbb{N}_0$:

Para $n = 0$, temos $2^2 - 6 \times 1^2 = -2$, o que é verdade.

Suponhamos que $x_n^2 - 6y_n^2 = -2$, para certo $n \in \mathbb{N}_0$. Então,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 6y_{n+1}^2 &= (5x_n + 12y_n)^2 - 6(2x_n + 5y_n)^2 \\ &= 25x_n^2 + 120x_ny_n + 144y_n^2 - 24x_n^2 - 120x_ny_n - 150y_n^2 \\ &= x_n^2 - 6y_n^2 = -2 \end{aligned}$$

Logo, $x_n^2 - 6y_n^2 = -2, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{bmatrix} 12s_{k+1} + 2 \\ 8t_{k+1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(12s_k + 2) + 12(8t_k + 1) \\ 2(12s_k + 2) + 5(8t_k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60s_k + 96t_k + 22 \\ 24s_k + 40t_k + 9 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Então, } \begin{bmatrix} 12s_{k+1} \\ 8t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60s_k + 96t_k + 20 \\ 24s_k + 40t_k + 8 \end{bmatrix}, \text{ donde se conclui que } \begin{bmatrix} s_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s_k + 8t_k + \frac{5}{3} \\ 3s_k + 5t_k + 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_{k+2} \\ t_{k+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5s_{k+1} + 8t_{k+1} + \frac{5}{3} \\ 3s_{k+1} + 5t_{k+1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(5s_k + 8t_k + \frac{5}{3}) + 8(3s_k + 5t_k + 1) + \frac{5}{3} \\ 3(5s_k + 8t_k + \frac{5}{3}) + 5(3s_k + 5t_k + 1) + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25s_k + 40t_k + \frac{25}{3} + 24s_k + 40t_k + 8 + \frac{5}{3} \\ 15s_k + 24t_k + 5 + 15s_k + 25t_k + 5 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49s_k + 80t_k + 18 \\ 30s_k + 49t_k + 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Partindo da solução $s_0 = t_0 = 0$, vem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_0 \\ m_0 \end{bmatrix} &= 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies m(4m - 3) = 1 \\ \begin{bmatrix} s_1 \\ t_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 80 \\ 30 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_1 \\ m_1 \end{bmatrix} &= 5 \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 \\ 56 \end{bmatrix} \implies m(4m - 3) = 12\,376 \\ \begin{bmatrix} s_2 \\ t_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 80 \\ 30 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1780 \\ 1090 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_2 \\ m_2 \end{bmatrix} &= 5 \begin{bmatrix} 1780 \\ 1090 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8901 \\ 5451 \end{bmatrix} \implies m(4m - 3) = 118\,837\,251 \\ \begin{bmatrix} s_3 \\ t_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 80 \\ 30 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1780 \\ 1090 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 174\,438 \\ 106\,821 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_3 \\ m_3 \end{bmatrix} &= 5 \begin{bmatrix} 174\,438 \\ 106\,821 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 872\,191 \\ 534\,106 \end{bmatrix} \implies m(4m - 3) = 1141\,075\,274\,626 \end{aligned}$$

Então, 1, 12 376, 118 837 251, 1141 075 274 626 são alguns dos infinitos números que são, simultaneamente, números pentagonais e números decagonais.

Mas pode colocar-se a questão: Não há outros números simultaneamente, pentagonais e decagonais?

Ou, de outro modo, todas as soluções da equação $x^2 - 6y^2 = -50$ resultam de multiplicar por 5 as soluções da equação $x^2 - 6y^2 = -2$? É claro que não, uma vez que $x = 2, y = 3$ satisfazem a condição $x^2 - 6y^2 = -50$. Logo, há infinitas soluções que não são múltiplos de 5. Mas, isto não significa que o problema tenha mais soluções, uma vez que é necessário que $n = \frac{x+2}{12}$ e $m = \frac{y+3}{8}$ sejam números inteiros.

$$\begin{bmatrix} n_0 = \frac{1}{3} \\ m_0 = \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12n_{k+1} - 2 \\ 8m_{k+1} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12n_k - 2 \\ 8m_k - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60n_k + 96m_k - 46 \\ 24n_k + 40m_k - 19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12n_{k+1} \\ 8m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60n_k + 96m_k - 44 \\ 24n_k + 40m_k - 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3n_{k+1} \\ 4m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15n_k + 24m_k - 11 \\ 12n_k + 20m_k - 8 \end{bmatrix}$$

Sejam $\begin{cases} a_k = 3n_k \\ b_k = 4m_k \end{cases}$, com $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 3 \end{cases}$. Então, $\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a_k + 6b_k - 11 \\ 4a_k + 5b_k - 8 \end{bmatrix}$, donde vem que a_k e b_k são números inteiros, para todo o valor natural de k . Além disso, temos que se b_k é ímpar, então $b_{k+1} = 4a_k + 5b_k - 8$ é ímpar, pelo que b_n é ímpar, para todo o número natural n , porque $b_0 = 3$. Então, $m_k = \frac{b_k}{4}$ nunca é um número natural.

Mas a questão colocada permanece sem resposta, uma vez que há outras soluções para a equação $x^2 - 6y^2 = -50$ que não resultam da solução $x = 2, y = 3$, (por exemplo, $x = 26, y = 11$).

$$\begin{bmatrix} n_0 = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \\ m_0 = \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12n_{k+1} - 2 \\ 8m_{k+1} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12n_k - 2 \\ 8m_k - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60n_k + 96m_k - 46 \\ 24n_k + 40m_k - 19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12n_{k+1} \\ 8m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60n_k + 96m_k - 44 \\ 24n_k + 40m_k - 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3n_{k+1} \\ 4m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15n_k + 24m_k - 11 \\ 12n_k + 20m_k - 8 \end{bmatrix}$$

Sejam $\begin{cases} a_k = 3n_k \\ b_k = 4m_k \end{cases}$, com $\begin{cases} a_0 = 7 \\ b_0 = 7 \end{cases}$. Então, $\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a_k + 6b_k - 11 \\ 4a_k + 5b_k - 8 \end{bmatrix}$, donde vem que a_k e b_k são números inteiros, para todo o valor natural de k . Além disso, temos que se b_k é ímpar, então $b_{k+1} = 4a_k + 5b_k - 8$ é ímpar, pelo que b_n é ímpar, para todo o número natural n , porque $b_0 = 7$. Então, $m_k = \frac{b_k}{4}$ nunca é um número natural.

Logo, o problema dado não tem mais soluções, se não houver mais soluções da equação $x^2 - 6y^2 = -50$ que não resultem das anteriores.

Capítulo 5

Construção do Polígono Regular de Dezassete Lados

É claro que construir um polígono regular de 17 lados, consiste em dividir uma circunferência em 17 partes iguais, ou seja, construir um ângulo de $\frac{2\pi}{17}$ radianos.

Este problema está, manifestamente, relacionado com a determinação das raízes de índice n da unidade, ou seja, com a resolução, em \mathbb{C} , da equação $z^n = 1$, cujas soluções são

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{17} + i \sin \frac{2k\pi}{17} = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{17} = e^{i \frac{2k\pi}{17}},$$

onde i representa a unidade imaginária e k é um número inteiro que varia de 0 a 16.

No que se segue, $\alpha = \frac{2\pi}{17}$, pelo que as igualdades onde aparece α referem-se a este caso particular ($\alpha = \frac{2\pi}{17}$) e não a um α qualquer.

Por outro lado, refira-se que a equação $z^{17} - 1 = 0$ é equivalente à equação $(z - 1)(z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1) = 0$, sendo 1, uma das soluções da equação. As restantes soluções da equação anterior são as raízes do polinómio $z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1$.

Vamos, agora, referir algumas das propriedades dos números complexos, partindo do princípio que o leitor conhece a forma algébrica e a forma trigonométrica dum complexo, bem como as fórmulas de Moivre, para a multiplicação, divisão e potenciação. Depois, voltaremos à equação $z^{17} - 1 = 0$.

Proposição 175 *Seja n um número natural. Então, as raízes de índice n da unidade são dadas por $\operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$, onde k assume os valores $0, 1, \dots, n-1$.*

Proposição 176 *Sejam n um número natural maior ou igual a 2 e z um número complexo. Então, a soma das n raízes de índice n de z é zero.*

Demonstração

A afirmação é verdadeira para $z = 0$, porque todas as raízes são nulas. Se $z \neq 0$, então $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, com ρ um número real positivo e θ um número real que pode ser escolhido no intervalo $[0, 2\pi[$. Determinar as raízes de índice n de z é resolver a equação $\omega^n = z$. Seja $\omega = r \operatorname{cis} \beta$, com r um número real positivo e β um número real.

Então, $\rho \operatorname{cis} \theta = r^n \operatorname{cis} (n\beta)$, donde se conclui que $r^n = \rho$ e $n\beta = \theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Daqui se conclui que $r = \sqrt[n]{\rho}$ e que $\beta = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, tendo-se que as soluções distintas são obtidas, atribuindo a k , n valores inteiros consecutivos (habitualmente $0, 1, \dots, n-1$).

Seja $\omega_k = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}$. Então,

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{\sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2(k+1)\pi}{n}}{\sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi + 2\pi - \theta - 2k\pi}{n} \right) = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}$$

Logo, a sucessão (ω_k) é uma progressão geométrica de razão $\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}$, pelo que

$$\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = \omega_0 \times \frac{1 - \left(\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}\right)^n}{1 - \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}} = \omega_0 \times \frac{1 - \operatorname{cis} (2\pi)}{1 - \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}} = 0$$

Em particular, se $n \geq 2$, a soma das raízes de índice n da unidade é zero.

Observe-se que do facto da soma das raízes de índice n de um complexo ser zero, concluímos que a soma das partes reais e a soma das partes imaginárias das raízes de índice n de um complexo são ambas iguais a zero.

Proposição 177 *Sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha = \frac{2\pi}{17}$. Então, $\operatorname{cis}(k\alpha) + \operatorname{cis}((17-k)\alpha) = 2 \cos(k\alpha)$.*

Demonstração

$$\begin{aligned} \cos(k\alpha) + \cos(17-k)\alpha &= \cos \frac{2k\pi}{17} + \cos \frac{(17-k)2\pi}{17} = \cos \frac{2k\pi}{17} + \cos \left(2\pi - \frac{2k\pi}{17}\right) \\ &= \cos \frac{2k\pi}{17} + \cos \left(-\frac{2k\pi}{17}\right) = \cos \frac{2k\pi}{17} + \cos \frac{2k\pi}{17} = 2 \cos \frac{2k\pi}{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(k\alpha) + \sin(17-k)\alpha &= \sin \frac{2k\pi}{17} + \sin \frac{(17-k)2\pi}{17} = \sin \frac{2k\pi}{17} + \sin \left(2\pi - \frac{2k\pi}{17}\right) \\ &= \sin \frac{2k\pi}{17} - \sin \frac{2k\pi}{17} = 0 \end{aligned}$$

Então, $\operatorname{cis}(k\alpha) + \operatorname{cis}((17-k)\alpha) = 2 \cos \frac{2k\pi}{17} = 2 \cos(k\alpha)$.

Proposição 178 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$.*

Demonstração

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2 \cos a \cos b$$

Alguns resultados preliminares

Como 17 é um número primo, existe raiz primitiva de 17. Uma das raízes primitivas de 17 é 3. Consideremos os números $3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^{14}, 3^{15}$.

Estas 16 potências de 3, são congruentes, módulo 17 e por alguma ordem, com os números 1, 2, 3, ..., 15, 16. É isso que está indicado na seguinte tabela:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 3^x | 1 | 3 | 9 | 10 | 13 | 5 | 15 | 11 | 16 | 14 | 8 | 7 | 4 | 12 | 2 | 6 |

Por exemplo, 2 não é raiz primitiva de 17, porque, ao construirmos uma tabela análoga à anterior, mas com potências de 2, não aparecem todos os números de 1 a 16, aparecendo alguns deles mais do que uma vez:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 2^x | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 15 | 13 | 9 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 15 | 13 | 9 |

Sejam $z_k = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{17} = \operatorname{cis}(k\alpha)$, com $k = 0, 1, \dots, 15$, as 16 raízes de índice 17 da unidade que são diferentes de 1 (estes dezasseis números são as raízes da equação $z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0$). Sejam:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = z_1 + z_9 + z_{13} + z_{15} + z_{16} + z_8 + z_4 + z_2 = \sum_{m=0}^7 z_{3^{2m}} \\ x_2 = z_3 + z_{10} + z_5 + z_{11} + z_{14} + z_7 + z_{12} + z_6 = \sum_{m=0}^7 z_{3^{2m+1}} \\ y_1 = z_1 + z_{13} + z_{16} + z_4 = \sum_{m=0}^3 z_{3^{4m}} \\ y_2 = z_9 + z_{15} + z_8 + z_2 = \sum_{m=0}^3 z_{3^{4m+2}} \\ y_3 = z_3 + z_5 + z_{14} + z_{12} = \sum_{m=0}^3 z_{3^{4m+1}} \\ y_4 = z_{10} + z_{11} + z_7 + z_6 = \sum_{m=0}^3 z_{3^{4m+3}} \end{array} \right.$$

Proposição 179 Nas condições acima referidas, temos:

1. $x_1 = 2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (8\alpha)$
2. $x_2 = 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)$
3. $x_1 + x_2 = -1, x_1 x_2 = -4$
4. $y_1 = 2 \cos \alpha + 2 \cos (4\alpha)$
5. $y_2 = 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (8\alpha)$
6. $y_3 = 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha)$
7. $y_4 = 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)$
8. $y_1 + y_2 = x_1, y_1 y_2 = -1$
9. $y_3 + y_4 = x_2, y_3 y_4 = -1$
10. $y_3 = 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (3\alpha) = 4 \cos (4\alpha) + 2 \cos \alpha$

Demonstração

1.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= z_1 + z_9 + z_{13} + z_{15} + z_{16} + z_8 + z_4 + z_2 \\
 &= (z_1 + z_{16}) + (z_2 + z_{15}) + (z_4 + z_{13}) + (z_8 + z_9) \\
 &= 2 \cos \frac{2\pi}{17} + 2 \cos \frac{4\pi}{17} + 2 \cos \frac{8\pi}{17} + 2 \cos \frac{16\pi}{17} \\
 &= 2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (8\alpha)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 x_2 &= z_3 + z_{10} + z_5 + z_{11} + z_{14} + z_7 + z_{12} + z_6 \\
 &= (z_3 + z_{14}) + (z_5 + z_{12}) + (z_6 + z_{11}) + (z_7 + z_{10}) \\
 &= 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)
 \end{aligned}$$

3. Como a soma das 17 raízes de índice n da unidade é zero e uma dessas raízes é 1, então a soma das outras dezasseis raízes é -1 . Logo, $x_1 + x_2 = -1$. Esta última igualdade implica que a soma das partes reais das soluções da equação $z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0$ é -1 , ou seja, $\sum_{k=1}^{16} \cos(k\alpha) = -1$.

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
 \frac{x_1 x_2}{2} &= (2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (8\alpha)) (\cos (3\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (6\alpha) + \cos (7\alpha)) \\
 &= 2 \cos \alpha \cos (3\alpha) + 2 \cos \alpha \cos (5\alpha) + 2 \cos \alpha \cos (6\alpha) + 2 \cos \alpha \cos (7\alpha) + \\
 &\quad + 2 \cos (2\alpha) \cos (3\alpha) + 2 \cos (2\alpha) \cos (5\alpha) + 2 \cos (2\alpha) \cos (6\alpha) + 2 \cos (2\alpha) \cos (7\alpha) + \\
 &\quad + 2 \cos (4\alpha) \cos (3\alpha) + 2 \cos (4\alpha) \cos (5\alpha) + 2 \cos (4\alpha) \cos (6\alpha) + 2 \cos (4\alpha) \cos (7\alpha) + \\
 &\quad + 2 \cos (8\alpha) \cos (3\alpha) + 2 \cos (8\alpha) \cos (5\alpha) + 2 \cos (8\alpha) \cos (6\alpha) + 2 \cos (8\alpha) \cos (7\alpha) \\
 &= \cos (4\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (6\alpha) + \cos (4\alpha) + \cos (7\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (8\alpha) + \cos (6\alpha) + \\
 &\quad + \cos (5\alpha) + \cos \alpha + \cos (7\alpha) + \cos (3\alpha) + \cos (8\alpha) + \cos (4\alpha) + \cos (9\alpha) + \cos (5\alpha) + \\
 &\quad + \cos (7\alpha) + \cos \alpha + \cos (9\alpha) + \cos \alpha + \cos (10\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (11\alpha) + \cos (3\alpha) + \\
 &\quad + \cos (11\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (13\alpha) + \cos (3\alpha) + \cos (14\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (15\alpha) + \cos \alpha \\
 &= 2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha) + \\
 &\quad + 2 \cos (8\alpha) + 2 \cos (9\alpha) + 2 \cos (11\alpha) + 2 \cos (16\alpha) + 2 \cos (13\alpha) + 2 \cos (12\alpha) + \\
 &\quad + 2 \cos (14\alpha) + 2 \cos (15\alpha) + 2 \cos (10\alpha) \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

Então, $x_1 x_2 = -4$, como se pretendia.

4.

$$y_1 = z_1 + z_{13} + z_{16} + z_4 = z_1 + z_{16} + z_4 + z_{13} = 2 \cos \alpha + 2 \cos (4\alpha)$$

5.

$$y_2 = z_9 + z_{15} + z_8 + z_2 = z_2 + z_{15} + z_8 + z_9 = 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (8\alpha)$$

6.

$$y_3 = z_3 + z_{14} + z_5 + z_{12} = 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha)$$

7.

$$y_4 = z_6 + z_{11} + z_7 + z_{10} = 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)$$

8.

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 2 \cos \alpha + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (8\alpha) = x_1 \\ y_1 y_2 &= (2 \cos \alpha + 2 \cos (4\alpha)) (2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (8\alpha)) \\ &= 4 \cos \alpha \cos (2\alpha) + 4 \cos \alpha \cos (8\alpha) + 4 \cos (4\alpha) \cos (2\alpha) + 4 \cos (4\alpha) \cos (8\alpha) \\ &= 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos \alpha + 2 \cos (9\alpha) + 2 \cos (7\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (12\alpha) + 2 \cos (4\alpha) \\ &= \cos (3\alpha) + \cos (14\alpha) + \cos \alpha + \cos (16\alpha) + \cos (8\alpha) + \cos (9\alpha) + \cos (7\alpha) + \cos (10\alpha) + \\ &\quad + \cos (6\alpha) + \cos (11\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (15\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (12\alpha) + \cos (4\alpha) + \cos (13\alpha) \\ &= -1 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} y_3 + y_4 &= 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha) = x_2 \\ y_3 y_4 &= (2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha)) (2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)) \\ &= 4 \cos (3\alpha) \cos (6\alpha) + 4 \cos (3\alpha) \cos (7\alpha) + 4 \cos (5\alpha) \cos (6\alpha) + 4 \cos (5\alpha) \cos (7\alpha) \\ &= 2 \cos (9\alpha) + 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (10\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (11\alpha) + 2 \cos \alpha + 2 \cos (12\alpha) + 2 \cos (2\alpha) \\ &= \cos (8\alpha) + \cos (9\alpha) + \cos (3\alpha) + \cos (14\alpha) + \cos (7\alpha) + \cos (10\alpha) + \cos (4\alpha) + \cos (13\alpha) + \\ &\quad + \cos (6\alpha) + \cos (11\alpha) + \cos \alpha + \cos (16\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (12\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (15\alpha) \\ &= -1 \end{aligned}$$

10.

$$y_3 = 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha) = 4 \cos (4\alpha) \cos \alpha$$

Lema 180 Nas condições anteriores, temos $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Demonstração

Como $x_1 + x_2 = -1$ e $x_1 x_2 = -4$, então x_1 e x_2 são as soluções (reais) da equação $x^2 + x - 4 = 0$, as quais são $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, faltando-nos descobrir o sinal de x_1 (ou o sinal de x_2), para sabermos quais os valores de x_1 e x_2 .

Como $0 < \alpha = \frac{2\pi}{17} < \frac{\pi}{4}$ e $0 < 2\alpha = \frac{4\pi}{17} < \frac{\pi}{4}$, vem

$$\cos \alpha + \cos (2\alpha) > \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Mas, $0 < 4\alpha = \frac{2\pi}{17} < \frac{\pi}{2}$, pelo que $\cos (4\alpha) > 0$.

É claro que $\cos (8\alpha) > -\sqrt{2}$. Então, $x_1 = \cos \alpha + \cos (2\alpha) + \cos (4\alpha) + \cos (8\alpha) > \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$.

Então, x_1 é a raiz positiva e x_2 é a raiz negativa.

Logo, $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Observe-se que podemos construir, com régua e compasso, um segmento de recta de comprimento $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, ou se preferirmos, determinar, num eixo, os pontos de abcissa $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Lema 181 Nas condições anteriores, temos

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}, y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

Demonstração

Como $y_1 + y_2 = x_1$ e $y_1 y_2 = -1$, então y_1 e y_2 são as raízes (reais) da equação $y^2 - x_1 y - 1 = 0$, tendo-se $y_1 = 2 \cos(2\alpha) + 2 \cos(4\alpha) > 0$, pelo que $y_2 < 0$.

Então,

$$\begin{aligned} y^2 - x_1 y - 1 = 0 &\iff y = \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 4}}{2} \iff y = \frac{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\ &\iff y = \frac{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\frac{1 + 17 - 2\sqrt{17}}{4} + 4}}{2} \iff y = \frac{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\frac{34 - 2\sqrt{17}}{4}}}{2} \\ &\iff y = \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \end{aligned}$$

Então,

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}, y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

Lema 182 Nas condições anteriores, temos:

$$y_3 = \frac{x_2 + \sqrt{4 + x_2^2}}{4}, y_4 = \frac{x_2 - \sqrt{4 + x_2^2}}{4}$$

Demonstração

Como $y_3 + y_4 = x_2$ e $y_3 y_4 = -1$, temos que y_3 e y_4 são as raízes da equação $y^2 - x_2 y - 1 = 0$.

Como $y_3 = 2 \cos(3\alpha) + 2 \cos(5\alpha) = 4 \cos(4\alpha) \cos \alpha > 0$, então $y_4 < 0$.

Então,

$$y_3 = \frac{x_2 + \sqrt{4 + x_2^2}}{4}, y_4 = \frac{x_2 - \sqrt{4 + x_2^2}}{4}$$

Lema 183 Nas condições anteriores, temos:

$$\cos \alpha = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{4}, \cos(4\alpha) = \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{4}$$

Demonstração

Como se verificam as duas condições $2 \cos \alpha + 2 \cos(4\alpha) = y_1$ e $2 \cos(4\alpha) \times 2 \cos \alpha = 2 \cos(5\alpha) + 2 \cos(3\alpha) = y_3$, então $2 \cos \alpha$ e $2 \cos(4\alpha)$ são as raízes da equação $t^2 - y_1 t + y_3 = 0$.

Como $\cos \alpha > \cos(4\alpha)$, temos que

$$\cos \alpha = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{4}, \cos(4\alpha) = \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{4}$$

Observe-se que aquilo que foi feito, até agora, significa que se pode obter $\cos \alpha$ com régua e compasso, sendo que o valor de $\cos \alpha$ envolve, apenas, as operações básicas e radicais quadráticos, embora não apresentemos aqui esse valor.

Construção geométrica do ângulo de $\frac{2\pi}{17}$ radianos:

Seja β o menor ângulo positivo tal que $\tan(4\beta) = 1$. Então, os ângulos β , 2β , e 4β são todos do primeiro quadrante.

Verifiquemos, agora, que as soluções da equação $x^2 + x - 4 = 0$ são $2 \tan(2\beta)$ e $-2 \cot(2\beta)$:

$$\begin{aligned} 2 \tan(2\beta) - 2 \cot(2\beta) &= \frac{2 \sin(2\beta)}{\cos(2\beta)} - \frac{2 \cos(2\beta)}{\sin(2\beta)} = \frac{2 \sin^2(2\beta) - 2 \cos^2(2\beta)}{\sin(2\beta) \cos(2\beta)} \\ &= \frac{-4(\cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta))}{2 \sin(2\beta) \cos(2\beta)} = \frac{-4 \cos(4\beta)}{\sin(4\beta)} = -\cot(4\beta) = -1 \end{aligned}$$

Além disso, $2 \tan(2\beta) \times (-2 \cot(2\beta)) = -4$.

Das duas igualdades anteriores vem que $2 \tan(2\beta)$ e $-2 \cot(2\beta)$ são as soluções da equação $x^2 + x - 4 = 0$.

Mas, já tínhamos visto que as soluções da equação $x^2 + x - 4 = 0$ eram x_1 e x_2 .

Como $x_1 > 0$ e $\tan(2\beta) > 0$, então $x_1 = 2 \tan(2\beta)$ e $x_2 = -2 \cot(2\beta)$.

De $y^2 - x_1 y - 1 = 0$, obtemos $y^2 - 2y \tan(2\beta) - 1 = 0$, donde vem:

$$y = \tan(2\beta) \pm \sqrt{\tan^2(2\beta) + 1} \iff y = \tan(2\beta) \pm \sec(2\beta)$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_1 &= \tan(2\beta) + \sec(2\beta) = \frac{\sin(2\beta)}{\cos(2\beta)} + \frac{1}{\cos(2\beta)} = \frac{1 + \sin(2\beta)}{\cos(2\beta)} = \frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta}{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta} \\ &= \frac{(\cos \beta + \sin \beta)^2}{(\cos \beta + \sin \beta)(\cos \beta - \sin \beta)} = \frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} = \frac{\sqrt{2} \cos(\beta - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \cos(\beta + \frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \beta)}{\cos(\beta + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \beta)}{\cos(\beta + \frac{\pi}{4})} = \tan\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Como o produto das raízes é -1 , então

$$y_2 = -\cot\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)$$

De $y^2 - x_2 y - 1 = 0$, vem $y^2 + 2y \cot(2\beta) - 1 = 0$. Então:

$$y = -\cot(2\beta) \pm \sqrt{1 + \cot^2(2\beta)} \iff y = -\cot(2\beta) \pm \csc(2\beta)$$

Então, y_3 e y_4 são dados pela expressão $y = -\cot(2\beta) \pm \csc(2\beta)$, faltando saber "qual é qual".

Como $y_3 > 0$, então $y_3 = -\cot(2\beta) + \csc(2\beta)$. Ora:

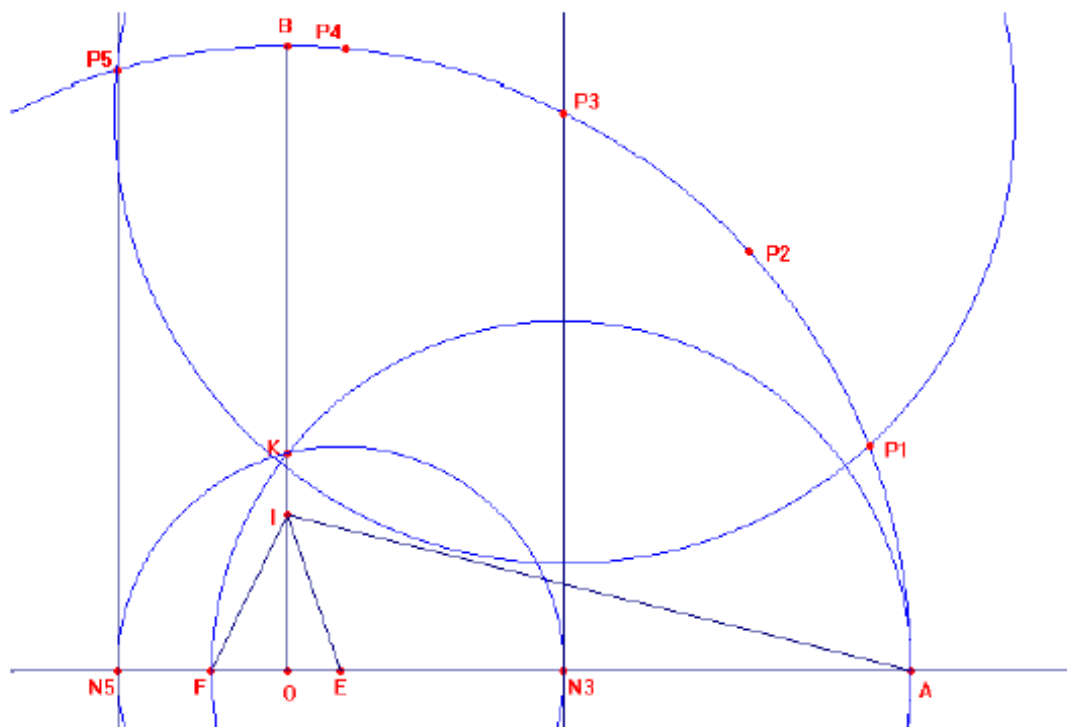
$$y_3 = -\cot(2\beta) + \csc(2\beta) = -\frac{\cos(2\beta)}{\sin(2\beta)} + \frac{1}{\sin(2\beta)} = \frac{1 - \cos(2\beta)}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{2 \sin^2 \beta}{2 \sin \beta \cos \beta} = \tan \beta$$

Como o produto das raízes é -1 , então $y_4 = -\cot \beta$.

E, finalmente:

$$\begin{cases} 2 \cos(3\alpha) + 2 \cos(5\alpha) = y_3 = \tan \beta \\ 2 \cos(3\alpha) \times 2 \cos(5\alpha) = 2 \cos(8\alpha) + 2 \cos(2\alpha) = y_2 = \tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Descrição da construção geométrica



1. Marcamos dois pontos O e A .
2. Desenhamos uma circunferência de centro O e que passa por A .
3. Construimos, pelo ponto A , uma perpendicular a OA .
4. Seja B , um dos pontos de intersecção da perpendicular anterior com a circunferência.
5. Divide-se o segmento OB em quatro partes iguais, obtendo-se o ponto I , de modo que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.
6. Divide-se o ângulo OIA em quatro ângulos iguais, obtendo-se sobre OA , o ponto E , tal que $\angle OIE = \frac{1}{4}\angle OIA$.
7. Sobre a semi-recta AO (de origem em A), marca-se um ponto F , de modo que o ângulo OIF tenha uma amplitude de $\frac{\pi}{4}$.
8. Desenha-se uma circunferência de diâmetro $[AF]$, a qual intersecta o segmento de recta no ponto K .
9. Desenha-se uma circunferência de centro E e que passa por K . Esta circunferência intersecta a recta OA nos pontos N_3 e N_5 , sendo N_3 pertencente à semi-recta OA .
10. Por N_3 e N_5 , traçam-se perpendiculares à recta OA , as quais intersectam a circunferência inicial nos pontos P_3 e P_5 , respectivamente (ambos acima de OA).
11. O arco P_3P_5 mede 2α , enquanto que o arco P_3A mede 3α . Para obter P_1 , basta desenhar uma circunferência de centro P_3 e que passa por P_5 (ver figura).
12. E, agora, é fácil de obter os restantes vértices do polígono regular de 17 lados.

Justificação da construção

Seja $\angle OIE = \beta$. Então, $\angle OIA = 4\beta$. Além disso,

$$\begin{aligned}
 2 \cos \widehat{AOP}_3 + 2 \cos \widehat{AOP}_5 &= 2 \times \frac{\overline{ON}_3 - \overline{ON}_5}{\overline{OA}} = 2 \times \frac{\overline{OE} + \overline{EN}_3 - (\overline{EN}_5 - \overline{OE})}{\overline{OA}} \\
 &= 2 \times \frac{\overline{OE} + \overline{EN}_3 - \overline{EN}_5 + \overline{OE}}{\overline{OA}} = 2 \times \frac{\overline{OE} + \overline{OE}}{\overline{OA}} \\
 &= 4 \times \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OI}} = \tan \beta
 \end{aligned}$$

e, ainda

$$\begin{aligned}
 2 \cos \widehat{AOP}_3 \times 2 \cos \widehat{AOP}_5 &= -4 \times \frac{\overline{ON}_3 \times \overline{ON}_5}{\overline{OA}^2} = -4 \times \frac{\overline{OK}^2}{\overline{OA}^2} = -4 \times \frac{\overline{OF} \times \overline{OA}}{\overline{OA}^2} \\
 &= -4 \times \frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{OI}} = \tan \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Já vimos que $2 \cos(3\alpha) + 2 \cos(5\alpha) = \tan \beta$ e $2 \cos(3\alpha) \times 2 \cos(5\alpha) = \tan \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right)$.

Então, $\widehat{AOP}_3 = 3\alpha$ e $\widehat{AOP}_5 = 5\alpha$.

Então, achando a diferença, temos um ângulo de amplitude 2α , ângulo este que pode ser bissectado, originando um ângulo de amplitude α , ou seja, um ângulo de $\frac{2\pi}{17}$ radianos. Observe-se que todas estas construções podem ser feitas com régua e compasso.

Está, assim, resolvido o problema.

Capítulo 6

Equações com Diferenças

6.1 O papel central da sucessão $v_n = a^n$

Consideremos a sucessão de termo geral $v_n = a^n$, com $a \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{cases} v_{n+1} = a^{n+1} = a \times a^n \\ v_{n+2} = a^{n+2} = a^2 \times a^n \end{cases}$$

Suponhamos que se pretende encontrar o termo geral da sucessão definida por $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Façamos $u_n = a^n$. Então,

$$\begin{cases} u_{n+1} = a^{n+1} = a \times a^n = au_n \\ u_{n+2} = a^{n+2} = a^2 \times a^n = a^2 u_n \end{cases}$$

Logo,

$$a^2 u_n = 2au_n + 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

E daqui se conclui que

$$(a^2 - 2a - 3) u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Se tivermos $a^2 - 2a + 3 = 0$, então a igualdade anterior é verificada obrigatoriamente.

Resolvendo a equação $a^2 - 2a - 3 = 0$, obtemos $a = -1 \vee a = 3$.

Logo, as duas sucessões $(-1)^n$ e 3^n satisfazem a condição $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

A importância das duas sucessões $(-1)^n$ e 3^n resulta do seguinte:

Qualquer combinação linear das duas sucessões anteriores satisfaz a condição $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, o que nos permite encontrar o termo geral da sucessão dada.

Seja $u_n = C_1 \times (-1)^n + C_2 \times 3^n$.

$$\text{Então, } \begin{cases} u_1 = C_1 \times (-1) + C_2 \times 3 = -C_1 + 3C_2 \\ u_2 = C_1 \times (-1)^2 + C_2 \times 3^2 = C_1 + 9C_2 \end{cases}.$$

$$\text{E, agora, basta-nos resolver o sistema } \begin{cases} -C_1 + 3C_2 = 1 \\ C_1 + 9C_2 = 2 \end{cases} :$$

$$\begin{cases} -C_1 + 3C_2 = 1 \\ C_1 + 9C_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 12C_2 = 3 \\ C_1 = 2 - 9C_2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = \frac{1}{4} \\ C_1 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Então, $u_n = -\frac{1}{4} \times (-1)^n + \frac{1}{4} \times 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Terminologia

À equação $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ chama-se equação com diferenças, sendo usual escrever $u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0$.

No primeiro membro da última equação, apenas estão termos da sucessão multiplicados por constantes, pelo que esta equação com diferenças se diz de coeficientes constantes.

O segundo membro da equação com diferenças é zero, neste caso, pelo que a equação se diz homogênea.

Como na equação com diferenças dada, o maior índice dos termos da sucessão é $n + 2$ e o menor é n , dizemos que temos uma equação a dois passos ($n + 2 - n = 2$).

À equação $a^2 - 2a - 3 = 0$, que costuma ser escrita $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, chamamos equação característica.

À sucessão $u_n = C_1 \times (-1)^n + C_2 \times 3^n$, chamamos solução geral da equação homogênea.

6.2 Resolução de equações com diferenças

Exemplo 184 Resolver a equação com diferenças definida por $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 3n + 2^n + 3^n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Resolução

Consideremos a equação homogénea $u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0$.

A equação característica é $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, cujas soluções são -1 e 3 .

A solução geral da equação homogénea é:

$$(u_n)_{gh} = C_1 \times (-1)^n + C_2 \times 3^n$$

Com base na expressão $3n + 2^n + 3^n$ (segundo membro da equação com diferenças), procuramos uma solução particular da equação dada (equação completa).

Neste caso, a solução particular é do tipo $(u_n)_p = An + B + C2^n + Dn3^n$.

A parcela $An + B$ corresponde à expressão $3n$ (polinómio de 1º grau), a parcela $C2^n$ corresponde à expressão 2^n e, finalmente, $Dn3^n$ corresponde a 3^n . O facto de aparecer $Dn3^n$ e não $D3^n$, resulta do facto de 3 ser solução da equação homogénea, pelo que temos de multiplicar $D3^n$ por n . Se 3 fosse raiz dupla da equação característica, teríamos de multiplicar $D3^n$ por n^2 , etc..

Para evitar erros nos cálculos, podemos dividir a solução $(u_n)_p = An + B + C2^n + Dn3^n$ em três sucessões (parcelas):

$$\begin{aligned} (u_n)_{p_1} &= An + B, & (u_n)_{p_2} &= C2^n, & (u_n)_{p_3} &= Dn3^n \\ (u_n)_{p_1} &= An + B, & u_{n+1} &= A(n+1) + B = An + A + B, & u_{n+2} &= A(n+2) + B = An + 2A + B \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n &= An + 2A + B - 2(An + A + B) - 3(An + B) \\ &= An + 2A + B - 2An - 2A - 2B - 3An - 3B = -4An - 4B \end{aligned}$$

Comparando com $3n$, temos $A = -\frac{3}{4}, B = 0$. Então, $(u_n)_{p_1} = -\frac{3}{4}n$.

De $(u_n)_{p_2} = C2^n$, vem $u_{n+1} = C2^{n+1} = 2C2^n$ e $u_{n+2} = C2^{n+2} = 4C2^n$. Logo:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 4C2^n - 2 \times 2C2^n - 3 \times C2^n = 4C2^n - 4C2^n - 3C2^n = -3C2^n$$

Logo, $-3C2^n = 2^n$, ou seja, $C = -\frac{1}{3}$. Então, $(u_n)_{p_2} = -\frac{1}{3} \times 2^n$.

De $(u_n)_{p_3} = Dn3^n$, vem

$$\begin{cases} u_{n+1} = D(n+1)3^{n+1} = (3Dn + 3D)3^n \\ u_{n+2} = D(n+2)3^{n+2} = (9Dn + 18D)3^n \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n &= (9Dn + 18D)3^n - 2(3Dn + 3D)3^n - 3Dn3^n \\ &= (9Dn + 18D - 6Dn - 6D - 3Dn)3^n = 12D3^n \end{aligned}$$

Então, $12D = 1$, donde vem $D = \frac{1}{12}$. Logo, $(u_n)_{p_3} = \frac{n}{12} \times 3^n$.

Então, $(u_n)_p = -\frac{3}{4}n - \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{n}{12} \times 3^n$

Logo, a solução geral da equação completa é dada por:

$$(u_n)_{gc} = C_1 \times (-1)^n + C_2 \times 3^n - \frac{3}{4}n - \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{n}{12} \times 3^n$$

E, agora, determinamos as constantes C_1 e C_2 , de modo que se tenha $u_1 = 1$ e $u_2 = 2$.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} u_1 = -C_1 + 3C_2 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \times 3 = 1 \\ u_2 = C_1 + 9C_2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \times 9 = 2 \end{cases} &\implies \begin{cases} -C_1 + 3C_2 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = 1 \\ C_1 + 9C_2 - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = 2 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} -12C_1 + 36C_2 - 9 - 8 + 3 = 12 \\ 3C_1 + 27C_2 - 4 = 6 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} -6C_1 + 18C_2 = 13 \\ 6C_1 + 54C_2 = 20 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} 72C_2 = 33 \\ 3C_1 + 27C_2 = 10 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} C_2 = \frac{11}{24} \\ 3C_1 + 27 \times \frac{11}{24} = 10 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} C_2 = \frac{11}{24} \\ 3C_1 = 10 - \frac{99}{8} \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 = \frac{11}{24} \\ C_1 = -\frac{19}{24} \end{cases}
 \end{aligned}$$

E, por fim, temos

$$u_n = -\frac{19}{24} \times (-1)^n + \frac{11}{24} \times 3^n - \frac{3}{4}n - \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{n}{12} \times 3^n$$

Exemplo 185 Resolva a equação com diferenças definida por $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 3n + 5 + \sin n + n \times 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Resolução

Consideremos a equação homogênea $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$.

A equação característica é $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, a qual tem a raiz dupla 1.

A solução geral da equação homogênea é:

$$(u_n)_{gh} = (C_1 + C_2 \times n) \times 1^n = C_1 + C_2 \times n$$

Sejam $(u_n)_{p_1} = (An + B)n^2 = An^3 + Bn^2$, $(u_n)_{p_2} = C \sin n + D \cos n$, $(u_n)_{p_3} = (En + F)2^n$.

Então, no caso de $(u_n)_{p_1}$, temos

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= A(n+1)^3 + B(n+1)^2 \\
 &= An^3 + 3An^2 + 3An + A + Bn^2 + 2Bn + B \\
 &= An^3 + (3A + B)n^2 + (3A + 2B)n + A + B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{n+2} &= A(n+2)^3 + B(n+2)^2 \\
 &= An^3 + 6An^2 + 12An + 8A + Bn^2 + 4Bn + 4B \\
 &= An^3 + (6A + B)n^2 + (12A + 4B)n + 8A + 4B
 \end{aligned}$$

E podemos formar o seguinte quadro para facilitar os cálculos:

| n^3 | n^2 | n | 1 |
|-------|------------|------------|------------|
| A | $6A + B$ | $12A + 4B$ | $8A + 4B$ |
| $-2A$ | $-6A - 2B$ | $-6A - 4B$ | $-2A - 2B$ |
| A | B | | |
| 0 | 0 | $6A$ | $6A + 2B$ |

Então, $\begin{cases} 6A = 3 \\ 6A + 2B = 5 \end{cases}$, ou seja, $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}$. Logo, $(u_n)_{p_1} = \frac{1}{2}n^3 + n^2$.

No caso de $(u_n)_{p_2} = C \sin n + D \cos n$, temos

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= C \sin(n+1) + D \cos(n+1) \\
 &= C \sin n \cos 1 + C \sin 1 \cos n + D \cos n \cos 1 - D \sin n \sin 1 \\
 &= (C \cos 1 - D \sin 1) \sin n + (C \sin 1 + D \cos 1) \cos n \\
 \\
 u_{n+2} &= C \sin(n+2) + D \cos(n+2) \\
 &= C \sin n \cos 2 + C \sin 2 \cos n + D \cos n \cos 2 - D \sin n \sin 2 \\
 &= (C \cos 2 - D \sin 2) \sin n + (C \sin 2 + D \cos 2) \cos n
 \end{aligned}$$

Então, temos o seguinte quadro:

| $\sin n$ | $\cos n$ |
|--------------------------|--------------------------|
| $C \cos 2 - D \sin 2$ | $C \sin 2 + D \cos 2$ |
| $-2C \cos 1 + 2D \sin 1$ | $-2C \sin 1 - 2D \cos 1$ |
| C | D |

Logo, $\begin{cases} C(1 - 2 \cos 1 + \cos 2) + D(2 \sin 1 - \sin 2) = 1 \\ C(\sin 2 - 2 \sin 1) + D(1 - 2 \cos 1 + \cos 2) = 0 \end{cases}$

Então:

$$\begin{cases} C = \frac{D(1-2 \cos 1 + \cos 2)}{2 \sin 1 - \sin 2} \\ \frac{D(1-2 \cos 1 + \cos 2)^2}{2 \sin 1 - \sin 2} + D(2 \sin 1 - \sin 2) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C = \frac{D(1-2 \cos 1 + \cos 2)}{2 \sin 1 - \sin 2} \\ \frac{D(1-2 \cos 1 + \cos 2)^2 + D(2 \sin 1 - \sin 2)^2}{2 \sin 1 - \sin 2} = 1 \end{cases}$$

Logo, $\begin{cases} C = \frac{D(1-2 \cos 1 + \cos 2)}{2 \sin 1 - \sin 2} \\ D(1 - 2 \cos 1 + \cos 2)^2 + D(2 \sin 1 - \sin 2)^2 = 2 \sin 1 - \sin 2 \end{cases}$

Logo, $\begin{cases} C = \frac{D(1-2 \cos 1 + \cos 2)}{2 \sin 1 - \sin 2} \\ D = \frac{2 \sin 1 - \sin 2}{(1-2 \cos 1 + \cos 2)^2 + (2 \sin 1 - \sin 2)^2} \end{cases}$

Mas,

$$\begin{cases} (1 - 2 \cos 1 + \cos 2)^2 = 1 + 4 \cos^2 1 + \cos^2 2 - 4 \cos 1 + 2 \cos 2 - 4 \cos 1 \cos 2 \\ (2 \sin 1 - \sin 2)^2 = 4 \sin^2 1 - 4 \sin 1 \sin 2 + \sin^2 2 \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
 (1 - 2 \cos 1 + \cos 2)^2 + (2 \sin 1 - \sin 2)^2 &= 1 + 4 + 1 - 4 \cos 1 \cos 2 - 4 \sin 1 \sin 2 - 4 \cos 1 + 2 \cos 2 \\
 &= 6 - 4 \cos(2 - 1) - 4 \cos 1 + 2 \cos 2 = 6 - 8 \cos 1 + 2 \cos 2
 \end{aligned}$$

Logo, $\begin{cases} C = \frac{1-2 \cos 1 + \cos 2}{2 \sin 1 - \sin 2} \times \frac{2 \sin 1 - \sin 2}{6 - 8 \cos 1 + 2 \cos 2} = \frac{1-2 \cos 1 + \cos 2}{6 - 8 \cos 1 + 2 \cos 2} \\ D = \frac{2 \sin 1 - \sin 2}{6 - 8 \cos 1 + 2 \cos 2} \end{cases}$

Então, $(u_n)_{p_2} = \frac{1-2 \cos 1 + \cos 2}{6 - 8 \cos 1 + 2 \cos 2} \sin n + \frac{2 \sin 1 - \sin 2}{6 - 8 \cos 1 + 2 \cos 2} \cos n$.

Finalmente, temos $(u_n)_{p_3} = (En + F) 2^n$. Então:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (En + E + F) 2^n \times 2 = (2En + 2E + 2F) 2^n \\ u_{n+2} = (En + 2E + F) 2^n \times 4 = (4En + 8E + 4F) 2^n \end{cases}$$

Então, temos o seguinte quadro:

| $n2^n$ | 2^n |
|--------|------------|
| $4E$ | $8E + 4F$ |
| $-4E$ | $-4E - 4F$ |
| E | F |

Logo, $\begin{cases} E = 1 \\ 4E + F = 0 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} E = 1 \\ F = -4 \end{cases}$.

Então, $(u_n)_{p_3} = (n-4)2^n$, pelo que uma solução particular da equação dada é:

$$(u_n)_p = \frac{1}{2}n^3 + n^2 + \frac{1-2\cos 1 + \cos 2}{6-8\cos 1 + 2\cos 2} \sin n + \frac{2\sin 1 - \sin 2}{6-8\cos 1 + 2\cos 2} \cos n + (n-4)2^n$$

E a solução geral da equação completa é:

$$(u_n)_{gc} = C_1 + C_2n + (u_n)_p$$

Exemplo 186 Resolva a seguinte equação:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = n^2 + 3 + 3^n + 2^n + \cos \frac{n\pi}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Resolução

Consideremos a equação homogênea $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$.

A equação característica é $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, a qual tem as raízes complexas $1+i$ e $1-i$. Ora, $1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{n\pi}{4}$. Então, a solução geral da equação homogênea é:

$$(u_n)_{gh} = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}\right)$$

Seja $(u_n)_{p_1} = An^2 + Bn + C$. Então:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= A(n+1)^2 + B(n+1) + C = An^2 + 2An + A + Bn + B + C \\ &= An^2 + (2A+B)n + A + B + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= A(n+2)^2 + B(n+2) + C = An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C \\ &= An^2 + (4A+B)n + 4A + 2B + C \end{aligned}$$

| n^2 | n | 1 |
|-------|----------|-------------|
| A | $4A+B$ | $4A+2B+C$ |
| $-2A$ | $-4A-2B$ | $-2A-2B-2C$ |
| $2A$ | $2B$ | $2C$ |
| A | B | $2A+C$ |

$$\text{Logo, } \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2A + C = 3 \end{cases}, \text{ donde se conclui } \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}.$$

Então, $(u_n)_{p_1} = n^2 + 1$.

Seja $(u_n)_{p_2} = D3^n + E2^n$. Então, $\begin{cases} u_{n+1} = 3D3^n + 2E2^n \\ u_{n+2} = 9D3^n + 4E2^n \end{cases}$

| 3^n | 2^n |
|-------|-------|
| $9D$ | $4E$ |
| $-6D$ | $-4E$ |
| $2D$ | $2E$ |
| $5D$ | $2E$ |

$$\text{Logo, } \begin{cases} 5D = 1 \\ 2E = 1 \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} D = \frac{1}{5} \\ E = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Então, $(u_n)_{p_2} = \frac{3^n}{5} + \frac{2^n}{2} = \frac{3^n}{5} + 2^{n-1}$.

Seja $(u_n)_{p_3} = F \cos \frac{n\pi}{4} + G \sin \frac{n\pi}{4}$. Então:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= F \cos \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) + G \sin \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= F \left(\cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) + G \left(\sin \frac{n\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{F\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{4} \right) + \frac{G\sqrt{2}}{2} \left(\sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{(F+G)\sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{(G-F)\sqrt{2}}{2} \sin \frac{n\pi}{4} \\
 u_{n+2} &= F \cos \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + G \sin \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = F \sin \left(-\frac{n\pi}{4} \right) + G \cos \left(-\frac{n\pi}{4} \right) \\
 &= G \cos \frac{n\pi}{4} - F \sin \frac{n\pi}{4}
 \end{aligned}$$

| | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\cos \frac{n\pi}{4}$ | $\sin \frac{n\pi}{4}$ |
| G | $-F$ |
| $-F\sqrt{2} - G\sqrt{2}$ | $F\sqrt{2} - G\sqrt{2}$ |
| $2F$ | $2G$ |
| $(2 - \sqrt{2})F + (1 - \sqrt{2})G$ | $(\sqrt{2} - 1)F + (2 - \sqrt{2})G$ |

Logo, $\begin{cases} (2 - \sqrt{2})F + (1 - \sqrt{2})G = 1 \\ (\sqrt{2} - 1)F + (2 - \sqrt{2})G = 0 \end{cases}$, donde vem:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} (2 - \sqrt{2})F + (1 - \sqrt{2})G = 1 \\ F = \frac{(2 - \sqrt{2})G}{1 - \sqrt{2}} \end{cases} &\iff \begin{cases} (2 - \sqrt{2})F + (1 - \sqrt{2})G = 1 \\ F = \frac{(2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}G \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (2 - \sqrt{2})F + (1 - \sqrt{2})G = 1 \\ F = \frac{2 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2}{-1}G \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -G\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})G = 1 \\ F = -G\sqrt{2} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -2G\sqrt{2} + 2G + (1 - \sqrt{2})G = 1 \\ F = -G\sqrt{2} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (-2\sqrt{2} + 2 + 1 - \sqrt{2})G = 1 \\ F = -G\sqrt{2} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} G = \frac{1}{3 - 3\sqrt{2}} = \frac{3 + 3\sqrt{2}}{-9} = \frac{-1 - \sqrt{2}}{3} \\ F = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Então, $(u_n)_{p_3} = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{1 + \sqrt{2}}{3} \sin \frac{n\pi}{4}$.

Então,

$$(u_n)_p = n^2 + 1 + \frac{3^n}{5} + 2^{n-1} + \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{1 + \sqrt{2}}{3} \sin \frac{n\pi}{4}$$

A solução geral da equação completa é:

$$(u_n)_{gc} = \left(\sqrt{2} \right)^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right) + (u_n)_p$$

Exemplo 187 Resolva a equação:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = \left(\sqrt{2} \right)^n \cos \frac{n\pi}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Resolução

Pelo exemplo anterior, a solução geral da equação homogênea é:

$$(u_n)_{gh} = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}\right)$$

E uma solução particular da equação completa é do tipo

$$(u_n)_p = n \left(\sqrt{2}\right)^n \left(A \cos \frac{n\pi}{4} + B \sin \frac{n\pi}{4}\right)$$

Então:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1) \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} \left(A \cos \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + B \sin \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{(n+1)\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} \left(A \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{4}\right) + B \left(\sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= (n+1) \left(\sqrt{2}\right)^n \left((A+B) \cos \frac{n\pi}{4} + (B-A) \sin \frac{n\pi}{4}\right) \\ u_{n+2} &= (n+2) \left(\sqrt{2}\right)^{n+2} \left(A \cos \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + B \sin \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2(n+2) \left(\sqrt{2}\right)^n \left(A \sin \left(-\frac{n\pi}{4}\right) + B \cos \left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= (2n+4) \left(\sqrt{2}\right)^n \left(B \cos \frac{n\pi}{4} - A \sin \frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

| $n \left(\sqrt{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{4}$ | $n \left(\sqrt{2}\right)^n \sin \frac{n\pi}{4}$ | $\left(\sqrt{2}\right)^n \cos \frac{n\pi}{4}$ | $\left(\sqrt{2}\right)^n \sin \frac{n\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|
| $2B$ | $-2A$ | $4B$ | $-4A$ |
| $-2A - 2B$ | $2A - 2B$ | $-2A - 2B$ | $2A - 2B$ |
| $2A$ | $2B$ | | |
| 0 | 0 | $-2A + 2B$ | $-2A - 2B$ |

Então, $\begin{cases} -2A + 2B = 1 \\ -2A - 2B = 0 \end{cases}$. Logo, $\begin{cases} -4A = 1 \\ B = -A \end{cases}$, ou seja, $\begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Então,

$$(u_n)_p = \frac{n}{4} \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\sin \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{4}\right)$$

A solução geral da equação completa é:

$$(u_n)_{gc} = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}\right) + \frac{n}{4} \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\sin \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{n\pi}{4}\right)$$

Exemplo 188 Seja $f(n) = 2n + 5 + (n+2)2^n + (2n+3)\cos \frac{n\pi}{2}$. Resolva a equação:

$$u_{n+4} - 3u_{n+3} + 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Resolução

A equação homogênea é $u_{n+4} - 3u_{n+3} + 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0$.

A equação característica é $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

Como o termo independente do polinômio $P(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2$ é 2 e o coeficiente director é 1, as possíveis raízes racionais da equação anterior são ± 1 e ± 2 .

$$P(1) = 1 - 3 + 3 - 3 + 2 = 0, \quad P(2) = 16 - 24 + 12 - 6 + 2 = 0$$

Aplicamos a regra de Ruffini:

| | | | | | |
|---|---|----|---|----|---|
| 1 | 1 | -3 | 3 | -3 | 2 |
| 1 | 1 | -2 | 1 | -2 | |
| 2 | 1 | -2 | 1 | -2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 2 | | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | |

Então, $P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = 2 \vee \lambda = \pm i = \text{cis}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$.

Então, a solução geral da equação homogênea é:

$$(u_n)_{gc} = C_1 + C_2 2^n + C_3 \cos \frac{n\pi}{2} + C_4 \sin \frac{n\pi}{2}$$

Seja $(u_n)_{p_1} = (An + B)n = An^2 + Bn$. Então:

$$\begin{cases} u_{n+1} = A(n+1)^2 + B(n+1) = An^2 + (2A+B)n + A+B \\ u_{n+2} = A(n+2)^2 + B(n+2) = An^2 + (4A+B)n + 4A+2B \\ u_{n+3} = A(n+3)^2 + B(n+3) = An^2 + (6A+B)n + 9A+3B \\ u_{n+4} = A(n+4)^2 + B(n+4) = An^2 + (8A+B)n + 16A+4B \end{cases}$$

| n^2 | n | 1 |
|-------|-----------|-----------|
| A | $8A+B$ | $16A+4B$ |
| $-3A$ | $-18A-3B$ | $-27A-9B$ |
| $3A$ | $12A+3B$ | $12A+6B$ |
| $-3A$ | $-6A-3B$ | $-3A-3B$ |
| $2A$ | $2B$ | |
| 0 | $-4A$ | $-2A-2B$ |

Logo, $\begin{cases} -4A = 2 \\ -2A - 2B = 5 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -2 \end{cases}$.

Então, $(u_n)_{p_1} = -\frac{1}{2}n^2 - 2n$.

Seja $(u_n)_{p_2} = (Cn^2 + Dn)2^n$. Então:

$$u_{n+1} = \left(C(n+1)^2 + D(n+1)\right)2^{n+1} = (2Cn^2 + (4C+2D)n + 2C+2D)2^n$$

$$u_{n+2} = \left(C(n+2)^2 + D(n+2)\right)2^{n+2} = (4Cn^2 + (16C+4D)n + 16C+8D)2^n$$

$$u_{n+3} = \left(C(n+3)^2 + D(n+3)\right)2^{n+3} = (8Cn^2 + (48C+8D)n + 72C+24D)2^n$$

$$u_{n+4} = \left(C(n+4)^2 + D(n+4)\right)2^{n+4} = (16Cn^2 + (128C+16D)n + 256C+64D)2^n$$

| $n^2 2^n$ | $n 2^n$ | 2^n |
|-----------|-------------|-------------|
| $16C$ | $128C+16D$ | $256C+64D$ |
| $-24C$ | $-144C-24D$ | $-216C-72D$ |
| $12C$ | $48C+12D$ | $48C+24D$ |
| $-6C$ | $-12C-6D$ | $-6C-6D$ |
| $2C$ | $2D$ | |
| 0 | $20C$ | $82C+10D$ |

Logo, $\begin{cases} 20C = 1 \\ 82C + 10D = 2 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} C = \frac{1}{20} \\ \frac{41}{10} + 10D = 2 \end{cases}$, ou seja, $\begin{cases} C = \frac{1}{20} \\ D = -\frac{21}{100} \end{cases}$.

Então, $(u_n)_{p_2} = \left(\frac{1}{20}n^2 - \frac{21}{100}n\right)2^n$.

Seja $(u_n)_{p_3} = (En^2 + Fn) \cos \frac{n\pi}{2} + (Gn^2 + Hn) \sin \frac{n\pi}{2}$. Então:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \left(E(n+1)^2 + F(n+1) \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \left(G(n+1)^2 + H(n+1) \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= (En^2 + (2E + F)n + E + F) \sin \left(-\frac{n\pi}{2} \right) + (Gn^2 + (2G + H)n + G + H) \cos \left(-\frac{n\pi}{2} \right) \\
 &= (Gn^2 + (2G + H)n + G + H) \cos \frac{n\pi}{2} - (En^2 + (2E + F)n + E + F) \sin \frac{n\pi}{2} \\
 u_{n+2} &= \left(E(n+2)^2 + F(n+2) \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) + \left(G(n+2)^2 + H(n+2) \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \pi \right) \\
 &= -(En^2 + (4E + F)n + 4E + 2F) \cos \frac{n\pi}{2} - (Gn^2 + (4G + H)n + 4G + 2H) \sin \frac{n\pi}{2} \\
 u_{n+3} &= \left(E(n+3)^2 + F(n+3) \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) + \left(G(n+3)^2 + H(n+3) \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) \\
 &= (En^2 + (6E + F)n + 9E + 3F) \cos \left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + (Gn^2 + (6G + H)n + 9G + 3H) \sin \left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= (En^2 + (6E + F)n + 9E + 3F) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2} \right) - (Gn^2 + (6G + H)n + 9G + 3H) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2} \right) \\
 &= -(Gn^2 + (6G + H)n + 9G + 3H) \cos \frac{n\pi}{2} + (En^2 + (6E + F)n + 9E + 3F) \sin \frac{n\pi}{2} \\
 u_{n+4} &= \left(E(n+4)^2 + F(n+4) \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi \right) + \left(G(n+4)^2 + H(n+4) \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} + 2\pi \right) \\
 &= (En^2 + (8E + F)n + 16E + 4F) \cos \frac{n\pi}{2} + (Gn^2 + (8G + H)n + 16G + 4H) \sin \frac{n\pi}{2}
 \end{aligned}$$

| $n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$ | $n \cos \frac{n\pi}{2}$ | $\cos \frac{n\pi}{2}$ | $n^2 \sin \frac{n\pi}{2}$ | $n \sin \frac{n\pi}{2}$ | $\sin \frac{n\pi}{2}$ |
|---------------------------|-------------------------|-----------------------|---------------------------|-------------------------|-----------------------|
| E | $8E + F$ | $16E + 4F$ | G | $8G + H$ | $16G + 4H$ |
| $3G$ | $18G + 3H$ | $27G + 9H$ | $-3E$ | $-18E - 3F$ | $-27E - 9F$ |
| $-3E$ | $-12E - 3F$ | $-12E - 6F$ | $-3G$ | $-12G - 3H$ | $-12G - 6H$ |
| $-3G$ | $-6G - 3H$ | $-3G - 3H$ | $3E$ | $6E + 3F$ | $3E + 3F$ |
| $2E$ | $2F$ | 0 | $2G$ | $2H$ | 0 |
| 0 | $-4E + 12G$ | $4E - 2F + 24G + 6H$ | 0 | $-12E - 4G$ | $-24E - 6F + 4G - 2H$ |

Logo:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} -4E + 12G = 2 \\ 4E - 2F + 24G + 6H = 3 \\ -12E - 4G = 0 \\ -24E - 6F + 4G - 2H = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -4E - 36E = 2 \\ 4E - 2F - 72E + 6H = 3 \\ G = -3E \\ 12E + 3F - 2G + H = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} E = -\frac{1}{20} \\ \frac{17}{5} - 2F + 6H = 3 \\ G = \frac{3}{20} \\ -\frac{12}{20} + 3F - \frac{6}{20} + H = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} E = -\frac{1}{20} \\ -30F + 90H = -6 \\ G = \frac{3}{20} \\ 30F + 10H = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} E = -\frac{1}{20} \\ 100H = 3 \\ G = \frac{3}{20} \\ -300F - 100H = -90 \end{cases} \\
 &\iff E = -\frac{1}{20} \wedge H = \frac{3}{100} \wedge G = \frac{3}{20} \wedge F = \frac{29}{100}
 \end{aligned}$$

Então:

$$(u_n)_{p_3} = \left(-\frac{1}{20}n^2 + \frac{29}{100}n \right) \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{3}{20}n^2 + \frac{3}{100}n \right) \sin \frac{n\pi}{2}$$

Logo,

$$(u_n)_p = -\frac{1}{2}n^2 - 2n + \left(\frac{1}{20}n^2 - \frac{21}{100}n \right) 2^n + \left(-\frac{1}{20}n^2 + \frac{29}{100}n \right) \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{3}{20}n^2 + \frac{3}{100}n \right) \sin \frac{n\pi}{2}$$

E, finalmente, temos a solução geral da equação completa:

$$(u_n)_{gc} = C_1 + C_2 2^n + C_3 \cos \frac{n\pi}{2} + C_4 \sin \frac{n\pi}{2} + (u_n)_p$$

Exemplo 189 Determine o termo geral da sucessão de Fibonnaci, a qual é definida por:

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N}_0 \\ u_0 = 0, u_1 = 1 \end{cases}$$

Resolução

A equação homogênea é $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$.

A equação característica é $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, cujas raízes são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Então, a solução geral da equação homogênea (que é equivalente à equação dada) é

$$(u_n)_{gh} = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\text{Então, } \begin{cases} 0 = u_0 = C_1 + C_2 \\ 1 = u_1 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 (1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Logo, o termo geral da sucessão é

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Exercício 190 Relativamente a sucessão de Fibonnaci, mostre que $u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2} + (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Resolução

Para $n = 0$, vem $u_1^2 = u_0 \times u_2 + (-1)^0$. Ora, $u_1^2 = 1^2 = 1$ e $u_0 \times u_2 + (-1)^0 = 0 \times 1 + 1 = 1$.

Logo, a afirmação é verdadeira para $n = 0$.

Hipótese de indução: suponhamos que $u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2} + (-1)^n$, para certo $n \in \mathbb{N}_0$.

Tese: $u_{n+2}^2 = u_{n+1} \times u_{n+3} + (-1)^{n+1}$.

Ora,

$$\begin{aligned} u_{n+1} \times u_{n+3} + (-1)^{n+1} &= u_{n+1} \times (u_{n+2} + u_{n+1}) + (-1)^{n+1} \\ &= u_{n+1} \times u_{n+2} + u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \\ &= u_{n+1} \times u_{n+2} + u_n \times u_{n+2} + (-1)^n + (-1)^{n+1} \\ &= u_{n+1} \times u_{n+2} + u_n \times u_{n+2} \\ &= (u_{n+1} + u_n) \times u_{n+2} \\ &= u_{n+2} \times u_{n+2} \\ &= u_{n+2}^2 \end{aligned}$$

Logo, $u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2} + (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Observação

Uma vez que temos o termo geral da sucessão de Fibonnaci, a demonstração poderá ser feita utilizando esse facto. Mas isso não significa que os cálculos sejam fáceis.

Exemplo 191 Determine o termo geral das sucessões que, pelo método iterativo de Jacobi, permitem obter soluções aproximadas do sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$.

Resolução

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, a matriz dos coeficientes das variáveis. Esta matriz tem a diagonal estritamente dominante por linhas, uma vez que o módulo de cada elemento da diagonal principal é maior que a soma dos módulos dos restantes elementos da mesma linha. Este facto garante a convergência das sucessões envolvidas.

Comecemos por observar que o sistema é equivalente a $\begin{cases} x = \frac{7-y}{2} \\ y = \frac{7-3x}{4} \end{cases}$.

Consideremos as sucessões definidas por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7-y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{7-3x_n}{4} \end{cases}, \text{ com as condições iniciais } x_0 = y_0 = 0.$$

Note-se que as condições iniciais podiam ser outras quaisquer.

Calculemos alguns termos das sucessões anteriores:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7-0}{2} = \frac{7}{2} \\ y_1 = \frac{7-0}{4} = \frac{7}{4} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{7-\frac{7}{2}}{2} = \frac{21}{8} \\ y_2 = \frac{7-\frac{21}{2}}{4} = -\frac{7}{8} \end{cases}, \begin{cases} x_3 = \frac{7+\frac{7}{8}}{2} = \frac{63}{16} \\ y_3 = \frac{7-\frac{63}{8}}{4} = -\frac{7}{32} \end{cases}, \begin{cases} x_4 = \frac{7+\frac{7}{32}}{2} = \frac{231}{64} \\ y_4 = \frac{7-\frac{189}{16}}{4} = -\frac{77}{64} \end{cases}$$

Calculemos x_{n+2} e y_{n+2} :

$$\begin{cases} x_{n+2} = \frac{7-y_{n+1}}{2} = \frac{7-\frac{7-3x_n}{4}}{2} = \frac{21+3x_n}{8} \\ y_{n+2} = \frac{7-3x_{n+1}}{4} = \frac{7-3\left(\frac{7-y_n}{2}\right)}{4} = \frac{14-21+3y_n}{8} = \frac{-7+3y_n}{8} \end{cases}$$

O sistema anterior é equivalente a $\begin{cases} 8x_{n+2} - 3x_n = 21 \\ 8y_{n+2} - 3y_n = -7 \end{cases}$, obtendo-se, assim, duas equações com diferenças a dois passos.

Comecemos por $8x_{n+2} - 3x_n = 21$:

A equação homogénea é $8x_{n+2} - 3x_n = 0$.

A equação característica é $8\lambda^2 - 3 = 0$, cujas raízes são $\pm \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Então, a solução geral da equação homogénea é

$$x_n = C_1 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n + C_2 \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n$$

Solução particular: $(x_n)_p = A$

Então, $8A - 3A = 21$, donde vem $A = \frac{21}{5}$.

Logo, a solução geral da equação completa é:

$$x_n = \frac{21}{5} + C_1 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n + C_2 \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n$$

$$\text{Então, } \begin{cases} x_0 = \frac{21}{5} + C_1 + C_2 = 0 \\ x_1 = \frac{21}{5} + C_1 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) - C_2 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) = \frac{7}{2} \end{cases}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_2 = -\frac{21}{5} - C_1 \\ \frac{21}{5} + (C_1 - C_2) \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) = \frac{7}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} C_2 = -\frac{21}{5} - C_1 \\ (C_1 + \frac{21}{5} + C_1) \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) = \frac{7}{2} - \frac{21}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = -\frac{21}{5} - C_1 \\ \left(\frac{21}{5} + 2C_1 \right) = -\frac{7}{10} \times \frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_2 = -\frac{21}{5} - C_1 \\ \frac{21}{5} + 2C_1 = -\frac{14}{5\sqrt{6}} \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = -\frac{21}{5} + \frac{63+7\sqrt{6}}{30} = \frac{-63+7\sqrt{6}}{30} \\ C_1 = -\frac{7}{5\sqrt{6}} - \frac{21}{10} = -\frac{63+7\sqrt{6}}{30} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$x_n = \frac{21}{5} - \frac{63+7\sqrt{6}}{30} \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n + \frac{-63+7\sqrt{6}}{30} \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n$$

De qualquer modo, nem precisávamos de calcular as constantes C_1 e C_2 , para calcular o limite da sucessão (x_n) :

$$\lim x_n = \lim \left(\frac{21}{5} + C_1 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n + C_2 \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n \right) = \frac{21}{5}$$

Analogamente se resolve a equação com diferenças $8y_{n+2} - 3y_n = -7$, obtendo-se $y_n = C_3 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n + C_4 \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n$, para solução da equação homogénea e $y_n = C_3 \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n + C_4 \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^n - \frac{7}{5}$, para solução da equação completa.

Então, $\lim y_n = -\frac{7}{5}$.

A solução do sistema dado é $\begin{cases} x = \frac{21}{5} \\ y = -\frac{7}{5} \end{cases}$.

Evidentemente que a resolução apresentada é meramente ilustrativa do método de Jacobi, pois o sistema pode ser resolvido de modo mais simples, pelos processos usuais.

Exemplo 192 Determine o termo geral das sucessões que, pelo método iterativo de Gauss-Seidel, permitem obter soluções aproximadas do sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$.

Resolução

O sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$ é equivalente a $\begin{cases} x = \frac{7-y}{2} \\ y = \frac{7-3x}{4} \end{cases}$.

Consideremos as sucessões definidas por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7-y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{7-3x_{n+1}}{4} \end{cases}, \text{ com as condições iniciais } x_0 = y_0 = 0.$$

Repare-se que a diferença, em relação ao método de Jacobi, está na igualdade $y_{n+1} = \frac{7-3x_{n+1}}{4}$, em vez de $y_{n+1} = \frac{7-3x_n}{4}$.

Neste caso, temos

$$\begin{cases} x_{n+2} = \frac{7-y_{n+1}}{2} = \frac{7-\frac{7-3x_{n+1}}{4}}{2} = \frac{21+3x_{n+1}}{8} \\ y_{n+1} = \frac{7-3x_{n+1}}{4} = \frac{7-3\left(\frac{7-y_n}{2}\right)}{4} = \frac{-7+3y_n}{8} \end{cases}$$

Logo, $8x_{n+2} - 3x_{n+1} = 21$ e $8y_{n+1} - 3y_n = -7$, obtendo-se equações com diferenças a um passo.

Começemos por $8x_{n+2} - 3x_{n+1} = 21$.

A equação homogénea é $8x_{n+2} - 3x_{n+1} = 0$, pelo que a equação característica é $8\lambda - 3 = 0$, pelo que $\lambda = \frac{3}{8}$.

Então, a solução da equação homogénea é $x_n = C_1 \left(\frac{3}{8} \right)^n$, com $n \geq 1$.

Uma solução particular é $x_n = \frac{21}{5}$, pelo que a solução geral da equação completa é $x_n = C_1 \left(\frac{3}{8} \right)^n + \frac{21}{5}$, com a importante observação de que a igualdade anterior pode não ser válida para $n = 0$.

Para a equação $8y_{n+1} - 3y_n = -7$, temos:

$$y_n = C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^n - \frac{7}{5}$$

A solução da equação homogénea é , sendo a solução da equação completa , sendo esta igualdade válida para qualquer inteiro não negativo.

Repare-se que $\lim x_n = \lim \left(C_1 \left(\frac{3}{8} \right)^n + \frac{21}{5} \right) = \frac{21}{5}$ e $\lim y_n = \lim \left(C_2 \left(\frac{3}{8} \right)^n - \frac{7}{5} \right) = -\frac{7}{5}$.

Exemplo 193 Determine o termo geral das sucessões que, pelo método iterativo de Jacobi, permitem obter soluções aproximadas do sistema $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x + 4y = 19 \end{cases}$.

Resolução

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, a matriz dos coeficientes das variáveis. Esta matriz não tem a diagonal dominante por

linhas nem por colunas. Mas, trata-se duma matriz positiva definida, porque $2 > 0$ e $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 3 > 0$.

Este facto garante a convergência das sucessões envolvidas.

Resolvendo a primeira equação em ordem a x e a segunda em ordem a y , obtemos $\begin{cases} x = \frac{7-y}{2} \\ y = \frac{19-5x}{4} \end{cases}$, pelo que vamos considerar as sucessões definidas por $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7-y_n}{2} \\ y_{n+1} = \frac{19-5x_n}{4} \end{cases}$.

Então, $\begin{cases} x_{n+2} = \frac{7-y_{n+1}}{2} = \frac{7-\frac{19-5x_n}{4}}{2} = \frac{9+5x_n}{8} \\ y_{n+2} = \frac{19-5x_{n+1}}{4} = \frac{19-5\left(\frac{7-y_n}{2}\right)}{4} = \frac{3+5y_n}{8} \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} 8x_{n+2} - 5x_n = 9 \\ 8y_{n+2} - 5y_n = 3 \end{cases}$.

Neste caso, a equação característica é $8\lambda^2 - 5 = 0$ e as suas soluções são $\lambda = \pm \frac{\sqrt{10}}{4}$. As soluções gerais das equações homogêneas são:

$$\begin{cases} (x_n)_{gc} = C_1 \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n + C_2 \left(-\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n \\ (y_n)_{gc} = C_3 \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n + C_4 \left(-\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n \end{cases}$$

As soluções particulares são : $\begin{cases} (x_n)_p = 3 \\ (y_n)_p = 1 \end{cases}$, pelo que as soluções gerais das equações completas são:

$$\begin{cases} (x_n)_{gc} = 3 + C_1 \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n + C_2 \left(-\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n \\ (y_n)_{gc} = 1 + C_3 \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n + C_4 \left(-\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^n \end{cases}$$

Os limites das sucessões anteriores são, respectivamente, 3 e 1, os quais dão a solução do sistema.

Exemplo 194 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+1} = 2u_n + 1$, com $u_0 = 1$.

Resolução

A sucessão pode ser definida por $u_{n+1} - 2u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$ e com $u_0 = 1$.

A equação característica é $\lambda - 2 = 0$, pelo que $\lambda = 2$. Então, a solução geral da equação $u_{n+1} - 2u_n = 0$ é $(u_n)_{gh} = A \times 2^n$.

Uma solução particular da equação completa é $u_n = B$. Então, $B - 2B = 1$, pelo que $B = -1$.

Logo, a solução geral da equação completa é $(u_n)_{gc} = A \times 2^n - 1$.

Mas, pretendemos $u_0 = 1$. Logo, $A \times 2^0 - 1 = 1$, donde vem $A = 2$.

Logo, a solução pretendida é $u_n = 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 195 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+3} - u_n = n$, com $u_2 = u_1 = u_0 = 1$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+3} - u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^3 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 1 = 0 &\iff (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \lambda = 1 \vee \lambda = \text{cis}\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{gh} = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + C_3 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$

Solução particular: $(u_n)_p = An^2 + Bn$

Então, $(u_{n+3})_p = A(n+3)^2 + B(n+3) = An^2 + (6A+B)n + 9A+3B$.

Logo, $(u_{n+3})_p - (u_n)_p = An^2 + (6A+B)n + 9A+3B - An^2 - Bn = 6An + 9A+3B$.

Logo, $6A = 1 \wedge 9A+3B$, donde vem $A = \frac{1}{6} \wedge B = -\frac{1}{2}$. Logo, $(u_n)_p = \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Então, a solução geral da equação completa é

$$(u_n)_{gc} = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + C_3 \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{2}n$$

Falta-nos obter a solução particular que satisfaz $u_2 = u_1 = u_0 = 1$. Ora, $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 \cos 0 + C_3 \sin 0 + 0 = 0 \\ C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + C_3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{9} - \frac{1}{2} = 0 \\ C_1 + C_2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + C_3 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{9} - 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 = \frac{1}{3} \\ C_1 - \frac{1}{2}C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_3 = 0 \\ -C_2 - \frac{1}{2}C_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_3 = 0 \\ -\frac{3}{2}C_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ C_3 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{2}{9} \\ C_2 = -\frac{2}{9} \\ C_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $u_n = \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right), \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 196 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} - 7u_{n+1} + 10u_n = 8n + 6$, com $u_0 = 9$ e $u_1 = 22$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+2} - 7u_{n+1} + 10u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \iff \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} \iff \lambda = 2 \vee \lambda = 5$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 \times 2^n + C_2 \times 5^n$

Solução particular: $(u_n)_p = An + B$

Então, $(u_{n+1})_p = A(n+1) + B = An + A + B$ e $(u_{n+2})_p = A(n+2) + B = An + 2A + B$.

Logo,

$$\begin{aligned} 8n + 6 &= (u_{n+2})_p - 7(u_{n+1})_p + 10(u_n)_p \\ &= An + 2A + B - 7An - 7A - 7B + 10An + 10B \\ &= 4An - 5A + 4B \end{aligned}$$

Então, $A = 2$ e $B = 4$, pelo que $(u_n)_p = 2n + 4$.

Solução geral da equação completa: $(u_n)_{\text{gc}} = C_1 \times 2^n + C_2 \times 5^n + 2n + 4$

Falta-nos obter a solução particular que satisfaz $u_0 = 9$ e $u_1 = 22$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 9 \\ u_1 = 22 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + 4 = 9 \\ C_1 \times 2 + C_2 \times 5 + 2 + 4 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ 2C_1 + 5C_2 = 16 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_2 = 5 - C_1 \\ 2C_1 + 25 - 5C_1 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = 5 - C_1 \\ -3C_1 = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $u_n = 3 \times 2^n + 2 \times 5^n + 2n + 4, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 197 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 12n - 4$, com $u_0 = -3$ e $u_1 = -4$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1 \text{ (raiz dupla)}$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 + C_2n$

Solução particular: $(u_n)_p = An^3 + Bn^2$

Então,

$$\begin{aligned}
 (u_{n+1})_p &= A(n+1)^3 + B(n+1)^2 \\
 &= An^3 + 3An^2 + 3An + A + Bn^2 + 2Bn + B \\
 &= An^3 + (3A+B)n^2 + (3A+2B)n + A+B \\
 (u_{n+2})_p &= A(n+2)^3 + B(n+2)^2 \\
 &= An^3 + 6An^2 + 12An + 8A + Bn^2 + 4Bn + 4B \\
 &= An^3 + (6A+B)n^2 + (12A+4B)n + 8A+4B
 \end{aligned}$$

Logo,

| | n^3 | n^2 | n | 1 |
|--|-------|----------|----------|----------|
| $(u_{n+2})_p$ | A | $6A+B$ | $12A+4B$ | $8A+4B$ |
| $-2(u_{n+1})_p$ | $-2A$ | $-6A-2B$ | $-6A-4B$ | $-2A-2B$ |
| $(u_n)_p$ | A | B | 0 | 0 |
| $(u_{n+2})_p - 2(u_{n+1})_p + (u_n)_p$ | 0 | 0 | $6A$ | $6A+2B$ |

Então, $6A = 12$ e $6A + 2B = -4$, donde vem $A = 2$ e $B = -8$.

Logo, $(u_n)_p = 2n^3 - 8n^2$, pelo que $(u_n)_{gc} = 2n^3 - 8n^2 + C_2n + C_1$. Então,

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_1 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -3 \\ 2 - 8 + C_2 - 3 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = 5 \end{cases}$$

Então, $u_n = 2n^3 - 8n^2 + 5n - 3, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 198 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} - 8u_{n+1} + 12u_n = 15$, com $u_0 = 8$ e $u_1 = 25$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+2} - 8u_{n+1} + 12u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \iff \lambda = 4 \pm \sqrt{16 - 12} \iff \lambda = 2 \vee \lambda = 6$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{gh} = C_1 \times 2^n + C_2 \times 6^n$

Solução particular: $(u_n)_p = A$

Então, $A - 8A + 12A = 15$, donde vem $A = 3$.

Solução geral da equação completa: $(u_n)_{gc} = C_1 \times 2^n + C_2 \times 6^n + 3$

Então,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} u_0 = 8 \\ u_1 = 25 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + 3 = 8 \\ 2C_1 + 6C_2 + 3 = 25 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ C_1 + 3C_2 = 11 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} C_1 = 5 - C_2 \\ 2C_2 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Então, $u_n = 2 \times 2^n + 3 \times 6^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 199 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = n + 5$, com $u_0 = \frac{3}{4}$ e $u_1 = \frac{1}{2}$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{1 + 3} \iff \lambda = -1 \vee \lambda = 3$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 \times (-1)^n + C_2 \times 3^n$

Solução particular: $(u_n)_p = An + B$

Então, $(u_{n+1})_p = An + A + B$ e $(u_{n+2})_p = An + 2A + B$.

Logo, $An + 2A + B - 2An - 2A - 2B - 3An - 3B = n + 5$, donde vem $-4An - 4B = n + 5$.

Logo, $A = -\frac{1}{4}$ e $B = -\frac{5}{4}$.

Solução geral da equação completa: $(u_n)_{\text{gc}} = C_1 \times (-1)^n + C_2 \times 3^n - \frac{1}{4}n - \frac{5}{4}$

Então,

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = \frac{3}{4} \\ u_1 = \frac{5}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \\ -C_1 + 3C_2 - \frac{1}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 4C_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $u_n = (-1)^n + 3^n - \frac{1}{4}n - \frac{5}{4}, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 200 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n = 12n - 1$, com $u_0 = 4$ e $u_1 = 6$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \iff \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \iff \lambda = 1 \vee \lambda = 4$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 + C_2 \times 4^n$

Solução particular: $(u_n)_p = An^2 + Bn$

Então,

$$\begin{cases} (u_{n+1})_p = A(n+1)^2 + B(n+1) = An^2 + 2An + A + Bn + B \\ (u_{n+2})_p = A(n+2)^2 + B(n+2) = An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B \end{cases}$$

Logo,

| | n^2 | n | 1 |
|---|-------|-------------|------------|
| $(u_{n+2})_p$ | A | $4A + B$ | $4A + 2B$ |
| $-5(u_{n+1})_p$ | $-5A$ | $-10A - 5B$ | $-5A - 5B$ |
| $4(u_n)_p$ | $4A$ | $4B$ | 0 |
| $(u_{n+2})_p - 5(u_{n+1})_p + 4(u_n)_p$ | 0 | $-6A$ | $-A - 3B$ |

Então, $-6A = 12$ e $-A - 3B = -1$. Logo, $A = -2$ e $B = 1$.

Solução geral da equação completa: $(u_n)_{\text{gc}} = C_1 + C_2 \times 4^n - 2n^2 + n$

Então,

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = 6 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ C_1 + 4C_2 - 2 + 1 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ C_1 + 4C_2 = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 = 4 - C_2 \\ 3C_2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $u_n = 4^n - 2n^2 + n + 3, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 201 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} - u_{n+1} - 12u_n = 12n - 25 + 28 \times 2^{2n+1}$, com $u_0 = 10$ e $u_1 = 6$.

ResoluçãoEquação homogênea: $u_{n+2} - u_{n+1} - 12u_n = 0$ Equação característica: $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \iff \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \iff \lambda = -3 \vee \lambda = 4$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 \times (-3)^n + C_2 \times 4^n$ Solução particular: $(u_n)_p = An + B + Cn \times 4^n$, uma vez que $2^{2n+1} = 2 \times 4^n$.

Então,

$$\begin{cases} (u_{n+1})_p = A(n+1) + B + C(n+1) \times 4^{n+1} = An + A + B + 4Cn4^n + 4C4^n \\ (u_{n+2})_p = A(n+2) + B + C(n+2) \times 4^{n+2} = An + 2A + B + 16Cn4^n + 32C4^n \end{cases}$$

Logo,

| | $4^n n$ | 4^n | n | 1 |
|---|---------|-------|--------|-----------|
| $(u_{n+2})_p$ | $16C$ | $32C$ | A | $2A + B$ |
| $-(u_{n+1})_p$ | $-4C$ | $-4C$ | $-A$ | $-A - B$ |
| $-12(u_n)_p$ | $-12C$ | 0 | $-12A$ | $-12B$ |
| $(u_{n+2})_p - (u_{n+1})_p - 12(u_n)_p$ | 0 | $28C$ | $-12A$ | $A - 12B$ |

Então, $-12A = 12$ e $A - 12B = -25$. Logo, $A = -1$ e $B = 2$.Por outro lado, temos $28 \times 2^{2n+1} = 56 \times 4^n$. Então, $28C = 56$, pelo que $C = 2$.Então, $(u_n)_p = -n + 2 + 2n \times 4^n = n2^{2n+1} - n + 2$.Solução geral da equação completa: $(u_n)_{\text{gc}} = C_1 \times (-3)^n + C_2 \times 4^n + n2^{2n+1} - n + 2$

Então,

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 10 \\ u_1 = 6 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 10 \\ -3C_1 + 4C_2 + 8 - 1 + 2 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -3C_1 + 4C_2 = -3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 = 8 - C_2 \\ -24 + 3C_2 + 4C_2 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 8 - C_2 \\ 7C_2 = 21 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $u_n = 5 \times (-3)^n + 3 \times 4^n + n2^{2n+1} - n + 2, \forall n \in \mathbb{N}_0$.**Exemplo 202** Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 12n + 2^n$, com $u_0 = 0$ e $u_1 = 0$.**Resolução**Equação homogênea: $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$ Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Então, $(\lambda - 1)^2 = 0$, equação esta que admite a raiz dupla 1.Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 + C_2 n$.Solução particular: $(u_n)_p = An^3 + Bn^2 + C2^n$.

Então,

$$\begin{aligned} (u_{n+1})_p &= A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C2^{n+1} \\ &= An^3 + 3An^2 + 3An + A + Bn^2 + 2Bn + B + 2C2^n \\ (u_{n+2})_p &= A(n+2)^3 + B(n+2)^2 + C2^{n+2} \\ &= An^3 + 6An^2 + 12An + 8A + Bn^2 + 4Bn + 4B + 4C2^n \end{aligned}$$

Logo,

| | 2^n | n^3 | n^2 | n | 1 |
|---|-------|-------|------------|------------|------------|
| $(u_{n+2})_p$ | $4C$ | A | $6A + B$ | $12A + 4B$ | $8A + 4B$ |
| $-2(u_{n+1})_p$ | $-4C$ | $-2A$ | $-6A - 2B$ | $-6A - 4B$ | $-2A - 2B$ |
| $(u_n)_p$ | C | A | B | 0 | 0 |
| $(u_{n+2})_p - (u_{n+1})_p - 12(u_n)_p$ | C | 0 | 0 | $6A$ | $6A + 2B$ |

Então, $C = 1$, $6A = 12$ e $6A + 2B = 0$. Logo, $C = 1$, $A = 2$ e $B = -6$.

Então, $(u_n)_p = 2n^3 - 6n^2 + 2n$.

Solução geral da equação completa: $(u_n)_{gc} = C_1 + C_2n - 6n^2 + 2n^3 + 2^n$.

Então,

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + 1 = 0 \\ C_1 + C_2 - 6 + 2 + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

Então, $u_n = -1 + 3n - 6n^2 + 2n^3 + 2^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 203 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 2n + 3 + 10 \times 3^n$, com $u_0 = 3$ e $u_1 = 3$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} \iff \lambda = 1 \pm i$$

Ora, $1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$.

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{gh} = (\sqrt{2})^n (C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4})$.

Solução particular: $(u_n)_p = An + B + C3^n$.

Então,

$$\begin{aligned} (u_{n+1})_p &= A(n+1) + B + C3^{n+1} = An + A + B + 3C3^n \\ (u_{n+2})_p &= A(n+2) + B + C3^{n+2} = An + 2A + B + 9C3^n \end{aligned}$$

Logo,

| | 3^n | n | 1 |
|---|-------|-------|------------|
| $(u_{n+2})_p$ | $9C$ | A | $2A + B$ |
| $-2(u_{n+1})_p$ | $-6C$ | $-2A$ | $-2A - 2B$ |
| $2(u_n)_p$ | $2C$ | $2A$ | $2B$ |
| $(u_{n+2})_p - (u_{n+1})_p - 12(u_n)_p$ | $5C$ | A | B |

Então, $5C = 10$, $A = 2$ e $B = 3$. Logo, $A = 2$, $B = 3$ e $C = 2$.

Solução geral da equação completa:

$$u_n = (\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right) + 2n + 3 + 2 \times 3^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Mas,

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + 3 + 2 = 3 \\ \sqrt{2} (C_1 \cos \frac{\pi}{4} + C_2 \sin \frac{\pi}{4}) + 2 + 3 + 2 \times 3 = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 = -2 \\ \sqrt{2} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{2} + C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -8 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 = -2 \\ -2 + C_2 = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$u_n = -2 (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + 3 \sin \frac{n\pi}{4} \right) + 2n + 3 + 2 \times 3^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Exemplo 204 Determine o termo geral da sucessão definida por $6u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 8n + 2$, com $u_0 = 3$ e $u_1 = 1$.

Resolução

Equação homogênea: $6u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$

Equação característica: $6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} \iff \lambda = -\frac{1}{3} \vee \lambda = \frac{1}{2}$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Solução particular: $(u_n)_p = An + B$.

Então,

$$\begin{aligned} 6(u_{n+2})_p - (u_{n+1})_p - (u_n)_p &= 6A(n+2) + 6B - A(n+1) - B - An - B \\ &= 6An + 12A + 6B - An - A - B - An - B \\ &= 4An + 11A + 4B \end{aligned}$$

Então, $4A = 8$ e $11A + 4B = 2$. Logo, $A = 2$ e $B = -5$.

Solução geral da equação completa:

$$u_n = C_1 \left(-\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 5, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Mas,

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 - 5 = 3 \\ -\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + 2 - 5 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -2C_1 + 3C_2 = 24 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ 5C_2 = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$u_n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + 2n - 5, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Exemplo 205 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} + 4u_{n+1} - 5u_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, com $u_0 = 0$ e $u_1 = 0$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+2} + 4u_{n+1} - 5u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$.

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \iff \lambda = -2 \pm \sqrt{4+5} \iff \lambda = -5 \vee \lambda = 1$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 (-5)^n + C_2$.

Solução particular: $(u_n)_p = A \cos \frac{n\pi}{2} + B \sin \frac{n\pi}{2}$.

Então,

$$\begin{aligned} (u_{n+2})_p &= A \cos \frac{(n+2)\pi}{2} + B \sin \frac{(n+2)\pi}{2} = -A \cos \frac{n\pi}{2} - B \sin \frac{n\pi}{2} \\ (u_{n+1})_p &= A \cos \frac{(n+1)\pi}{2} + B \sin \frac{(n+1)\pi}{2} = A \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + B \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -A \sin \frac{n\pi}{2} + B \cos \frac{n\pi}{2} = B \cos \frac{n\pi}{2} - A \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_{n+2})_p + 4(u_{n+1})_p - 5(u_n)_p &= -A \cos \frac{n\pi}{2} - B \sin \frac{n\pi}{2} + 4B \cos \frac{n\pi}{2} - 4A \sin \frac{n\pi}{2} - 5A \cos \frac{n\pi}{2} - 5B \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= (4B - 6A) \cos \frac{n\pi}{2} + (-6B - 4A) \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Então, $4B - 6A = 0$ e $-6B - 4A = 1$. Logo,

$$\begin{cases} -12A + 8B = 0 \\ 12A + 18B = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -3A + 2B = 0 \\ 26B = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{2}{3}B \\ B = -\frac{3}{26} \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{13} \\ B = -\frac{3}{26} \end{cases}$$

Solução geral da equação completa:

$$u_n = C_1 (-5)^n + C_2 - \frac{1}{13} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{3}{26} \sin \frac{n\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Mas,

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{13} = 0 \\ -5C_1 + C_2 - \frac{1}{13} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{3}{26} \sin \frac{n\pi}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{13} \\ -5C_1 + C_2 = \frac{3}{26} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{13} \\ 6C_1 = -\frac{1}{26} \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = \frac{1}{13} + \frac{1}{156} \\ C_1 = -\frac{1}{156} \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = \frac{1}{12} \\ C_1 = -\frac{1}{156} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$u_n = -\frac{1}{156} (-5)^n + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{3}{26} \sin \frac{n\pi}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Exemplo 206 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+4} - u_n = 3n + 2^n$, com $u_0 = \frac{121}{15}$, $u_1 = -\frac{119}{120}$, $u_2 = \frac{143}{30}$ e $u_3 = -\frac{791}{120}$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+4} - u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^4 - 1 = 0$.

$$\lambda^4 - 1 = 0 \iff (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \iff \lambda = \pm 1 \vee \lambda = \pm i$$

Como $i = 1 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, temos que a solução geral da equação homogênea é

$$C_1 \times (-1)^n + C_2 + C_3 \cos \frac{n\pi}{2} + C_4 \sin \frac{n\pi}{2}$$

Solução particular: $(u_n)_p = An^2 + Bn + C2^n$.

Então,

$$\begin{aligned} (u_{n+4})_p &= A(n+4)^2 + B(n+4) + C2^{n+4} \\ &= An^2 + 8An + 16A + Bn + 4B + 16C2^n \\ &= An^2 + (8A + B)n + 16A + 4B + 16C2^n \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (u_{n+4})_p - (u_n)_p &= An^2 + (8A + B)n + 16A + 4B + 16C2^n - An^2 - Bn - C2^n \\ &= 8An + 16A + 4B + 15C2^n \end{aligned}$$

Então,

$$A = \frac{3}{8} \wedge 16A + 4B = 0 \wedge C = \frac{1}{15} \iff A = \frac{3}{8} \wedge B = -\frac{3}{2} \wedge C = \frac{1}{15}$$

Logo, $(u_n)_p = \frac{3}{8}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{15}2^n$.

Solução geral da equação completa:

$$(u_n)_{gc} = C_1 \times (-1)^n + C_2 + C_3 \cos \frac{n\pi}{2} + C_4 \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{3}{8}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{15}2^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Ora,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} u_0 = \frac{121}{15} \\ u_1 = -\frac{119}{120} \\ u_2 = \frac{143}{30} \\ u_3 = -\frac{791}{120} \end{cases} &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + \frac{1}{15} = \frac{121}{15} \\ -C_1 + C_2 + C_4 + \frac{3}{8} - \frac{3}{2} + \frac{2}{15} = -\frac{119}{120} \\ C_1 + C_2 - C_3 + \frac{3}{2} - 3 + \frac{4}{15} = \frac{143}{30} \\ -C_1 + C_2 - C_4 + \frac{27}{8} - \frac{9}{2} + \frac{8}{15} = -\frac{791}{120} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 8 \\ -C_1 + C_2 + C_4 = -\frac{119}{120} - \frac{3}{8} + \frac{3}{2} - \frac{2}{15} \\ C_1 + C_2 - C_3 = \frac{143}{30} - \frac{3}{2} + 3 - \frac{4}{15} \\ -C_1 + C_2 - C_4 = -\frac{791}{120} - \frac{27}{8} + \frac{9}{2} - \frac{8}{15} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 8 \\ C_1 + C_2 - C_3 = 6 \\ -C_1 + C_2 + C_4 = 0 \\ -C_1 + C_2 - C_4 = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} 2C_3 = 2 \\ C_1 + C_2 - C_3 = 6 \\ 2C_4 = 6 \\ -C_1 + C_2 - C_4 = -6 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} C_3 = 1 \\ C_1 + C_2 = 7 \\ C_4 = 3 \\ -C_1 + C_2 = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} C_3 = 1 \\ 2C_2 = 4 \\ C_4 = 3 \\ C_1 + C_2 = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = 1 \\ C_4 = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$u_n = 5 \times (-1)^n + 2 + \cos \frac{n\pi}{2} + 3 \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{3}{8}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{2^n}{15}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Exemplo 207 Determine o termo geral da sucessão definida por $u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n = 2716 \times 2^n \cos \frac{n\pi}{4}$, com $u_0 = -72 + 140\sqrt{2}$ e $u_1 = 898 - 420\sqrt{2}$.

Resolução

Equação homogênea: $u_{n+2} + 5u_{n+1} + 6u_n = 0$

Equação característica: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$.

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \iff \lambda = -3 \vee \lambda = -2$$

Solução geral da equação homogênea: $(u_n)_{\text{gh}} = C_1(-3)^n + C_2(-2)^n$.

Solução particular: $(u_n)_p = 2^n \left(A \cos \frac{n\pi}{4} + B \sin \frac{n\pi}{4} \right)$.

Então,

$$\begin{aligned}
 (u_{n+1})_p &= 2^{n+1} \left(A \cos \frac{(n+1)\pi}{4} + B \sin \frac{(n+1)\pi}{4} \right) = 2 \times 2^n \left(A \cos \frac{n\pi + \pi}{4} + B \sin \frac{n\pi + \pi}{4} \right) \\
 &= 2 \times 2^n \left(A \cos \frac{n\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - A \sin \frac{n\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} + B \sin \frac{n\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + B \cos \frac{n\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= 2 \times 2^n \left(\frac{A\sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{4} - \frac{A\sqrt{2}}{2} \sin \frac{n\pi}{4} + \frac{B\sqrt{2}}{2} \sin \frac{n\pi}{4} + \frac{B\sqrt{2}}{2} \cos \frac{n\pi}{4} \right) \\
 &= 2^n \left(A\sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{4} - A\sqrt{2} \sin \frac{n\pi}{4} + B\sqrt{2} \sin \frac{n\pi}{4} + B\sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{4} \right) \\
 &= 2^n \left((A\sqrt{2} + B\sqrt{2}) \cos \frac{n\pi}{4} + (-A\sqrt{2} + B\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\
 (u_{n+2})_p &= 2^{n+2} \left(A \cos \frac{(n+2)\pi}{4} + B \sin \frac{(n+2)\pi}{4} \right) \\
 &= 4 \times 2^n \left(A \cos \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + B \sin \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \\
 &= 4 \times 2^n \left(-A \sin \frac{n\pi}{4} + B \cos \frac{n\pi}{4} \right) = 2^n \left(4B \cos \frac{n\pi}{4} - 4A \sin \frac{n\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Então,

| | $2^n \cos \frac{n\pi}{4}$ | $2^n \sin \frac{n\pi}{4}$ |
|---|---------------------------------------|--|
| $(u_{n+2})_p$ | $4B$ | $-4A$ |
| $5(u_{n+1})_p$ | $5A\sqrt{2} + 5B\sqrt{2}$ | $-5A\sqrt{2} + 5B\sqrt{2}$ |
| $6(u_n)_p$ | $6A$ | $6B$ |
| $(u_{n+2})_p + 5(u_{n+1})_p + 6(u_n)_p$ | $(6 + 5\sqrt{2})A + (4 + 5\sqrt{2})B$ | $(-4 - 5\sqrt{2})A + (6 + 5\sqrt{2})B$ |

Então, $(6 + 5\sqrt{2})A + (4 + 5\sqrt{2})B = 2716$ e $(-4 - 5\sqrt{2})A + (6 + 5\sqrt{2})B = 0$. Ora,

$$\begin{aligned}
 (-4 - 5\sqrt{2})A + (6 + 5\sqrt{2})B = 0 & \iff B = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{6 + 5\sqrt{2}}A \\
 & \iff B = \frac{(4 + 5\sqrt{2})(6 - 5\sqrt{2})}{(6 + 5\sqrt{2})(6 - 5\sqrt{2})}A \\
 & \iff B = \frac{24 - 20\sqrt{2} + 30\sqrt{2} - 50}{36 - 50}A \\
 & \iff B = \frac{13 - 5\sqrt{2}}{7}A
 \end{aligned}$$

Substituindo, na outra equação, B por $\frac{13-5\sqrt{2}}{7}A$, vem

$$\begin{aligned}
 (6 + 5\sqrt{2})A + \frac{(4 + 5\sqrt{2})(13 - 5\sqrt{2})}{7}A = 2716 & \iff (6 + 5\sqrt{2})A + \frac{2 + 45\sqrt{2}}{7}A = 2716 \\
 & \iff (42 + 35\sqrt{2})A + (2 + 45\sqrt{2})A = 2716 \times 7 \\
 & \iff (44 + 80\sqrt{2})A = 2716 \times 7 \\
 & \iff A = \frac{2716 \times 7}{44 + 80\sqrt{2}} \iff A = \frac{679 \times 7}{11 + 20\sqrt{2}} \\
 & \iff A = \frac{679 \times 7(-11 + 20\sqrt{2})}{(11 + 20\sqrt{2})(-11 + 20\sqrt{2})} \\
 & \iff A = \frac{(-11 + 20\sqrt{2})679 \times 7}{800 - 121} \\
 & \iff A = -77 + 140\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Então,

$$B = \frac{13 - 5\sqrt{2}}{7} \times (-77 + 140\sqrt{2}) = (13 - 5\sqrt{2})(-11 + 20\sqrt{2}) = -343 + 315\sqrt{2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 (u_n)_p &= 2^n \left((-77 + 140\sqrt{2}) \cos \frac{n\pi}{4} - (343 - 315\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\
 &= 7 \times 2^n \left((-11 + 20\sqrt{2}) \cos \frac{n\pi}{4} - (49 - 45\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Solução geral da equação completa:

$$u_n = C_1(-3)^n + C_2(-2)^n + 7 \times 2^n \left((-11 + 20\sqrt{2}) \cos \frac{n\pi}{4} - (49 - 45\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4} \right), \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Mas, $\begin{cases} u_0 = -72 + 140\sqrt{2} \\ u_1 = 898 - 420\sqrt{2} \end{cases}$. Logo,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 7 \times (-11 + 20\sqrt{2}) = -72 + 140\sqrt{2} \\ -3C_1 - 2C_2 + 14 \left((-11 + 20\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} - (49 - 45\sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 898 - 420\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ -3C_1 - 2C_2 + (-11 + 20\sqrt{2}) 7\sqrt{2} - (49 - 45\sqrt{2}) 7\sqrt{2} = 898 - 420\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ -3C_1 - 2C_2 - 420\sqrt{2} + 910 = 898 - 420\sqrt{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} 2C_1 + 2C_2 = 10 \\ -3C_1 - 2C_2 = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = 5 - C_1 \\ -C_1 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

Logo,

$$u_n = 2(-3)^n + 3(-2)^n + 7 \times 2^n \left((-11 + 20\sqrt{2}) \cos \frac{n\pi}{4} - (49 - 45\sqrt{2}) \sin \frac{n\pi}{4} \right), \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Exemplo 208 Vejamos como obter $\sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k$, usando equações com diferenças.

Resolução

Seja $u_n = \sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k$. Então,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = u_n + (n+1)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ u_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = u_n + (n+1)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + (n+2)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3} (n^2 + 2n + 1) \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ u_{n+2} = u_n + \frac{2}{3} (n^2 + 2n + 1) \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{9} (n^2 + 4n + 4) \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \left(\frac{2}{3}n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ u_{n+2} = u_n + \left(\frac{10}{9}n^2 + \frac{28}{9}n + \frac{22}{9}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$$

Com alguma intuição, consideramos, como raízes da equação característica, os números 1 e $\frac{2}{3}$. Ora, $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ e $1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Logo, $(\lambda - 1)(\lambda - \frac{2}{3}) = 0 \iff 3\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$.

Calculemos $3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$:

$$\begin{aligned} 3u_{n+2} &= 3u_n + 3 \left(\frac{10}{9}n^2 + \frac{28}{9}n + \frac{22}{9} \right) \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3u_n + \left(\frac{10}{3}n^2 + \frac{28}{3}n + \frac{22}{3} \right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ -5u_{n+1} &= -5u_n - \frac{10}{3} (n^2 + 2n + 1) \left(\frac{2}{3}\right)^n = -5u_n + \left(-\frac{10}{3}n^2 - \frac{20}{3}n - \frac{10}{3} \right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

| $n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ | $n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ |
|----------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| $\frac{10}{3}$ | $\frac{28}{3}$ | $\frac{22}{3}$ |
| $-\frac{10}{3}$ | $-\frac{20}{3}$ | $-\frac{10}{3}$ |
| 0 | $\frac{8}{3}$ | 4 |

Então, $3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = \frac{8}{3}n \left(\frac{2}{3}\right)^n + 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Ora, esta igualdade é uma equação com diferenças a dois passos.

Equação característica:

$$3\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{2}{3} \right) = 0 \iff \lambda = 1 \vee \lambda = \frac{2}{3}$$

Logo, a solução geral da equação homogênea é $(u_n)_{\text{gh}} = C_1 + C_2 \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

Uma solução particular:

$$(u_n)_p = (An^2 + Bn) \left(\frac{2}{3} \right)^n = (An^2 + Bn) \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

Então,

$$\begin{aligned} (u_{n+1})_p &= (An^2 + 2An + A + Bn + B) \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{2}{3}An^2 + \left(\frac{4}{3}A + \frac{2}{3}B \right)n + \frac{2}{3}A + \frac{2}{3}B \right) \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ (u_{n+2})_p &= \frac{4}{9} (An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B) \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{4}{9}An^2 + \frac{16}{9}An + \frac{16}{9}A + \frac{4}{9}Bn + \frac{8}{9}B \right) \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= \left(\frac{4}{9}An^2 + \left(\frac{16}{9}A + \frac{4}{9}B \right)n + \frac{16}{9}A + \frac{8}{9}B \right) \left(\frac{2}{3} \right)^n \end{aligned}$$

Ora,

| $n^2 \left(\frac{2}{3} \right)^n$ | $n \left(\frac{2}{3} \right)^n$ | $\left(\frac{2}{3} \right)^n$ |
|--|--|---|
| $\frac{4}{3}A$ $-\frac{10}{3}A$ $2A$ | $\frac{16}{3}A + \frac{4}{3}B$ $-\frac{20}{3}A - \frac{10}{3}B$ $2B$ | $\frac{16}{3}A + \frac{8}{3}B$ $-\frac{10}{3}A - \frac{10}{3}B$ 0 |
| 0 | $-\frac{4}{3}A$ | $2A - \frac{2}{3}B$ |

Logo, $3(u_{n+2})_p - 5(u_{n+1})_p + 2(u_n)_p = \frac{8}{3}n \left(\frac{2}{3} \right)^n + 4 \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

Então, $\begin{cases} -\frac{4}{3}A = \frac{8}{3} \\ 2A - \frac{2}{3}B = 4 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} A = -2 \\ 6A - 2B = 12 \end{cases}$. Então, $\begin{cases} A = -2 \\ B = -12 \end{cases}$.

Logo, $(u_n)_p = (-2n^2 - 12n) \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

Então, a solução geral da equação completa é

$$(u_n)_{\text{gc}} = C_1 + C_2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + (-2n^2 - 12n) \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

Mas, $\sum_{k=0}^0 k^2 \left(\frac{2}{3} \right)^k = 0$ e $\sum_{k=0}^1 k^2 \left(\frac{2}{3} \right)^k = \frac{2}{3}$.

Então, $\begin{cases} C_1 + C_2 + 0 = 0 \\ C_1 + C_2 \left(\frac{2}{3} \right) - 14 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} \end{cases}$. Logo, $\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 - \frac{2}{3}C_1 = 10 \end{cases}$.

Logo, $\begin{cases} C_2 = -30 \\ C_1 = 30 \end{cases}$.

E, por fim, $u_n = 30 - (2n^2 + 12n + 30) \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

Em face dos exemplos apresentados, podemos supor que $\sum_{k=0}^n k^g \left(\frac{2}{3} \right)^k = P(n) \left(\frac{2}{3} \right)^n + k$, com $g \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$ e

$P(n)$ um polinómio de grau g .

Assim, teremos:

1. $\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = -2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3$ $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3$
 $\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{175\,099}{59\,049} \approx 2,965\,316\,94$
2. $\sum_{k=0}^n k \left(\frac{2}{3}\right)^k = -(2n+6) \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$ $\sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k = 6$
 $\sum_{k=0}^{20} k \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{20\,872\,471\,910}{3486\,784\,401} \approx 5,986\,166\,482$
3. $\sum_{k=0}^n k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = -(2n^2 + 12n + 30) \left(\frac{2}{3}\right)^n + 30$ $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = 30$
 $\sum_{k=0}^{20} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{103\,481\,555\,710}{3486\,784\,401} \approx 29,678\,220\,33$
4. $\sum_{k=0}^n k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = -(2n^3 + 18n^2 + 90n + 222) \left(\frac{2}{3}\right)^n + 222$ $\sum_{k=0}^{+\infty} k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = 222$
 $\sum_{k=0}^{30} k^3 \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{15\,209\,772\,391\,785\,850}{68\,630\,377\,364\,883} = 221,618\,661\,8$
5. $\sum_{k=0}^n k^4 \left(\frac{2}{3}\right)^k = -(2n^4 + 24n^3 + 180n^2 + 888n + 2190) \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2190$
 $\sum_{k=0}^{+\infty} k^4 \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2190$
 $\sum_{k=0}^{40} k^4 \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{26\,617\,610\,884\,007\,914\,097\,230}{12\,157\,665\,459\,056\,928\,801} = 2189,368\,59$
6. $\sum_{k=0}^n k^5 \left(\frac{2}{3}\right)^k = -(2n^5 + 30n^4 + 300n^3 + 2220n^2 + 10\,950n + 27\,006) \left(\frac{2}{3}\right)^n + 27\,006$
 $\sum_{k=0}^{+\infty} k^5 \left(\frac{2}{3}\right)^k = 27\,006$
 $\sum_{k=0}^{60} k^5 \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{381\,604\,431\,463\,005\,482\,124\,932\,689\,789\,450}{14\,130\,386\,091\,738\,734\,504\,764\,811\,067} = 27005,945\,13$
7. $\sum_{k=0}^n k^6 \left(\frac{2}{3}\right)^k = -(2n^6 + 36n^5 + 450n^4 + 4440n^3 + 32\,850n^2 + 162\,036n + 399\,630) \left(\frac{2}{3}\right)^n + 399\,630$
 $\sum_{k=0}^{+\infty} k^6 \left(\frac{2}{3}\right)^k = 399\,630$
 $\sum_{k=0}^{70} k^6 \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1000\,335\,670\,480\,124\,468\,544\,967\,252\,162\,100\,674\,270}{2503\,155\,504\,993\,241\,601\,315\,571\,986\,085\,849} = 399629,854\,6$
8. $\sum_{k=0}^n k^7 \left(\frac{2}{3}\right)^k = -\left(\frac{2}{3}\right)^n P_7(n) + 6899\,262$, com

$$P_7(n) = 2n^7 + 42n^6 + 630n^5 + 7770n^4 + 76\,650n^3 + 567\,126n^2 + 2797\,410n + 6899\,262$$
9. $\sum_{k=0}^n k^8 \left(\frac{2}{3}\right)^k = -\left(\frac{2}{3}\right)^n P_8(n) + 136\,125\,390$, com

$$P_8(n) = 2n^8 + 48n^7 + 840n^6 + 12\,432n^5 + 153\,300n^4 + 1512\,336n^3 + 11\,189\,640n^2 + 55\,194\,096n + 136\,125\,390$$

$$10. \sum_{k=0}^n k^9 \left(\frac{2}{3}\right)^k = -\left(\frac{2}{3}\right)^n P_9(n) + 3021\,538\,686, \text{ com}$$

$$\begin{aligned} P_9(n) = & 2n^9 + 54n^8 + 1080n^7 + 18\,648n^6 + 275\,940n^5 + 3402\,756n^4 + 33\,568\,920n^3 + 248\,373\,432n^2 + \\ & + 1225\,128\,510n + 3021\,538\,686 \end{aligned}$$

$$11. \sum_{k=0}^n k^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k = -\left(\frac{2}{3}\right)^n P_{10}(n) + 74\,520\,313\,230, \text{ com}$$

$$\begin{aligned} P_{10}(n) = & 2n^{10} + 60n^9 + 1350n^8 + 26\,640n^7 + 459\,900n^6 + 6805\,512n^5 + 83\,922\,300n^4 + 827\,911\,440n^3 \\ & + 6125\,642\,550n^2 + 30\,215\,386\,860n + 74\,520\,313\,230 \end{aligned}$$

Capítulo 7

Trigonometria Hiperbólica

Antes de começarmos com a trigonometria hiperbólica, vamos estudar duas funções importantes:

Exemplo 209 *Sejam $f(x) = e^x - e^{-x}$ e $g(x) = e^x + e^{-x}$.*

As duas funções anteriores têm domínio \mathbb{R} e são deriváveis e contínuas.

Calculando as derivadas, vem $f'(x) = e^x + e^{-x} = g(x)$ e $g'(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$.

Quanto às segundas derivadas, temos $f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$ e $g''(x) = e^x + e^{-x} = g(x)$.

Quanto ao sinal das funções, é claro que $g(x)$ é positiva, pois é uma soma de duas funções positivas. Isto significa que a função $f(x)$ é estritamente crescente, tendo-se $f(0) = 1 - 1 = 0$, pelo que f é negativa em \mathbb{R}^- e positiva em \mathbb{R}^+ . Em resumo, temos:

| | | | |
|--------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

| | | | |
|--------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Como $g'(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$, temos que g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$, pelo que a função tem um mínimo absoluto no ponto $x = 0$, tendo-se $g(0) = 1 + 1 = 2$.

Como $f(-x) = e^{-x} - e^x = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $g(-x) = e^{-x} + e^x = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que f é uma função ímpar e g é uma função par.

Por outro lado, temos $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - e^{-x}) = e^{-\infty} - e^{+\infty} = 0 - (+\infty) = -\infty$. Como f é ímpar, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Quanto à função g , temos $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{-x}) = e^{-\infty} + e^{+\infty} = 0 + (+\infty) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Do estudo anterior vem que o contradomínio da função f é \mathbb{R} , enquanto que o contradomínio da função g é $[2, +\infty[$.

Quanto ao sentido da concavidade, temos que $g''(x) = e^x + e^{-x} = g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima, não admitindo pontos de inflexão.

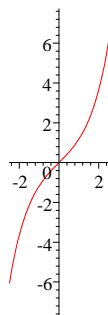
Para a função f , temos $f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$, pelo que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[0, +\infty[$. Então, o gráfico de f admite um ponto de inflexão, para $x = 0$.

Estas duas funções têm uma propriedade bastante curiosa:

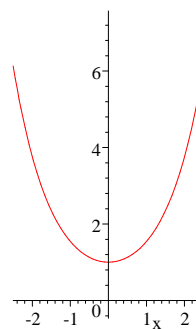
$$(g(x))^2 - (f(x))^2 = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x} = 4$$

De tudo o que vimos resultam muitas semelhanças com as funções $\sin x$ e $\cos x$. Essas semelhanças seriam maiores se $(g(x))^2 - (f(x))^2 = 1$. Então, as funções que nos interessam são $F(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $G(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, funções estas que são conhecidas habitualmente por $\sinh x$ e $\cosh x$, respectivamente. Então, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

A representação gráfica destas funções, em referencial ortonormado, é a seguinte:



$$F(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$G(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Além das duas funções anteriores definem-se outras quatro funções (directas):

Assim, $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$, $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$, $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$.

7.1 Funções Hiperbólicas

Exemplo 210 Estudo da função $f(x) = \sinh x$:

O domínio da função é \mathbb{R} . Como $f(-x) = \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$, a função é ímpar.

Ora, $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é estritamente crescente. Logo, f é injectiva e admite função inversa:

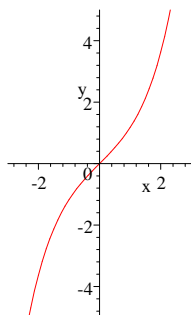
$$\begin{aligned} \sinh x = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff e^x - e^{-x} - 2y = 0 \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{aligned}$$

Observe-se que não pode ser $e^x = y - \sqrt{y^2 + 1}$, uma vez que esta função assume, apenas, valores negativos.

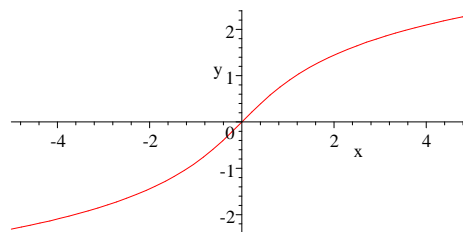
Então, $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arcsinh} x$, função que tem domínio \mathbb{R} . Então, o contradomínio de f é \mathbb{R} . Como $f(0) = 0$, temos que f é negativa em \mathbb{R}^- e positiva em \mathbb{R}^+ .

A 2ª derivada da função é dada por $f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$. Então, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, em $]-\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para cima, em $[0, +\infty[$, pelo que admite um ponto de inflexão para $x = 0$, tendo-se $f(0) = 0$.

Representação gráfica da função e sua inversa, em referencial ortonormado:



$$f(x) = \sinh x$$



$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh} x$$

Exemplo 211 Estudo da função $f(x) = \cosh x$:

O domínio da função é \mathbb{R} . Como $f(-x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x$, a função é par. Logo, a função não admite função inversa.

Ora, $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$.

Do estudo que foi feito anteriormente, vem que f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Como $f(0) = 1$, temos que o mínimo absoluto da função é 1.

Como $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

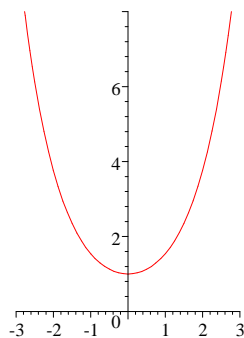
Correspondência inversa:

$$\begin{aligned} \cosh x = y &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff e^x + e^{-x} - 2y = 0 \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\ &\iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \iff x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) \iff x = \pm \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \end{aligned}$$

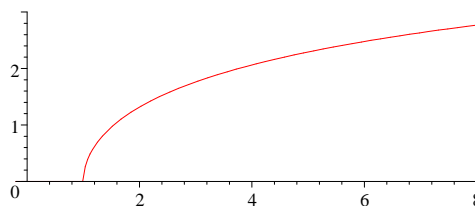
Observe-se que o último passo se deve a que o produto das raízes da equação de 2º grau considerada é 1, pelo que $y - \sqrt{y^2 - 1}$ e $y + \sqrt{y^2 - 1}$ são inversas uma da outra, tendo-se que os logaritmos são simétricos (repare-se que a função f é par). É claro que isso pode ser confirmado: $(y + \sqrt{y^2 - 1})(y - \sqrt{y^2 - 1}) = y^2 - (y^2 - 1) = 1$.

Se considerarmos a restrição de f ao intervalo $[0, +\infty[$, já esta função tem função inversa, função esta que, habitualmente, é considerada a função unversa de f . Então, $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{arccosh} x$, função que tem domínio $[1, +\infty[$. Então, o contradomínio de f é $[1, +\infty[$. Podemos chegar a esta conclusão, calculando $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Representação gráfica da função e sua inversa, em referencial ortonormado:



$f(x) = \cosh x$



$f^{-1}(x) = \operatorname{arccosh} x$

Exemplo 212 Estudo da função $f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$:

O domínio da função é \mathbb{R} . Como $f(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$, a função é ímpar.

Ora, $f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^4 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então, f é estritamente crescente, pelo que admite função inversa:

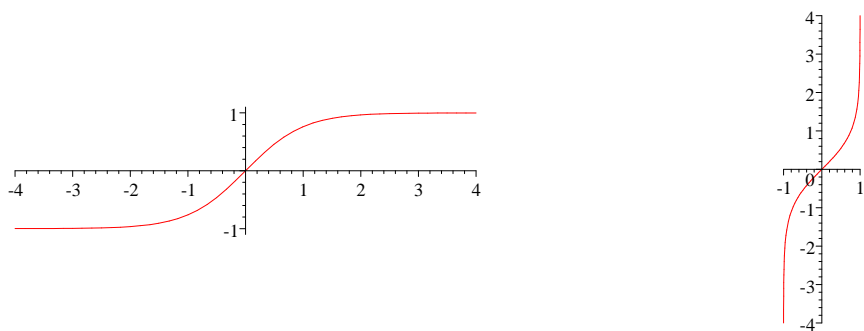
$$\begin{aligned} \tanh x = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \iff 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} = y \iff 1 - y = \frac{2}{e^{2x} + 1} \\ &\iff e^{2x} + 1 = \frac{2}{1 - y} \iff e^{2x} = \frac{2 - 1 + y}{1 - y} \iff x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} \end{aligned}$$

Então, $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$, com $-1 < x < 1$.

Logo, o contradomínio da função f é $]-1, 1[$.

Como $f''(x) = \frac{-2 \cosh x \sinh x}{\cosh^4 x} = \frac{-2 \sinh x}{\cosh^3 x}$, função esta que tem sinal contrário à função $\sinh x$. Então, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e voltada para baixo em $[0, +\infty[$, pelo que tem um ponto de inflexão para $x = 0$.

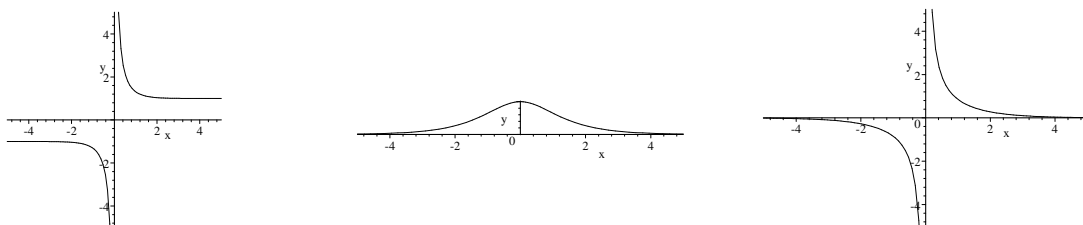
Representação gráfica da função e sua inversa, em referencial ortonormado:



$$f(x) = \tanh x$$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arctanh} x$$

Representação gráfica das funções $\coth x$, $\operatorname{sech} x$ e $\operatorname{csch} x$:



$$f(x) = \coth x$$

$$g(x) = \operatorname{sech} x$$

$$h(x) = \operatorname{csch} x$$

Alguns limites com funções hiperbólicas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cosh x - 1)(\cosh x + 1)}{x^2 (\cosh x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 x - 1}{x^2 (1 + \cosh x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^2 x}{x^2 (1 + \cosh x)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x \cosh x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsinh} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctanh} x}{x} = 1$$

Seguidamente, apresentam-se as definições e algumas propriedades das funções hiperbólicas:

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} & \operatorname{sech} x &= \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \coth x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} & \operatorname{csch} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Proposição 213 $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$

Proposição 214 $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$

$$\begin{aligned} \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^b - e^{-b}}{2} \times \frac{e^a + e^{-a}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{b-a} - e^{-a-b} + e^{a+b} + e^{b-a} - e^{a-b} - e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} - 2e^{-(a+b)}}{4} = \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} = \sinh(a+b) \end{aligned}$$

Proposição 215 $\sinh(a-b) = \sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a$

$$\sinh(a-b) = \sinh a \cosh(-b) + \sinh(-b) \cosh a = \sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a$$

Proposição 216 $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$

$$\begin{aligned} \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b &= \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{b-a} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{b-a} + e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} + 2e^{-a-b}}{4} = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \cosh(a+b) \end{aligned}$$

Proposição 217 $\cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b$

$$\cosh(a-b) = \cosh a \cosh(-b) + \sinh a \sinh(-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b$$

Proposição 218 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1 \end{aligned}$$

Da igualdade anterior, vem $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ e $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$.
 $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$$\cosh(2x) = \cosh(x+x) = \cosh x \cosh x + \sinh x \sinh x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\sinh^2 x + 1 = 2\cosh^2 x - 1$$

$$\text{Das igualdades anteriores, vem } \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh(2x)}{2} \text{ e } \sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

Proposição 219 $\sinh p + \sinh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2}$

De $\begin{cases} \sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a \\ \sinh(a-b) = \sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a \end{cases}$, vem $\sinh(a+b) + \sinh(a-b) = 2 \sinh a \cosh b$.

Fazendo $a+b = p$ e $a-b = q$, temos $a = \frac{p+q}{2}$ e $b = \frac{p-q}{2}$, pelo que é válida a fórmula apresentada

Proposição 220 $\sinh p - \sinh q = 2 \sinh \frac{p-q}{2} \cosh \frac{p+q}{2}$

Substituindo, na proposição anterior, q por $-q$, vem $\sinh p - \sinh q = 2 \sinh \frac{p-q}{2} \cosh \frac{p+q}{2}$.

Proposição 221 $\cosh p + \cosh q = 2 \cosh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2}$

De $\begin{cases} \cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\ \cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \end{cases}$, vem $\cosh(a+b) + \cosh(a-b) = 2 \cosh a \cosh b$. E daqui resulta a fórmula pretendida.

Proposição 222 $\cosh p - \cosh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2}$

De $\begin{cases} \cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \\ \cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \end{cases}$, vem $\cosh(a+b) - \cosh(a-b) = 2 \sinh a \sinh b$, dond resulta a igualdade pretendida.

Proposição 223 $\tanh a + \tanh b = \frac{\sinh(a+b)}{\cosh a \cosh b}$

$$\text{De } \tanh a + \tanh b = \frac{\sinh a}{\cosh a} + \frac{\sinh b}{\cosh b} = \frac{\sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a}{\cosh a \cosh b} = \frac{\sinh(a+b)}{\cosh a \cosh b}$$

Proposição 224 $\tanh a - \tanh b = \frac{\sinh(a-b)}{\cosh a \cosh b}$

Basta substituir, na proposição anterior, b por $-b$.

| Trigonometria | Trigonometria Hiperbólica |
|--|---|
| $\sin(-x) = -\sin x$ | $\sinh(-x) = -\sinh x$ |
| $\cos(-x) = \cos x$ | $\cosh(-x) = \cosh x$ |
| $\tan(-x) = -\tan x$ | $\tanh(-x) = -\tanh x$ |
| $\cot(-x) = -\cot x$ | $\coth(-x) = -\coth x$ |
| $\sec(-x) = \sec x$ | $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$ |
| $\csc(-x) = \csc x$ | $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$ |
| $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ | $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ |
| $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ | $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$ |
| $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ | $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$ |
| $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ | $\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$ |
| $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ | $\cosh(a-b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b$ |
| $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ | $\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$ |
| $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ | $\sinh(a-b) = \sinh a \cosh b - \sinh b \cosh a$ |
| $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ | $\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$ |
| $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ | $\tanh(a-b) = \frac{\tanh a - \tanh b}{1 - \tanh a \tanh b}$ |
| $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ | $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$ |
| $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ | $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ |
| $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ | $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$ |
| $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ | $\sinh p + \sinh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2}$ |
| $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$ | $\sinh p - \sinh q = 2 \sinh \frac{p-q}{2} \cosh \frac{p+q}{2}$ |
| $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ | $\cosh p + \cosh q = 2 \cosh \frac{p+q}{2} \cosh \frac{p-q}{2}$ |
| $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ | $\cosh p - \cosh q = 2 \sinh \frac{p+q}{2} \sinh \frac{p-q}{2}$ |
| $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$ | $\tanh a + \tanh b = \frac{\sinh(a+b)}{\cosh a \cosh b}$ |
| $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$ | $\tanh a - \tanh b = \frac{\sinh(a-b)}{\cosh a \cosh b}$ |

Regras de derivação

| Trigonometria | Trigonom. Hiperb. | Trigonometria | Trigonometria Hiperb. |
|---------------------------------------|---|---|---|
| $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ | $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ | $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$ | $\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$ |
| $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ | $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ | $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$ | $\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$ | $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{d}{dx} \operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$ | $\frac{d}{dx} \coth x = \operatorname{csch}^2 x$ | $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2+1}$ | $\frac{d}{dx} \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{1-x^2}$ |
| $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$ | $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$ | $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{x^2+1}$ | $\frac{d}{dx} \operatorname{arccoth} x = \frac{1}{1-x^2}$ |

Uma nota curiosa, sobre as funções hiperbólicas, é a seguinte: Todos os pontos da forma $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$, com $t \in \mathbb{R}$, pertencem à hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$. À igualdade $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$, com $t \in \mathbb{R}$, ou ao sistema $\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}$, é costume chamar equações paramétricas da hipérbole.

Funções Hiperbólicas Inversas

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \text{ com } -1 < x < 1$$

$$\operatorname{arccoth} x = \operatorname{arctanh} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \text{ com } |x| > 1$$

$$\operatorname{arcsch} x = \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x} = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right)$$

$$\operatorname{arcsech} x = \operatorname{arccosh} \frac{1}{x} = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right), \text{ com } 0 < x < 1$$

Capítulo 8

O método das Tangentes de Newton

Neste capítulo, pretendemos determinar valores aproximados dos zeros duma função, utilizando o método das tangentes. Vamos começar com um exemplo muito simples: a determinação de valores aproximados de $\sqrt{2}$.

Exemplo 225 Consideremos a função $f(x) = x^2 - 2$, cuja derivada é $f'(x) = 2x$.

Consideremos $x_0 = 1$. Então, $f(1) = -1$ e $f'(1) = 2$.

Uma equação da recta tangente ao gráfico da função f , no ponto $x = 1$ é $y + 1 = 2(x - 1)$, a qual é equivalente a $y = 2x - 3$.

A tangente anterior intersecta o eixo das abcissas no ponto $x = \frac{3}{2}$, pelo que fazemos $x_1 = \frac{3}{2}$, que é um valor aproximado de $\sqrt{2}$.

E o processo continua até obtermos uma boa aproximação de $\sqrt{2}$.

Na segunda iteração, temos $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$ e $f'(\frac{3}{2}) = 3$.

Então, uma equação da tangente no ponto $x = \frac{3}{2}$ é $y + \frac{1}{4} = 3(x - \frac{3}{2})$, a qual é equivalente a $y = 3x - \frac{19}{4}$.

Esta nova recta intersecta o eixo das abcissas no ponto $x = \frac{19}{12}$, que é uma nova aproximação de $\sqrt{2}$.

Há algumas questões que podem ser colocadas:

Será que obtemos uma sucessão? Se obtivermos uma tangente horizontal, o processo acaba...

Outra questão é a da convergência da sucessão, caso a sucessão exista...

Suponhamos que temos o termo x_n . Como obter x_{n+1} , pelo método das tangentes?

$$f(x_n) = x_n^2 - 2, \quad f'(x_n) = 2x_n$$

A equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto $x = x_n$ é:

$$y - x_n^2 + 2 = 2x_n(x - x_n)$$

Fazendo $y = 0$, temos $\frac{2 - x_n^2}{2x_n} = x - x_n$, equação que é equivalente a $x = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$, pelo que temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

Se $x_n > 0$, então $x_{n+1} > 0$ e o processo pode continuar indefinidamente. Repare-se que se tivéssemos $x_n < 0$, então $x_{n+1} < 0$, pelo que o processo continuava indefinidamente.

Está, assim resolvida a primeira questão. Quanto à convergência, apenas referimos que, neste caso, a sucessão é convergente, partindo dum valor inicial não nulo e que no caso geral duma função que admita derivada contínua e finita em qualquer ponto, se for garantida a existência da sucessão, esta converge desde que o valor inicial esteja suficientemente próximo do zero da função procurado. No entanto, o estar suficientemente próximo é algo que irá depender da função em causa. No exemplo que estivemos a considerar, o valor inicial pode ser qualquer valor positivo, para que o limite seja $\sqrt{2}$. Partindo dum valor negativo o limite da sucessão será $-\sqrt{2}$.

Partindo do valor inicial $x_0 = 1$, temos:

1

$$1 - \frac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{(\frac{3}{2})^2 - 2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{17}{12}$$

$$\frac{17}{12} - \frac{(\frac{17}{12})^2 - 2}{2 \cdot \frac{17}{12}} = \frac{577}{408}$$

$$\frac{577}{408} - \frac{(\frac{577}{408})^2 - 2}{2 \cdot \frac{577}{408}} = \frac{665857}{470832}$$

$$\frac{665857}{470832} - \frac{(\frac{665857}{470832})^2 - 2}{2 \cdot \frac{665857}{470832}} = \frac{886731088897}{627013566048}$$

Chegados a este ponto, estão esgotadas as capacidades da Calculadora, pelo que esta resposta é o melhor valor que podemos obter (com esta Calculadora e este método).

Se passarmos para o modo Approximate, obtemos:

1.41421356237

Done

1.41421356237

Podemos comparar o resultado com o valor apresentado pela Calculadora para $\sqrt{2}$.

Exemplo 226 O método das tangentes

Consideremos uma função de domínio \mathbb{R} , que admite derivada contínua e finita em qualquer ponto. Supondo conhecido o valor x_n , vejamos como obter x_{n+1} .

A equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto $x = x_n$ é

$$y - f(x_n) = (x - x_n) f'(x_n)$$

Fazendo $y = 0$, obtemos $(x - x_n) f'(x_n) = -f(x_n)$, donde vem $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, ou seja, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, caso x_{n+1} esteja definido.

Exemplo 227 Será que os Babilónios conheciam um algoritmo para calcular valores aproximados de $\sqrt{2}$?

Os Babilónios tinham um sistema de numeração que usava a base 60 e sabiam resolver equações de 2º grau.

Vejamos um método iterativo, para determinar valores aproximados de $\sqrt{2}$, que podia ser utilizado pelos Babilónios:

Como $1^2 < 2 < 2^2$, devemos ter $1 < \sqrt{2} < 2$.

Faça-se $x_0 = 1$. Então, $\sqrt{2} = 1 + \delta_1$, pelo que $(1 + \delta_1)^2 = 2$. Observe-se que $0 < \delta_1 < 1$.

Então, $1 + 2\delta_1 + \delta_1^2 = 2$. Mas, para valores entre zero e 1, o quadrado é um número pequeno, pelo que pode ser desprezado. Logo, $1 + 2\delta_1 \approx 2$, donde vem $\delta_1 \approx \frac{1}{2}$. Então, $x_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Calculemos x_2 :

Como $x_1^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$, devemos ter $\sqrt{2} = \frac{3}{2} - \delta_2$, com $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$.

Então, $\left(\frac{3}{2} - \delta_2\right)^2 = 2$, donde vem $\frac{9}{4} - 3\delta_2 + \delta_2^2 = 2$.

Logo, $\frac{9}{4} - 3\delta_2 \approx 2$, pelo que $3\delta_2 \approx \frac{9}{4} - 2$, ou seja, $\delta_2 \approx \frac{1}{12}$.

Então, $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$

E o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se boas aproximações de $\sqrt{2}$. Curiosamente, estamos a obter os mesmos valores que obtivemos com o método de Newton, partindo do valor inicial $x_0 = 1$, em ambos os casos.

Será que as duas sucessões são iguais? Para responder a esta questão, basta-nos provar que se partirmos de valores arbitrários iguais, obtemos na iteração seguinte valores iguais.

No método das tangentes, já vimos que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, pelo que, no caso da função $f(x) = x^2 - 2$, temos $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$.

Pelo segundo processo, supondo que $2 > x_n > \sqrt{2}$, temos:

$$(x_n - \delta_{n+1})^2 = 2$$

Logo, $x_n^2 - 2x_n\delta_{n+1} + \delta_{n+1}^2 = 2$, donde obtemos $x_n^2 - 2x_n\delta_{n+1} \approx 2$.

Então, $\delta_{n+1} \approx \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$, pelo que $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$, obtendo-se a mesma expressão que fora obtida pelo método das tangentes.

Exemplo 228 Determine um valor aproximado de $-\sqrt{2}$, pelo método das tangentes.

Resolução

Consideremos a função $f(x) = x^2 - 2$. Seja $x_0 = -1$. Então, utilizando a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

Então,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+2}{-2} = -\frac{3}{2} = -1,5 \\ x_2 = \frac{\frac{9}{4}+2}{-3} = -\frac{17}{12} \approx -1,416\,666\,667 \\ x_3 = \frac{\frac{289}{144}+2}{-\frac{17}{6}} = -\frac{577}{144} \times \frac{6}{17} = -\frac{577}{408} \approx -1,414\,215\,686 \\ x_4 = \frac{\left(\frac{577}{408}\right)^2+2}{-2 \times \frac{577}{408}} = -\frac{665\,857}{470\,832} \approx -1,414\,213\,562 \\ x_5 = \frac{\left(\frac{665\,857}{470\,832}\right)^2+2}{-2 \times \frac{665\,857}{470\,832}} = -\frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048} \approx -1,414\,213\,562 \end{cases}$$

E bastaram cinco iterações para chegarmos ao resultado pretendido.

Exemplo 229 Resolva a equação $2x + \sin x - 5 = 0$, pelo método das tangentes.

Resolução

Seja $f(x) = 2x + \sin x - 5$. Então, $f'(x) = 2 + \cos x$

Vamos partir de $x_0 = 0$, usando a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ e uma Calculadora:

```

■ClrHome                               Done
■0.                                     0.
■0. - (2·0. + sin(0.)) - 5             1.666666666667
      2 + cos(0.)
■1.66666666666667 - (2·1.66666666666667 + sin(1.66666666666667))
      2 + cos(1.66666666666667)
      2.01916732812
■n(ans(1))-5)/(2+cos(ans(1)))

```

| | |
|---|---|
| $\begin{aligned} & \blacksquare 1.6666666666667 - \frac{2 + \cos(1.6666666666667)}{2.01916732812} \\ & \blacksquare 2.01916732812 - \frac{2 \cdot 2.01916732812 + \sin(2.01916732812)}{2 + \cos(2.01916732812)} \\ & \blacksquare 2.0577953561803 - \frac{2 \cdot 2.0577953561803 + \sin(2.0577953561803)}{2 + \cos(2.0577953561803)} \\ & \blacksquare 2.05823142619 - \frac{2 \cdot 2.05823142619 + \sin(2.05823142619)}{2 + \cos(2.05823142619)} \\ & \blacksquare \frac{n(\text{ans}(1)) - 5}{2 + \cos(\text{ans}(1))} \end{aligned}$ | $\begin{aligned} & \blacksquare 2.0582314261877 - \frac{2 + \cos(2.0582314261877)}{2.05823148104} \\ & \blacksquare 2.0582314810429 - \frac{2 \cdot 2.0582314810429 + \sin(2.0582314810429)}{2 + \cos(2.0582314810429)} \\ & \blacksquare 2.0582314810429 - \frac{2 \cdot 2.0582314810429 + \sin(2.0582314810429)}{2 + \cos(2.0582314810429)} \\ & \blacksquare 2.0582314810429 - \frac{2 \cdot 2.0582314810429 + \sin(2.0582314810429)}{2 + \cos(2.0582314810429)} \\ & \blacksquare \frac{n(\text{ans}(1)) - 5}{2 + \cos(\text{ans}(1))} \end{aligned}$ |
|---|---|

E, novamente bastaram cinco iterações para chegarmos ao resultado pretendido.

Então, uma das soluções da equação é, aproximadamente, o número real 2,058 231 4810429. Observemos que $f'(x) = 2 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que a função f é estritamente crescente.

Então, a função tem um único zero, do qual já conhecemos uma boa aproximação.

Exemplo 230 Determine uma boa aproximação do ponto fixo da função $f(x) = 1 - \arctan x$.

Resolução

Recordamos que ponto fixo duma função f é um ponto x do domínio de f , tal que $f(x) = x$. Então, pretendemos resolver a equação $1 - \arctan x = x$, equação esta que é equivalente a $x - 1 + \arctan x = 0$.

Então, a questão inicial transformou-se na determinação do(s) zero(s) da função $g(x) = x - 1 + \arctan x$. Então, $g'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$.

Observe-se, desde já, que a função é estritamente crescente, pelo que não pode ter mais do que um zero.

Ora, $g(0) = -1$ e $g(1) = \frac{\pi}{4}$. Além disso, a função é contínua em \mathbb{R} . Então, a função tem um zero no intervalo $]0, 1[$.

A fórmula de recorrência do método das tangentes é:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - 1 + \arctan x_n}{1 + \frac{1}{1+x_n^2}} \\ &= x_n - \frac{x_n - 1 + \arctan x_n}{\frac{2+x_n^2}{1+x_n^2}} \\ &= x_n - \frac{(x_n - 1 + \arctan x_n)(1+x_n^2)}{2+x_n^2} \end{aligned}$$

Partindo do valor inicial $x_0 = 1$, temos:

$$\begin{aligned} & \blacksquare 1. - \frac{(1. - 1 + \tan^{-1}(1.)) \cdot (1 + (1.)^2)}{2 + (1.)^2} \\ & \hspace{15em} .476401224402 \\ & \blacksquare .4764012244017 - \frac{(.4764012244017 - 1 + \tan^{-1}(.4764012244017)) \cdot (1 + (.4764012244017)^2)}{2 + (.4764012244017)^2} \\ & \hspace{15em} .519931116131 \\ & \blacksquare .51993111613136 - \frac{(.51993111613136 - 1 + \tan^{-1}(.51993111613136)) \cdot (1 + (.51993111613136)^2)}{2 + (.51993111613136)^2} \\ & \hspace{15em} .52026897213836 \\ & \blacksquare .52026897213836 - \frac{(.52026897213836 - 1 + \tan^{-1}(.52026897213836)) \cdot (1 + (.52026897213836)^2)}{2 + (.52026897213836)^2} \\ & \hspace{15em} .52026899271959 \\ & \blacksquare .52026899271959 - \frac{(.52026899271959 - 1 + \tan^{-1}(.52026899271959)) \cdot (1 + (.52026899271959)^2)}{2 + (.52026899271959)^2} \\ & \hspace{15em} .52026899272 \end{aligned}$$

O valor do ponto fixo da função inicial é, aproximadamente, 0,520 268 992 71959.

Capítulo 9

Polinómios de Colocação

Neste capítulo, pretendemos determinar uma função polinomial que assuma determinados valores em determinados pontos.

Começamos por fazer referência ao Teorema Fundamental da Álgebra, o qual afirma que um polinómio de grau n e de coeficientes complexos não admite mais do que n raízes complexas. Como consequência, um polinómio de grau n e de coeficientes reais não admite mais do que n raízes reais.

Recordamos que polinómio identicamente nulo é o polinómio $P(x)$ com todos os coeficientes nulos, isto é, $P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0$.

Convencionou-se que o grau do polinómio identicamente nulo é $-\infty$. Esta convenção deve-se ao facto de pretendemos que o grau da soma de dois polinómios seja menor ou igual ao maior dos graus das parcelas e que o grau do produto seja igual à soma dos graus dos factores.

Proposição 231 *Se um polinómio $P(x)$, de grau menor ou igual a n , com $n \in \mathbb{N}$, se anula em $n+1$ pontos, então $P(x)$ é o polinómio identicamente nulo.*

Demonstração

A demonstração é trivial, em face do que foi afirmado.

Proposição 232 *Não há mais do que um polinómio, de grau menor ou igual a n , com $n \in \mathbb{N}$, que assuma $n+1$ valores pré-determinados, em $n+1$ pontos.*

Demonstração

Sejam $P_1(x)$ e $P_2(x)$ dois polinómios de grau menor ou igual a n , satisfazendo as condições do enunciado.

Suponhamos, então, que $P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e que $P_2(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$.

Suponhamos, ainda, que $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ são os $n+1$ pontos onde os dois polinómios assumem os $n+1$ valores pré-determinados.

Seja $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$. Então:

$$P(x_k) = P_1(x_k) - P_2(x_k) = 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$$

Logo, o polinómio $P(x)$, de grau menor ou igual a n , anula-se em $n+1$ pontos, pelo que se trata do polinómio identicamente nulo.

Então, os dois polinómios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são idênticos.

Repare-se que esta proposição não afirma que existe um polinómio que satisfaça as condições do enunciado, embora tal se verifique, como veremos.

Exercício 233 *Determinemos o polinómio $P(x)$, de grau menor ou igual a 3 e que satisfaz as condições $P(0) = 3$, $P(1) = 1$, $P(2) = 3$ e $P(3) = 1$.*

Resolução

Este processo deve-se a Newton e é vantajoso em relação ao método de Lagrange (terceira resolução), principalmente se acrescentarmos mais um ponto: enquanto que no método de Newton, basta mais um passo, no caso do polinómio interpolador de Lagrange é necessário começar todo o processo de novo.

Seja $P_1(x) = 3$. É claro que $P_1(0) = 3$, mas $P_1(1) = 3 \neq 1$. Pretendemos obter um novo polinómio $P_2(x)$ que satisfaça $P_2(1) = 1$, mas sem deixar de satisfazer $P_2(0) = 3$. Tal é conseguido com $P_2(x) = P_1(x) + ax = 3 + ax$.

Então, devemos ter $P_2(1) = 3 + a = 1$, donde se conclui que $a = -2$.

Logo, $P_2(x) = 3 - 2x$.

E, agora, fazemos $P_3(x) = P_2(x) + bx(x-1) = 3 - 2x + bx(x-1)$.

$P_3(2) = 3 - 4 + 2b = 2b - 1$. Então, $2b - 1 = 3$, donde vem $b = 2$.

Logo, $P_3(x) = 3 - 2x + 2x(x-1) = 3 - 4x + 2x^2$.

Seja $P_4(x) = P_3(x) + cx(x-1)(x-2) = 3 - 4x + 2x^2 + cx(x-1)(x-2)$.

$1 = P_4(3) = 3 - 12 + 18 + 3c \times 2 \times 1 = 9 + 6c$.

Então, $6c = -8$, donde vem $c = -\frac{4}{3}$.

Logo, $P_4(x) = 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$.

Efectuando os cálculos, temos:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) \\ &= 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x(x^2 - 3x + 2) \\ &= 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{8}{3}x \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3 \end{aligned}$$

E, como podemos verificar, temos $P_4(0) = 3$, $P_4(1) = 1$, $P_4(2) = 3$, $P_4(3) = 1$.

Observe-se que podíamos ter poupado um passo no cálculo do polinómio, pois, $P_1(x) = 3$ já está correcto em dois pontos (em $x = 0$ e em $x = 2$).

Então, fazemos $P_2(x) = 3 + Ax(x-2)$ e determinamos A , de modo que $P_2(1) = 1$.

De $P_2(1) = 1$, vem $3 - A = 1$, donde se conclui que $A = 2$.

Então, $P_2(x) = 3 + 2x(x-2) = 3 - 4x + 2x^2$.

E, finalmente, temos $P_3(x) = 3 - 4x + 2x^2 + Bx(x-1)(x-2)$.

E, de $P_3(3) = 1$, vem $3 - 12 + 18 + B \times 3 \times 2 \times 1 = 1$, pelo que $6B = -8$.

Logo, $B = -\frac{4}{3}$, pelo que $P_3(x) = 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3$

Segunda resolução

Vamos resolver este exercício, usando um processo análogo, mas começando "da direita para a esquerda".

Seja $P_1(x) = 1$. É claro que $P_1(3) = 1$, mas $P_1(2) = 1 \neq 3$. Pretendemos obter um novo polinómio $P_2(x)$ que satisfaça $P_2(2) = 3$, mas sem deixar de satisfazer $P_2(3) = 1$. Tal é conseguido com $P_2(x) = 1 + a(x-3)$.

Então, devemos ter $3 = P_2(2) = 1 - a$, donde vem $a = -2$. Logo, $P_2(x) = 1 - 2(x-3) = 7 - 2x$.

E, agora, fazemos $P_3(x) = 7 - 2x + b(x-2)(x-3)$.

De $1 = P_3(1) = 7 - 2 + 2b = 2b + 5$, vem $b = -2$.

Logo, $P_3(x) = 7 - 2x - 2(x-3)(x-2) = 7 - 2x - 2(x^2 - 5x + 6) = -2x^2 + 8x - 5$.

Seja $P_4(x) = -2x^2 + 8x - 5 + c(x-3)(x-2)(x-1)$.

De $3 = P_4(0) = -5 - 6c$, vem $6c = -8$. Logo, $c = -\frac{4}{3}$.

Efectuando os cálculos, temos:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= -2x^2 + 8x - 5 - \frac{4}{3}(x-3)(x-2)(x-1) \\ &= -2x^2 + 8x - 5 - \frac{4}{3}(x^2 - 5x + 6)(x-1) \\ &= -2x^2 + 8x - 5 - \frac{4}{3}(x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6) \\ &= -2x^2 + 8x - 5 - \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{44}{3}x + 8 \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3 \end{aligned}$$

É claro que tínhamos de obter o mesmo polinómio, porque não pode haver mais do que uma solução de grau menor ou igual a 3.

É claro que ainda não respondemos à questão de saber se o problema tem solução no seu caso geral.

Terceira resolução

Consideremos os seguintes polinómios:

$$\begin{cases} L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1 \times (-2) \times (-3)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6} \\ L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{1 \times (-1) \times (-2)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2} \\ L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{2 \times 1 \times (-1)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2} \\ L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{3 \times 2 \times 1} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} \end{cases}$$

Os quatro polinómios anteriores são de grau 3, pelo que qualquer combinação linear dos quatro polinómios tem grau menor ou igual a 3.

Além disso, temos que $L_0(x)$ se anula nos pontos 1, 2 e 3, tomando o valor 1, no ponto 0. De modo análogo, temos que $L_i(x)$, (com $i = 0, 1, 2, 3$), toma o valor 1 no ponto i e anula-se nos outros três pontos dados.

Então, o polinómio $L(x) = 3L_0(x) + 1L_1(x) + 3L_2(x) + 1L_3(x)$ satisfaz as condições do enunciado. À expressão anterior é costume chamar polinómio interpolador de Lagrange.

Efectuemos os cálculos:

$$\begin{aligned} L(x) &= 3L_0(x) + 1L_1(x) + 3L_2(x) + 1L_3(x) \\ &= 3 \times \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6} + \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2} + 3 \times \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2} + \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} \\ &= \frac{-3x^3 + 18x^2 - 33x + 18}{6} + \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 3x^3 + 12x^2 - 9x}{2} \\ &= \frac{-2x^3 + 15x^2 - 31x + 18}{6} + \frac{-2x^3 + 7x^2 - 3x}{2} \\ &= \frac{-2x^3 + 15x^2 - 31x + 18 - 6x^3 + 21x^2 - 9x}{6} \\ &= \frac{-8x^3 + 36x^2 - 40x + 18}{6} \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3 \end{aligned}$$

Esta última "construção" mostra-nos que existe um polinómio, de grau menor ou igual a n , que assume $n+1$ valores em $n+1$ pontos.

Tal existência também se verifica nas duas primeiras resoluções, uma vez que o polinómio a somar ao anteriormente obtido, apenas se anula nos pontos anteriores àquele que está a ser considerado, pelo que a constante que aparece no novo polinómio pode ser determinada (de modo único).

Exemplo 234 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $y_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, \dots, n$. Determine o polinómio $P(x)$, de grau menor ou igual a n e que satisfaz as condições $P(a) = y_0$, $P(a+h) = y_1, \dots, P(a+ih) = y_i, \dots, P(a+nh) = y_n$.

Resolução

Começamos por notar que os argumentos $a, a+h, a+2h, \dots, a+nh$ variam em progressão aritmética, o que pode não acontecer no caso geral.

Sejam $P_0(x) = y_0$ e $P_1(x) = P_0(x) + c_1(x-a)$.

Então, $y_1 = P_1(a+h) = P_0(x) + c_1(a+h-a) = y_0 + c_1h$.

Então, $c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}$ e $P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x-a)$.

Seja $P_2(x) = P_1(x) + c_2(x-a)(x-a-h) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x-a) + c_2(x-a)(x-a-h)$.

Então,

$$\begin{aligned} y_2 &= P_2(a+2h) \\ &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(a+2h-a) + c_2(a+h-a)(a+2h-a-h) \\ &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \times 2h + c_2 \times h \times 2h = y_0 + 2(y_1 - y_0) + 2c_2h^2 \\ &= y_0 + 2y_1 - 2y_0 + 2c_2h^2 = 2y_1 - y_0 + 2c_2h^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}$$

Então:

$$P_2(x) = \frac{y_0}{0!} + \frac{y_1 - y_0}{1! \times h} (x - a) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2! \times h^2} (x - a)(x - a - h)$$

E, se continuarmos, temos:

$$P_3(x) = P_2(x) + c_3(x - a)(x - a - h)(x - a - 2h)$$

Então:

$$\begin{aligned} y_3 &= P_3(a + 3h) \\ &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \times 3h + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} \times 3h \times 2h + c_3 \times 3h \times 2h \times h \\ &= y_0 + 3y_1 - 3y_0 + 3y_2 - 6y_1 + 3y_0 + c_3 \times 3! \times h^3 \\ &= 3y_2 - 3y_1 + y_0 + 6h^3 c_3 \end{aligned}$$

Então:

$$c_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3! \times h^3}$$

Observemos o seguinte quadro, obtido por diferenças entre elementos consecutivos da linha anterior:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & & y_1 & & y_2 & & y_3 \\ y_1 - y_0 & & & & y_2 - y_1 & & y_3 - y_2 \\ & & y_2 - 2y_1 + y_0 & & & & y_3 - 2y_2 + y_1 \\ & & & & y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 & & \end{array}$$

Observe o polinómio $P_3(x)$ e compare com o quadro anterior:

$$P_3(x) = \frac{y_0}{0!} + \frac{y_1 - y_0}{1! \times h} (x - a) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2! \times h^2} (x - a)(x - a - h) + \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3! \times h^3} (x - a)(x - a - h)(x - a - 2h)$$

Voltemos ao exemplo já resolvido, em que $P(0) = 3$, $P(1) = 1$, $P(2) = 3$ e $P(3) = 1$.

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ & & & 4 & -4 \\ & & & & -8 \end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= 3 - \frac{2}{1 \times 1} (x - 0) + \frac{4}{2 \times 1^2} (x - 0)(x - 1) - \frac{8}{6 \times 1^3} (x - 0)(x - 1)(x - 2) \\ &= 3 - 2x + 2x(x - 1) - \frac{4}{3}x(x - 1)(x - 2) \\ &= 3 - 2x + 2x^2 - 2x - \frac{4}{3}x(x^2 - 3x + 2) \\ &= 3 - 2x + 2x^2 - 2x - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{8}{3}x \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3 \end{aligned}$$

Voltemos ao quadro anteriormente apresentado:

$$\begin{array}{c|cccc} x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 \\ \hline y_0 & & y_1 & & y_2 & & y_3 \\ y_1 - y_0 & & & & y_2 - y_1 & & y_3 - y_2 \\ & & y_2 - 2y_1 + y_0 & & & & y_3 - 2y_2 + y_1 \\ & & & & y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 & & \end{array}$$

Vejamos como obter o polinômio partindo "da direita para a esquerda", supondo que os valores de x_i estão em progressão aritmética:

$$P_1(x) = y_3$$

$$P_2(x) = P_1(x) + A(x - x_3) = y_3 + A(x - x_3)$$

$$y_2 = P_2(x_2) = y_3 + A(x_2 - x_3) = y_3 - Ah$$

$$\text{Então, } A = \frac{y_3 - y_2}{h}.$$

Logo,

$$P_2(x) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x - x_3)$$

$$\text{Seja } P_3(x) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x - x_3) + B(x - x_3)(x - x_2).$$

$$y_1 = P_3(x_1) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x_1 - x_3) + B(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$$

Então,

$$B = \frac{y_1 - y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(2h)}{2h^2} = \frac{y_1 - y_3 + 2y_3 - 2y_2}{2h^2} = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2h^2}$$

Logo,

$$P_3(x) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x - x_3) + \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}(x - x_3)(x - x_2)$$

$$\text{Seja } P_4(x) = P_3(x) + C(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1).$$

$$y_0 = P_4(x_0) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x_0 - x_3) + \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}(x_0 - x_3)(x_0 - x_2) + C(x_0 - x_3)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)$$

Então,

$$\begin{aligned} y_0 &= y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(-3h) + \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}(-3h)(-2h) + C(x_0 - x_3)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) \\ &= y_3 - 3y_3 + 3y_2 + 3y_3 - 6y_2 + 3y_1 + C(-3h)(-2h)(-h) \\ &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - 6Ch^3 \end{aligned}$$

Logo,

$$C = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6h^3}$$

E, finalmente, temos

$$P_4(x) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x - x_3) + \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}(x - x_3)(x - x_2) + \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6h^3}(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)$$

Vejamos o exemplo anteriormente apresentado:

| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------|---|----|---|----|
| y_i | 3 | 1 | 3 | 1 |
| | | -2 | 2 | -2 |
| | | | 4 | -4 |
| | | | | -8 |

Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 - \frac{2}{1}(x - 3) - \frac{4}{2}(x - 2)(x - 3) - \frac{8}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 3) \\ &= 1 - 2x + 6 - 2(x^2 - 5x + 6) - \frac{4}{3}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \\ &= 7 - 2x - 2x^2 + 10x - 12 - \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{44}{3}x + 8 \\ &= 3 - \frac{20}{3}x + 6x^2 - \frac{4}{3}x^3 \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3 \end{aligned}$$

Diferenças divididas

O exemplo anterior pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array} & \begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array} \\
 \begin{array}{cccc} & \frac{1-3}{1-0} & \frac{3-1}{2-1} & \frac{1-3}{3-2} & \\ & & & & \frac{2+2}{2-0} \\ & & & & \frac{-2-2}{3-1} \end{array} & \begin{array}{cccc} & -2 & 2 & -2 & \\ & & & & \frac{-2-2}{3-0} \end{array} \\
 \begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 3 & 1 & 3 \end{array} & \begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 3 & 1 & 3 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & -2 & 2 & -2 \\ & & 2 & -2 \\ & & & \frac{-2-2}{3-0} \end{array} & \begin{array}{ccc} & -2 & 2 & -2 \\ & & 2 & -2 \\ & & & -\frac{4}{3} \end{array} \\
 \begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array} & \begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array} \\
 \begin{array}{cccc} & -2 & 2 & -2 & \\ & & 2 & -2 & \\ & & & -\frac{4}{3} & \end{array} & \begin{array}{cccc} & -2 & 2 & -2 & \\ & & 2 & -2 & \\ & & & -\frac{4}{3} & \end{array}
 \end{array}$$

Então,

$$P(x) = 3 - 2x + 2x(x-1) - \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

Ou,

$$P(x) = 1 - 2(x-3) - 2(x-3)(x-2) - \frac{4}{3}(x-3)(x-2)(x-1)$$

Exemplo 235 Usando as fórmulas das diferenças divididas progressivas e regressivas, determine o polinómio $P(x)$, de grau mínimo, que satisfaz as seguintes condições:

| | | | | | |
|----------|---|----|----|-----|-----|
| x_i | 1 | 2 | 4 | 7 | 15 |
| $P(x_i)$ | 6 | 20 | 40 | 100 | 300 |

Resolução

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} & \begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} \\
 \begin{array}{cccc} & \frac{20-6}{2-1} & \frac{40-20}{4-2} & \frac{100-40}{7-4} & \frac{300-100}{15-7} \end{array} & \begin{array}{cccc} & \frac{20-6}{2-1} & \frac{40-20}{4-2} & \frac{100-40}{7-4} & \frac{300-100}{15-7} \end{array} \\
 \begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} & \begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & 14 & 10 & 20 & 25 \end{array} & \begin{array}{ccc} & 14 & 10 & 20 & 25 \end{array} \\
 \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} & \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & 14 & 10 & 20 & 25 \end{array} & \begin{array}{ccc} & 14 & 10 & 20 & 25 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{11} \end{array} & \begin{array}{ccc} & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{11} \end{array} \\
 \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} & \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & 14 & 10 & 20 & 25 \end{array} & \begin{array}{ccc} & 14 & 10 & 20 & 25 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{11} \end{array} & \begin{array}{ccc} & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{11} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & \frac{5}{9} & -\frac{17}{143} \end{array} & \begin{array}{ccc} & \frac{5}{9} & -\frac{17}{143} \end{array} \\
 \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} & \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 15 \\ \hline 6 & 20 & 40 & 100 & 300 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & 14 & 10 & 20 & 25 \end{array} & \begin{array}{ccc} & 14 & 10 & 20 & 25 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{11} \end{array} & \begin{array}{ccc} & -\frac{4}{3} & 2 & \frac{5}{11} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & \frac{5}{9} & -\frac{17}{143} \end{array} & \begin{array}{ccc} & \frac{5}{9} & -\frac{17}{143} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} & -\frac{62}{1287} \end{array} & \begin{array}{ccc} & -\frac{62}{1287} \end{array}
 \end{array}$$

Então,

$$P(x) = 6 + 14(x-1) - \frac{4}{3}(x-1)(x-2) + \frac{5}{9}(x-1)(x-2)(x-4) - \frac{62}{1287}(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)$$

Ou, pela fórmula das diferenças divididas regressivas

$$P(x) = 300 + 25(x-15) + \frac{5}{11}(x-15)(x-7) - \frac{17}{143}(x-15)(x-7)(x-4) - \frac{62}{1287}(x-15)(x-7)(x-4)(x-2)$$

Registe-se que as fórmulas das diferenças divididas (progressivas e regressivas) podem aplicar-se em qualquer situação, enquanto que as fórmulas das diferenças não divididas (progressivas e regressivas) só podem ser utilizadas, quando os valores de x estão em progressão aritmética.

Exemplo 236 Usando as fórmulas das diferenças divididas, progressivas e regressivas, determine o polinómio $P(x)$, de grau mínimo, que satisfaz as seguintes condições:

| | | | | | |
|----------|---|---|----|----|-----|
| x_i | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 |
| $P(x_i)$ | 6 | 8 | 40 | 96 | 230 |

Resolução

| | | | | |
|---|---|-----------------|-----------------|----------------|
| 1 | 3 | 7 | 15 | 31 |
| 6 | 8 | 40 | 96 | 240 |
| | 1 | 8 | 7 | 9 |
| | | $\frac{7}{6}$ | $-\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |
| | | $-\frac{5}{56}$ | $\frac{1}{168}$ | |
| | | | $\frac{1}{315}$ | |

Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= 6 + 1(x-1) + \frac{7}{6}(x-1)(x-3) - \frac{5}{56}(x-1)(x-3)(x-7) + \frac{1}{315}(x-1)(x-3)(x-7)(x-15) \\ &= 240 + 9(x-31) + \frac{1}{12}(x-31)(x-15) + \frac{1}{168}(x-31)(x-15)(x-7) + \\ &\quad + \frac{1}{315}(x-31)(x-15)(x-7)(x-3) \end{aligned}$$

Exemplo 237 Usando as fórmulas das diferenças divididas e não divididas, progressivas e regressivas, determine o polinómio $P(x)$, de grau mínimo, que satisfaz as seguintes condições:

| | | | | | |
|----------|---|---|----|----|----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $P(x_i)$ | 6 | 7 | 10 | 20 | 30 |

Resolução

Exemplo 238 Usando as fórmulas das diferenças divididas, progressivas e regressivas, determine o polinómio $P(x)$, de grau mínimo, que satisfaz as seguintes condições:

| | | | | | |
|----------|---|---|----|----|----|
| x_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $P(x_i)$ | 6 | 7 | 10 | 20 | 30 |

Resolução

Diferenças divididas:

| | | | | |
|---|---|---------------|----------------|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 10 | 20 | 30 |
| | 1 | 3 | 10 | 10 |
| | | 1 | $\frac{7}{2}$ | 0 |
| | | $\frac{5}{6}$ | $-\frac{7}{6}$ | |
| | | | $-\frac{1}{2}$ | |

Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= 6 + 1(x-1) + 1(x-1)(x-2) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= 30 + 10(x-5) - \frac{7}{6}(x-5)(x-4)(x-3) - \frac{1}{2}(x-5)(x-4)(x-3)(x-2) \end{aligned}$$

Diferenças não divididas:

| | | | | |
|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{20}$ | $\frac{5}{30}$ |
| | 1 | 3 | 10 | 10 |
| | | 2 | 7 | 0 |
| | | 5 | -7 | |
| | | | -12 | |

Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= 6 + 1(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)(x-2) + \frac{5}{3!}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{12}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= 6 + 1(x-1) + (x-1)(x-2) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ P(x) &= 30 + 10(x-5) - \frac{7}{3!}(x-5)(x-4)(x-3) - \frac{12}{4!}(x-5)(x-4)(x-3)(x-2) \\ &= 30 + 10(x-5) - \frac{7}{6}(x-5)(x-4)(x-3) - \frac{1}{2}(x-5)(x-4)(x-3)(x-2) \end{aligned}$$

Capítulo 10

O Anel dos Inteiros Gaussianos

Nota histórica

O aparecimento dos números complexos deve-se à procura da fórmula resolvente das equações de 3º grau de coeficientes reais, as quais têm, no mínimo, uma solução real. Como veremos mais adiante, toda a equação de 3º grau pode ser transformada numa equação da forma $x^3 + ax + b = 0$, pelo que basta obter a fórmula resolvente para este caso. Fazendo $x = u + v$, vem:

$$\begin{aligned}(u + v)^3 + a(u + v) + b = 0 &\iff u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + a(u + v) + b = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + a(u + v) + b = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) = -b\end{aligned}$$

Podemos escolher u e v de modo que $3uv = -a \wedge u^3 + v^3 = -b$. Então, $uv = -\frac{a}{3}$.

Logo, $u^3v^3 = -\frac{a^3}{27} \wedge u^3 + v^3 = -b$, donde se conclui que u^3 e v^3 são as raízes da equação de 2º grau $\lambda^2 + b\lambda - \frac{a^3}{27} = 0$.

$$\text{Como } \lambda^2 + b\lambda - \frac{a^3}{27} = 0 \iff \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}, \text{ temos } \begin{cases} u^3 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2} \\ v^3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Então, } \begin{cases} u = \sqrt[3]{\frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}} \\ v = \sqrt[3]{\frac{-b - \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}} \end{cases}, \text{ pelo que } x = \sqrt[3]{\frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-b - \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}}$$

Vejamos um exemplo de resolução de uma equação de terceiro grau, usando o método anterior:

Consideremos a equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Começamos por fazer a substituição $x = y + h$, com vista a eliminar o termo de 2º grau, obtendo-se:

$$\begin{aligned}(y + h)^3 + 3(y + h)^2 - 3(y + h) - 1 = 0 &\iff y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3 + 3y^2 + 6yh + 3h^2 - 3y - 3h - 1 = 0 \\ &\iff y^3 + (3h + 3)y^2 + (3h^2 + 6h - 3)y + h^3 + 3h^2 - 3h - 1 = 0\end{aligned}$$

Fazendo $h = -1$, vem $y^3 - 6y + 4 = 0$.

Segue-se a nova substituição $y = u + v$, a qual nos conduz a $u^3 + v^3 = -4 \wedge u^3v^3 = 8$.

Então, u^3 e v^3 são as raízes da equação de 2º grau $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$, que são $-2 \pm \sqrt{-4}$.

Obtivemos, deste modo, uma raiz quadrada de um número negativo, a qual não representa nenhum número real.

Para quem já conhece os números imaginários, é fácil verificar que $u = \sqrt[3]{-2 + 2i} = 1 + i$, $v = \sqrt[3]{-2 - 2i} = 1 - i$.

Observe-se, no entanto, que $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ é uma expressão pouco pacífica, uma vez que um número imaginário admite três raízes cúbicas e não apenas uma.

Se usarmos as raízes cúbicas $1 + i$ e $1 - i$, obtemos

$$y = u + v = 1 + i + 1 - i = 2 \wedge x = y + h = 2 - 1 = 1$$

Logo, uma das raízes da equação inicial é 1, o que permite encontrar as outras raízes (aplicando a regra de Ruffini).

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Então, $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0 \iff (x-1)(x^2 + 4x + 1) = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3}$.

Repare-se que, embora as três raízes da equação sejam reais, para resolver a equação, tivemos de "sair" do conjunto \mathbb{R} .

E se tivéssemos usado outra raiz cúbica de $-2 + 2i$?

Vimos que uma das raízes cúbicas de ϵ é $1 + i$.

Como $1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, então as outras raízes cúbicas de $-2 + 2i$ são $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$ e $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)$.

Seja $u = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}$.

Ora, de $uv = 2$, vem $v = \frac{2}{u} = \frac{2}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{11\pi}{12}\right)$

Então,

$$\begin{aligned} y &= u + v = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12} + \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{11\pi}{12} = 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \right) = -1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, $x = -1 - \sqrt{3} - 1 = -2 - \sqrt{3}$, obtendo-se, assim uma das raízes da equação inicial.

Definição 239 *Corpo dos números complexos é o conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, algebrizado com as operações "adição" e "multiplicação" assim definidas:*

Adição: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplicação: $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

A definição da multiplicação apresentada resulta da multiplicação "usual" de polinómios com a condição suplementar $i^2 = -1$.

Definição 240 *Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O complexo $a - bi$, é chamado conjugado de z (e representamo-lo por \bar{z}), enquanto que ao número real $\sqrt{a^2 + b^2}$ chamamos módulo de z (que é representado por $|z|$). Ao número a chamamos parte real de z e escrevemos $\operatorname{Re}(z) = a$, enquanto que ao número b chamamos parte imaginária de z e escrevemos $\operatorname{Im}(z) = b$.*

Definição 241 *Ao conjunto $\mathbb{Z}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$, o qual algebrizado com a adição e multiplicação de complexos é um anel, chamamos anel dos inteiros gaussianos.*

Definição 242 *Inteiro algébrico é um elemento do conjunto \mathbb{C} que anula um polinómio mónico de $\mathbb{Z}[t]$, isto é, anula um polinómio em t cujos coeficientes pertencem a \mathbb{Z} e em que o termo de maior grau tem coeficiente 1.*

É fácil verificar que todos os elementos de $\mathbb{Z}(i)$ são inteiros algébricos; para isso, basta-nos considerar $a + bi$ e a equação de 2º grau $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, com $a, b \in \mathbb{Z}$.

Observemos, ainda, que a definição de inteiro apresentada não cria, em \mathbb{Q} , mais inteiros, para além dos elementos de \mathbb{Z} , os quais, por esse motivo, são chamados inteiros racionais.

Definição 243 *Num anel com identidade, chama-se unidade a qualquer elemento do anel que seja invertível.*

Definição 244 *Dois elementos dum anel com identidade dizem-se associados, se existir uma unidade do anel que multiplicada por um dos elementos dê o outro.*

Definição 245 *Em $\mathbb{Z}(i)$, define-se norma, como sendo a aplicação N , de $\mathbb{Z}(i)$ em \mathbb{Z} , tal que $N(a + bi) = a^2 + b^2$.*

A aplicação anterior satisfaz as propriedades seguintes:

1. $N(a + bi) \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{Z}$
2. Se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $N(a + bi) = 0 \iff a = b = 0$
3. $N(z) = N(\bar{z}), \forall z \in \mathbb{Z}(i)$
4. $N(zw) = N(z) \times N(w), \forall z, w \in \mathbb{Z}(i)$

Uma vantagem da aplicação norma, em relação à aplicação módulo, reside no facto da norma de qualquer inteiro gaussiano ser um número inteiro racional, enquanto que o módulo dum inteiro gaussiano pode ser um número irracional.

Proposição 246 *O conjunto \mathbb{U} , dos elementos invertíveis de um anel com identidade, forma um grupo multiplicativo.*

Demonstração

\mathbb{U} é um conjunto não vazio, porque $1 \in \mathbb{U}$.

Sejam $u, v \in \mathbb{U}$. Então existem, em \mathbb{U} , elementos s e t , tais que $su = us = 1 = tv = vt$.

De $(uv)(ts) = u(vt)s = u(1s) = us = 1$ e de $(ts)(uv) = t(su)v = t(1v) = tv = 1$, concluímos que uv é um elemento invertível, donde vem que \mathbb{U} é um grupo para a multiplicação, uma vez que esta operação é associativa, existe, em \mathbb{U} , elemento neutro e todo o elemento de \mathbb{U} é invertível.

Definição 247 *Sejam A um anel e $a, b \in A$. Diz-se que a divide b (e escrevemos $a|b$), se existir, em A , um elemento c , tal que $ac = b$. Se não existir um tal c , diz-se que a não divide b .*

Definição 248 *Seja $\alpha \in \mathbb{Z}(i)$. Diz-se que α é irredutível, se, sempre que tivermos $\alpha = \beta\sigma$, com β, σ pertencentes a $\mathbb{Z}(i)$, então, pelo menos, um dos elementos β, σ é unidade.*

Definição 249 *Seja $\alpha \in \mathbb{Z}(i)$. Diz-se que α é primo, se α não é unidade e sempre que α divide um produto de dois elementos de $\mathbb{Z}(i)$, então α divide um dos factores. Diz-se que α não é primo, se α é unidade ou se α divide um produto de dois elementos de $\mathbb{Z}(i)$ e não divide nenhum dos factores.*

Proposição 250 *Seja $\alpha \in \mathbb{Z}(i)$. Então, α é uma unidade de $\mathbb{Z}(i)$, sse $N(\alpha) = 1$.*

Demonstração

Seja $\alpha = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Se α é uma unidade de $\mathbb{Z}(i)$, então existe $\beta \in \mathbb{Z}(i)$, tal que $\alpha\beta = 1$. Então, $1 = N(1) = N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

Como $N(\alpha)$ e $N(\beta)$ são números inteiros não negativos, temos que $N(\alpha) = N(\beta) = 1$. Logo, $N(\alpha) = 1$.

Reciprocamente, se $N(\alpha) = 1$, então existem inteiros a, b tais que $1 = N(\alpha) = a^2 + b^2$.

Logo, $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 1$, pelo que $a + bi$ é invertível e, por isso, uma unidade de $\mathbb{Z}(i)$.

Observe-se que se tivermos $a^2 + b^2 = 1$, então teremos forçosamente $a = 0, b = \pm 1$ ou $b = 0, a = \pm 1$.

Logo, as unidades de $\mathbb{Z}(i)$ são $\pm 1, \pm i$, todas elas da forma i^m , com $m \in \mathbb{Z}$.

Observação

Sejam $z, w \in \mathbb{Z}(i)$. Vimos que w divide z , se existir v pertencente a $\mathbb{Z}(i)$, tal que $wv = z$.

Observemos que se w divide z , então $N(w)$ divide $N(z)$, mas o recíproco não é válido, pois, por exemplo, $N(2 + i)$ divide $N(2 - i)$ e, no entanto, $2 + i$ não divide $2 - i$.

Definição 251 *Para cada número real x , define-se o número inteiro \tilde{x} como sendo $\tilde{x} = \text{arr}(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$, onde $\lfloor y \rfloor$ é o maior número inteiro não superior a y .*

Esta função arredonda um dado número real para o inteiro mais próximo, a menos que o número a arredondar esteja equidistante de dois inteiros consecutivos, caso em que o arredondamento é feito por excesso.

Definição 252 *Sejam $z, w \in \mathbb{Z}(i)$, com $w \neq 0$ e $v \in \mathbb{C}$, tal que $v = \frac{z}{w} = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Sejam $q, r \in \mathbb{Z}(i)$, tais que $q = \tilde{x} + \tilde{y}i$ e $r = w((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})i)$. Divisão inteira de z por w é a operação que, pelo processo agora descrito, determina os inteiros gaussianos q e r (chamados quociente e resto), e que satisfazem a condição $z = qw + r$.*

Exemplo 253 *Calculemos o quociente e o resto da divisão inteira de $20 + 3i$ por $4 + 5i$.*

Para isso, começamos por dividir, em \mathbb{C} , $20 + 3i$ por $4 + 5i$:

$$\frac{20 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(20 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{80 - 100i + 12i - 15i^2}{16 + 25} = \frac{95}{41} - \frac{88}{41}i$$

Então, na divisão inteira de $20 + 3i$ por $4 + 5i$, o quociente é dado por $2 - 2i$ (que se obtém, arredondando $\frac{95}{41}$ e $-\frac{88}{41}$), enquanto que o resto é dado por $r = z - qw = 20 + 3i - (2 - 2i)(4 + 5i) = 20 + 3i - 8 - 10i + 8i + 10i^2$. Então, $r = 2 + i$.

Observe-se que r pode ser dado por:

$$\begin{aligned} r &= \left(\left(\frac{95}{41} - 2 \right) + \left(-\frac{88}{41} + 2 \right) i \right) (4 + 5i) = \left(\frac{13}{41} - \frac{6}{41}i \right) (4 + 5i) \\ &= \frac{52}{41} + \frac{65}{41}i - \frac{24}{41}i - \frac{30}{41}i^2 = \frac{82}{41} + \frac{41}{41}i = 2 + i \end{aligned}$$

Proposição 254 *Sejam $z, w \in \mathbb{Z}(i)$, com $w \neq 0$. Então, com a notação introduzida, temos $(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 \leq \frac{1}{2}$ e $N(r) \leq \frac{1}{2} N(w)$.*

Demonstração

Como $\frac{z}{w} = x + yi = \tilde{x} + (x - \tilde{x}) + (\tilde{y} + (y - \tilde{y}))i$, temos:

$$z = w(x + yi) = w(\tilde{x} + (x - \tilde{x}) + (\tilde{y} + (y - \tilde{y}))i) = w(\tilde{x} + \tilde{y}i) + w((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})i)$$

Então, $z - w(\tilde{x} + \tilde{y}i) = w((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})i) = r \in \mathbb{Z}(i)$.

Como $|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2}$ e $|y - \tilde{y}| \leq \frac{1}{2}$, então $(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, donde se conclui que $N(r) \leq \frac{1}{2} N(w)$. Finalmente, observe-se que w divide z , se e só se, $N(r) = 0$.

Proposição 255 *Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{Z}$, tais que p é primo, $p \equiv 1 \pmod{4}$ e p divide $N(z)$. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $p = a^2 + b^2$. Então, em $\mathbb{Z}(i)$, $a + bi$ divide $x + yi$ ou $a + bi$ divide $x - yi$.*

Demonstração

$$\begin{aligned} \frac{x + yi}{a + bi} &= \frac{(x + yi)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ax - bxi + ayi - byi^2}{a^2 + b^2} = \frac{ax + by}{p} + \frac{ay - bx}{p}i \\ \frac{x - yi}{a + bi} &= \frac{(x - yi)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ax - bxi - ayi + byi^2}{a^2 + b^2} = \frac{ax - by}{p} - \frac{ay + bx}{p}i \end{aligned}$$

Vamos provar que, nas condições do enunciado, p divide $ax + by$ se e só se p divide $ay - bx$.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p | ax + by \\ p = a^2 + b^2 \end{array} \right\} &\implies \left\{ \begin{array}{l} p | (ax + by)^2 \\ p | (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} p | a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \\ p | a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \end{array} \right\} \\ &\implies p | a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2 \\ &\implies p | a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy \implies p | (ay - bx)^2 \implies p | ay - bx \end{aligned}$$

Reciprocamente:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p | ay - bx \\ p = a^2 + b^2 \end{array} \right\} &\implies \left\{ \begin{array}{l} p | (ay - bx)^2 \\ p | (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} p | a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \\ p | a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \end{array} \right\} \\ &\implies p | a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2y^2 + 2abxy - b^2x^2 \\ &\implies p | a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy \implies p | (ax + by)^2 \implies p | ax + by \end{aligned}$$

Logo, nas condições do enunciado, p a parte real de $\frac{x+yi}{a+bi}$ é um número inteiro, se e só se, a parte imaginária de $\frac{x+yi}{a+bi}$ também é. Analogamente se mostrava que a parte real de $\frac{x-yi}{a+bi}$ é um número inteiro, se e só se, a parte imaginária de $\frac{x-yi}{a+bi}$ também é.

Mas, por hipótese, $p = a^2 + b^2$ e p divide $N(z) = x^2 + y^2$. Então, p divide $(a^2 + b^2)x^2 - b^2(x^2 + y^2)$.

$$\begin{aligned} p \mid (a^2 + b^2)x^2 - b^2(x^2 + y^2) &\implies p \mid a^2x^2 + b^2x^2 - b^2x^2 - b^2y^2 \implies p \mid a^2x^2 - b^2y^2 \\ &\implies p \mid (ax + by)(ax - by) \implies p \mid ax + by \vee p \mid ax - by \end{aligned}$$

Se $p \mid ax + by$, então $p \mid ay - bx$, donde se conclui que $\frac{x+yi}{a+bi} \in \mathbb{Z}(i)$.

Se $p \mid ax - by$, então $p \mid ay + bx$, donde se conclui que $\frac{x-yi}{a+bi} \in \mathbb{Z}(i)$.

Então, $a + bi$ é primo em $\mathbb{Z}(i)$.

Proposição 256 *Seja $p \in \mathbb{N}$, um número primo, tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, tais que $p = a^2 + b^2$. Então, $a + bi$ e $a - bi$ são primos em $\mathbb{Z}(i)$.*

Demonstração

Suponhamos que $a + bi$ divide $z_1 z_2$, com $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}(i)$. Dividindo z_1 e z_2 por $a + bi$, temos

$$\begin{cases} z_1 = (a + bi)w_1 + r_1, \text{ com } w_1, r_1 \in \mathbb{Z}(i) \text{ e } 0 \leq N(r_1) \leq \frac{p}{2} \\ z_2 = (a + bi)w_2 + r_2, \text{ com } w_2, r_2 \in \mathbb{Z}(i) \text{ e } 0 \leq N(r_2) \leq \frac{p}{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= ((a + bi)w_1 + r_1) \times ((a + bi)w_2 + r_2) \\ &= (a + bi)^2 w_1 w_2 + (a + bi)w_1 r_2 + (a + bi)w_2 r_1 + r_1 r_2 \end{aligned}$$

Então, $r_1 r_2 = z_1 z_2 - (a + bi)^2 w_1 w_2 - (a + bi)w_1 r_2 - (a + bi)w_2 r_1$.

Então, $a + bi$ divide $r_1 r_2$, porque $a + bi$ divide todas as parcelas do segundo membro da igualdade anterior.

Então, $N(a + bi)$ divide $N(r_1 r_2) = N(r_1)N(r_2)$, ou seja, p divide $N(r_1)$ ou p divide $N(r_2)$.

Então, $N(r_1) = 0$ ou $N(r_2) = 0$, donde se conclui que $r_1 = 0$ ou $r_2 = 0$. Logo, $a + bi$ divide z_1 ou $a + bi$ divide z_2 .

Observemos que p divide o produto $(a + bi)(a - bi)$ e p não divide nenhum dos dois factores. Então p , como elemento de $\mathbb{Z}(i)$, não é primo.

Proposição 257 *Seja $q \in \mathbb{N}$, um número primo, com $q \equiv 3 \pmod{4}$. Então, q é irredutível em $\mathbb{Z}(i)$.*

Demonstração

Suponhamos que $q = z_1 z_2$, com z_1 e z_2 não invertíveis. Ora, $N(q) = q^2 = N(z_1)N(z_2)$. Então, teria de ser $N(z_1) = N(z_2) = q$, pelo que q seria uma soma de dois quadrados, o que sabemos ser falso. Logo, $N(z_1) = 1$ ou $N(z_2) = 1$.

Logo, se q se decompuser num produto de dois elementos de $\mathbb{Z}(i)$, um desses elementos é uma unidade (por ter norma 1).

Então, q é irredutível em $\mathbb{Z}(i)$.

Proposição 258 *Seja $q \in \mathbb{N}$, um número primo, tal que $q \equiv 3 \pmod{4}$. Então, q é primo em $\mathbb{Z}(i)$.*

Demonstração

Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, com $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$.

Suponhamos que q divide o produto $z_1 z_2$.

$$\begin{aligned} q \mid z_1 z_2 &\implies q \mid (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \implies q \mid x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i - y_1 y_2 \\ &\implies q \mid x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \\ &\implies \begin{cases} q \mid x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ q \mid x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{cases} \implies \begin{cases} q \mid x_1^2 x_2 - x_1 y_1 y_2 \\ q \mid x_1 y_1 y_2 + x_2 y_1^2 \end{cases} \\ &\implies q \mid x_1^2 x_2 - x_1 y_1 y_2 + x_1 y_1 y_2 + x_2 y_1^2 \implies q \mid x_1^2 x_2 + x_2 y_1^2 \\ &\implies q \mid x_2 (x_1^2 + y_1^2) \implies q \mid x_2 \vee q \mid x_1^2 + y_1^2 \end{aligned}$$

1º Caso: Suponhamos que q divide x_2 (em \mathbb{Z}). Então, temos

$$\begin{aligned} \begin{cases} q \mid x_1x_2 - y_1y_2 \\ q \mid x_1y_2 + x_2y_1 \\ q \mid x_2 \end{cases} &\implies \begin{cases} q \mid y_1y_2 \\ q \mid x_1y_2 \\ q \mid x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} q \mid y_1 \vee q \mid y_2 \\ q \mid x_1 \vee q \mid y_2 \\ q \mid x_2 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} q \mid y_1 \\ q \mid x_1 \\ q \mid x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} q \mid y_1 \\ q \mid y_2 \\ q \mid x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} q \mid y_2 \\ q \mid x_1 \\ q \mid x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} q \mid y_1 \\ q \mid y_2 \\ q \mid x_2 \end{cases} \\ &\implies q \mid z_1 \vee q \mid z_2 \end{aligned}$$

2º Caso: Suponhamos que q divide $x_1^2 + y_1^2$ e que q não divide x_2 . Seja d o máximo divisor comum entre x_1 e y_1 .

Se q divide d , então q divide x_1 e divide x_2 , pelo que q divide z_1 .

Se q não divide d , então q divide $u^2 + v^2$, com $u = \frac{x_1}{d}$ e $v = \frac{y_1}{d}$. Mas esta hipótese não pode ocorrer, porque $q \equiv 3 \pmod{4}$ e o máximo divisor comum entre u e v é 1.

Está, assim, terminada a demonstração.

Proposição 259 *O elemento $1 + i$ é primo e irredutível em $\mathbb{Z}(i)$.*

Demonstração

Suponhamos que $1 + i = z_1z_2$, com $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}(i)$. Então, $2 = N(1 + i) = N(z_1z_2) = N(z_1)N(z_2)$. Então, $N(z_1) = 1 \vee N(z_2) = 1$. Logo, um dos números z_1 e z_2 é uma unidade, pelo que $1 + i$ é irredutível em $\mathbb{Z}(i)$.

Suponhamos, agora, que $1 + i$ divide z_1z_2 , com $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}(i)$. Então, $2 = N(1 + i)$ divide $N(z_1)N(z_2)$, pelo que 2 divide uma das normas. Sem perda de generalidade, suponhamos que 2 divide $N(z_1)$. Seja $z_1 = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Então, 2 é um divisor de $a^2 + b^2$, pelo que a e b são ambos pares ou ambos ímpares. Se forem ambos pares, 2 divide z_1 , pelo que $1 + i$ divide z_1 , uma vez que $1 + i$ divide 2.

Suponhamos que a e b são ambos ímpares. Mas,

$$\frac{a + bi}{1 + i} = \frac{(a + bi)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{a - ai + bi + b}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2}i$$

Então, $\frac{a + bi}{1 + i} \in \mathbb{Z}(i)$, porque $a + b$ e $b - a$ são pares.

Logo, $1 + i$ é primo em $\mathbb{Z}(i)$.

Em face das proposições anteriores, podemos concluir que um elemento de $\mathbb{Z}(i)$ é irredutível se e só se é primo.

Podemos concluir, ainda, que os primos de $\mathbb{Z}(i)$ são $1 + i$, os primos de \mathbb{N} que são congruentes com 3, módulo 4, e os elementos $a + bi$ e $a - bi$, tais que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a^2 + b^2 = p$, com p primo em \mathbb{N} e p congruente com 1, módulo 4 e, ainda, os respectivos associados.

Finalmente observe-se que, num Anel com identidade, todo o primo é irredutível, mas há Anéis com identidade em que nem todo o irredutível é primo.

Proposição 260 *Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $a^2 + b^2 = p$.*

Demonstração

Se $p \equiv 1 \pmod{4}$, então 4 divide $p - 1$. Como $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ é um grupo cíclico para a multiplicação (ver Teorema das raízes Primitivas), então existe em $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ um elemento m de ordem 4. Então, m^2 tem ordem 2, pelo que $m^2 \equiv -1 \pmod{p}$, donde vem que p divide $m^2 + 1$ (em \mathbb{N}). Logo, p divide $m^2 + 1$, em $\mathbb{Z}(i)$, ou seja, p divide $(m + i)(m - i)$.

Se p fosse irredutível em $\mathbb{Z}(i)$, então p dividia $m + i$ ou p dividia $m - i$, o que não acontece. Então, p não é irredutível em $\mathbb{Z}(i)$, pelo que existem $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, tais que $p = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, tendo-se que $a + bi$ e $c + di$ não são unidades. Como a norma de p é p^2 , então as normas de $a + bi$ e $c + di$ são iguais a p . Então, $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Capítulo 11

Ternos Pitagóricos

Nota histórica

A existência de triângulos rectângulos, em que as medidas dos comprimentos dos lados são números inteiros, era do conhecimento dos Babilónios há cerca de 4000 anos.

Pensa-se, mesmo, que se os Babilónios não conheciam uma fórmula para todos os triângulos rectângulos de lados inteiros, pelo menos, deveriam conhecer fórmulas parciais para tal questão.

Alguns desses triângulos rectângulos de lados inteiros, também eram do conhecimento dos antigos Egípcios e Chineses.

Atribui-se a Pitágoras o conhecimento dos ternos Pitagóricos da forma $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$, mas é a Diophantus de Alexandria que é atribuída a descoberta da fórmula geral dos ternos Pitagóricos.

Curiosamente, embora parte da obra de Diophantus seja bem conhecida, através de traduções para Árabe, não se sabe em que época o mesmo viveu, acreditando alguns historiadores que terá sido entre os séculos II antes de Cristo e III depois de Cristo, mas sem precisar a época exacta.

Tal como os babilónios, Diophantus considerava, não só triângulos rectângulos de lados inteiros, mas também triângulos rectângulos de lados racionais.

É bem conhecido o facto de Pierre de Fermat ser um estudioso da obra de Diophantus e de ter sido na margem duma página dum dos livros de Diophantus, que Fermat escreveu o enunciado do famoso último Teorema de Fermat, que só muito recentemente foi demonstrado.

O último Teorema de Fermat deve ter sido o teorema da Matemática que mais tempo demorou a demonstrar.

Definição 261 *Sejam $x, y, z \in \mathbb{N}$. Se $x^2 + y^2 = z^2$, dizemos que (x, y, z) é um terno Pitagórico (abreviadamente TP); terno Pitagórico primitivo (TPP) é um terno Pitagórico (x, y, z) tal que $\text{mdc}(x, y, z) = 1$.*

Exemplo 262 $(3, 4, 5)$ é um terno Pitagórico primitivo, porque $3^2 + 4^2 = 5^2$ e $\text{mdc}(3, 4, 5) = 1$. Já $(6, 8, 10)$ é um terno Pitagórico não primitivo, porque $6^2 + 8^2 = 10^2$, mas $\text{mdc}(6, 8, 10) = 2$.

Interpretação geométrica

A cada terno Pitagórico (x, y, z) corresponde "um" triângulo rectângulo em que x e y são os catetos e z é a hipotenusa. Se (x, y, z) é um terno Pitagórico, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que (kx, ky, kz) é um terno Pitagórico. Observe-se que os triângulos rectângulos correspondentes aos ternos Pitagóricos (x, y, z) e (kx, ky, kz) são semelhantes.

Vejamos como determinar todos os ternos Pitagóricos, começando por alguns casos de ternos Pitagóricos primitivos:

Exemplo 263 *Ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 1)$*

Se $(y, x, x + 1)$ é um terno Pitagórico, então

$$(x + 1)^2 = y^2 + x^2 \iff x^2 + 2x + 1 = y^2 + x^2 \iff 2x + 1 = y^2$$

Logo y é ímpar, pelo que existe um número natural n , tal que $y = 2n + 1$. Então,

$$2x + 1 = (2n + 1)^2 \iff 2x + 1 = 4n^2 + 4n + 1 \iff x = 2n^2 + 2n \iff x = 2n(n + 1)$$

Então, $y = 2n + 1, x = 2n^2 + 2n, x + 1 = 2n^2 + 2n + 1$

Como $\text{mdc}(x, x + 1) = 1$, então $\text{mdc}(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1) = 1$, pelo que $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ é um terno Pitagórico primitivo, para qualquer valor de n .

Logo há infinitos ternos Pitagóricos da forma $(y, x, x + 1)$. Alguns desses ternos Pitagóricos estão na tabela seguinte:

| n | $2n + 1$ | $2n^2 + 2n$ | $2n^2 + 2n + 1$ | TPP |
|-----|----------|-------------|-----------------|--------------|
| 1 | 3 | 4 | 5 | (3, 4, 5) |
| 2 | 5 | 12 | 13 | (5, 12, 13) |
| 3 | 7 | 24 | 25 | (7, 24, 25) |
| 4 | 9 | 40 | 41 | (9, 40, 41) |
| 5 | 11 | 60 | 61 | (11, 60, 61) |
| 6 | 13 | 84 | 85 | (13, 84, 85) |

Exemplo 264 Ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 2)$

Se $(y, x, x + 2)$ é um terno Pitagórico, então

$$(x + 2)^2 = y^2 + x^2 \iff x^2 + 4x + 4 = y^2 + x^2 \iff 4(x + 1) = y^2$$

Logo y é par, pelo que existe um número natural m , tal que $y = 2m$. Então, $4(x + 1) = 4m^2$, donde vem $x + 1 = m^2$. Se x fosse par, então y, x e $x + 2$ eram pares, pelo que $(y, x, x + 2)$ não era um terno Pitagórico primitivo. Então, x deve ser ímpar, pelo que m é par. Então, $m = 2n$, para certo natural n . Então, $x + 1 = 4n^2$, donde se conclui que $x = 4n^2 - 1$ e $x + 2 = 4n^2 + 1$

Como x é ímpar, $\text{mdc}(x, x + 2) = 1$, pelo que $\text{mdc}(4n, 4n^2 - 1, 4n^2 + 1) = 1$, pelo que $(4n, 4n^2 - 1, 4n^2 + 1)$ é um terno Pitagórico primitivo, para qualquer valor de n .

Logo há infinitos ternos Pitagóricos da forma $(y, x, x + 1)$. Alguns desses ternos Pitagóricos estão na tabela seguinte:

| n | $4n$ | $4n^2 - 1$ | $4n^2 + 1$ | TPP |
|-----|------|------------|------------|----------------|
| 1 | 4 | 3 | 5 | (4, 3, 5) |
| 2 | 8 | 15 | 17 | (8, 15, 17) |
| 3 | 12 | 35 | 37 | (12, 35, 37) |
| 4 | 16 | 63 | 65 | (16, 63, 65) |
| 5 | 20 | 99 | 101 | (20, 99, 101) |
| 6 | 24 | 143 | 145 | (24, 143, 145) |
| 7 | 28 | 195 | 197 | (28, 195, 197) |

Exemplo 265 Ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 3)$

Se $(y, x, x + 3)$ é um terno Pitagórico, então

$$(x + 3)^2 = y^2 + x^2 \iff x^2 + 6x + 9 = y^2 + x^2 \iff 3(2x + 3) = y^2$$

Logo y é múltiplo de 3, pelo que existe um número natural m , tal que $y = 3m$. Então, $3(2x + 3) = 9m^2$, donde vem $2x + 3 = 3m^2$.

Então, $2x$ tem de ser múltiplo de 3, o mesmo acontecendo com x . Então y, x e $x + 3$ são todos múltiplos de 3, pelo que não há ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 3)$.

Torna-se pertinente a questão de saber para que valores de a existem ternos Pitagóricos da forma $(y, x, x + a)$. A essa questão daremos resposta nas proposições seguintes.

Proposição 266 Seja p um primo ímpar. Então não há nenhum terno Pitagórico da forma $(y, x, x + p)$.

Demonstração

Se $(y, x, x + p)$ é um terno Pitagórico, então $(x + p)^2 = y^2 + x^2$, pelo que $x^2 + 2px + p^2 = y^2 + x^2$.

Então, $p(2x + p) = y^2$. Então, y é múltiplo de p , pelo que existe um número natural m , tal que $y = pm$.

Então, $p(2x + p) = p^2m^2$, donde vem $2x + p = pm^2$.

Então, $2x$ tem de ser múltiplo de p , o mesmo acontecendo com x . Então y, x e $x + p$ são todos múltiplos de p , pelo que não há ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + p)$.

Proposição 267 *Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que $a > 1$, a é ímpar e a não é quadrado (perfeito). Então não há nenhum TPP da forma $(y, x, x + a)$.*

Demonstração

Seja $a = bp^{2\alpha-1}$, com p primo ímpar, $\alpha, b \in \mathbb{N}$ e b ímpar tal que p não divide b . De $x^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$, vem:

$$y^2 = 2ax + a^2 = a(2x + a) = bp^{2\alpha-1}(2x + bp^{2\alpha-1})$$

Daqui vem que p^α divide y , pelo que $y = mp^\alpha$, para certo natural m . Então, $y^2 = m^2p^{2\alpha} = bp^{2\alpha-1}(2x + bp^{2\alpha-1})$.

Logo $m^2p = b(2x + bp^{2\alpha-1})$, donde vem que p divide $2x + bp^{2\alpha-1}$. Então, p divide $2x$, pelo que p divide x . Então, $(y, x, x + a)$ não é um terno Pitagórico primitivo.

Proposição 268 *Se $(y, x, x + a)$ é um terno Pitagórico primitivo e a é ímpar, então a é um quadrado perfeito.*

Esta proposição é, apenas, outra maneira de afirmar o mesmo que na proposição anterior. Observemos que esta proposição não garante a existência dum terno Pitagórico primitivo da forma $(y, x, x + a)$, se a for ímpar e quadrado perfeito, embora isso aconteça, como veremos na proposição seguinte.

Proposição 269 *Se a é ímpar e quadrado perfeito, então há infinitos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + a)$.*

Demonstração

Suponhamos que $a = (2s - 1)^2$, para um certo natural s e que existe um terno Pitagórico da forma considerada. Então:

$$y^2 + x^2 = x^2 + 2ax + a^2 \implies y^2 = a(2x + a) \implies y^2 = (2s - 1)^2(2x + (2s - 1)^2)$$

Então, $2x + (2s - 1)^2$ é um quadrado perfeito ímpar.

Então, existe um número natural n , tal que $2x + (2s - 1)^2 = (2n + 2s - 1)^2$.

Então, $2x + (2s - 1)^2 = 4n^2 + 4n(2s - 1) + (2s - 1)^2$, pelo que $2x = 4n^2 + 4n(2s - 1)$.

Logo, $x = 2n^2 + 2n(2s - 1)$.

Substituindo x nas expressões que nos dão y^2 e $x + (2s - 1)^2$, obtemos

$$y^2 = (2s - 1)^2(2x + (2s - 1)^2) = (2s - 1)^2(2n + 2s - 1)^2$$

Então, $y = (2s - 1)(2n + 2s - 1) = (n + 2s - 1 - n)(n + 2s - 1 + n) = (n + 2s - 1)^2 - n^2$.

Logo, $(y, x, x + a) = ((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$

Encontrámos, desta maneira, uma expressão geral para os ternos Pitagóricos da forma $(y, x, x + (2s - 1)^2)$. Falta, ainda, mostrar que há infinitos ternos Pitagóricos primitivos desta forma.

Consideremos o terno $((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$.

Vejamus que o terno Pitagórico anterior é um terno Pitagórico primitivo, se e só se, $\text{mdc}(n, 2s - 1) = 1$.

Se o máximo divisor comum entre n e $2s - 1$ for diferente de 1, existe um número primo p que divide n e $2s - 1$. Então, p divide $(n + 2s - 1)^2 - n^2$, $n^2 + 2n(2s - 1)$ e $2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2$, pelo que $((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$ não é um terno Pitagórico primitivo.

Suponhamos, agora, que $\text{mdc}(n, 2s - 1) = 1$.

Seja $d = \text{mdc}((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$.

Como $(n + 2s - 1)^2 - n^2 = (2s - 1)(2n + 2s - 1)$ é ímpar, então d é ímpar. Suponhamos que $d > 1$. Então, existe um primo ímpar q , tal que q divide os números d, x, y, z . Então, q divide os dois números $z - x = (2s - 1)^2$ e $z - y = 2n^2$, isto é, q divide n e q divide $2s - 1$. Então, q divide $\text{mdc}(n, 2s - 1) = 1$, o que não pode acontecer. Então, é absurdo supor que $d > 1$, pelo que $d = 1$.

Logo, $((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$ é um terno Pitagórico primitivo, para todo o valor de n primo com $2s - 1$.

Uma vez que há infinitos números naturais que são primos com $2s - 1$, concluímos, como pretendíamos demonstrar, que há infinitos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + (2s - 1)^2)$.

Exemplo 270 Determinar os ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 9)$.

Ora,

$$y^2 + x^2 = (x + 9)^2 \iff y^2 + x^2 = x^2 + 18x + 91 \iff y^2 = 18x + 81 \iff y^2 = 9(2x + 9)$$

E, agora, temos:

$$2x + 9 = (2n + 3)^2 \iff 2x + 9 = 4n^2 + 12n + 9 \iff 2x = 4n^2 + 12n \iff x = 2n^2 + 6n$$

Logo, $x = 2n^2 + 6n$, $y = 3(2n + 3) = 6n + 9$ e $z = 2n^2 + 6n + 9$.

É claro que, para obtermos os valores anteriores, podíamos ter aproveitado a proposição anterior e respectiva demonstração, bastando substituir por s por 2 .

Na tabela seguinte estão indicados alguns dos ternos Pitagóricos primitivos da forma anterior:

| n | $6n + 9$ | $2n^2 + 6n$ | $2n^2 + 6n + 9$ | TPP |
|-----|----------|-------------|-----------------|----------------|
| 1 | 15 | 8 | 17 | (15, 8, 17) |
| 2 | 21 | 20 | 29 | (21, 20, 29) |
| 4 | 33 | 56 | 65 | (33, 56, 65) |
| 5 | 39 | 80 | 89 | (39, 80, 89) |
| 7 | 51 | 140 | 149 | (51, 140, 149) |
| 8 | 57 | 176 | 185 | (57, 176, 185) |
| 10 | 69 | 260 | 269 | (69, 260, 269) |

Reparemos que não aparecem as linhas correspondentes a $n = 3, 6, 9, \dots$, porque estes números não são primos com 3.

Proposição 271 Se (x, y, z) é um terno Pitagórico primitivo, então z é ímpar.

Demonstração

Suponhamos que z é par. Então, $z^2 = x^2 + y^2$ é par. Então, x^2 e y^2 são ambos pares ou ambos ímpares, o mesmo acontecendo com x e y .

Se x e y são ambos pares, então (x, y, z) não é um terno Pitagórico primitivo.

Se x e y são ambos ímpares, então temos $x = 2t - 1$, $y = 2s - 1$ e $z = 2r$.

Então, $4r^2 = 4t^2 - 4t + 1 + 4s^2 - 4s + 1 = 4t^2 - 4t + 4s^2 - 4s + 2$, donde se conclui que 4 divide 2, o que é falso.

Em qualquer dos casos, obtivemos uma contradição. Logo, é absurdo supor que z é par, pelo que z tem de ser ímpar, pelo que está terminada a demonstração.

Observação

Se z é ímpar, podemos supor, sem perda de generalidade, que x é par e y é ímpar, pelo que $z - x = a$ é ímpar.

A questão de determinar todos os ternos Pitagóricos está resolvida, porque todo o terno Pitagórico pode ser obtido a partir dum TPP, multiplicando os seus elementos por um qualquer número inteiro positivo.

Então, podemos afirmar que todo o terno Pitagórico primitivo é da forma

$$\left((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2 \right),$$

tendo-se que os ternos Pitagóricos desta forma são primitivos, se e só se $\text{mdc}(n, 2s - 1) = 1$.

Finalmente, a expressão $(2ukv, ku^2 - kv^2, ku^2 + kv^2)$, com $k, u, v \in \mathbb{N}$ e $u > v$ gera todos os ternos Pitagóricos (à parte a ordem dos dois primeiros elementos dos ternos).

Proposição 272 Para cada número natural n maior ou igual a 3, existe um terno Pitagórico que inclui n .

Demonstração

Se n é ímpar e $n \geq 3$, então existe um natural s , tal que $n = 2s + 1$, pelo que nos basta considerar o terno Pitagórico $(2s + 1, 2s^2 + 2s, 2s^2 + 2s + 1)$.

Se existe um natural s , tal que $n = 4s + 2$, consideramos o terno Pitagórico $(4s + 2, 4s^2 + 4s, 4s^2 + 4s + 2)$.

Finalmente, se $n = 4s$, consideramos o terno $(3s, 4s, 5s)$.

Proposição 273 *Sejam $a, b, p \in \mathbb{N}$, com p primo, tais que (a, b, p) é um terno Pitagórico primitivo. Sejam (x_n) e (y_n) as sucessões definidas por*

$$\begin{cases} x_1 = a, y_1 = b \\ x_{n+1} = ax_n - by_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \end{cases} \quad . \text{ Então, verificam-se as seguintes propriedades:}$$

1. $x_{2n} = x_n^2 - y_n^2, y_{2n} = 2x_n y_n, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $x_n^2 + y_n^2 = p^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\text{mdc}(x_n, y_n, p^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$
4. $(|x_n|, |y_n|, p^n)$ é um terno Pitagórico primitivo, para todo o natural n

Demonstração

1. Para $n = 1$, temos $\begin{cases} x_2 = ax_1 - by_1 = a^2 - b^2 = x_1^2 - y_1^2 \\ y_2 = bx_1 + ay_1 = ba + ab = 2x_1 y_1 \end{cases}$

Hipótese de indução: $x_{2n} = x_n^2 - y_n^2, y_{2n} = 2x_n y_n$

Tese: $x_{2n+2} = x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2, y_{2n+2} = 2x_{n+1} y_{n+1}$

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= ax_{2n+1} - by_{2n+1} = a(ax_{2n} - by_{2n}) - b(bx_{2n} + ay_{2n}) \\ &= a^2 x_{2n} - aby_{2n} - b^2 x_{2n} - aby_{2n} = a^2 x_{2n} - b^2 x_{2n} - 2aby_{2n} \\ &= (a^2 - b^2) x_{2n} - 2aby_{2n} = (a^2 - b^2) (x_n^2 - y_n^2) - 4abx_n y_n \\ &= a^2 x_n^2 - a^2 y_n^2 - b^2 x_n^2 + b^2 y_n^2 - 2abx_n y_n - 2abx_n y_n \\ &= (a^2 x_n^2 - 2abx_n y_n + b^2 y_n^2) - (a^2 y_n^2 + 2abx_n y_n + b^2 x_n^2) \\ &= (ax_n - by_n)^2 - (bx_n + ay_n)^2 = x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2n+2} &= ay_{2n+1} + bx_{2n+1} = a(bx_{2n} + ay_{2n}) + b(ax_{2n} - by_{2n}) \\ &= abx_{2n} + a^2 y_{2n} + abx_{2n} - b^2 y_{2n} = (a^2 - b^2) y_{2n} + 2abx_{2n} \\ &= 2(a^2 - b^2) x_n y_n + 2ab(x_n^2 - y_n^2) = 2a^2 x_n y_n - 2b^2 x_n y_n + 2abx_n^2 - 2aby_n^2 \\ &= 2ax_n (ay_n + bx_n) - 2by_n (ay_n + bx_n) = 2ax_n y_{n+1} - 2by_n y_{n+1} \\ &= 2y_{n+1} (ax_n - by_n) = 2x_{n+1} y_{n+1} \end{aligned}$$

Logo, $x_{2n} = x_n^2 - y_n^2, y_{2n} = 2x_n y_n, \forall n \in \mathbb{N}$

2. Para $n = 1$, temos $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2 = p^2$, porque (a, b, p) é um terno Pitagórico.

Hipótese de indução: $x_n^2 + y_n^2 = p^{2n}$

Tese: $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = p^{2n+2}$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= (ax_n - by_n)^2 + (ay_n + bx_n)^2 \\ &= a^2 x_n^2 - 2abx_n y_n + b^2 y_n^2 + a^2 y_n^2 + 2abx_n y_n + b^2 x_n^2 \\ &= a^2 x_n^2 + b^2 y_n^2 + a^2 y_n^2 + b^2 x_n^2 = a^2 (x_n^2 + y_n^2) + b^2 (x_n^2 + y_n^2) \\ &= (a^2 + b^2) (x_n^2 + y_n^2) = p^2 \times p^{2n} = p^{2n+2} \end{aligned}$$

Logo, $x_n^2 + y_n^2 = p^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$

3. Começamos por observar que $\text{mdc}(x_n, y_n, p^n) = 1$ se e só se $\text{mdc}(x_n, y_n, p) = 1$.

Para $n = 1$, temos $\text{mdc}(x_1, y_1, p) = \text{mdc}(a, b, p) = 1$, porque (a, b, p) é um terno Pitagórico primitivo.

Suponhamos que existia $m \in \mathbb{N}$, tal que $\text{mdc}(x_m, y_m, p^m) \neq 1$. Então, $\text{mdc}(x_m, y_m, p) = p$, pelo que p dividia x_m e p dividia y_m . Então, p dividia x_{m+1} e p dividia y_{m+1} . Então, p dividia x_n e p dividia y_n , para todo o natural n tal que $n \geq m$.

E, como $\text{mdc}(x_1, y_1, p) = 1$, existiria um natural t , tal que $\text{mdc}(x_t, y_t, p) = 1$ e $\text{mdc}(x_{t+1}, y_{t+1}, p) = p$.

Então, $\text{mdc}(x_{2t}, y_{2t}, p) = p$. Mas:

$$\begin{aligned} \text{mdc}(x_{2t}, y_{2t}, p) = p &\implies p \mid x_{2t} \wedge p \mid y_{2t} \implies p \mid x_t^2 - y_t^2 \wedge p \mid 2x_t y_t \\ &\implies p \mid x_t^2 - y_t^2 \wedge (p \mid x_t \vee p \mid y_t) \implies (p \mid y_t^2 \wedge p \mid x_t) \vee (p \mid y_t \wedge p \mid x_t^2) \\ &\implies p \mid x_t \wedge p \mid y_t \end{aligned}$$

Então, teríamos $\text{mdc}(x_t, y_t, p) = p$, contrariamente à hipótese de que $\text{mdc}(x_t, y_t, p) = 1$.

Logo, é absurdo supor que existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $\text{mdc}(x_m, y_m, p^m) \neq 1$.

Então, $\text{mdc}(x_n, y_n, p^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

4. A afirmação de que $(|x_n|, |y_n|, p^n)$ é um terno Pitagórico primitivo, para todo o natural n , é uma consequência imediata de 2. e 3.

Proposição 274 *Seja (x, y, z) um terno Pitagórico primitivo. Então, todo o factor primo de z é congruente com 1, módulo 4.*

Demonstração

Já sabemos que z tem de ser ímpar. Seja p um divisor primo de z . Então, p não divide x , nem divide y . Mas,

$$p \mid z \implies p \mid z^2 \implies p \mid x^2 + y^2 \implies x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$$

Então, -1 é resíduo quadrático, módulo p , pelo que $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Proposição 275 *Sejam (a, b, c) e (d, e, f) dois ternos Pitagóricos primitivos com $\text{mdc}(c, f) = 1$. Então, há pelo menos, dois ternos Pitagóricos primitivos da forma (x, y, cf) .*

Demonstração

Consideremos os ternos $(ad + be, |ae - bd|, cf)$ e $(|ad - be|, ae + bd, cf)$. Ora:

$$\begin{aligned} (ad + be)^2 + (ae - bd)^2 &= a^2 d^2 + 2abde + b^2 e^2 + a^2 e^2 - 2abde + b^2 d^2 \\ &= a^2 d^2 + b^2 e^2 + a^2 e^2 + b^2 d^2 = a^2 (d^2 + e^2) + b^2 (d^2 + e^2) \\ &= (a^2 + b^2) (d^2 + e^2) = c^2 f^2 \end{aligned}$$

Logo, $(ad + be, |ae - bd|, cf)$ é um terno Pitagórico, a menos que se tenha $ae - bd = 0$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $1 < c < f$.

Suponhamos que $ae - bd = 0$. Então, $ad + be = cf$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} ae - bd = 0 \\ ad + be = cf \end{cases} &\implies \begin{cases} ade = bd^2 \\ ade + be^2 = cef \end{cases} \implies bd^2 + be^2 = cef \\ &\implies b(d^2 + e^2) = cef \implies bf^2 = cef \implies bf = ce \end{aligned}$$

Então, c divide b , porque $\text{mdc}(c, f) = 1$. Mas, $\text{mdc}(b, c) = 1$, obtendo-se uma contradição. Então, é absurdo supor $ae - bd = 0$, pelo que

$(ad + be, |ae - bd|, cf)$ é um terno Pitagórico. Falta-nos, ainda, provar que este terno Pitagórico é primitivo.

Suponhamos que existe um número primo p , tal que p divide os números $ad + be$ e $ae - bd$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} p \mid ad + be \\ p \mid ae - bd \end{cases} &\implies \begin{cases} p \mid ade + be^2 \\ p \mid -ade + bd^2 \end{cases} \implies \begin{cases} p \mid ade + be^2 \\ p \mid -ade + bd^2 \end{cases} \\ &\implies p \mid bd^2 + be^2 \implies p \mid b(d^2 + e^2) \implies p \mid bf^2 \implies p \mid b \vee p \mid f^2 \implies p \mid b \vee p \mid f \end{aligned}$$

Suponhamos que p divide b , além de dividir $ad + be$ e $ae - bd$. Então:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} p|ad+be \\ p|ae-bd \\ p|b \end{cases} &\implies \begin{cases} p|ad \\ p|ae \\ p|b \end{cases} \implies \begin{cases} p|a \vee p|d \\ p|a \vee p|e \\ p|b \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} p|a \\ p|b \end{cases} \vee \begin{cases} p|a \\ p|e \\ p|b \end{cases} \vee \begin{cases} p|d \\ p|a \\ p|b \end{cases} \vee \begin{cases} p|d \\ p|e \\ p|b \end{cases} \implies \begin{cases} p|a \\ p|b \end{cases} \vee \begin{cases} p|d \\ p|e \end{cases}
\end{aligned}$$

Obtivemos, assim, uma contradição, pois no primeiro caso, (a, b, c) não era um terno Pitagórico primitivo e, no segundo caso, (d, e, f) não era um terno Pitagórico primitivo. Então, terá de dividir f .

Suponhamos, então, que p divide f , que p divide $ae - bd$ e que p divide $ad + be$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} p|ad+be \\ p|ae-bd \\ p|f \end{cases} &\implies \begin{cases} p|a^2d+abe \\ p|-abe+b^2d \\ p|f \end{cases} \implies \begin{cases} p|a^2d+b^2d \\ p|f \end{cases} \implies \begin{cases} p|(a^2+b^2)d \\ p|f \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} p|c^2d \\ p|f \end{cases} \implies \begin{cases} p|c \vee p|d \\ p|f \end{cases} \implies \begin{cases} p|c \\ p|f \end{cases} \vee \begin{cases} p|d \\ p|f \end{cases}
\end{aligned}$$

Em qualquer dos casos obtemos uma contradição.

Logo, é absurdo supor que existe um número primo p , tal que p divide os números $ad + be$ e $ae - bd$.

Logo, $(ad + be, |ae - bd|, cf)$ é um terno Pitagórico primitivo.

Analogamente, se provava que $(|ad - be|, ae + bd, cf)$ é um terno Pitagórico primitivo.

Ainda falta mostrar que os dois ternos são distintos.

Como $ad + be \neq |ad - be|$, basta-nos verificar que $ad + be \neq ae + bd$:

Suponhamos que $ad + be = ae + bd$. Então, $ad - ae + be - bd = 0$. Logo, $a(d - e) - b(d - e) = 0$, donde se conclui que $(a - b)(d - e) = 0$, ou seja, $a = b$ ou $d = e$, o que é uma contradição, pois não há ternos Pitagóricos da forma (x, x, z) .

Logo, é absurdo supor que $ad + be = ae + bd$, pelo que os dois ternos Pitagóricos são distintos.

Proposição 276 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$, com p um número primo congruente com 1, módulo 4. Então, à parte a ordem dos dois primeiros elementos, existe um único terno Pitagórico primitivo da forma (x, y, p^n) .*

Demonstração

Já sabemos que existe, pelo menos, um terno Pitagórico primitivo da forma (x, y, p^n) . Então, $x^2 + y^2 = p^{2n}$. Como $p \equiv 1 \pmod{4}$, temos $p = a^2 + b^2$, para certos naturais a e b . Consideremos os inteiros Gaussianos $x + yi$ e $a + bi$.

Como a norma de $x + yi$ é $x^2 + y^2 = p^{2n}$, então um dos inteiros Gaussianos $a + bi$ e $a - bi$ divide $x + yi$.

Mas não pode verificar-se que $a + bi$ e $a - bi$ dividam $x + yi$, pois, nesse caso, teríamos que p dividia $x + yi$, ou seja, p dividia x e p dividia y , pelo que (x, y, p^n) não era um terno Pitagórico primitivo. Suponhamos que $a + bi$ divide $x + yi$.

Então, $x + yi = (a + bi)(x_1 + iy_1)$ e $N(x_1 + iy_1) = p^{2n-1}$.

E, mais uma vez, $a + bi$ divide $x_1 + iy_1$, pois, se $a - bi$ dividisse $(x_1 + iy_1)$, então p dividia $x + yi$.

A aplicação sucessiva deste raciocínio leva-nos a concluir que temos $x + yi = u(a + bi)^{2n}$, onde u é uma unidade de $\mathbb{Z}(i)$, ou seja, u é um dos quatro números $1, -1, i, -i$. Então, os números naturais x e y estão bem determinados, só havendo duas hipóteses. Na primeira, x é o módulo da parte real de $(a + bi)^{2n}$ e y é o módulo da parte imaginária de $(a + bi)^{2n}$, enquanto que, na segunda hipótese, temos a situação inversa.

Se $a - bi$ divide $x + yi$, chegamos a uma conclusão análoga, pois $(a - bi)^{2n}$ é o conjugado de $(a + bi)^{2n}$.

É claro que se tivéssemos considerado o número $y + xi$, em vez de $x + yi$, a conclusão seria a mesma.

Fica, assim, provado que, à parte a ordem de x e y , há um único terno Pitagórico da forma (x, y, p^n) .

Proposição 277 *Sejam p_1, \dots, p_k , k números primos congruentes com 1, módulo 4, distintos dois a dois. Sejam $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Então, à parte a ordem dos números x e y , há, exactamente, 2^{k-1} ternos Pitagóricos primitivos da forma $(x, y, p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k})$.*

Exemplo 278 Vejamos como obter todos os ternos Pitagóricos primitivos da forma $(x, y, 5^4 \times 13^3 \times 17^2)$, ou seja, da forma $(x, y, 396\,833\,125)$:

Como $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$ e $17 = 4^2 + 1^2$, começamos por calcular $(2+i)^8$, $(3+2i)^6$ e $(4+i)^4$:

$$(2+i)^8 = (3+4i)^4 = (-7+24i)^2 = -527-336i$$

$$(3+2i)^6 = (5+12i)^3 = (5+12i)(-119+120i) = -2035-828i$$

$$(4+i)^4 = (15+8i)^2 = 225+240i-64 = 161+240i$$

E, agora, calculamos:

$$\begin{aligned} (2+i)^8 (3+2i)^6 (4+i)^4 &= (-527-336i)(-2035-828i)(161+240i) \\ &= (794\,237+1120\,116i)(161+240i) = -140\,955\,683+370\,955\,556i \end{aligned}$$

E, deste modo, obtivemos $(140\,955\,683, 370\,955\,556, 396\,833\,125)$, um dos ternos Pitagóricos primitivos procurados.

$$\begin{aligned} (2+i)^8 (3+2i)^6 (4-i)^4 &= (-527-336i)(-2035-828i)(161-240i) \\ &= (794\,237+1120\,116i)(161-240i) = 396\,699\,997-10\,278\,204i \end{aligned}$$

E, desta vez, obtivemos $(396\,699\,997, 10\,278\,204, 396\,833\,125)$, outro dos ternos Pitagóricos primitivos procurados.

$$\begin{aligned} (2+i)^8 (3-2i)^6 (4+i)^4 &= (-527-336i)(-2035+828i)(161+240i) \\ &= (1350\,653+247\,404i)(161+240i) = 158\,078\,173+363\,988\,764i \end{aligned}$$

E, assim, obtivemos $(158\,078\,173, 363\,988\,764, 396\,833\,125)$.

$$\begin{aligned} (2+i)^8 (3-2i)^6 (4-i)^4 &= (-527-336i)(-2035+828i)(161-240i) \\ &= (1350\,653+247\,404i)(161-240i) = 276\,832\,093-284\,324\,676i \end{aligned}$$

E, assim, obtivemos $(276\,832\,093, 284\,324\,676, 396\,833\,125)$, o último terno Pitagórico procurado.

Se pretendermos distinguir a ordem dos dois primeiros elementos dos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(x, y, 396\,833\,125)$, temos os oito ternos:

$$\begin{array}{ll} (140\,955\,683, 370\,955\,556, 396\,833\,125) & (370\,955\,556, 140\,955\,683, 396\,833\,125) \\ (10\,278\,204, 396\,699\,997, 396\,833\,125) & (396\,699\,997, 10\,278\,204, 396\,833\,125) \\ (158\,078\,173, 363\,988\,764, 396\,833\,125) & (363\,988\,764, 158\,078\,173, 396\,833\,125) \\ (276\,832\,093, 284\,324\,676, 396\,833\,125) & (284\,324\,676, 276\,832\,093, 396\,833\,125) \end{array}$$

11.1 A trigonometria e os ternos Pitagóricos

Vamos, agora, abordar o tema dos ternos Pitagóricos ao nível de 12º Ano, utilizando conhecimentos elementares de trigonometria.

Consideremos o terno Pitagórico $(3, 4, 5)$. Da igualdade $3^2 + 4^2 = 25$, podemos obter a nova igualdade $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, que nos faz recordar a fórmula fundamental da trigonometria. Concluimos, então, que existe um número real α , tal que $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ e $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

$$\text{Então, } \begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25} \\ \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \end{cases}$$

E como $\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) = 1$, temos que $(-\frac{7}{25})^2 + (\frac{24}{25})^2 = 1$.

Da igualdade anterior vem que $7^2 + 24^2 = 25^2$, ou seja, $(7, 24, 25)$ é um novo terno Pitagórico (primitivo).

E podemos continuar, de modo a obter mais ternos Pitagóricos primitivos:

$$\begin{cases} \cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha = -\frac{7}{25} \times \frac{3}{5} - \frac{24}{25} \times \frac{4}{5} = -\frac{117}{125} \\ \sin(3\alpha) = \sin(2\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(2\alpha) = \frac{24}{25} \times \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{7}{25} = \frac{44}{125} \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, obtemos o ternos Pitagórico primitivo (44, 117, 125).

$$\begin{cases} \cos(4\alpha) = \cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = \frac{49}{625} - \frac{576}{625} = -\frac{527}{625} \\ \sin(4\alpha) = 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) = 2 \times \frac{24}{25} \times \left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{336}{625} \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, obtemos o ternos Pitagórico primitivo (336, 527, 625).

$$\begin{cases} \cos(5\alpha) = \cos(4\alpha)\cos\alpha - \sin(4\alpha)\sin\alpha = -\frac{527}{625} \times \frac{3}{5} + \frac{336}{625} \times \frac{4}{5} = -\frac{237}{3125} \\ \sin(5\alpha) = \sin(4\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(4\alpha) = -\frac{336}{625} \times \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{527}{625} = -\frac{3116}{3125} \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, obtemos o ternos Pitagórico primitivo (237, 3116, 3125).

Mas podemos ir mais além: Suponhamos que, pelo processo anterior, temos os números x_n e y_n , dados por

$$\begin{cases} \cos(n\alpha) = \frac{x_n}{5^n} \\ \sin(n\alpha) = \frac{y_n}{5^n} \end{cases}.$$

Então, temos:

$$\begin{cases} \cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha = \frac{3}{5} \times \frac{x_n}{5^n} - \frac{4}{5} \times \frac{y_n}{5^n} \\ \sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(n\alpha) = \frac{3}{5} \times \frac{y_n}{5^n} + \frac{4}{5} \times \frac{x_n}{5^n} \end{cases}$$

Das igualdades anteriores obtemos $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 4y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n \end{cases}$, o que define, por recorrência, as sucessões (x_n) e (y_n) , uma vez que são conhecidos x_1 e y_1 .

E é relativamente fácil demonstrar por indução que $(x_n, y_n, 5^n)$ é um terno Pitagórico, sendo a parte mais complicada mostrar que $\text{mdc}(x_n, y_n, 5^n) = 1$, o que prova que o terno Pitagórico é primitivo.

Neste exemplo, considerámos o número primo 5, mas podemos utilizar qualquer primo congruente com 1, módulo 4, como, por exemplo, 13, 17, 29 ou outro.

Exemplo 279 Suponhamos que temos dois ternos Pitagóricos e vejamos como obter um terceiro terno Pitagórico, a partir dos dois ternos anteriores.

Consideremos os ternos Pitagóricos (3, 4, 5) e (5, 12, 13). Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$ e $\sin\beta = \frac{12}{13}$. Então:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = -\frac{33}{65} \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{12}{5} \times \frac{3}{13} = \frac{56}{65} \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{63}{65} \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{12}{5} \times \frac{3}{13} = -\frac{16}{65} \end{cases}$$

E daqui se obtêm os ternos Pitagóricos primitivos (33, 56, 65) e (16, 63, 65).

E podemos continuar:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25} \\ \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \\ \cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169} \\ \sin(2\beta) = 2\sin\beta\cos\beta = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169} \end{cases}$$

E, ainda:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha + \beta) = \cos(2\alpha)\cos\beta - \sin(2\alpha)\sin\beta = -\frac{7}{25} \times \frac{5}{13} - \frac{24}{25} \times \frac{12}{13} = -\frac{323}{325} \\ \sin(2\alpha + \beta) = \sin(2\alpha)\cos\beta + \sin\beta\cos(2\alpha) = \frac{24}{25} \times \frac{5}{13} - \frac{7}{25} \times \frac{12}{13} = \frac{36}{325} \\ \cos(2\alpha - \beta) = \cos(2\alpha)\cos\beta + \sin(2\alpha)\sin\beta = -\frac{7}{25} \times \frac{5}{13} + \frac{24}{25} \times \frac{12}{13} = \frac{253}{325} \\ \sin(2\alpha - \beta) = \sin(2\alpha)\cos\beta - \sin\beta\cos(2\alpha) = \frac{24}{25} \times \frac{5}{13} + \frac{7}{25} \times \frac{12}{13} = \frac{204}{325} \\ \cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha\cos(2\beta) - \sin\alpha\sin(2\beta) = \frac{3}{5} \times \frac{119}{169} - \frac{4}{5} \times \frac{120}{169} = -\frac{837}{845} \\ \sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos\alpha = -\frac{4}{5} \times \frac{119}{169} + \frac{120}{5} \times \frac{3}{169} = -\frac{116}{845} \\ \cos(\alpha - 2\beta) = \cos\alpha\cos(2\beta) + \sin\alpha\sin(2\beta) = \frac{3}{5} \times \frac{119}{169} + \frac{4}{5} \times \frac{120}{169} = \frac{123}{845} \\ \sin(\alpha - 2\beta) = \sin\alpha\cos(2\beta) - \sin(2\beta)\cos\alpha = -\frac{4}{5} \times \frac{119}{169} - \frac{120}{5} \times \frac{3}{169} = -\frac{836}{845} \end{cases}$$

E daqui obtemos os ternos Pitagóricos primitivos (36, 323, 325), (204, 253, 325), (116, 837, 845) e (123, 836, 845).

É claro que o processo pode prolongar-se.

11.2 Os números complexos e os ternos Pitagóricos

Podemos, também, utilizar conhecimentos elementares dos números complexos, para tratar o tema dos ternos Pitagóricos.

Consideremos o número complexo $3 + 4i$. O módulo deste complexo é dado por $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, o que significa que $3^2 + 4^2 = 5^2$, obtendo-se, assim, o terno Pitagórico $(3, 4, 5)$.

E, pelo cálculo das sucessivas potências de $3 + 4i$, obtemos novos ternos Pitagóricos, uma vez que o módulo do produto de um número finito de números complexos é o produto dos módulos desses números.

$$\begin{cases} (3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i \\ |-7 + 24i| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 5^2 \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, descobrimos o terno Pitagórico primitivo $(7, 24, 25)$.

$$\begin{cases} (3 + 4i)^3 = (-7 + 24i)(3 + 4i) = -21 - 28i + 72i + 96i^2 = -117 + 44i \\ |-117 + 44i| = 5^3 \end{cases}$$

Das duas igualdades anteriores, descobrimos o terno Pitagórico primitivo $(44, 117, 125)$.

Vejamos, agora, como obter duas sucessões que vão definir os sucessivos ternos Pitagóricos:

Suponhamos que $(3 + 4i)^n = x_n + iy_n$, com $x_n + iy_n \in \mathbb{N}$. Então:

$$(3 + 4i)^{n+1} = (x_n + iy_n)(3 + 4i) = 3x_n + 4ix_n + 3iy_n - 4y_n = 3x_n - 4y_n + i(4x_n + 3y_n)$$

E daqui, obtemos a sucessão definida por
$$\begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4 \\ x_{n+1} = 3x_n - 4y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n \end{cases}$$

Estão, assim definidos infinitos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(x^n, y^n, 5^n)$.

Utilizando uma Calculadora gráfica, podemos definir as funções anteriores e, assim, obter os ternos Pitagóricos.

Consideremos o número complexo $5 + 12i$. O módulo deste complexo é dado por $|5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, o que significa que $5^2 + 12^2 = 13^2$, obtendo-se, assim, o terno Pitagórico $(5, 12, 13)$.

E, pelo cálculo das sucessivas potências de $5 + 12i$, obtemos novos ternos Pitagóricos, uma vez que o módulo do produto de um número finito de números complexos é o produto dos módulos desses números.

$$\begin{cases} (5 + 12i)^2 = 25 + 120i + 144i^2 = -119 + 120i \\ |-119 + 120i| = \sqrt{(-119)^2 + 120^2} = \sqrt{28561} = 169 = 13^2 \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, descobrimos o terno Pitagórico primitivo $(119, 120, 13^2)$.

$$\begin{cases} (5 + 12i)^3 = (-119 + 120i)(5 + 12i) = -595 - 1428i + 600i + 1440i^2 = -2035 - 828i \\ |-2035 - 828i| = \sqrt{(-2035)^2 + (-828)^2} = 2197 = 13^3 \end{cases}$$

Das duas igualdades anteriores, descobrimos o terno Pitagórico primitivo $(828, 2035, 13^3)$.

Vejamos, agora, como obter duas sucessões que vão definir os sucessivos ternos Pitagóricos:

Suponhamos que $(5 + 12i)^n = x_n + iy_n$, com $x_n + iy_n \in \mathbb{N}$. Então:

$$(5 + 12i)^{n+1} = (x_n + iy_n)(5 + 12i) = 5x_n + 12ix_n + 5iy_n - 12y_n = 5x_n - 12y_n + i(12x_n + 5y_n)$$

E daqui, obtemos a sucessão definida por
$$\begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4 \\ x_{n+1} = 5x_n - 12y_n \\ y_{n+1} = 12x_n + 5y_n \end{cases}$$

Consideremos os ternos Pitagóricos $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$. A partir destes dois ternos, podemos obter outros ternos Pitagóricos:

$$\begin{cases} (3 + 4i)(5 - 12i) = 15 - 36i + 20i - 48i^2 = 63 - 16i \\ |63 - 16i| = \sqrt{63^2 + 16^2} = \sqrt{4225} = 65 = 5 \times 13 \\ (3 + 4i)(5 + 12i) = 15 + 36i + 20i + 48i^2 = -33 + 56i \\ |-33 + 56i| = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{4225} = 65 = 5 \times 13 \end{cases}$$

E, assim, obtivemos os dois ternos Pitagóricos $(16, 63, 5 \times 13)$ e $(33, 56, 5 \times 13)$.

Se pretendêssemos os ternos Pitagóricos da forma $(x, y, 5^2 \times 13)$, calculávamos $(3 + 4i)^2(5 - 12i) = 253 + 204i$ e $(3 + 4i)^2(5 + 12i) = -323 + 36i$, pelo que obtínhamos os ternos Pitagóricos $(204, 253, 5^2 \times 13)$ e $(36, 323, 5^2 \times 13)$.

Não podemos deixar de chamar a atenção para o importante facto deste assunto estar intimamente relacionado com a decomposição dum número natural numa soma de dois quadrados. Assim, $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, enquanto que 7 não pode decompor-se numa soma de menos de quatro quadrados: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$.

Finalizamos, realçando o facto da Trigonometria estar intimamente relacionada com os Números Complexos, pelo que era de esperar o paralelismo existente entre as duas maneiras de abordar este Tema, a nível de 12º Ano.

Capítulo 12

Primitivas

Definição 280 *Primitiva de uma função real de variável real $f(x)$ é uma função real de variável real $F(x)$, tal que a derivada de $F(x)$ é $f(x)$, escrevendo-se $F'(x) = f(x)$, ou $\int f(x) dx = F(x)$.*

Convém observar que a primitiva duma função não é única. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $F(x) + k$, com $k \in \mathbb{R}$, também é primitiva de $f(x)$.

12.1 Primitivas Imediatas

Primitiva imediata é toda a primitiva que resulta duma regra de derivação (em sentido inverso). Não distinguiremos primitiva imediata de primitiva quase imediata. E por vezes acontece que temos uma primitiva imediata e não nos apercebemos do facto.

Exemplo 281 *Calculemos uma primitiva da função $f(x) = x + 2$.*

$$\int f(x) dx = \int (x + 2) dx = \frac{x^2}{2} + 2x, \text{ tendo-se que qualquer primitiva da função } f(x) = x + 2 \text{ é da forma } \frac{x^2}{2} + 2x + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 282 *Primitiva da função $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 1$.*

$$\int (x^3 + 4x^2 - 5x + 1) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + x + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 283 *Primitiva da função $f(x) = x^\alpha$, com $\alpha \neq -1$.*

$$\int f(x) dx = \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 284 *Primitiva da função $f(x) = \sqrt{x}$.*

$$\int f(x) dx = \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 285 *Primitiva da função $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.*

$$\int f(x) dx = \int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + k = \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + k = \frac{5}{8} x \sqrt[5]{x^3} + k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 286 *Primitiva da função $f(x) = \cos x$*

$$\int \cos x dx = k + \sin x$$

Exemplo 287 *Primitiva da função* $f(x) = \sin x$

$$\int \sin x dx = -\int -\sin x dx = k - \cos x$$

Exemplo 288 *Primitiva da função* $f(x) = \cos(2x)$

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx = k + \frac{1}{2} \sin(2x)$$

Exemplo 289 *Primitiva da função* $f(x) = \sin(2x)$

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \int -2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + k$$

Exemplo 290 *Primitiva da função* $f(x) = \sec^2 x$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

Exemplo 291 *Primitiva da função* $f(x) = \csc^2 x$

$$\int \csc^2 x dx = -\int -\csc^2 x dx = \cot x + k$$

Exemplo 292 *Primitiva da função* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + k$$

Exemplo 293 *Primitiva da função* $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + k \text{ ou } \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arcsin x + c$$

Exemplo 294 *Primitiva da função* $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + k$$

Exemplo 295 *Primitiva da função* $f(x) = -\frac{1}{x^2+1}$.

$$\int -\frac{1}{x^2+1} dx = -\arctan x + k = \operatorname{arccot} x + c$$

Exemplo 296 *Primitiva da função* $f(x) = e^x$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

Exemplo 297 *Primitiva da função* $f(x) = e^{2x+1}$

$$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x+1} dx = e^{2x+1} + k$$

Exemplo 298 *Primitiva da função* $f(x) = 2xe^{x^2-2}$

$$\int 2xe^{x^2-2} dx = e^{x^2-2} + k$$

Exemplo 299 *Primitiva da função* $f(x) = x^2e^{x^3-2}$

$$\int x^2e^{x^3-2} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2e^{x^3-2} dx = e^{x^3-2} + k$$

Exemplo 300 *Primitiva da função* $f(x) = \sin x \cos x$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int \sin x (\sin x)' dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + k \\ \int \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \int -2 \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \cos(2x) + c \end{aligned}$$

Exemplo 301 *Primitiva da função* $f(x) = \cos^2 x$

Da igualdade $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$, vem $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Então,

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int 2\cos(2x) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + k$$

Exemplo 302 *Primitiva da função* $f(x) = \frac{1}{x}$.

Começemos por observar que a derivada de $\ln x$ é $\frac{1}{x}$ e que a derivada de $\ln(-x)$ também é $\frac{1}{x}$. Então, a derivada de $\ln|x| = \frac{1}{x}$. Mais, geralmente, se u é uma função derivável, então a derivada de $\ln|u|$ é $\frac{u'}{u}$.

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$$

Embora seja comum apresentar a resposta anterior, ela não está totalmente correcta, pois não é a situação mais geral. A resposta totalmente correcta é a seguinte:

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + k_1 & \Leftarrow x > 0 \\ \ln(-x) + k_2 & \Leftarrow x < 0 \end{cases}, \text{ não sendo obrigatório que as constantes } k_1 \text{ e } k_2 \text{ sejam}$$

iguais. Assim, uma das primitivas de $f(x)$ é a função $h(x) = \begin{cases} \ln x + 2 & \Leftarrow x > 0 \\ \ln(-x) + 3 & \Leftarrow x < 0 \end{cases}$, função esta que não é do tipo $F(x) = \ln|x| + k$.

Exemplo 303 *Primitiva da função* $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + k$$

Observe-se que $x^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 304 *Primitiva da função* $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^3+x}$

$$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx = \ln|x^3+x| + k$$

De modo mais correcto, mas com mais símbolos para escrever é $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx = \begin{cases} \ln(x^3+x) + k_1 & \Leftarrow x > 0 \\ \ln(-x^3-x) + k_2 & \Leftarrow x < 0 \end{cases}$

Exemplo 305 *Primitiva da função* $f(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-x}$

$$\int \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx = \ln|x^3-x| + k$$

De modo mais correcto: $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx = \begin{cases} \ln(-x^3+x) + k_1 & \Leftarrow x < -1 \\ \ln(x^3-x) + k_2 & \Leftarrow -1 < x < 0 \\ \ln(-x^3+x) + k_3 & \Leftarrow 0 < x < 1 \\ \ln(x^3-x) + k_4 & \Leftarrow x > 1 \end{cases}$

Exemplo 306 *Primitiva da função* $f(x) = \tan x$

$$\int \tan x dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + k$$

Neste caso, deixamos a expressão com a forma anterior, pois o modo correcto envolve infinitas constantes e ultrapassa os nossos objectivos.

Exemplo 307 *Primitiva da função* $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$

$$\int \frac{1}{x} \ln x dx = \int (\ln x)' \ln x dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + k$$

Exemplo 308 *Primitiva da função* $f(x) = \cos x e^{\sin x}$

$$\int \cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + k$$

Exemplo 309 *Primitiva da função* $f(x) = \cos^4 x$

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} dx \\
&= \int \frac{1}{4} dx + \frac{1}{4} \int 2\cos(2x) dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) dx = \frac{x}{4} + k + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} dx \\
&= \frac{x}{4} + k + \frac{1}{4} \sin(2x) + \int \frac{1}{8} dx + \frac{1}{32} \int 4\cos(4x) dx = \frac{x}{4} + k + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \sin(4x) \\
&= \frac{3x}{8} + k + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x)
\end{aligned}$$

É claro que este exemplo não é uma primitiva imediata, embora a função tenha sido transformada, de modo a obter uma primitiva imediata.

12.2 Primitivação por Partes

Um método muito importante, na primitivação de funções tem por base a fórmula da derivada do produto de duas funções deriváveis: $(f \times g)' = f'g + fg'$, fórmula esta que pode ser escrita de modo completo:

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

A partir da igualdade $(f \times g)' = f'g + fg'$, temos $f'g = (f \times g)' - fg'$.

Da última igualdade vem que $P(f'g) = fg - P(fg')$, uma vez que uma primitiva duma diferença é a diferença entre as primitivas.

Repare-se que, na fórmula anterior, substituímos o cálculo da primitiva de $f'g$ pelo cálculo de $P(fg')$. Embora pareça que não se lucrou nada com o facto, isso pode não ser verdade, uma vez que fg' pode ser mais fácil de primitivar do que $f'g$. Além disso, temos de obter uma primitiva de f' . Vejamos alguns exemplos de primitivação por partes:

Exemplo 310 *Primitiva da função $h(x) = xe^x$*

O primeiro passo consiste em escolher as funções $f'(x)$ e $g(x)$. É claro que interessa fazer $f'(x) = e^x = f(x)$ e $g(x) = x$, donde vem $g'(x) = 1$. Então, $\int xe^x dx = xe^x - P(1e^x) = xe^x - e^x + k$.

Exemplo 311 *Primitiva da função $h(x) = x^2e^x$*

Neste caso, fazemos $f'(x) = e^x = f(x)$ e $g(x) = x^2$. Então, $g'(x) = 2x$, donde vem $\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int (2xe^x) dx$.

E o processo tem de continuar: $x^2e^x - \int (2xe^x) dx = x^2e^x - (2xe^x - \int (2e^x) dx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + k = (x^2 - 2x + 2)e^x + k$.

Exemplo 312 *Primitiva da função $h(x) = \ln x$*

Neste caso, fazemos um truque muito conhecido: $P(\ln x) = P(1 \ln x)$, $f'(x) = 1$, $g(x) = \ln x$. Então, $f(x) = x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$. Logo,

$$P(\ln x) = P(1 \ln x) = x \ln x - P\left(x \times \frac{1}{x}\right) = x \ln x - P1 = x \ln x - x + k$$

Exemplo 313 *Primitiva da função $h(x) = (x^2 + x - 3) \ln x$*

Neste caso, temos $f'(x) = x^2 + x - 3$, $g(x) = \ln x$. Então, $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$. Logo,

$$\begin{aligned}
P((x^2 + x - 3) \ln x) &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \right) \ln x - P\left(\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \right) \times \frac{1}{x}\right) \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \right) \ln x - P\left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} - 3\right) \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + 3x + k
\end{aligned}$$

Exemplo 314 *Primitiva da função* $h(x) = \cos^2 x$

Como $P(\cos^2 x) = P(\cos x \cos x)$, podemos fazer $f'(x) = \cos x, g(x) = \cos x$.

Então, $f(x) = \sin x, g'(x) = -\sin x$, pelo que

$$P(\cos x \cos x) = \sin x \cos x - P(\sin x \times (-\sin x)) = \sin x \cos x + P(\sin^2 x).$$

1. E a primitiva de $\cos^2 x$ está dependente do cálculo da primitiva de $\sin^2 x$. Mas, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, pelo que

$$P(\cos^2 x) = \sin x \cos x + P(1 - \cos^2 x), \text{ ou seja, } 2P(\cos^2 x) = \sin x \cos x + x + c, \text{ donde vem}$$

$$P(\cos^2 x) = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{c}{2} = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2} + \frac{c}{2}.$$

Exemplo 315 *Primitiva da função* $h(x) = \arcsin x$

Como $P(\arcsin x) = P(1 \arcsin x)$, temos $f'(x) = 1, g(x) = \arcsin x$. Então, $f(x) = x, g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Logo,

$$\begin{aligned} P(1 \arcsin x) &= x \arcsin x - P\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x \arcsin x + \frac{1}{2}P\left(-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + k = x \arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + k \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + k \end{aligned}$$

Exemplo 316 *Primitiva da função* $h(x) = \arccos x$

Como $P(\arccos x) = P(1 \arccos x)$, temos $f'(x) = 1, g(x) = \arccos x$. Então, $f(x) = x, g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Logo,

$$\begin{aligned} P(1 \arccos x) &= x \arccos x - P\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x \arccos x - \frac{1}{2}P\left(-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \\ &= x \arccos x - \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + k = x \arccos x - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + k \\ &= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + k \end{aligned}$$

Exemplo 317 *Primitiva da função* $h(x) = \arctan x$

Como $P(\arctan x) = P(1 \arctan x)$, temos $f'(x) = 1, g(x) = \arctan x$. Então, $f(x) = x, g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Logo,

$$P(1 \arctan x) = x \arctan x - P\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = x \arctan x - \frac{1}{2}P\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + k$$

Exemplo 318 *Primitiva da função* $h(x) = \operatorname{arccot} x$

Como $P(\operatorname{arccot} x) = P(1 \operatorname{arccot} x)$, temos $f'(x) = 1, g(x) = \operatorname{arccot} x$. Então, $f(x) = x, g'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$.

Logo,

$$\begin{aligned} P(1 \operatorname{arccot} x) &= x \operatorname{arccot} x - P\left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}P\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \\ &= x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + k \end{aligned}$$

Exemplo 319 *Primitiva da função* $h(x) = e^x \sin x$

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx \right) \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx + 2C
\end{aligned}$$

Então, $2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + 2C$, donde se conclui que

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + C$$

Exemplo 320 Primitiva da função $h(x) = e^x \cos x$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx + 2C$$

Então, $2 \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x + 2C$, donde se conclui que

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C$$

Exemplo 321 Primitiva da função $h(x) = x^2 e^x \sin x$

Sejam $f'(x) = x^2 e^x$, $g(x) = \sin x$. Logo, $f(x) = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$.

Então, $f(x) = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = (x^2 - 2x + 2) e^x$.

Além disso, $g'(x) = \cos x$. Então, $\int x^2 e^x \sin x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \sin x - \int (x^2 - 2x + 2) e^x \cos x dx$.

Repetindo o processo, temos $\int (x^2 - 2x + 2) e^x dx = (x^2 - 4x + 6) e^x$, pelo que

$$\int (x^2 - 2x + 2) e^x \cos x dx = (x^2 - 4x + 6) e^x \cos x + \int (x^2 - 4x + 6) e^x \sin x dx$$

Então, $\int x^2 e^x \sin x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \sin x - (x^2 - 4x + 6) e^x \cos x - \int (x^2 - 4x + 6) e^x \sin x dx$.

Logo, $2 \int x^2 e^x \sin x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \sin x - (x^2 - 4x + 6) e^x \cos x + \int (4x - 6) e^x \sin x dx$.

E, deste modo, obtivemos $\int (4x - 6) e^x \sin x dx$, primitiva esta que tem um polinómio de 1º grau em vez dum polinómio de 2º grau.

Repetindo todo o processo, obtemos $\int e^x \sin x dx$.

$$\begin{aligned}
\int x e^x \sin x dx &= (x - 1) e^x \sin x - \int (x - 1) e^x \cos x dx \\
&= (x - 1) e^x \sin x - (x - 2) e^x \cos x - \int (x - 2) e^x \sin x dx \\
&= (x - 1) e^x \sin x - (x - 2) e^x \cos x - \int x e^x \sin x dx + 2 \int e^x \sin x dx
\end{aligned}$$

Então,

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} (x - 1) e^x \sin x - \frac{1}{2} (x - 2) e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

Ora, $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$.

Então, $2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$, isto é, $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$.

Então,

$$\begin{aligned} \int x e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} (x-1) e^x \sin x - \frac{1}{2} (x-2) e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \\ &= \frac{x}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} (x-1) e^x \cos x \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2 \int x^2 e^x \sin x dx &= (x^2 - 2x + 2) e^x \sin x - (x^2 - 4x + 6) e^x \cos x + \int (4x - 6) e^x \sin x dx \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x \sin x - (x^2 - 4x + 6) e^x \cos x + 4 \int x e^x \sin x dx - 6 \int e^x \sin x dx \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{cases} 4 \int x e^x \sin x dx = 2x e^x \sin x - 2(x-1) e^x \cos x \\ 6 \int e^x \sin x dx = 3e^x (\sin x - \cos x) \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int (4x - 6) e^x \sin x dx &= 2x e^x \sin x - 2(x-1) e^x \cos x - 3e^x (\sin x - \cos x) \\ &= (2x e^x - 3e^x) \sin x - (2x - 5) e^x \cos x \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2 \int x^2 e^x \sin x dx &= (x^2 - 2x + 2) e^x \sin x - (x^2 - 4x + 6) e^x \cos x + \int (4x - 6) e^x \sin x dx \\ &= (x^2 - 2x + 2) e^x \sin x - (x^2 - 4x + 6) e^x \cos x + (2x - 3) e^x \sin x - (2x - 5) e^x \cos x \\ &= (x^2 - 2x + 2 + 2x - 3) e^x \sin x - (x^2 - 4x + 6 + 2x - 5) e^x \cos x \\ &= (x^2 - 1) e^x \sin x - (x^2 - 2x + 1) e^x \cos x \end{aligned}$$

E, finalmente, temos

$$\int x^2 e^x \sin x dx = \frac{x^2 - 1}{2} e^x \sin x - \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) e^x \cos x + C$$

Esta primitiva pode ser calculada de maneira mais simples, se conseguirmos prever a sua forma:

Suponhamos que $\int x^2 e^x \sin x dx = (Ax^2 + Bx + C) e^x \sin x + (Dx^2 + Ex + F) e^x \cos x + K$.

Então, derivando o segundo membro, vamos obter $x^2 e^x \sin x$.

Começemos pela derivada da primeira parcela:

$$(2Ax + B) e^x \sin x + (Ax^2 + Bx + C) e^x \sin x + (Ax^2 + Bx + C) e^x \cos x$$

Passemos à derivada da segunda parcela:

$$(2Dx + E) e^x \cos x + (Dx^2 + Ex + F) e^x \cos x - (Dx^2 + Ex + F) e^x \sin x$$

Comparemos com $x^2 e^x \sin x$. Então,

$$\begin{cases} 2Ax + B + Ax^2 + Bx + C - Dx^2 - Ex - F = x^2 \\ Ax^2 + Bx + C + 2Dx + E + Dx^2 + Ex + F = 0 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} A - D = 1 \\ 2A + B - E = 0 \\ B + C - F = 0 \\ A + D = 0 \\ B + 2D + E = 0 \\ C + E + F = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B - E = -1 \\ B + C - F = 0 \\ D = -\frac{1}{2} \\ B + E = 1 \\ C + E + F = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C - F = 0 \\ D = -\frac{1}{2} \\ E = 1 \\ C + F = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = -\frac{1}{2} \\ E = 1 \\ F = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x \sin x dx &= (Ax^2 + Bx + C) e^x \sin x + (Dx^2 + Ex + F) e^x \cos x + K \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) e^x \sin x + \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right) e^x \cos x + K \end{aligned}$$

12.3 Primitivação de Funções Racionais

Função racional é um quociente entre duas funções polinomiais. Claro que nos interessa o quociente entre duas funções polinomiais na variável x .

Exemplo 322 Primitivar a função $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int \frac{x^3+x-x}{x^2+1} dx = \int \frac{x^3+x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + k$$

$$\text{Primitivar a função } f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2}{x^2+1} dx &= \int \frac{x^3+x-x+2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^3+x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx \\ &= \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \arctan x + k \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x + k \end{aligned}$$

Exemplo 323 Primitivar a função $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1} dx = \int \frac{3x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \arctan x = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + \arctan x + k$$

Exemplo 324 Primitivar a função $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x+1}$

Este exemplo é mais complicado do que o anterior. Como x^2+x+1 não tem raízes reais, $(x^2+x+1)' = 2x+1$ e no numerador da função a primitivar aparece $3x$, interessa-nos obter a expressão $\frac{3}{2}(2x+1)$, ou seja, $3x + \frac{3}{2}$.

Então,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{3x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{3x + \frac{3}{2}}{x^2+x+1} dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx \\
 &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} dx \\
 &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} dx \\
 &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} dx \\
 &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} dx \\
 &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + k
 \end{aligned}$$

Exemplo 325 Primitivar a função $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-1}$

Este exemplo é mais fácil do que o anterior. Como $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ e o numerador $3x+1$ tem grau inferior ao denominador x^2-1 , a fracção $\frac{3x+1}{x^2-1}$ pode decompor-se na soma $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, com A e B a determinar:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1} = \frac{3x+1}{x^2-1}, \text{ pelo que deve ser } A(x+1) + B(x-1) = 3x+1.$$

$$\text{Então, } A(x+1) + B(x-1) = Ax + A + Bx - B = 3x+1, \text{ donde vem } \begin{cases} A+B=3 \\ A-B=1 \end{cases}.$$

Logo, $2A = 4$, ou seja, $A = 2$, pelo que $B = 1$. Então,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x+1}{x^2-1} dx &= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx \\
 &= 2 \ln|x-1| + \ln|x+1| + k = \ln\left((x-1)^2|x+1|\right) + k
 \end{aligned}$$

Observe-se que os valores de A e B podem ser obtidos atribuindo a x os valores que anulam x^2-1 . Fazendo $x = 1$, na igualdade $A(x+1) + B(x-1) = 3x+1$, temos $2A = 4$, donde $A = 2$. Fazendo $x = -1$, vem $-2B = -2$, donde $B = 1$.

Exemplo 326 Primitivar a função $f(x) = \frac{2x^2-4x+1}{x^3-1}$

Para factorizar o denominador, apliquemos a Regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 = R
 \end{array}$$

Como o polinómio x^2+x+1 não tem raízes reais, vem

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2-4x+1}{x^3-1} &= \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\
 &= \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } 2x^2-4x+1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1).$$

Fazendo, sucessivamente, $x = 1, x = 0, x = -1$, vem:

$$\begin{cases} 3A = -1 \\ A - C = 1 \\ A - 2(C - B) = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ C = A - 1 \\ A - 2C + 2B = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ C = -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 2B = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ C = -\frac{4}{3} \\ B = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x^2+x+1)} dx &= \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1} dx + \int \frac{\frac{7}{3}x - \frac{4}{3}}{x^2+x+1} dx = -\frac{1}{3} \ln|x-1| + k + \frac{1}{3} \int \frac{7x-4}{x^2+x+1} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + k + \frac{1}{3} \int \frac{7x + \frac{7}{2}}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{-\frac{7}{2}-4}{x^2+x+1} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + k + \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{-\frac{15}{2}}{x^2+x+1} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + k + \frac{7}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\
 &= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + k + \frac{7}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{5}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \\
 &= k - \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{7}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)
 \end{aligned}$$

Exemplo 327 Primitivar a função $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^4 - 1}$

Como $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, temos $\frac{x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$.

Então, $A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1) = x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Fazendo, $x=1, x=-1, x=0$ e $x=2$, vem:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 4A = -1 \\ -4B = 5 \\ A - B - D = 1 \\ 15A + 5B + 3(2C + D) = 5 \end{cases} &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{5}{4} \\ D = A - B - 1 \\ -\frac{15}{4} - \frac{25}{4} + 6C + 3D = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{5}{4} \\ D = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} - 1 = 0 \\ -\frac{15}{4} - \frac{25}{4} + 6C = 5 \end{cases} \\
 &\iff A = -\frac{1}{4} \wedge B = -\frac{5}{4} \wedge C = \frac{5}{2} \wedge D = 0
 \end{aligned}$$

Então, $\frac{x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^4 - 1} = -\frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{5}{4}}{x+1} + \frac{\frac{5}{2}x}{x^2+1} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{x-1} - \frac{5}{4} \times \frac{1}{x+1} + \frac{5}{4} \times \frac{2x}{x^2+1}$.

Finalmente, vem

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^4 - 1} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{5}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{5}{4} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\
 &= -\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{5}{4} \ln|x+1| + \frac{5}{4} \ln(x^2+1) + k
 \end{aligned}$$

Exemplo 328 Primitivar a função $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$

Sejam $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}, g(x) = x$. Então, $f(x) = -\frac{1}{x^2+1}, g'(x) = 1$.

1. Logo:

$$\int \left(2x(x^2+1)^{-2}\right) \times x dx = -\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} dx = -\frac{x}{x^2+1} + \arctan x$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= k + \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(2x(x^2+1)^{-2}\right) \times x dx \\
 &= k + \arctan x + \frac{1}{2} \times \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctan x \\
 &= k + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}
 \end{aligned}$$

12.4 Primitivação por Substituição

A primitivação por substituição tem por base a derivada da função composta. Por isso, se tivermos $\int f(x) dx$ e fizermos $x = g(t)$, ficamos com $\int f(x) dx = \int f(g(t)) \frac{dx}{dt} dt = \int f(g(t)) g'(t) dt$

Exemplo 329 Primitivar a função $f(x) = \frac{1}{1 + \tan x}$, com $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$.

Se fizermos a substituição $\tan x = t$, temos $x = \arctan t$. Então, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$.

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{1 + \tan x} dx = \int \frac{1}{1+t} \times \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} dt, \text{ com } t = \tan x.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} &= \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{A(1+t^2) + (Bt+C)(1+t)}{(1+t)(1+t^2)} = \\ &= \frac{At^2 + A + Bt^2 + Bt + Ct + C}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{(A+B)t^2 + (B+C)t + A+C}{(1+t)(1+t^2)} \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-B \\ C=-B \\ -2B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} dt - \frac{1}{4} \int \frac{2t}{1+t^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{4} \ln(1+t^2) + \frac{1}{2} \arctan t + k \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+\tan x| - \frac{1}{4} \ln(1+\tan^2 x) + \frac{1}{2} x + k \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+\tan x| - \frac{1}{4} \ln \sec^2 x + \frac{1}{2} x + k \end{aligned}$$

Exemplo 330 Primitivar a função $f(x) = \frac{3 \tan^2 x + 2 \tan x + 2}{\tan^2 x + 2 \tan x + 3}$, com $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Se fizermos a substituição $\tan x = t$, temos $x = \arctan t$. Então, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$. Logo:

$$\int \frac{3 \tan^2 x + 2 \tan x + 2}{\tan^2 x + 2 \tan x + 3} dx = \int \frac{3t^2 + 2t + 2}{t^2 + 2t + 3} \times \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{3t^2 + 2t + 2}{(t^2 + 2t + 3)(1+t^2)} dt, \text{ com } t = \tan x.$$

Como o numerador tem grau inferior ao denominador e este não tem zeros, temos:

$$\begin{aligned} \frac{3t^2 + 2t + 2}{(t^2 + 2t + 3)(1+t^2)} &= \frac{At+B}{t^2 + 2t + 3} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \\ &= \frac{(At+B)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2+2t+3)}{(t^2+2t+3)(t^2+1)} \\ &= \frac{At^3 + At + Bt^2 + B + Ct^3 + 2Ct^2 + 3Ct + Dt^2 + 2Dt + 3D}{(t^2+2t+3)(t^2+1)} \\ &= \frac{(A+C)t^3 + (B+2C+D)t^2 + (A+3C+2D)t + B+3D}{(t^2+2t+3)(t^2+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } \begin{cases} A+C=0 \\ B+2C+D=3 \\ A+3C+2D=2 \\ B+3D=2 \end{cases} &\iff \begin{cases} A=-C \\ 2-3D+2C+D=3 \\ -C+3C+2D=2 \\ B=2-3D \end{cases} \iff \begin{cases} A=-C \\ 2C-2D=1 \\ 2C+2D=2 \\ B=2-3D \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A=-C \\ 4D=1 \\ 4C=3 \\ B=2-3D \end{cases} \iff \begin{cases} A=-\frac{3}{4} \\ D=\frac{1}{4} \\ C=\frac{3}{4} \\ B=\frac{5}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{3t^2 + 2t + 2}{(t^2 + 2t + 3)(1 + t^2)} &= \frac{-\frac{3}{4}t + \frac{5}{4}}{t^2 + 2t + 3} + \frac{\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}}{1 + t^2} \\
 &= -\frac{3}{4} \times \frac{t - \frac{5}{3}}{t^2 + 2t + 3} + \frac{3}{4} \times \frac{t}{1 + t^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + t^2} \\
 &= -\frac{3}{8} \times \frac{2t + 2 - 2 - \frac{10}{3}}{t^2 + 2t + 3} + \frac{3}{8} \times \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + t^2} \\
 &= -\frac{3}{8} \times \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 3} + \frac{3}{8} \times \frac{2 + \frac{10}{3}}{t^2 + 2t + 3} + \frac{3}{8} \times \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + t^2}
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3t^2 + 2t + 2}{(t^2 + 2t + 3)(1 + t^2)} dt &= -\frac{3}{8} \int \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 3} dt + \frac{3}{8} \times \frac{16}{3} \int \frac{1}{t^2 + 2t + 3} dt + \frac{3}{8} \int \frac{2t}{1 + t^2} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1 + t^2} dt \\
 &= -\frac{3}{8} \ln(t^2 + 2t + 3) + \int \frac{2}{t^2 + 2t + 3} dt + \frac{3}{8} \ln(1 + t^2) + \frac{1}{4} \arctan t + k
 \end{aligned}$$

Falta calcular $\int \frac{2}{t^2 + 2t + 3} dt$:

$$\int \frac{2}{t^2 + 2t + 3} dt = \int \frac{2}{(t + 1)^2 + 2} dt = \int \frac{1}{\frac{1}{2}(t + 1)^2 + 1} dt = \sqrt{2} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(t + 1)\right)^2 + 1} dt = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(t + 1)\right)$$

Logo, $\int \frac{3t^2 + 2t + 2}{(t^2 + 2t + 3)(1 + t^2)} dt = -\frac{3}{8} \ln(t^2 + 2t + 3) + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(t + 1)\right) + \frac{3}{8} \ln(1 + t^2) + \frac{1}{4} \arctan t + k$

E, agora, substituímos t por $\tan x$:

$$\int \frac{3 \tan^2 x + 2 \tan x + 2}{\tan^2 x + 2 \tan x + 3} dx = -\frac{3}{8} \ln(\tan^2 x + 2 \tan x + 3) + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \tan x)\right) + \frac{3}{8} \ln \sec^2 x + \frac{1}{4} x + k$$

Exemplo 331 Primitivar a função $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$

Fazendo a substituição $x = \tan t$, temos $\frac{dx}{dt} = \sec^2 t$. Então,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{1}{(1 + \tan^2 t)^2} \sec^2 t dt = \int \frac{1}{\sec^4 t} \sec^2 t dt = \int \frac{1}{\sec^2 t} dt = \int \cos^2 t dt \\
 &= \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{t}{2} + \int \frac{2 \cos(2t)}{4} dt = \frac{t}{2} + k + \frac{1}{4} \sin(2t)
 \end{aligned}$$

Mas, $\frac{1}{4} \sin(2t) = \frac{1}{2} \sin t \cos t = \frac{1}{2} \times \frac{\sin t}{\cos t} \cos^2 t = \frac{\tan t}{2 \sec^2 t} = \frac{x}{2(1 + x^2)}$

Então, $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = k + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1 + x^2)}$

Exemplo 332 Primitivar a função $f(x) = \frac{3x + 1}{(x^2 + 1)^2}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{3}{2} \int 2x (x^2 + 1)^{-2} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \\
 &= -\frac{3}{2} (x^2 + 1)^{-1} + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \\
 &= k - \frac{3}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1 + x^2)}
 \end{aligned}$$

Observe-se que, pelo exemplo anterior, $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = k + \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(1 + x^2)}$.

Exemplo 333 Primitivar a função $f(x) = \cos^3 x = \cos^2 x \cos x$.

Neste caso, temos um produto de $\cos x$ por uma expressão que envolve, apenas, potências de expoente par, de $\sin x$ e de $\cos x$. Uma substituição que se pode fazer é $t = \sin x$. Então, $\frac{dt}{dx} = \cos x$, donde vem $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos x}$. Além disso, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$.

Então,

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - t^2) \frac{\cos x}{\cos x} dt \\ &= \int (1 - t^2) dt = k + t - \frac{t^3}{3} = k + \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\end{aligned}$$

Exemplo 334 Primitivar a função $f(x) = \sin^5 x \cos^2 x = \cos^2 x \sin^4 x \sin x$.

Neste caso, temos um produto de $\sin x$ por uma expressão que envolve, apenas, potências de expoente par, de $\sin x$ e de $\cos x$. Uma substituição que se pode fazer é $t = \cos x$. Então, $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, donde vem $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sin x}$. Além disso, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$.

Então,

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x dx &= \int \cos^2 x \sin^4 x \sin x dx = - \int t^2 (1 - t^2)^2 \frac{\sin x}{\sin x} dt \\ &= - \int t^2 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int (-t^2 + 2t^4 - t^6) dt \\ &= k - \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{t^7}{7} = k - \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7}\end{aligned}$$

Exemplo 335 Primitivar a função $f(x) = \frac{\sin^2 x + 2\cos^3 x}{2 + \sin x}$

Neste caso, temos uma expressão que envolve, apenas, um quociente entre somas de potências de expoente inteiro de $\sin x$ e $\cos x$, expressão a que se costuma chamar uma fração racional em termos de $\cos x$ e de $\sin x$. Há uma substituição que resulta nestes casos que é $t = \tan \frac{x}{2}$, com $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Esta substituição podia ser feita nos exemplos anteriores.

De $t = \tan \frac{x}{2}$ vem $x = 2 \arctan t$, pelo que $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$.

Observemos que $\tan x = \tan \left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$, que $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, expressão esta que pode ser transformada em $\frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$.

Finalmente, $\cos x = \sin x \cot x = \frac{2t}{1+t^2} \times \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Voltemos ao nosso exemplo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x + 2\cos^3 x}{2 + \sin x} dx &= \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{2(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}}{\frac{2+2t+2t^2}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{\frac{4t^2(1+t^2) + 2(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}}{\frac{2+2t+2t^2}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{4t^2 + 4t^4 + 2(1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6)}{(1+t^2)^3} \times \frac{1+t^2}{2+2t+2t^2} \times \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{4t^2 + 4t^4 + 2 - 6t^2 + 6t^4 - 2t^6}{(1+t^2)^3} \times \frac{1}{1+t+t^2} dt \\ &= \int \frac{-2t^6 + 10t^4 - 2t^2 + 2}{(1+t^2)^3 (1+t+t^2)} dt\end{aligned}$$

E obtivemos uma fração racional que pode ser primitivada, pelo menos em teoria. Então,

$$\begin{aligned} \frac{-2t^6 + 10t^4 - 2t^2 + 2}{(1+t^2)^3(1+t+t^2)} &= \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{(1+t^2)^2} + \frac{Et+F}{(1+t^2)^3} + \frac{Gt+H}{1+t+t^2} \\ &= \frac{\left((At+B)(1+t^2)^2 + (Ct+D)(1+t^2) + Et+F\right)(1+t+t^2) + (Gt+H)(1+t^2)^3}{(1+t+t^2)(1+t^2)^3} \end{aligned}$$

Então,

$$\left((At+B)(1+t^2)^2 + (Ct+D)(1+t^2) + Et+F\right)(1+t+t^2) + (Gt+H)(1+t^2)^3 = -2t^6 + 10t^4 - 2t^2 + 2$$

Para $t = 0$, vem $B + D + F + H = 2$.

Para $t = 1$, vem $(4(A+B) + 2(C+D) + (E+F)) \times 3 + 8(G+H) = 8$.

Para $t = 2$, vem $(25(2A+B) + 5(2C+D) + 2E+F) \times 7 + 125(2G+H) = 26$

Para $t = 3$, vem $(100(3A+B) + 10(3C+D) + 3E+F) \times 13 + 1000(3G+H) = -664$

Para $t = 4$, vem $(289(4A+B) + 17(4C+D) + 4E+F) \times 21 + 4913(4G+H) = -5662$

Para $t = -1$, vem $(4(-A+B) + 2(-C+D) + (-E+F)) \times 1 + 8(-G+H) = 8$

Para $t = -2$, vem $(25(-2A+B) + 5(-2C+D) - 2E+F) \times 3 + 125(-2G+H) = 26$

Para $t = -3$, vem $(100(-3A+B) + 10(-3C+D) - 3E+F) \times 7 + 1000(-3G+H) = -5662$

Então, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} B + D + F + H = 2 \\ 12A + 12B + 6C + 6D + 3E + 3F + 8G + 8H = 8 \\ 350A + 175B + 70C + 35D + 14E + 7F + 250G + 125H = 26 \\ 3900A + 1300B + 390C + 130D + 39E + 13F + 3000G + 1000H = -664 \\ 24276A + 6069B + 1428C + 357D + 84E + 21F + 19652G + 4913H = -5662 \\ -4A + 4B - 2C + 2D - E + F - 8G + 8H = 8 \\ -150A + 75B - 30C + 15D - 6E + 3F - 250G + 125H = 26 \\ -2100A + 700B - 210C + 70D - 21E + 7F - 3000G + 1000H = -664 \end{cases}$$

Embora, não se apresente a resolução, o sistema anterior é equivalente a:

$$\begin{cases} A = 12, B = -12, C = 12, D = 16 \\ E = -16, F = 0, G = -12, H = -2 \end{cases}$$

Seja $g(t) = \frac{-2t^6 + 10t^4 - 2t^2 + 2}{(1+t^2)^3(1+t+t^2)}$. Então,

$$\begin{aligned} \int g(t) dt &= \int \frac{At+B}{1+t^2} dt + \int \frac{Ct+D}{(1+t^2)^2} dt + \int \frac{Et+F}{(1+t^2)^3} dt + \int \frac{Gt+H}{1+t+t^2} dt \\ &= \int \frac{12t-12}{1+t^2} dt + \int \frac{12t+16}{(1+t^2)^2} dt - \int \frac{16t}{(1+t^2)^3} dt - \int \frac{12t+2}{1+t+t^2} dt \\ &= 6 \int \frac{2t}{1+t^2} dt - \int \frac{12}{1+t^2} dt + 6 \int \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt + 16 \int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt - 8 \int 2t(1+t^2)^{-3} dt \\ &\quad - \int \frac{12t+6-4}{1+t+t^2} dt \end{aligned}$$

Mas:

$$6 \int \frac{2t}{1+t^2} dt = 6 \ln(1+t^2), \quad - \int \frac{12}{1+t^2} dt = -12 \arctan t$$

$$6 \int \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{6}{1+t^2}, \quad -8 \int 2t(1+t^2)^{-3} dt = \frac{4}{(1+t^2)^2}$$

$$-6 \int \frac{2t+1}{1+t+t^2} dt = -6 \ln(1+t+t^2), \quad 4 \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{8}{3} \sqrt{3} \arctan\left((2t+1)\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \arctan t, \text{ conforme verificado em exemplo anterior.}$$

Então, $\int \frac{16}{(1+t^2)^2} dt = \frac{8t}{1+t^2} + 8 \arctan t$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \int g(t) dt &= 6 \ln \frac{1+t^2}{1+t+t^2} - 12 \arctan t - \frac{6}{1+t^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2} + \frac{8}{3} \sqrt{3} \arctan \left((2t+1) \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + \\ &\quad + \frac{8t}{1+t^2} + 8 \arctan t + k \\ &= 6 \ln \frac{1+t^2}{1+t+t^2} - 4 \arctan t + \frac{8t-6}{1+t^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2} + \frac{8}{3} \sqrt{3} \arctan \left((2t+1) \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + k \end{aligned}$$

E, agora, substituímos t por $\tan \frac{x}{2}$.

Exemplo 336 Primitivar a função $f(x) = \frac{2+\sin x+\cos x}{3+2\sin x}$.

Fazendo $x = 2 \arctan t$, temos $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Então:

$$\begin{aligned} \int \frac{2+\sin x+\cos x}{3+2\sin x} dx &= \int \frac{2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{3+2 \times \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2(1+t^2)+2t+1-t^2}{3(1+t^2)+2} \times \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2+2t^2+2t+1-t^2}{3t^2+5} \times \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2+2t+3}{(3t^2+5)(1+t^2)} dt \end{aligned}$$

E, agora, temos:

$$\begin{aligned} \frac{t^2+2t+3}{(3t^2+5)(1+t^2)} &= \frac{At+B}{3t^2+5} + \frac{Ct+D}{1+t^2} = \frac{(At+B)(1+t^2)+(Ct+D)(3t^2+5)}{(3t^2+5)(1+t^2)} \\ (At+B)(1+t^2) + (Ct+D)(3t^2+5) &= t^2+2t+3 \\ (At+B)(1+t^2) + (Ct+D)(3t^2+5) &= At + At^3 + B + Bt^2 + 3Ct^3 + 5Ct + 3Dt^2 + 5D \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+3C=0 \\ B+3D=1 \\ A+5C=2 \\ B+5D=3 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-3C \\ B=1-3D \\ -3C+5C=2 \\ 1-3D+5D=3 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-3 \\ B=-2 \\ C=1 \\ D=1 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{t^2+2t+3}{(3t^2+5)(1+t^2)} dt &= 2 \int \frac{-3t-2}{3t^2+5} dt + 2 \int \frac{t+1}{1+t^2} dt \\ &= - \int \frac{6t}{3t^2+5} dt - 4 \int \frac{1}{3t^2+5} dt + \int \frac{2t}{1+t^2} dt + 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= - \ln(3t^2+5) - \frac{4}{5} \int \frac{1}{\frac{3}{5}t^2+1} dt + \ln(1+t^2) + 2 \arctan t \\ &= \ln \left(\frac{1+t^2}{3t^2+5} \right) + 2 \arctan t - \frac{4}{5} \times \sqrt{\frac{5}{3}} \int \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}}t\right)^2+1} dt \\ &= \ln \left(\frac{1+t^2}{3t^2+5} \right) + 2 \arctan t - \frac{4}{15} \times \sqrt{15} \arctan \left(\frac{t\sqrt{15}}{5} \right) + k \end{aligned}$$

E, agora, substituímos t por $\tan \frac{x}{2}$.

Exemplo 337 Primitivar a função $f(x) = \sec x$.

Esta função pode ser primitivada por vários processos:

$$1. \int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = k + \ln |\sec x + \tan x|$$

2. Fazendo a substituição $\sin x = t$:

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - t^2} \times \frac{1}{\cos x} dt = \int \frac{1}{1 - t^2} dt$$

$$\text{Mas, } \frac{1}{1 - t^2} = \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t} = \frac{A(1 + t) + B(1 - t)}{1 - t^2} = \frac{A + At + B - Bt}{1 - t^2}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 1 \\ A = B \end{cases} \iff \begin{cases} B = \frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Logo:}$$

$$\int \frac{1}{1 - t^2} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{-1}{1 - t} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + t} dt = k - \frac{1}{2} \ln |1 - t| + \frac{1}{2} \ln |1 + t| = k + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| = k + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right|$$

$$= k + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \right| = k + \ln \sqrt{\left| \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} \right|} = k + \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| = k + \ln |\sec x + \tan x|$$

3. Fazendo a substituição $\tan \frac{x}{2} = t$, temos $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Então:

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1-t^2} dt = -\int \frac{-1}{1-t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt =$$

$$= k + \ln |1 + t| - \ln |1 - t| = k + \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| = k + \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| = k + \ln \left| \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right|$$

$$= k + \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| = k + \ln |\sec x + \tan x|$$

Exemplo 338 Primitivar a função $f(x) = \tan^3 x$.

Esta função pode ser primitivada por vários processos:

1. Fazendo a substituição $\tan x = t$

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x dx &= \int \frac{t^3}{t^2 + 1} dt = \int \frac{t^3 + t - t}{t^2 + 1} dt = \int t dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt = \frac{t^2}{2} - \ln(t^2 + 1) + k \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln(1 + \tan^2 x) + k = \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln(\sec^2 x) + k = \frac{1}{2} \tan^2 x - 2 \ln |\sec x| + k \end{aligned}$$

2. Fazendo a substituição $\tan \frac{x}{2} = t$. Então, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$.

$$\int \tan^3 x dx = \int \left(\frac{2t}{1-t^2} \right)^3 \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{16t^3}{(t^2 + 1)(1+t)^3(1-t)^3} dt$$

$$\frac{16t^3}{(t^2 + 1)(1+t)^3(1-t)^3} = \frac{At + B}{t^2 + 1} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2} + \frac{E}{(1+t)^3} + \frac{F}{1-t} + \frac{G}{(1-t)^2} + \frac{H}{(1-t)^3}$$

Não continuamos, pois este processo dá muitos cálculos

$$3. \int \tan^3 x dx = \int \tan x \tan^2 x dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan x \sec^2 x dx - \int \tan x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + k$$

Exemplo 339 Primitivar a função $f(x) = \sec^3 x$.

Esta função pode ser primitivada por vários processos:

1. Fazendo a substituição $\sin x = t$

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\cos x}{(1 - t^2)^2} \times \frac{1}{\cos x} dt \\ &= \int \frac{1}{(1 - t^2)^2} dt = \int \frac{1}{(t^2 - 1)^2} dt \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(t^2 - 1)^2} &= \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} \\
 &= \frac{A(t-1)(t+1)^2 + B(t+1)^2 + C(t+1)(t-1)^2 + D(t-1)^2}{(t^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{A(t-1)(t^2 + 2t + 1) + B(t^2 + 2t + 1) + C(t+1)(t^2 - 2t + 1) + D(t^2 - 2t + 1)}{(t^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{A(t^3 + t^2 - t - 1) + Bt^2 + 2Bt + B + C(t^3 - t^2 - t + 1) + Dt^2 - 2Dt + D}{(t^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{At^3 + At^2 - At - A + Bt^2 + 2Bt + B + Ct^3 - Ct^2 - Ct + C + Dt^2 - 2Dt + D}{(t^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{(A+C)t^3 + (A+B-C+D)t^2 + (-A+2B-C-2D)t - A+B+C+D}{(t^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=0 \\ -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=1 \end{cases} &\iff \begin{cases} C=-A \\ A+B+A+D=0 \\ -A+2B+A-2D=0 \\ -A+B-A+D=1 \end{cases} \iff \begin{cases} C=-A \\ D=-2A-D \\ B=D \\ -2A+D+D=1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} C=-A \\ D=-A \\ B=D \\ -2A-2A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} C=-\frac{1}{4} \\ D=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ A=-\frac{1}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{(t^2 - 1)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2}$. Então:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(t^2 - 1)^2} dt &= \int \frac{-\frac{1}{4}}{t-1} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{t+1} dt + \int \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2} dt \\
 &= -\frac{1}{4} \ln |t-1| - \frac{1}{4} \times \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \ln |t+1| - \frac{1}{4} \times \frac{1}{t+1} + k \\
 &= -\frac{1}{4} \ln (1 - \sin x) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{4} \ln (1 + \sin x) - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + \sin x} + k
 \end{aligned}$$

2. Fazendo a substituição $\tan \frac{x}{2} = t$. Então, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$.

$$\int \sec^3 x dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^3 \times \frac{2}{1+t^2} dt$$

Não continuamos, pois este processo origina muitos cálculos.

3.

$$\begin{aligned}
 \int \sec^3 x dx &= \int \sec x \sec^2 x dx = \int \sec x (1 + \tan^2 x) dx \\
 &= \int \sec x dx + \int \sec x \tan^2 x dx = \int \sec x dx + \int \sec x \tan x \tan x dx
 \end{aligned}$$

Utilizando a primitivação por partes, com $f'(x) = \sec x \tan x$, $g(x) = \tan x$:

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec x dx + \sec x \tan x - \int \sec x \sec^2 x dx = \int \sec x dx + \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx$$

Então, $2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \int \sec x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + 2k$, donde se conclui que

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + k$$

Exemplo 340 Primitivar a função $f(x) = \sec^2 x \tan x$.

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + k$$

Exemplo 341 Primitivar a função $f(x) = \sec x \tan^2 x$.

$$\begin{aligned} \int \sec x \tan^2 x dx &= \int \sec x \tan x \tan x dx = \sec x \tan x - \int \sec x \sec^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (1 + \tan^2 x) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x dx - \int \sec x \tan^2 x dx \end{aligned}$$

Então, $2 \int \sec x \tan^2 x dx = \sec x \tan x - \int \sec x dx$, donde vem

$$\int \sec x \tan^2 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + k$$

Também podemos utilizar as substituições $\sin x = t$ ou $\tan \frac{x}{2} = t$.

12.5 Expressões com radicais

Exercício 342 Primitivar a função $f(x) = \int \sqrt{1+x^2} dx$

Seja $x = \tan t$, com $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Então, $\frac{dx}{dt} = \sec^2 t$, pelo que vem:

$$\int \sqrt{1+\tan^2 t} \sec^2 t dt = \int \sqrt{\sec^2 t} \sec^2 t dt = \int \sec^3 t dt$$

A primitiva de $\sec^3 t$ aparece sistematicamente e já foi resolvida. De qualquer modo aqui fica, uma vez mais, o seu cálculo:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 t dt &= \int (1 + \tan^2 t) \sec t dt = \int \sec t dt + \int \sec t \tan t \tan t dt \\ &= 2k + \ln (\sec t + \tan t) + \sec t \tan t - \int \sec t \sec^2 t dt \end{aligned}$$

Então, $2 \int \sec^3 t dt = 2k + \ln (\sec t + \tan t) + \sec t \tan t$, donde vem

$$\int \sec^3 t dt = k + \frac{1}{2} \ln (\sec t + \tan t) + \frac{1}{2} \sec t \tan t$$

Observe-se que, no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, temos $\sec t + \tan t = \frac{1}{\cos t} + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1+\sin t}{\cos t} > 0$, razão pela qual aparece $\ln (\sec t + \tan t)$ e não $\ln |\sec t + \tan t|$, pois o sinal de módulo é redundante (nesta situação).

Falta, ainda, desfazer a substituição:

De $x = \tan t$, vem $1 + x^2 = \sec^2 t$, pelo que $\sec t = \sqrt{1+x^2}$.

Então, $\int \sqrt{1+x^2} dx = k + \frac{1}{2} \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2}$

Exemplo 343 Primitivar a função $f(x) = \int \sqrt{1+x^2} dx$

Veamos um segundo processo para primitivar a função $f(x) = \int \sqrt{1+x^2} dx$:

Como $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, temos que $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$. Então, podemos utilizar a substituição $x = \sinh t$, donde resulta $\frac{dx}{dt} = \cosh t$.

Então, vem $\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 t} \cosh t dt = \cosh t \cosh t dt$

Mas

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 t dt &= \int \cosh t \cosh t dt = \sinh t \cosh t - \int \sinh t \sinh t dt \\ &= \sinh t \cosh t - \int (\cosh^2 t - 1) dt = \sinh t \cosh t + \int 1 dt - \int \cosh^2 t dt \end{aligned}$$

Então, $2 \int \cosh^2 t dt = \sinh t \cosh t + 2k$, pelo que $\int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} (t + \sinh t \cosh t) + k$.

Ora, $\sinh t = x$ implica $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$, donde vem $e^t - \frac{1}{e^t} = 2x$

Então, $e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$, pelo que $e^t = x + \sqrt{x^2+1}$, donde se obtém $t = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

De $\sinh t = x$, vem $\cosh t = \sqrt{1+x^2}$, pelo que a primitiva de $\sqrt{1+x^2}$ é dada por

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x\sqrt{1+x^2} \right) + k$$

É claro que chegamos ao mesmo resultado.

Observe-se que na resolução da equação $e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0$, só nos interessa a solução positiva.

Exemplo 344 Primitivar a função $f(x) = \int \sqrt{x^2+x+1} dx$

O polinómio de 2º grau x^2+x+1 não tem raízes reais, tomando valores positivos.

Como $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, fazemos $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t$, com $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Então, $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 t$, pelo que vem:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \tan^2 t} \sec^2 t dt &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \int \sqrt{1 + \tan^2 t} \sec^2 t dt \\ &= \frac{3}{4} \int \sec^3 t dt = k + \frac{3}{8} \ln(\sec t + \tan t) + \frac{3}{8} \sec t \tan t \end{aligned}$$

Falta desfazer a substituição. De $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t$, vem $(2x+1) \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan t$.

Logo, $\frac{(2x+1)^2}{3} = \tan^2 t$, pelo que $\sec^2 t = \frac{(2x+1)^2}{3} + 1 = \frac{4x^2+4x+1+3}{3} = \frac{4x^2+4x+4}{3}$.

Então, $\sec t = 2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2+x+1}$.

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+x+1} dx &= k + \frac{3}{8} \ln \left((2x+1) \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2+x+1} \right) + \frac{3}{8} (2x+1) \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2+x+1} \\ &= k + \frac{3}{8} \ln \left((2x+1) \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2+x+1} \right) + \frac{1}{4} (2x+1) \sqrt{x^2+x+1} \end{aligned}$$

Exemplo 345 Primitivar a função $f(x) = \int \sqrt{x^2+x+1} dx$

O polinómio de 2º grau x^2+x+1 não tem raízes reais, tomando valores positivos.

Como $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, fazemos $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh t$. Então, $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh t$. Então:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+x+1} dx &= \int \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh t \sqrt{\frac{3}{4} \sinh^2 t + \frac{3}{4}} dt = \frac{3}{4} \int \cosh t \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt \\ &= \frac{3}{4} \int \cosh t \cosh t dt = \frac{3}{4} \int \cosh^2 t dt = \frac{3}{4} \int \frac{1 + \cosh(2t)}{2} dt \\ &= \frac{3}{8} t + \frac{3}{16} \int 2 \cosh(2t) dt = \frac{3}{8} t + \frac{3}{16} \sinh(2t) + k = \frac{3}{8} t + \frac{3}{8} \sinh t \cosh t + k \end{aligned}$$

De $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh t$, vem $t = \operatorname{arcsinh} \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}$.

Mas $\cosh t = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2+4x+1+3}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2+x+1}$.

Então,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+x+1} dx &= \frac{3}{8} \operatorname{arcsinh} \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^2+x+1} + k \\ &= \frac{3}{8} \operatorname{arcsinh} \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3} + \frac{2x+1}{4} \sqrt{x^2+x+1} + k \end{aligned}$$

Na expressão anterior, podemos calcular $\operatorname{arcsinh} \frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}$, partindo da definição da função seno hiperbólico.

Capítulo 13

Equações diferenciais

Começamos este Capítulo pelo estudo das equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, devido à sua importância.

13.1 Equações lineares de coeficientes constantes

Exemplo 346 Resolva a equação diferencial $y'' - 5y' + 6y = x^2$.

Resolução

Começamos por resolver a equação $y'' - 5y' + 6y = 0$, a qual é chamada equação homogênea. Para isso, vamos considerar a função $y = e^{\lambda x}$. Então, $y' = \lambda e^{\lambda x}$ e $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Substituindo na equação homogênea, obtemos:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 5\lambda e^{\lambda x} + 6e^{\lambda x} = 0$$

Da equação anterior, vem $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, equação esta que é chamada equação característica. As raízes da equação característica são 2 e 3. Então, as funções e^{2x} e e^{3x} satisfazem a condição $y'' - 5y' + 6y = 0$, o mesmo acontecendo com qualquer combinação linear das duas funções, isto é, a função $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ também satisfaz $y'' - 5y' + 6y = 0$. O interessante da história é que qualquer função que satisfaça $y'' - 5y' + 6y = 0$ é combinação linear de e^{2x} e e^{3x} .

Logo, a solução geral da equação homogênea $y'' - 5y' + 6y = 0$ é $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Falta-nos obter uma solução particular da equação $y'' - 5y' + 6y = x^2$ para ficar com a questão resolvida.

Seja $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Então, $y'_p = 2Ax + B$ e $y''_p = 2A$, pelo que obtemos

$$2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Então, $6Ax^2 + 6Bx + 6C - 10Ax - 5B + 2A = x^2$, donde vem $6Ax^2 + (-10A + 6B)x + 2A - 5B + 6C = x^2$.

$$\text{Logo, } \begin{cases} 6A = 1 \\ 3B = 5A \\ 6C = -2A + 5B \end{cases}, \text{ donde se conclui que } \begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{5}{3}A = \frac{5}{18} \\ C = \frac{-2A + 5B}{6} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{25}{18}}{6} = \frac{19}{108} \end{cases}$$

Então, $y_p = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$.

A solução geral da equação completa $y'' - 5y' + 6y = x^2$ é a soma da solução geral da equação homogênea com uma solução particular da equação completa. Então,

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

Podíamos pretender uma solução particular que satisfizesse, por exemplo, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

$$\text{Nesse caso, teríamos } \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{19}{108} = 1 \\ 2C_1 + 3C_2 + \frac{5}{18} = 2 \end{cases}. \text{ Então, } \begin{cases} 108C_1 + 108C_2 = 89 \\ 36C_1 + 54C_2 = 31 \end{cases}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 108C_1 + 108C_2 = 89 \\ 36C_1 + 54C_2 = 31 \end{cases} &\iff \begin{cases} 108C_1 + 108C_2 = 89 \\ 108C_1 + 162C_2 = 93 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 36C_1 + 54C_2 = 31 \\ 54C_2 = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 36C_1 = 27 \\ C_2 = \frac{2}{27} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{3}{4} \\ C_2 = \frac{2}{27} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$y = \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{2}{27}e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

Neste caso, temos uma equação ordinária de segunda ordem e de primeiro grau. A equação diferencial diz-se ordinária por haver, apenas, funções duma única variável (x); é de segunda ordem, porque aparece a segunda derivada e não aparece nenhuma derivada de ordem superior; é de primeiro grau (ou de grau 1), porque a derivada de maior ordem tem grau (expoente) 1. A equação diz-se, ainda, de coeficientes constantes. Além disso, todas as derivadas que aparecem têm expoente 1, incluindo a própria função y ; por esse motivo, trata-se duma equação linear.

Equação linear de coeficientes constantes é uma equação diferencial ordinária de ordem n e grau 1, ou seja, uma equação do tipo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = f(x)$$

com $a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

A equação característica correspondente à equação homogênea é

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

A equação anterior admite n raízes complexas (pode haver raízes múltiplas), sendo que as raízes imaginárias, se houver, são conjugadas duas a duas.

Vejamos alguns exemplos com raízes imaginárias:

Exemplo 347 Resolva a equação diferencial $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 2x$.

Resolução

Equação homogênea: $y'' - 2y' + 5y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{1-5} \iff \lambda = 1 \pm 2i$$

Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$.

Recordamos que $e^{(a+bi)x} = e^{ax} \operatorname{cis}(bx) = e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx))$.

Seja $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Então, $y'_p = 2Ax + B$ e $y''_p = 2A$.

$$\text{Logo, } 2A - 2(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2x.$$

$$\text{Então, } 2A - 4Ax - 2B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = x^2 + 2x.$$

$$\text{Logo, } 5Ax^2 + (-4A + 5B)x + 2A - 2B + 5C = x^2 + 2x.$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} 5A = 1 \\ -4A + 5B = 2 \\ 2A - 2B + 5C = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 5A = 1 \\ -4A + 5B = 2 \\ 2A - 2B + 5C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ 5B = 2 + \frac{4}{5} \\ C = -\frac{2}{5}A + \frac{2}{5}B \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{14}{25} \\ C = -\frac{2}{25} + \frac{28}{125} = \frac{18}{125} \end{cases}$$

$$\text{Então, } y_p = \frac{1}{5}x^2 + \frac{14}{25}x + \frac{18}{125}.$$

Logo, a solução geral da equação completa é

$$y = e^x (C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)) + \frac{1}{5}x^2 + \frac{14}{25}x + \frac{18}{125}$$

Exemplo 348 Resolva a equação diferencial $y'''' - y = 2x^2 + 3x + 2 \cos x$

Resolução

Equação homogênea: $y'''' - y = 0$

Equação característica: $\lambda^4 - 1 = 0$

$$\lambda^4 - 1 = 0 \iff (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \iff \lambda = \pm 1 \vee \lambda = \pm i$$

Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

Seja $y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C$. Então, $y'_{p_1} = 2Ax + B$, $y''_{p_1} = 2A$, $y'''_{p_1} = y''''_{p_1} = 0$.

Logo, $-Ax^2 - Bx - C = 2x^2 + 3x$.

Então, $A = -2, B = -3, C = 0$, pelo que $y_{p_1} = -2x^2 - 3x$.

Seja $y_{p_2} = (D \cos x + E \sin x)x = Dx \cos x + Ex \sin x$. Então:

$$y'_{p_2} = D \cos x + E \sin x - Dx \sin x + Ex \cos x$$

$$y''_{p_2} = -D \sin x + E \cos x - D \sin x - Dx \cos x + E \cos x - Ex \sin x$$

Logo, $y'''_{p_2} = -2D \sin x + 2E \cos x - Dx \cos x - Ex \sin x$.

$$y''''_{p_2} = -2D \cos x - 2E \sin x - D \cos x + Dx \sin x - E \sin x - Ex \cos x$$

Então, $y'''_{p_2} = -3D \cos x - 3E \sin x + Dx \sin x - Ex \cos x$.

$$y''''_{p_2} = 3D \sin x - 3E \cos x + D \sin x + Dx \cos x - E \cos x + Ex \sin x$$

Então, $y''''_{p_2} = 4D \sin x - 4E \cos x + Dx \cos x + Ex \sin x$

$$y''''_{p_2} - y_{p_1} = 4D \sin x - 4E \cos x + Dx \cos x + Ex \sin x - Dx \cos x - Ex \sin x = 4D \sin x - 4E \cos x$$

Então, $D = 0, E = -\frac{1}{2}$, pelo que $y_{p_2} = -\frac{1}{2}x \sin x$.

Logo, $y_p = -2x^2 - 3x - \frac{1}{2}x \sin x$.

A solução geral da equação completa é

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 2x^2 - 3x - \frac{1}{2}x \sin x$$

Exemplo 349 Resolva a equação diferencial $y'' - 2y' - 3y = e^{3x} + 2 \cos x$

Resolução

Equação homogênea: $y'' - 2y' - 3y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} \iff \lambda = -1 \vee \lambda = 3$$

Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

Seja $y_{p_1} = Axe^{3x}$. Então:

$$y'_{p_1} = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$$

$$y''_{p_1} = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y''_{p_1} - 2y'_{p_1} - 3y_{p_1} &= 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 2Ae^{3x} - 6Axe^{3x} - 3Axe^{3x} \\ &= 4Ae^{3x} \end{aligned}$$

Então, $A = \frac{1}{4}$, pelo que $y_{p_1} = \frac{1}{4}xe^{3x}$.

Seja $y_{p_2} = C \cos x + D \sin x$. Então:

$$y'_{p_2} = -C \sin x + D \cos x$$

$$y''_{p_2} = -C \cos x - D \sin x$$

Logo,

$$\begin{aligned} y''_{p_2} - 2y'_{p_2} - 3y_{p_2} &= -C \cos x - D \sin x + 2C \sin x - 2D \cos x - 3C \cos x - 3D \sin x \\ &= (-4C - 2D) \cos x + (-4D + 2C) \sin x \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} -4C - 2D = 2 \\ -4D + 2C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -8D - 2D = 2 \\ C = 2D \end{cases} \iff \begin{cases} D = -\frac{1}{5} \\ C = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Logo, $y_{p_2} = -\frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$.

Logo, $y_p = \frac{1}{4}xe^{3x} - \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$ e a solução geral da equação completa é

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{3x} - \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$

Exemplo 350 Resolva a equação diferencial $y''' - 5y'' + 4y' = 2x + xe^x + xe^{2x} + 2\cos(3x)$

Resolução

Equação homogênea: $y''' - 5y'' + 4y' = 0$

Equação característica: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda = 0$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0 \iff \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \iff \lambda = 0 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 4$$

Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1 + C_2e^x + C_3e^{4x}$.

Seja $y_{p_1} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$. Então:

$$y'_{p_1} = 2Ax + B, y''_{p_1} = 2A, y'''_{p_1} = 0$$

Logo, $y'''_{p_1} - 5y''_{p_1} + 4y'_{p_1} = 0 - 5 \times 2A + 4 \times 2Ax + 4B = 8Ax - 10A + 4B$.

$$\text{Então, } \begin{cases} 8A = 2 \\ -10A + 4B = 0 \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{5}{2}A = \frac{5}{8} \end{cases}.$$

Logo, $y_{p_1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x$.

Seja $y_{p_2} = (Cx + D)xe^x = (Cx^2 + Dx)e^x$. Então,

$$\begin{cases} y'_{p_2} = (2Cx + D + Cx^2 + Dx)e^x = (Cx^2 + (2C + D)x + D)e^x \\ y''_{p_2} = (Cx^2 + (2C + D)x + D)e^x + (2Cx + 2C + D)e^x = (Cx^2 + (4C + D)x + 2C + 2D)e^x \\ y'''_{p_2} = (Cx^2 + (4C + D)x + 2C + 2D)e^x + (2Cx + 4C + D)e^x = (Cx^2 + (6C + D)x + 6C + 3D)e^x \end{cases}$$

Por questões de espaço, podemos organizar os cálculos do seguinte modo:

| x^2e^x | xe^x | e^x |
|----------|-------------|--------------|
| C | $6C + D$ | $6C + 3D$ |
| $-5C$ | $-20C - 5D$ | $-10C - 10D$ |
| $4C$ | $8C + 4D$ | $4D$ |
| 0 | $-6C$ | $-4C - 3D$ |

$$\text{Logo, } \begin{cases} -6C = 1 \\ D = -\frac{4}{3}C \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} C = -\frac{1}{6} \\ D = \frac{4}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{9} \end{cases}.$$

Então, $y_{p_2} = (-\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x)e^x$.

Seja $y_{p_3} = (Ex + F)e^{2x}$. Então,

$$\begin{cases} y'_{p_3} = Ee^{2x} + (Ex + F)2e^{2x} = (2Ex + E + 2F)e^{2x} \\ y''_{p_3} = 2Ee^{2x} + (2Ex + E + 2F)2e^{2x} = (4Ex + 4E + 4F)e^{2x} \\ y'''_{p_3} = 4Ee^{2x} + (4Ex + 4E + 4F)2e^{2x} = (8Ex + 12E + 8F)e^{2x} \end{cases}$$

| xe^{2x} | e^{2x} |
|-----------|--------------|
| $8E$ | $12E + 8F$ |
| $-20E$ | $-20E - 20F$ |
| $8E$ | $4E + 8F$ |
| $-4E$ | $-4E - 4F$ |

$$\text{Logo, } \begin{cases} -4E = 1 \\ -4E - 4F = 0 \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} E = -\frac{1}{4} \\ F = -E = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Então, $y_{p_3} = (-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})e^{2x}$.

Finalmente, seja $y_{p_4} = G\cos(3x) + H\sin(3x)$.

$$\text{Então, } \begin{cases} y'_{p_4} = -3G\sin(3x) + 3H\cos(3x) = 3H\cos(3x) - 3G\sin(3x) \\ y''_{p_4} = -9G\cos(3x) - 9H\sin(3x) \\ y'''_{p_4} = 27G\sin(3x) - 27H\cos(3x) = -27H\cos(3x) + 27G\sin(3x) \end{cases}.$$

Logo:

| $\cos(3x)$ | $\sin(3x)$ |
|-------------|-------------|
| $-27H$ | $27G$ |
| $45G$ | $45H$ |
| $12H$ | $-12G$ |
| $45G - 15H$ | $15G + 45H$ |

Então, $\begin{cases} 45G - 15H = 2 \\ 15G + 45H = 0 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} -135H - 15H = 2 \\ G = -3H \end{cases}$ e $\begin{cases} H = -\frac{1}{75} \\ G = \frac{1}{25} \end{cases}$.

Logo, $y_{p4} = \frac{1}{25} \cos(3x) - \frac{1}{75} \sin(3x)$.

Então,

$$y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x\right)e^x + \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + \frac{1}{25}\cos(3x) - \frac{1}{75}\sin(3x)$$

A solução da equação completa é

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{4x} + y_p$$

Exemplo 351 Resolva a equação diferencial $y'' + 4y' - 5y = [(x+1)\cos x + \sin x]e^x$

Resolução

Equação homogênea: $y'' + 4y' - 5y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \iff \lambda = -2 \pm \sqrt{9} \iff \lambda = -5 \vee \lambda = 1$$

Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1e^{-5x} + C_2e^x$.

Seja $y_p = (Ax + B)e^x \cos x + (Cx + D)e^x \sin x = Axe^x \cos x + Be^x \cos x + Cxe^x \sin x + De^x \sin x$.

Então,

$$y'_p = (A + B + D)e^x \cos x + (A + C)xe^x \cos x + (-B + C + D)e^x \sin x + (-A + C)xe^x \sin x$$

$$\begin{aligned} y''_p &= (A + B + D)e^x \cos x - (A + B + D)e^x \sin x + (A + C)e^x \cos x + (A + C)xe^x \cos x - (A + C)xe^x \sin x \\ &\quad + (-B + C + D)e^x \sin x + (-B + C + D)e^x \cos x + (-A + C)e^x \sin x + (-A + C)xe^x \sin x \\ &\quad + (-A + C)xe^x \cos x \\ &= (2A + 2C + 2D)e^x \cos x + 2Cxe^x \cos x + (-2A - 2B + 2C)e^x \sin x - 2Axe^x \sin x \end{aligned}$$

Podemos organizar os cálculos do seguinte modo:

| $xe^x \cos x$ | $e^x \cos x$ | $xe^x \sin x$ | $e^x \sin x$ |
|---------------|--------------------|---------------|---------------------|
| $2C$ | $2A + 2C + 2D$ | $-2A$ | $-2A - 2B + 2C$ |
| $4A + 4C$ | $4A + 4B + 4D$ | $-4A + 4C$ | $-4B + 4C + 4D$ |
| $-5A$ | $-5B$ | $-5C$ | $-5D$ |
| $-A + 6C$ | $6A - B + 2C + 6D$ | $-6A - C$ | $-2A - 6B + 6C - D$ |

Mas, $[(x+1)\cos x + \sin x]e^x = xe^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x$. Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -A + 6C = 1 \\ 6A - B + 2C + 6D = 1 \\ -6A - C = 0 \\ -2A - 6B + 6C - D = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} -A - 36A = 1 \\ 6A - B - 12A + 6D = 1 \\ C = -6A \\ -2A - 6B - 36A - D = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{37} \\ -6A - B + 6D = 1 \\ C = \frac{6}{37} \\ -38A - 6B - D = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{37} \\ -B + 6D = 1 - \frac{6}{37} \\ C = \frac{6}{37} \\ -6B - D = 1 - \frac{38}{37} \end{cases} &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{37} \\ -B + 6D = \frac{31}{37} \\ C = \frac{6}{37} \\ -6B - D = -\frac{1}{37} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{37} \\ -B + 6D = \frac{31}{37} \\ C = \frac{6}{37} \\ -36B - 6D = -\frac{6}{37} \end{cases} &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{37} \\ 6D = \frac{31}{37} + B \\ C = \frac{6}{37} \\ -37B = \frac{25}{37} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{37} \\ 6D = \frac{31}{37} - \frac{25}{1369} \\ C = \frac{6}{37} \\ B = -\frac{25}{1369} \end{cases} &\iff \begin{cases} A = -\frac{1}{37} \\ D = \frac{1147-25}{6 \times 1369} = \frac{187}{1369} \\ C = \frac{6}{37} \\ B = -\frac{25}{1369} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $y_p = \left(-\frac{1}{37}x - \frac{25}{1369}\right)e^x \cos x + \left(\frac{6}{37}x + \frac{187}{1369}\right)e^x \sin x$.

Então, a solução geral da equação completa é

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x + \left(-\frac{1}{37}x - \frac{25}{1369}\right) e^x \cos x + \left(\frac{6}{37}x + \frac{187}{1369}\right) e^x \sin x$$

Exemplo 352 Resolva a equação diferencial $y'' - 3y' + 2y = x^2$

Resolução

Equação homogênea: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \iff \lambda = 1 \vee \lambda = 2$$

Então, a solução geral da equação homogênea é $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Seja $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Então, $y'_p = 2Ax + B$ e $y''_p = 2A$.

Então, $y''_p - 3y'_p + 2y_p = 2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A - 3B + 2C$.

$$\text{Logo, } \begin{cases} 2A = 1 \\ 2B - 6A = 0 \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \\ 1 - \frac{9}{2} + 2C = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Então, } \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}, \text{ pelo que } y_p = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}.$$

E, por fim, a solução geral da equação completa é

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

Exemplo 353 Resolva a equação diferencial $y''' - 2y'' + y' = e^x$.

Resolução

Equação homogênea: $y''' - 2y'' + y' = 0$. Equação característica: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$.

Então, $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$, sendo que 1 é raiz dupla.

A solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x$. Uma solução particular da equação completa será da forma $y_p = Ax^2 e^x$.

Então, $y'_p = (Ax^2 + 2Ax)e^x = Ax(x+2)e^x$, $y''_p = A(x^2 + 4x + 2)e^x$ e $y'''_p = A(x^2 + 6x + 6)e^x$.

Logo, $A(x^2 + 6x + 6)e^x - 2A(x^2 + 4x + 2)e^x + A(x^2 + 2Ax)e^x = e^x$. Então, $6A - 4A = 1$, pelo que $A = \frac{1}{2}$. Então, $y_p = \frac{1}{2}x^2 e^x$, pelo que a solução geral da equação completa é $y = C_1 + (C_2 + C_3x)e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x$, ou seja, $y = C_1 + (C_2 + C_3x + \frac{1}{2}x^2)e^x$.

Exemplo 354 Resolva a equação diferencial $y'' + a^2y = \cos(ax)$.

Resolução

Equação homogênea: $y'' + a^2y = 0$. Equação característica: $\lambda^2 + a^2 = 0$. Então, $\lambda = \pm ai$. Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax)$. Então, uma solução particular da equação completa será $y_p = x(A \cos(ax) + B \sin(ax))$.

Então, $y'_p = A \cos(ax) + B \sin(ax) + x(Ba \cos(ax) - Aa \sin(ax))$.

Logo, $y''_p = Ba \cos(ax) - Aa \sin(ax) + Ba \cos(ax) - Aa \sin(ax) + x(-Aa^2 \cos(ax) - Ba^2 \sin(ax))$.

Logo, $y''_p = 2Ba \cos(ax) - 2Aa \sin(ax) - a^2x(A \cos(ax) + B \sin(ax))$.

Então, $2Ba \cos(ax) - 2Aa \sin(ax) - a^2x(A \cos(ax) + B \sin(ax)) + a^2x(A \cos(ax) + B \sin(ax)) = \cos(ax)$.

Podemos formar o seguinte quadro, para facilitar os cálculos:

| $x \cos(ax)$ | $x \sin(ax)$ | $\cos(ax)$ | $\sin(ax)$ |
|--------------|--------------|------------|------------|
| Aa^2 | Ba^2 | 0 | 0 |
| $-Aa^2$ | $-Ba^2$ | $2Ba$ | $-2Aa$ |
| 0 | 0 | $2Ba$ | $-2Aa$ |

Então, $A = 0 \wedge B = \frac{1}{2a}$. Logo, $y_p = \frac{1}{2a}x \sin(ax)$.

Então, a solução geral da equação completa é $y = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax) + \frac{1}{2a}x \sin(ax)$.

É claro que estivemos a supor que $a \neq 0$. Se $a = 0$, então a equação inicial transforma-se em $y'' = 1$, pelo que $y' = x + C_1$ e $y = \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$.

Exemplo 355 Resolva a equação diferencial $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{3x}$.

Resolução

Equação homogênea: $y'' - 9y' + 20y = 0$. Equação característica: $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$. Então, $\lambda = 4 \vee \lambda = 3$. Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1e^{4x} + C_2 \sin e^{5x}$. Uma solução particular da equação completa será $y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$.

Então, $y'_p = (2Ax + B + 3Ax^2 + 3Bx + 3C)e^{3x} = (3Ax^2 + (2A + 3B)x + B + 3C)e^{3x}$.

Logo, $y''_p = (6Ax + 2A + 3B + 9Ax^2 + (6A + 9B)x + 3B + 9C)e^{3x}$.

Simplificando, vem $y''_p = (9Ax^2 + (12A + 9B)x + 2A + 6B + 9C)e^{3x}$.

Podemos formar o seguinte quadro, para facilitar os cálculos:

| x^2e^{3x} | xe^{3x} | e^{3x} |
|-------------|------------|--------------|
| 9A | 12A + 9B | 2A + 6B + 9C |
| -27A | -18A - 27B | -9B - 27C |
| 20A | 20B | 20C |
| 2A | -6A + 2B | 2A - 3B + 2C |

Então, $\begin{cases} 2A = 1 \\ -6A + 2B = 0 \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases}$. Logo, $\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}$, pelo que $y_p = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4})e^{3x}$.

Então, a solução geral da equação completa é $y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x} + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4})e^{3x}$.

Exemplo 356 Resolva a equação diferencial $y'' + 4y = x \sin^2 x$.

Resolução

Equação homogênea: $y'' + 4y = 0$. Equação característica: $\lambda^2 + 4 = 0$. Então, $\lambda = \pm 2i$. Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$. Como $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, temos que o segundo membro da equação completa é $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}x \cos(2x)$.

Uma solução particular da equação completa será $y_p = Ax + B + (Cx^2 + Dx) \cos(2x) + (Ex^2 + Fx) \sin(2x)$.

Então, $y'_p = A + (2Ex^2 + 2(C + F)x + D) \cos(2x) - (2Bx^2 + 2(D - E)x - F) \sin(2x)$.

Logo, $y''_p = (-4Cx^2 - 4(D - 2E)x + 2(C + 2F)) \cos(2x) + (-4Ex^2 - 4(2C + F)x - 2(2D - E)) \sin(2x)$.

Podemos formar o seguinte quadro, para facilitar os cálculos:

| $x^2 \cos(2x)$ | $x \cos(2x)$ | $\cos(2x)$ | $x^2 \sin(2x)$ | $x \sin(2x)$ | $\sin(2x)$ | x | 1 |
|----------------|--------------|------------|----------------|--------------|------------|-----|----|
| -4C | -4D + 8E | 2C + 4F | -4E | -8C - 4F | -4D + 2E | 0 | 0 |
| 4C | 4D | 0 | 4E | 4F | 0 | 4A | 4B |
| 0 | 8E | 2C + 4F | 0 | -8C | -4D + 2E | 4A | 4B |

Então, $\begin{cases} 4A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \\ 8E = -\frac{1}{2} \\ 2C + 4F = 0 \\ -8C = 0 \\ -4D + 2E = 0 \end{cases}$. Logo, $\begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = 0 \\ E = -\frac{1}{16} \\ F = 0 \\ C = 0 \\ D = -\frac{1}{32} \end{cases}$, pelo que $y_p = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}x \cos(2x) - \frac{1}{16}x^2 \sin(2x)$.

Então, a solução geral da equação homogênea é

$$y = \left(C_1 - \frac{1}{32}x\right) \cos(2x) + \left(C_2 - \frac{1}{16}x^2\right) \sin(2x) + \frac{1}{8}x$$

Exemplo 357 Resolva a equação diferencial $y'' - y' + y = x^3 + 6$.

Resolução

Equação homogênea: $y'' - y' + y = 0$. Equação característica: $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Então, $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right)$. Uma solução particular da equação completa é $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Então, $y'_p = 3Ax^2 + 2Bx + C$. Logo, $y''_p = 6Ax + 2B$.

Então, $y''_p - y'_p + y_p = 6Ax + 2B - 3Ax^2 - 2Bx - C + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Logo, $Ax^3 + (B - 3A)x^2 + (6A - 2B + C)x + 2B - C + D = x^3 + 6$.

$$\text{Então, } \begin{cases} A = 1 \\ B - 3A = 0 \\ 6A - 2B + C = 0 \\ 2B - C + D = 6 \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases}. \text{ Então, } y_p = x^3 + 3x^2.$$

Logo, a solução geral da equação completa é

$$y = e^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right) + x^3 + 3x^2$$

Exemplo 358 Resolva a equação diferencial $\frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = e^x$.

Resolução

Equação homogênea: $\frac{d^4 y}{dx^4} - 2\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$. Equação característica: $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$. Então, $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$ (raízes duplas). Então, a solução geral da equação homogênea é $y_{gh} = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x$.

Uma solução particular da equação completa é $y_p = Ax^2e^x$.

Logo, $y'_p = (2Ax + Ax^2)e^x$ e $y''_p = (2A + 2Ax + 2Ax + Ax^2)e^x = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x$.

Logo, $\frac{d^3 y_p}{dx^3} = (4A + 2Ax + 2A + 4Ax + Ax^2)e^x = (6A + 6Ax + Ax^2)e^x$.

E, por fim, $\frac{d^4 y_p}{dx^4} = (6A + 2Ax + 6A + 6Ax + Ax^2)e^x = (12A + 8Ax + Ax^2)e^x$.

Então, $\frac{d^4 y_p}{dx^4} - 2\frac{d^3 y_p}{dx^3} + \frac{d^2 y_p}{dx^2} = (12A + 8Ax + Ax^2 - 12A - 12Ax - 2Ax^2 + 2A + 4Ax + Ax^2)e^x$.

Então, $2Ae^x = e^x$. Logo, $A = \frac{1}{2}$, pelo que $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$.

Logo, a solução geral da equação completa é $y = C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$.

Então, $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x + \frac{1}{2}x^2)e^x$.

Exemplo 359 Resolva a equação diferencial $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^x \ln x$.

Resolução

Equação homogênea: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$. Equação característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Então, $\lambda = 1$ (raiz dupla).

Logo, a solução geral da equação homogênea é $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

Como obter uma solução particular? Com alguma imaginação, pensamos em $y = Ax^2e^x \ln x$. Quando calcularmos a derivada de $\ln x$, obtemos $\frac{1}{x}$, o que faz baixar o expoente. E como temos de calcular a segunda derivada...

Restará um outro problema, mas de fácil resolução:

Suponhamos que $y = Ax^2e^x \ln x$. Então, $y' = (2Ax + Ax^2)e^x \ln x + Axe^x$.

Então, $y'' = (2A + 2Ax + 2Ax + Ax^2)e^x \ln x + (2A + Ax)e^x + (A + Ax)e^x$.

Logo, $y'' = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x \ln x + (3A + 2Ax)e^x$.

Logo, $y'' - 2y' + y = (2A + 4Ax + Ax^2 - 4Ax - 2Ax^2 + Ax^2)e^x \ln x + (3A + 2Ax - 2Ax)e^x$.

Então, $y'' - 2y' + y = 2Ae^x \ln x + 3Ae^x$.

Então, $A = \frac{1}{2}$, pelo que $y = \frac{1}{2}x^2e^x \ln x$.

Só que o problema não ficou totalmente resolvido, uma vez que obtivemos a parcela $\frac{3}{2}e^x$ que não pretendíamos, ou seja, para $y = \frac{1}{2}x^2e^x \ln x$, temos $y'' - 2y' + y = e^x \ln x + \frac{3}{2}e^x$ e não $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$.

Então, resolvemos a equação $y'' - 2y' + y = -\frac{3}{2}e^x$, o que nos livrará da parcela inconveniente.

Seja $y = Bx^2e^x$. Então, $y' = (Bx^2 + 2Bx)e^x$ e $y'' = (Bx^2 + 2Bx + 2Bx + 2B)e^x = B(x^2 + 4x + 2)e^x$.

Então, $y'' - 2y' + y = (Bx^2 + 4Bx + 2B)e^x - (2Bx^2 + 4Bx)e^x + Bx^2e^x = 2Be^x$.

Então, $B = -\frac{3}{4}$, pelo que uma solução particular da equação completa é $y = \frac{1}{2}x^2e^x \ln x - \frac{3}{4}x^2e^x$.

Logo, a solução geral da equação completa é $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x \ln x - \frac{3}{4}x^2e^x$.

A solução pode ter o seguinte aspecto:

$$y = \left(C_1 + C_2x - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x \right) e^x$$

Note-se que podíamos ter optado por descobrir uma solução particular pelo método da variação das constantes, o qual será apresentado mais adiante.

Exemplo 360 Resolva a equação diferencial $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} = 0$.

Resolução

Trata-se duma equação homogénea. Equação característica: $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0$. Então, $\lambda = 3 \vee \lambda = -2 \vee \lambda = 0$.

Logo, a solução geral da equação é $y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x}$.

13.2 Métodos gerais

Estes métodos aplicam-se a quaisquer tipos de funções, em determinadas condições.

13.2.1 Equações de variáveis separadas

Exemplo 361 Resolva a equação diferencial $y' = xy$.

Resolução

$$\begin{aligned} y' = xy &\iff \frac{dy}{dx} = xy \iff \frac{1}{y}dy = xdx \iff \ln y = \frac{x^2}{2} + C \\ &\iff y = e^{\frac{x^2}{2} + C} = Ke^{\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

A constante K , de acordo com a resolução apresentada, deveria ser positiva, mas, como deveríamos ter posto $\ln|y|$ em vez de $\ln y$, K pode ser positivo ou negativo. E, como $y = 0$ é solução, então K pode ser qualquer número real. Digamos que os erros se compensam.

Exemplo 362 Resolva a equação diferencial $x(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned} x(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0 &\iff \frac{x}{x-1}dx + \frac{y^2}{y+1}dy = 0 \\ &\iff \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)dx + \left(y-1 + \frac{1}{y+1}\right)dy = 0 \\ &\iff x + \ln(x-1) + \frac{y^2}{2} - y + \ln(y+1) = C \end{aligned}$$

Exemplo 363 Resolva a equação diferencial $x^2(y+3)dx + y^2(x^2-1)dy = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned}
x^2(y+3)dx + y^2(x^2-1)dy = 0 &\iff \frac{x^2}{x^2-1}dx + \frac{y^2-9+9}{y+3}dy = 0 \\
&\iff \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)dx + \left(y-3 + \frac{9}{y+3}\right)dy = 0 \\
&\iff \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx + \left(y-3 + \frac{9}{y+3}\right)dy = 0 \\
&\iff x + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{y^2}{2} - 3y + 9\ln(y+3) = C \\
&\iff x + \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \frac{y^2}{2} - 3y + 9\ln(y+3) = C
\end{aligned}$$

Exemplo 364 Resolva a equação diferencial $xyy' = 1 - x^2$.

Resolução

$$\begin{aligned}
xyy' = 1 - x^2 &\iff xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \iff ydy = \frac{1-x^2}{x}dx \\
&\iff ydy = \left(\frac{1}{x} - x\right)dx \iff \frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

Exemplo 365 Resolva a equação diferencial $x\frac{dy}{dx} + y^2 = 1$.

Resolução

$$\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 &\iff x\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \iff \frac{2}{x}dx = \frac{2}{1-y^2}dy \iff \frac{2}{x}dx = \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy \\
&\iff 2\ln x + \ln C = \ln(1+y) - \ln(1-y) \iff \ln(Cx^2) = \ln\frac{1+y}{1-y} \iff Cx^2 = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff Cx^2 = -1 + \frac{2}{1-y} \iff \frac{1}{1+Cx^2} = \frac{1-y}{2} \iff y = 1 - \frac{2}{1+Cx^2}
\end{aligned}$$

Exemplo 366 Resolva a equação diferencial $\sin x \cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\sin x \cos^2 y dx + \cos^2 x dy = 0 &\iff \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \frac{1}{\cos^2 y}dy = 0 \\
&\iff \sec x \tan x dx + \sec^2 y dy = 0 \iff \sec x + \tan y = C
\end{aligned}$$

Exemplo 367 Resolva a equação diferencial $(1+y)\frac{dy}{dx} = x^2(1-y)$.

Resolução

$$\begin{aligned}
(1+y)\frac{dy}{dx} = x^2(1-y) &\iff \frac{1+y}{1-y}dy = x^2dx \iff \frac{y-1+2}{1-y}dy = x^2dx \iff \left(-1 - \frac{2}{y-1}\right)dy = x^2dx \\
&\iff -y - 2\ln(y-1) = \frac{1}{3}x^3 + C \iff -y - \ln(y-1)^2 = \frac{1}{3}x^3 + C
\end{aligned}$$

Exemplo 368 Resolva a equação diferencial $\sqrt{1-x^2}dy = (1+y^2)dx$.

Resolução

$$\sqrt{1-x^2}dy = (1+y^2)dx \iff \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \iff \arctan y = C + \arcsin x$$

Exemplo 369 Resolva a equação diferencial $x^2 (y + a)^2 \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) = y^2 - 2ax^2y + a^2$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 x^2 (y + a)^2 \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) &= y^2 - 2ax^2y + a^2 &\iff \frac{dy}{dx} &= 1 + \frac{y^2 - 2ax^2y + a^2}{x^2 (y + a)^2} \\
 &&\iff \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 (y + a)^2 + y^2 - 2ax^2y + a^2}{x^2 (y + a)^2} \\
 &&\iff \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 y^2 + 2ax^2y + a^2 x^2 + y^2 - 2ax^2y + a^2}{x^2 (y + a)^2} \\
 &&\iff \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 y^2 + a^2 x^2 + y^2 + a^2}{x^2 (y + a)^2} \\
 &&\iff \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 (y^2 + a^2) + y^2 + a^2}{x^2 (y + a)^2} \\
 &&\iff \frac{dy}{dx} &= \frac{(y^2 + a^2) (x^2 + 1)}{x^2 (y + a)^2} \\
 &&\iff \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \frac{y^2 + a^2 + 2ay}{y^2 + a^2} \\
 &&\iff \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \left(1 + \frac{2ay}{y^2 + a^2} \right) dy \\
 &&\iff x - \frac{1}{x} + C &= y + a \ln (y^2 + a^2)
 \end{aligned}$$

Exemplo 370 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{x(y^2+2)}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{x(y^2+2)} &\iff \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x} - \frac{x+1}{x(y^2+2)} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x} \left(1 - \frac{1}{y^2+2} \right) \\
 &\iff \frac{y^2+2}{y^2+1} dy = \frac{x+1}{x} dx \iff \left(1 + \frac{1}{y^2+1} \right) dy = \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx \\
 &\iff y + \arctan y = x + \ln x + C
 \end{aligned}$$

Exemplo 371 Resolva a equação diferencial $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy &= 0 \iff \frac{3e^x}{1 - e^x} dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0 \\
 &\iff -3 \ln (1 - e^x) + \ln \tan y = \ln C \\
 &\iff \ln \frac{\tan y}{(1 - e^x)^3} = \ln C \iff \frac{\tan y}{(1 - e^x)^3} = C \\
 &\iff \tan y = C (1 - e^x)^3 \iff y = \arctan \left[C (1 - e^x)^3 \right]
 \end{aligned}$$

Exemplo 372 Resolva a equação diferencial $(x^2 + x^2y) dx = ye^x dy$.

Resolução

$$\begin{aligned}
(x^2 + x^2 y) dx = y e^x dy &\iff x^2 (1 + y) dx = y e^x dy \iff x^2 e^{-x} dx = \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) dy \\
&\iff \int x^2 e^{-x} dx = y - \ln(y+1) + C \\
&\iff -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = y - \ln(y+1) + C \\
&\iff -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx = y - \ln(y+1) + C \\
&\iff -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} = y - \ln(y+1) + C \\
&\iff -\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x} = y - \ln(y+1) + C
\end{aligned}$$

Exemplo 373 Resolva a equação diferencial $xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 1 + \sqrt{1 - y^2}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
xy \frac{dy}{dx} + y^2 = 1 + \sqrt{1 - y^2} &\iff x \frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \iff \frac{dx}{x} = \frac{y}{1 - y^2 + \sqrt{1 - y^2}} dy \\
&\iff \frac{dx}{x} = \frac{\sin t \cos t}{\cos^2 t + \cos t} dt \iff \frac{dx}{x} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt \\
&\iff \ln x + \ln C = \ln(1 + \cos t) \iff Cx = 1 + \cos t \iff Cx = 1 + \sqrt{1 - y^2}
\end{aligned}$$

Claro que utilizámos a substituição $y = \sin t$.

13.2.2 Equação diferencial exacta

Suponhamos que temos uma função $f(x, y)$ e pretendemos calcular df .

Então, $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Assim, se $f(x, y) = 2xy + x^2 + y^3$, então $df = (2y + 2x) dx + (2x + 3y^2) dy$.

Calculemos $\frac{\partial}{\partial y} (2y + 2x)$ e $\frac{\partial}{\partial x} (2x + 3y^2)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} (2y + 2x) = 2 = \frac{\partial}{\partial x} (2x + 3y^2)$$

Então, dizemos que $(2y + 2x) dx + (2x + 3y^2) dy = 0$ é uma equação diferencial exacta.

Então, se tivermos $(2y + 2x) dx + (2x + 3y^2) dy = 0$, temos $2xy + x^2 + y^3 = C$, como solução da equação diferencial dada.

Exemplo 374 Resolva a equação diferencial $\left(2xy + \frac{1}{y}\right) dx + \left(x^2 - \frac{x}{y^2} + 1\right) dy = 0$.

Resolução

Sejam $P(x, y) = 2xy + \frac{1}{y}$ e $Q(x, y) = x^2 - \frac{x}{y^2} + 1$.

Então, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2xy + \frac{1}{y}\right) = 2x - \frac{1}{y^2}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 - \frac{x}{y^2} + 1\right) = 2x - \frac{1}{y^2}$, pelo que se verifica a condição de diferencial exacta.

Logo, pretendemos descobrir uma função $f(x, y)$ tal que $df = \left(2xy + \frac{1}{y}\right) dx + \left(x^2 - \frac{x}{y^2} + 1\right) dy$, ou seja, pretendemos uma função $f(x, y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{x}{y^2} + 1$. Para encontrarmos essa função, primitivamos $2xy + \frac{1}{y}$ em ordem a x , obtendo-se $x^2 y + \frac{x}{y} + \varphi(y)$.

Derivando a última expressão em ordem a y , obtemos $x^2 - \frac{x}{y^2} + \varphi'(y)$, pelo que $\varphi'(y) = 1$. Então, $\varphi(y) = y + C$.

Então, $f(x, y) = x^2 y + \frac{x}{y} + y - C$. Logo, $x^2 y + \frac{x}{y} + y = C$.

Exemplo 375 Resolva a equação diferencial $\left(2x^2 y + \frac{1}{x}\right) dx + \left(\frac{2}{3}x^3 - y + 1\right) dy = 0$.

Resolução

Sejam $P(x, y) = 2x^2y + \frac{1}{x}$ e $Q(x, y) = \frac{2}{3}x^3 - y + 1$.

Então, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + \frac{1}{x}) = 2x^2$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{2}{3}x^3 - y + 1) = 2x^2$, pelo que se verifica a condição de diferencial exacta.

Logo, pretendemos descobrir uma função $f(x, y)$ tal que $df = (2x^2y + \frac{1}{x})dx + (\frac{2}{3}x^3 - y + 1)dy$, ou seja, pretendemos uma função $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2y + \frac{1}{x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}x^3 - y + 1. \text{ Então, } f(x, y) = \frac{2}{3}x^3y + \ln x + \varphi(y). \text{ Logo, } \frac{2}{3}x^3 - y + 1 + \varphi'(y) = \frac{2}{3}x^3 - y + 1.$$

Então, $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + y + C$.

$$\text{Então, } f(x, y) = \frac{2}{3}x^3y + \ln x - \frac{y^2}{2} + y + C.$$

$$\text{Solução: } \frac{2}{3}x^3y + \ln x - \frac{y^2}{2} + y + C = 0$$

Exemplo 376 Resolva a equação diferencial $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$.

Resolução

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^{-3}) = -6xy^{-4} = -\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right) = -\frac{6x}{y^4}$$

Logo, verifica-se a condição de diferencial exacta.

Então, existe uma função $f(x, y)$, tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y^3} \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2-3x^2}{y^4}$. Então, $f(x, y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y)$.

Logo, $\frac{-3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{-3x^2}{y^4} + \frac{1}{y^2}$, pelo que $\varphi(y) = -\frac{1}{y} + C$. Então, $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$.

Exemplo 377 Resolva a equação diferencial $\ln(y^2 + 1)dx + \frac{2y(x-1)}{y^2+1}dy = 0$.

Resolução

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln(y^2 + 1)) = \frac{2y}{y^2+1}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y(x-1)}{y^2+1}\right) = \frac{2y}{y^2+1}.$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = \ln(y^2 + 1)dx + \frac{2y(x-1)}{y^2+1}dy$. Primitivando $\frac{2y(x-1)}{y^2+1}$ em ordem a y , obtemos $f(x, y) = (x-1)\ln(y^2 + 1) + \psi(x)$. Derivando em ordem a x , obtemos $\ln(y^2 + 1) + \psi'(x) = \ln(y^2 + 1)$, pelo que $\psi(x) = C$.

$$\text{Então, } (x-1)\ln(y^2 + 1) = C.$$

Exemplo 378 Resolva a equação diferencial $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$.

Resolução

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 4xy) = 4x; \quad \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 3y^2) = 4x.$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = (3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy$.

Então, $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^3 = C$. A função $\varphi(y)$ foi calculada mentalmente.

Exemplo 379 Resolva a equação diferencial $\frac{x^2}{y} \frac{dy}{dx} + 2x \ln y = 0$.

Resolução

$$\frac{x^2}{y} \frac{dy}{dx} + 2x \ln y = 0 \iff 2x \ln y dx + \frac{x^2}{y} dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x \ln y dx) = \frac{2x}{y}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y}.$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = 2x \ln y dx + \frac{x^2}{y} dy$.

Então, $f(x, y) = x^2 \ln y$. Logo, $x^2 \ln y = C$.

Exemplo 380 Resolva a equação diferencial $(\cos x - x \cos y) \frac{dy}{dx} = \sin y + y \sin x$.

Resolução

$$(\cos x - x \cos y) \frac{dy}{dx} = \sin y + y \sin x \iff (\sin y + y \sin x) dx + (-\cos x + x \cos y) dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin y + y \sin x) = \cos y + \sin x; \quad \frac{\partial}{\partial x}(-\cos x + x \cos y) = \sin x + \cos y.$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = (\sin y + y \sin x) dx + (-\cos x + x \cos y) dy$.

Então, $f(x, y) = x \sin y - y \cos x$. Logo, $x \sin y - y \cos x = C$.

Exemplo 381 Resolva a equação diferencial $x \frac{dy}{dx} + y = x \ln x$.

Resolução

A equação $x \frac{dy}{dx} + y = x \ln x$ é equivalente a $(y - x \ln x) dx + x dy = 0$. Ora, $\frac{\partial}{\partial y} (y - x \ln x) = 1$ e $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$.

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = (y - x \ln x) dx + x dy$.

$f(x, y) = xy + \psi(x)$. Derivando em ordem a x , obtemos $y + \psi'(x) = -x \ln x$.

Então, $\psi(x) = \int (-x \ln x) dx = -\frac{x^2}{2} \ln x - \int \left(-\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x}\right) = -\frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x}{2} dx = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}$.

Então, $f(x, y) = xy - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}$. Logo, $xy - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} = C$.

Exemplo 382 Resolva a equação diferencial $\ln(y^2 + 1) dx + \frac{2y(x-1)}{y^2+1} dy = 0$.

Resolução

Ora, $\frac{\partial}{\partial y} \ln(y^2 + 1) = \frac{2y}{y^2+1}$ e $\frac{\partial}{\partial x} \frac{2y(x-1)}{y^2+1} = \frac{2y}{y^2+1}$.

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = \ln(y^2 + 1) dx + \frac{2y(x-1)}{y^2+1} dy$.

Seja $f(x, y) = (x-1) \ln(y^2 + 1)$. Derivando em ordem a x , obtemos $\ln(y^2 + 1)$.

Então, $f(x, y) = (x-1) \ln(y^2 + 1)$. Logo, $(x-1) \ln(y^2 + 1) = C$.

Exemplo 383 Resolva a equação diferencial $(3x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + 3y^2) dy = 0$.

Resolução

Ora, $\frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 4xy) = 4x$ e $\frac{\partial}{\partial x} (2x^2 + 3y^2) = 4x$.

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = (3x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + 3y^2) dy$.

Seja $g(x, y) = x^3 + 2x^2y$. Derivando em ordem a y , obtemos $2x^2$.

Então, $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + \varphi(y)$. Logo, $\varphi'(y) = 3y^2$, pelo que $\varphi(y) = y^3$.

Logo, $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^3$, pelo que a solução geral é $x^3 + 2x^2y + y^3 = C$.

Exemplo 384 Resolva a equação diferencial $\frac{x^2}{y} \frac{dy}{dx} + 2x \ln y = 0$.

Resolução

A equação dada é equivalente a $2x \ln y dx + \frac{x^2}{y} dy = 0$

Ora, $\frac{\partial}{\partial y} (2x \ln y) = \frac{2x}{y}$ e $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y}$.

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = 2x \ln y dx + \frac{x^2}{y} dy$.

Seja $g(x, y) = x^2 \ln y$. Derivando em ordem a x , obtemos $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \ln y$.

Então, $f(x, y) = g(x, y) = x^2 \ln y$, pelo que a solução geral é $x^2 \ln y = C$.

Exemplo 385 Resolva a equação diferencial $\frac{(1-y^2) dx + (1-x^2) dy}{(1+xy)^2} = 0$.

Resolução

A equação dada é equivalente a $\frac{1-y^2}{(1+xy)^2} dx + \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} dy = 0$

Ora,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1-y^2}{(1+xy)^2} \right) = \frac{-2y(1+xy)^2 - 2x(1-y^2)(1+xy)}{(1+xy)^4} = \frac{-2y(1+xy) - 2x(1-y^2)}{(1+xy)^3} = \frac{-2x-2y}{(1+xy)^3}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1-x^2}{(1+xy)^2} \right) = \frac{-2x-2y}{(1+xy)^3}$$

Note-se que a expressão $\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}$ pode ser obtida de $\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$, trocando x e y .

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} dx + \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} dy$.

Seja $g(x, y) = \frac{1-y^2}{y} \left(-\frac{1}{1+xy} \right) = \frac{y^2-1}{y(1+xy)}$. É claro que $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$. Mas, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{y^2+1+2xy}{(1+xy)^2 y^2}$.

Seja $f(x, y) = g(x, y) + \varphi(y)$. Então, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$, enquanto que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2+1+2xy}{(1+xy)^2 y^2} + \varphi'(y)$.

Então, $\frac{y^2+1+2xy}{(1+xy)^2 y^2} + \varphi'(y)$ deve ser igual a $\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}$.

Logo,

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} - \frac{y^2+1+2xy}{(1+xy)^2 y^2} = \frac{y^2 - y^2 x^2 - y^2 - 1 - 2xy}{(1+xy)^2 y^2} \\ &= -\frac{y^2 x^2 + 2xy + 1}{y^2 (1+xy)^2} = -\frac{(1+xy)^2}{y^2 (1+xy)^2} = -\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

Então, $\varphi(y) = \frac{1}{y}$, pelo que a solução geral é $\frac{y^2-1}{y(1+xy)} + \frac{1}{y} = C$.

Logo, $\frac{y^2-1}{1+xy} + 1 = Cy$, ou $y^2 - 1 + 1 + xy = Cy(1+xy)$.

Então, $y^2 + xy = Cy(1+xy)$, donde vem $y + x = C(1+xy)$.

Observação

A equação $\frac{(1-y^2)dx + (1-x^2)dy}{(1+xy)^2} = 0$ é equivalente a $(1-y^2)dx + (1-x^2)dy = 0$.

Então,

$$\begin{aligned} (1-y^2)dx + (1-x^2)dy = 0 &\Leftrightarrow \frac{1-y^2}{(1-x^2)(1-y^2)}dx + \frac{1-x^2}{(1-x^2)(1-y^2)}dy = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2}dx + \frac{1}{1-y^2}dy = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1}dx + \frac{1}{y^2-1}dy = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx + \frac{\frac{1}{2}}{y-1}dy - \frac{\frac{1}{2}}{y+1}dy = 0 \end{aligned}$$

Então,

$$\ln \frac{x-1}{x+1} + \ln \frac{y-1}{y+1} = C \Leftrightarrow \frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)} = K$$

$$\frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)} = K, \text{ Solution is: } \left\{ y = -\frac{x-1+Kx+K}{-x+1+Kx+K} \right\}$$

$$y+x=C(1+xy), \text{ Solution is: } \left\{ y = \frac{x-C}{-1+Cx} \right\}$$

Exemplo 386 Resolva a equação diferencial $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$.

Resolução

$$\text{Ora, } \frac{\partial}{\partial y} \left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

$$\text{E, } \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)\right) = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{1}{y}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) + e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y}\right) = e^{\frac{x}{y}} \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}\right) = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Logo, $\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$ é uma equação diferencial exacta.

Primitivando $x + e^{\frac{x}{y}}$, em ordem a x , obtemos $\frac{1}{2}x^2 + ye^{\frac{x}{y}}$.

$$\text{Ora, } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2}x^2 + ye^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}} + y \left(-\frac{x}{y^2}\right) e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}} = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right).$$

Logo, a solução geral da equação dada é $x^2 + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$.

13.2.3 O método do factor integrante

Por vezes, temos uma equação diferencial do tipo $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, mas $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Não se trata duma diferencial exacta, mas pode ocorrer a situação de ser possível multiplicar ambos os membros da equação diferencial por uma função $\lambda(x, y)$, de modo a obtermos uma diferencial exacta. À função $\lambda(x, y)$, dá-se o nome de factor integrante. Têm interesse prático os casos em que λ depende só de x ou só de y .

Suponhamos que λ depende só de x . Então, passamos a ter

$$\lambda(x) P(x, y) dx + \lambda(x) Q(x, y) dy = 0$$

$$\text{Logo, devemos ter } \lambda(x) \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \lambda'(x) Q(x, y) + \lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y).$$

$$\text{Logo, } \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) = \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} Q(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y), \text{ donde vem}$$

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} P(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)$$

ou seja,

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)}{Q(x, y)}$$

Então,

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial}{\partial y} P(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} Q(x, y)}{Q(x, y)} dx}$$

Se o factor integrante depender só de y , teremos

$$\lambda(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial}{\partial x} Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} P(x, y)}{P(x, y)} dy}$$

Exemplo 387 Resolva a equação diferencial $2ydx + xdy = 0$.

Resolução

Sejam $P = 2y$ e $Q = x$. Então, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2 \neq 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Suponhamos que o factor integrante depende só de x . Então,

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(x)}{x} dx} = e^{\int \frac{2-1}{x} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

Então, multiplicamos ambos os membros da equação dada por x :

$$2xydx + x^2dy = 0$$

E, agora, temos $\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$ e $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x$.

Logo, $x^2y = C$.

Podemos considerar que o factor integrante depende só de y . Então,

$$\lambda(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(2y)}{2y} dy} = e^{\int \frac{1-2}{2y} dy} = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy} = e^{-\frac{1}{2} \ln y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Então, multiplicamos ambos os membros da equação dada por $\frac{1}{\sqrt{y}}$:

$$2y \frac{1}{\sqrt{y}} dx + \frac{1}{\sqrt{y}} x dy = 0 \iff 2\sqrt{y} dx + xy^{-\frac{1}{2}} dy$$

Logo, $2x\sqrt{y} = C$.

Exemplo 388 Resolva a equação diferencial $y(1+xy)dx - xdy = 0$.

Resolução

Sejam $P(x, y) = y(1+xy) = y + xy^2$ e $Q(x, y) = -x$. Então, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$.

Logo, $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x, y)} = \frac{1 + 2xy + 1}{-x} = \frac{2 + 2xy}{-x}$. Esta função não depende só de x .

$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P(x, y)} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y(1+xy)} = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$, expressão esta que depende só de y .

Então,

$$\lambda(y) = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada por $\frac{1}{y^2}$, vem

$$\frac{1+xy}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

Sejam $P(x, y) = \frac{1+xy}{y} = x + \frac{1}{y}$ e $Q(x, y) = -\frac{x}{y^2}$. Então,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = \frac{1+xy}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$.

Então, $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}$. Logo, $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$.

Exemplo 389 Resolva a equação diferencial $(x+y)dx + dy = 0$.

Resolução

Sejam $P(x, y) = x + y$ e $Q(x, y) = 1$. Então, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$.

Logo, $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x, y)} = \frac{1 - 0}{1} = 1$.

Então,

$$\lambda(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada por e^x , vem

$$(x + y)e^x dx + e^x dy = 0$$

Sejam $P(x, y) = (x + y)e^x$ e $Q(x, y) = e^x$. Então,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = (x + y)e^x dx + e^x dy$.

Então, $f(x, y) = ye^x + \varphi(x)$. Então, $ye^x + \varphi'(x) = xe^x + ye^x$, pelo que $\varphi'(x) = xe^x$.

Logo, $\varphi(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x - 1)e^x$.

Logo, $f(x, y) = ye^x + (x - 1)e^x$, donde vem $ye^x + (x - 1)e^x = C$, ou seja, $y = 1 - x + Ce^{-x}$

Exemplo 390 Resolva a equação diferencial $dx + [1 + (x + y)\tan y] dy = 0$.

Resolução

Sejam $P(x, y) = 1$ e $Q(x, y) = 1 + (x + y)\tan y$. Então, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = \tan y$.

Logo, $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P(x, y)} = \frac{\tan y}{1} = \tan y$.

Então,

$$\lambda(y) = e^{\int \tan y dy} = e^{-\ln \cos y} = \frac{1}{\cos y} = \sec y$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada por $\sec y$, vem

$$\sec y dx + [\sec y + (x + y)\sec y \tan y] dy = 0$$

Sejam $P(x, y) = \sec y$ e $Q(x, y) = \sec y + (x + y)\sec y \tan y$. Então,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \sec y \tan y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = \sec y dx + [\sec y + (x + y)\sec y \tan y] dy$.

Então, $f(x, y) = x \sec y + \psi(y)$. Então, $x \sec y \tan y + \psi'(y) = \sec y + x \sec y \tan y + y \sec y \tan y$, pelo que $\psi'(y) = \sec y + y \sec y \tan y$.

Logo, $\psi(y) = \int (\sec y + y \sec y \tan y) dy = \int \sec y dy + y \sec y - \int \sec y dy = y \sec y$.

Logo, $f(x, y) = x \sec y + y \sec y$, donde vem $(x + y)\sec y = C$, isto é, $x = C \cos y - y$.

Exemplo 391 Resolva a equação diferencial $(3xy^2 + 3x^2) \frac{dy}{dx} = 2y^3 + 3xy - x^3$.

Resolução

A equação dada é equivalente a $(2y^3 + 3xy - x^3) dx - (3xy^2 + 3x^2) dy = 0$.

Sejam $P(x, y) = 2y^3 + 3xy - x^3$ e $Q(x, y) = -3xy^2 - 3x^2$. Então, $\frac{\partial P}{\partial y} = 6y^2 + 3x$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2 - 6x$.

Logo, $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x, y)} = \frac{6y^2 + 3x + 3y^2 + 6x}{-3x(y^2 + x)} = \frac{9(y^2 + x)}{-3x(y^2 + x)} = -\frac{3}{x}$

Então,

$$\lambda(x) = e^{\int -\frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln x} = \frac{1}{x^3}$$

Multiplicando ambos os membros da equação obtida por $\frac{1}{x^3}$, vem

$$\left(\frac{2y^3}{x^3} + \frac{3y}{x^2} - 1\right) dx + \left(-\frac{3y^2}{x^2} - \frac{3}{x}\right) dy = 0$$

Sejam $P(x, y) = \frac{2y^3}{x^3} + \frac{3y}{x^2} - 1$ e $Q(x, y) = \frac{3y^2}{x^2} + \frac{3}{x}$. Então,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{6y^2}{x^3} + \frac{3}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Logo, existe uma função $f(x, y)$ tal que $df = \left(\frac{2y^3}{x^3} + \frac{3y}{x^2} - 1\right) dx + \left(-\frac{3y^2}{x^2} - \frac{3}{x}\right) dy$.

Então, $f(x, y) = -\frac{y^3}{x^2} - \frac{3y}{x} + \varphi(x)$. Então, $2y^3x^{-3} + 3yx^{-2} + \varphi'(x) = \frac{2y^3}{x^3} + \frac{3y}{x^2} - 1$, pelo que $\varphi'(x) = -1$.

Logo, $\varphi(x) = -x$. Logo, $f(x, y) = -\frac{y^3}{x^2} - \frac{3y}{x} - x = C$, donde vem $x^3 + 3xy + y^3 = Cx^2$.

Exemplo 392 Resolva a equação diferencial $\ln x dx + \frac{1}{y}(e^y + x \ln x - x) dy = 0$.

Resolução

Sejam $P(x, y) = \ln x$ e $Q(x, y) = \frac{1}{y}(e^y + x \ln x - x)$. Então, $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y}(1 + \ln x - 1) = \frac{1}{y} \ln x$.

Logo, $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P(x, y)} = \frac{\frac{1}{y} \ln x}{\ln x} = \frac{1}{y}$.

Então,

$$\lambda(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

Multiplicando ambos os membros da equação obtida por y , vem

$$y \ln x dx + (e^y + x \ln x - x) dy = 0$$

Sejam $P(x, y) = y \ln x$ e $Q(x, y) = e^y + x \ln x - x$. Então,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \ln x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Primitivando $e^y + x \ln x - x$, em ordem a y , temos $f(x, y) = e^y + xy \ln x - xy$, cuja derivada, em ordem a x , é $y \ln x$.

Então, a solução geral da equação dada é $e^y + xy \ln x - xy = C$.

13.2.4 Método de substituição

Por vezes, é necessário aplicar este método para resolver certas equações diferenciais. Vejamos um exemplo (que podia ser resolvido por separação das variáveis):

Exemplo 393 Resolva a equação diferencial $(x^2 - y^2 - y) dx - x dy = 0$, utilizando as substituições $x = u + v$ e $y = u - v$.

Resolução

Então, $dx = du + dv$, $dy = du - dv$.

Logo, $\left[(u + v)^2 - (u - v)^2 - u + v\right] (du + dv) - (u + v) (du - dv) = 0$.

Então, $\left[u^2 + 2uv + v^2 - u^2 + 2uv - v^2 - u + v\right] (du + dv) - (u + v) (du - dv) = 0$.

Simplificando, vem $(4uv - u + v) du + (4uv - u + v) dv - (u + v) du + (u + v) dv = 0$.

Então, $(4uv - u + v - u - v) du + (4uv - u + v + u + v) dv = 0$.

Logo, $(4uv - 2u) du + (4uv + 2v) dv = 0$. Então, $2u(2v - 1) du + 2v(2u + 1) dv = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{2u}{2u+1} du + \frac{2v}{2v-1} dv = 0 &\iff \left(1 - \frac{1}{2u+1}\right) du + \left(1 + \frac{1}{2v-1}\right) dv = 0 \\ &\iff u - \frac{1}{2} \ln(2u+1) + v + \frac{1}{2} \ln(2v-1) = C \end{aligned}$$

Como, $u = \frac{x+y}{2}$ e $v = \frac{x-y}{2}$, desfazemos a substituição:

$$x - \frac{1}{2} \ln(x+y+1) + \frac{1}{2} \ln(x-y-1) = \frac{C}{2}$$

Multiplicando ambos os membros por 2, obtemos

$$2x + \ln \frac{x-y-1}{x+y+1} = C$$

O problema, neste método, é encontrar a substituição adequada. No entanto, há casos em que podemos determinar essa substituição.

Este método está, normalmente, associado a outro.

13.2.5 Método da variação das constantes

Exemplo 394 Resolva a equação diferencial $y' = P(x)y + Q(x)$

Resolução

Consideremos a equação homogênea $y' - P(x)y = 0$. Então, $\frac{y'}{y} = P(x)$, donde vem $\ln y = \int P(x) dx + C$.

Logo, $y = Ke^{\int P(x) dx}$. Utilizando o método da variação da constante, consideramos que K depende de x , pelo que temos

$$y' = K'(x)e^{\int P(x) dx} + K(x)e^{\int P(x) dx} P(x) = P(x)y + Q(x)$$

Então, $K'(x)e^{\int P(x) dx} = Q(x)$, donde vem $K'(x) = Q(x)e^{-\int P(x) dx}$. Então,

$$K(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x) dx} dx + K_2$$

Logo, a solução da equação dada é $y = e^{\int P(x) dx} \left(\int Q(x)e^{-\int P(x) dx} dx + K_2 \right)$.

A equação diferencial $y' = P(x)y + Q(x)$ é conhecida por equação linear.

Exemplo 395 Resolva a equação diferencial $xy' + y = x \ln x$.

Resolução

A equação dada é equivalente a $y' + \frac{y}{x} = \ln x$.

Consideremos a equação diferencial $y' + \frac{y}{x} = 0$.

Então, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, pelo que $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Então, $\ln y + \ln x = \ln C$. Logo, $xy = C$.

Então, $y = \frac{C}{x}$. Suponhamos, agora, que em vez de C , temos $C(x)$.

Então, $y = \frac{C(x)}{x}$, pelo que $y' = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$.

Logo, $\frac{C'(x)}{x} = \ln x$, donde vem $C'(x) = x \ln x$.

$$\text{Então, } C(x) = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + K.$$

Logo, $y = \frac{\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + K}{x}$, ou seja, $y = \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + \frac{K}{x} = \frac{K}{x} + \frac{x}{4} (2 \ln x - 1)$.

Mais adiante, temos uma subsecção dedicada exclusivamente à equação linear, sendo que a presente referência se destina a ilustrar o método da variação das constantes.

Exemplo 396 Resolva a equação diferencial $y'' - 3y' + 2y = x^2$

Resolução

Esta equação diferencial já foi resolvida, mas vamos seguir, agora, outro processo.

Equação homogênea: $y'' - 3y' + 2y = 0$

Equação característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \iff \lambda = 1 \vee \lambda = 2$$

Então, a solução geral da equação homogênea é $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Suponhamos, agora, que C_1 e C_2 são funções de x .

Então, $y' = C_1' e^x + C_1 e^x + C_2' e^{2x} + 2C_2 e^{2x}$.

Vamos escolher as funções C_1 e C_2 de modo que $C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0$.

Então, $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$, pelo que $y'' = C_1' e^x + C_1 e^x + 2C_2' e^{2x} + 4C_2 e^{2x}$.

Então,

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= C_1' e^x + C_1 e^x + 2C_2' e^{2x} + 4C_2 e^{2x} - 3C_1 e^x - 6C_2 e^{2x} + 2C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} \\ &= C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} \end{aligned}$$

Agora, fazemos $C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} = x^2$, obtendo-se o sistema $\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0 \\ C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} = x^2 \end{cases}$.

Subtraindo, membro a membro, obtemos $C_2' e^{2x} = x^2$, pelo que $C_2' = x^2 e^{-2x}$.

Então, $C_2 = \int x^2 e^{-2x} dx$, que pode ser primitivada por partes. Mas, sabendo a "forma" da primitiva, temos $C_2(x) = (Ax^2 + Bx + C) e^{-2x}$. Então,

$$C_2'(x) = (2Ax + B) e^{-2x} - 2(Ax^2 + Bx + C) e^{-2x} = (-2Ax^2 + 2Ax - 2Bx + B - 2C) e^{-2x}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \\ B - 2C = 0 \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Então, $C_2 = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x} + K_1$.

De $C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0$, vem $C_1' = -C_2' e^{-x} = -x^2 e^{-x}$.

Então, $C_1 = -\int x^2 e^{-x} dx$. Seja $C_1 = (Fx^2 + Gx + H) e^{-x}$.

Então, $C_1' = (2Fx + G - Fx^2 - Gx - H) e^{-x} = (-Fx^2 + 2Fx - Gx + G - H) e^{-x}$.

$$\text{Logo, } \begin{cases} F = 1 \\ 2F - G = 0 \\ G - H = 0 \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} F = 1 \\ G = 2 \\ H = 2 \end{cases}, \text{ pelo que}$$

$$\begin{aligned} C_1(x) &= (Fx^2 + Gx + H) e^{-x} + K_2 \\ &= (x^2 + 2x + 2) e^{-x} + K_2 \end{aligned}$$

E, finalmente, temos a solução da equação completa:

$$\begin{aligned} y &= C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x} = ((x^2 + 2x + 2) e^{-x} + K_2) e^x + \left(\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x} + K_1\right) e^{2x} \\ &= x^2 + 2x + 2 + K_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + K_1 e^{2x} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + K_1 e^{2x} + K_2 e^x \end{aligned}$$

E, como podemos verificar, temos

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + K_1 e^{2x} + K_2 e^x$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + K_1e^{2x} + K_2e^x \right) = x + \frac{3}{2} + 2K_1e^{2x} + K_2e^x \\
y'' &= \frac{d}{dx} \left(x + \frac{3}{2} + 2K_1e^{2x} + K_2e^x \right) = 1 + 4K_1e^{2x} + K_2e^x \\
y'' - 3y' + 2y &= 1 + 4K_1e^{2x} + K_2e^x - 3 \left(x + \frac{3}{2} + 2K_1e^{2x} + K_2e^x \right) + \\
&\quad + 2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} + K_1e^{2x} + K_2e^x \right) = x^2
\end{aligned}$$

Exemplo 397 Resolva a equação diferencial $y'' - 3y' + 2y = x \sin x$

Resolução

Já vimos que a solução geral da equação homogênea é $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Suponhamos, agora, que C_1 e C_2 são funções de x .

Então, $y' = C_1'e^x + C_1e^x + C_2'e^{2x} + 2C_2e^{2x}$.

Vamos escolher as funções C_1 e C_2 de modo que $C_1'e^x + C_2'e^{2x} = 0$.

Então, $y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x}$, pelo que $y'' = C_1'e^x + C_1e^x + 2C_2'e^{2x} + 4C_2e^{2x}$.

Então,

$$\begin{aligned}
y'' - 3y' + 2y &= C_1'e^x + C_1e^x + 2C_2'e^{2x} + 4C_2e^{2x} - 3C_1e^x - 6C_2e^{2x} + 2C_1e^x + 2C_2e^{2x} \\
&= C_1'e^x + 2C_2'e^{2x}
\end{aligned}$$

Agora, fazemos $C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} = x \sin x$, obtendo-se o sistema $\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} = 0 \\ C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} = x \sin x \end{cases}$.

Subtraindo, membro a membro, obtemos $C_2'e^{2x} = x \sin x$, pelo que $C_2' = xe^{-2x} \sin x$.

Então, $C_2 = \int xe^{-2x} \sin x dx$.

Seja $u' = e^{-2x} \sin x$. Então, $u = \int e^{-2x} \sin x dx$. Fazendo $f' = e^{-2x}$ e $g = \sin x$, temos que $f = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ e $g' = \cos x$.

Então, $u = \int e^{-2x} \sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \sin x + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cos x dx$.

Repetindo o raciocínio, temos $\int e^{-2x} \cos x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \cos x - \frac{1}{2} \int e^{-2x} \sin x dx$.

Então,

$$\begin{aligned}
\int e^{-2x} \sin x dx &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \sin x + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cos x dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x} \sin x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \cos x - \frac{1}{2} \int e^{-2x} \sin x dx \right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{-2x} \cos x - \frac{1}{4} \int e^{-2x} \sin x dx
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{5}{4} \int e^{-2x} \sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \sin x - \frac{1}{4}e^{-2x} \cos x$.

Então, $\int e^{-2x} \sin x dx = -\frac{2}{5}e^{-2x} \sin x - \frac{1}{5}e^{-2x} \cos x$.

Voltando a $C_2 = \int xe^{-2x} \sin x dx$, temos $u' = e^{-2x} \sin x$ e $v = x$.

Então,

$$\begin{aligned}
C_2 &= \int xe^{-2x} \sin x dx = \left(-\frac{2}{5}e^{-2x} \sin x - \frac{1}{5}e^{-2x} \cos x \right) x + \int \left(\frac{2}{5}e^{-2x} \sin x + \frac{1}{5}e^{-2x} \cos x \right) dx \\
&= -\frac{2}{5}xe^{-2x} \sin x - \frac{1}{5}xe^{-2x} \cos x + \frac{2}{5} \int e^{-2x} \sin x dx + \frac{1}{5} \int e^{-2x} \cos x dx \\
&= -\frac{2}{5}xe^{-2x} \sin x - \frac{1}{5}xe^{-2x} \cos x - \frac{4}{25}e^{-2x} \sin x - \frac{2}{25}e^{-2x} \cos x + \frac{1}{5} \int e^{-2x} \cos x dx
\end{aligned}$$

E, agora, falta-nos calcular $\int e^{-2x} \cos x dx$:

Suponhamos que $\int e^{-2x} \cos x dx = Ae^{-2x} \sin x + Be^{-2x} \cos x$. Então:

$$\begin{aligned} e^{-2x} \cos x &= -2Ae^{-2x} \sin x + Ae^{-2x} \cos x - 2Be^{-2x} \cos x - Be^{-2x} \sin x \\ &= (-2A - B)e^{-2x} \sin x + (A - 2B)e^{-2x} \cos x \end{aligned}$$

Logo, $-2A - B = 0 \wedge A - 2B = 1$, donde vem $A = \frac{1}{5} \wedge B = -\frac{2}{5}$.

Então, $\int e^{-2x} \cos x dx = \frac{1}{5}e^{-2x} \sin x - \frac{2}{5}e^{-2x} \cos x$.

Logo,

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{2}{5}xe^{-2x} \sin x - \frac{1}{5}xe^{-2x} \cos x - \frac{4}{25}e^{-2x} \sin x - \frac{2}{25}e^{-2x} \cos x + \frac{1}{5} \int e^{-2x} \cos x dx \\ &= -\frac{2}{5}xe^{-2x} \sin x - \frac{1}{5}xe^{-2x} \cos x - \frac{3}{25}e^{-2x} \sin x - \frac{4}{25}e^{-2x} \cos x + K_2 \end{aligned}$$

Mas, de $C_1'e^x + C_2'e^{2x} = 0$, vem $C_1' = -C_2'e^x = -xe^{-x} \sin x$, pelo que $C_1 = -\int xe^{-x} \sin x dx$.

É claro que não vamos voltar a calcular esta primitiva do mesmo modo que a anterior.

Suponhamos que $\int xe^{-x} \sin x dx = (Ax + B)e^{-x} \sin x + (Cx + D)e^{-x} \cos x$.

A derivada do segundo membro da igualdade anterior é

$$Ae^{-x} \sin x - (Ax + B)e^{-x} \sin x + (Ax + B)e^{-x} \cos x + Ce^{-x} \cos x - (Cx + D)e^{-x} \cos x - (Cx + D)e^{-x} \sin x$$

Então,

$$\begin{aligned} x \sin x &= A \sin x - (Ax + B) \sin x + (Ax + B) \cos x + C \cos x - (Cx + D) \cos x - (Cx + D) \sin x \\ &= (A - Ax - B - Cx - D) \sin x + (Ax - Cx + B + C - D) \cos x \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} -A - C = 1 \\ A - B - D = 0 \\ A - C = 0 \\ B + C - D = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C = -\frac{1}{2} \\ B + D = -\frac{1}{2} \\ A = C = -\frac{1}{2} \\ B - D = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{2} \\ D = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } \int xe^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2}xe^{-x} \sin x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} \cos x.$$

$$C_1 = -\int xe^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2}xe^{-x} \sin x + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} \cos x + K_1$$

A solução geral da equação completa é

$$\begin{aligned} y = C_1e^x + C_2e^{2x} &= \frac{1}{2}x \sin x + \frac{1}{2}(x + 1) \cos x + K_1e^x - \frac{2}{5}x \sin x - \frac{1}{5}x \cos x - \frac{3}{25} \sin x - \frac{4}{25} \cos x \\ &= K_1e^x + K_2e^{2x} + \frac{1}{10}x \sin x + \frac{3}{10}x \cos x - \frac{3}{25} \sin x + \frac{17}{50} \cos x \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo de terceira ordem:

Exemplo 398 Resolva a equação diferencial $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \sin x$

Resolução

A equação homogênea é $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

A equação característica é $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, sendo que uma das raízes é 1. As outras raízes são 2 e 3. Então a solução geral da equação homogênea é

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$$

Supondo que C_1 , C_2 e C_3 são funções de x , temos

$$y' = C_1'e^x + C_2'e^{2x} + C_3'e^{3x} + C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x}$$

Fazendo $C_1'e^x + C_2'e^{2x} + C_3'e^{3x} = 0$, temos $y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x}$.

Então,

$$y'' = C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} + 3C_3'e^{3x} + C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x}$$

Fazendo $C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} + 3C_3'e^{3x} = 0$, temos $y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x}$.

Finalmente, temos

$$y''' = C_1'e^x + 4C_2'e^{2x} + 9C_3'e^{3x} + C_1e^x + 8C_2e^{2x} + 27C_3e^{3x}$$

Então,

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = C_1'e^x + 4C_2'e^{2x} + 9C_3'e^{3x} = \sin x$$

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} + C_3'e^{3x} = 0 \\ C_1'e^x + 2C_2'e^{2x} + 3C_3'e^{3x} = 0 \\ C_1'e^x + 4C_2'e^{2x} + 9C_3'e^{3x} = \sin x \end{cases} \implies \begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} + C_3'e^{3x} = 0 \\ C_2'e^{2x} + 2C_3'e^{3x} = 0 \\ 2C_2'e^{2x} + 6C_3'e^{3x} = \sin x \end{cases}$$

Logo, $\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{2x} + C_3'e^{3x} = 0 \\ C_2'e^{2x} + 2C_3'e^{3x} = 0 \\ 2C_3'e^{3x} = \sin x \end{cases}$

Então, $C_3' = \frac{1}{2}e^{-3x} \sin x$, pelo que $C_3 = \frac{1}{2} \int e^{-3x} \sin x dx = -\frac{1}{20}e^{-3x} \cos x - \frac{3}{20}e^{-3x} \sin x + K_3$.

Mas, $C_2'e^{2x} + 2C_3'e^{3x} = 0$ implica $C_2' = -2C_3'e^x = -e^{-2x} \sin x$.

Logo,

$$C_2 = - \int e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{5}e^{-2x} \cos x + \frac{2}{5}e^{-2x} \sin x + K_2$$

E, agora, de $C_1'e^x + C_2'e^{2x} + C_3'e^{3x} = 0$, vem

$$C_1' = -C_2'e^x - C_3'e^{2x} = e^{-x} \sin x - \frac{1}{2}e^{-x} \sin x = \frac{1}{2}e^{-x} \sin x$$

Logo,

$$C_1 = \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{4}e^{-x} \cos x - \frac{1}{4}e^{-x} \sin x + K_1$$

A solução geral da equação completa é

$$y = -\frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \sin x + K_1e^x + \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x + K_2e^{2x} - \frac{1}{20} \cos x - \frac{3}{20} \sin x + K_3e^{3x}$$

Vejamos, agora, um exemplo de quarta ordem:

Exemplo 399 Resolva a equação diferencial $y^{(4)} - y = \sin x$

Resolução

A equação homogênea é $y^{(4)} - y = 0$.

A equação característica é $\lambda^4 - 1 = 0$, sendo que as raízes são ± 1 e $\pm i$.

Então a solução geral da equação homogênea é

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Suponhamos que C_1, C_2, C_3 e C_4 são funções de x .

Então,

$$\begin{aligned} y' &= C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3' \cos x + C_4' \sin x + C_1e^x - C_2e^{-x} + C_4 \cos x - C_3 \sin x \\ &= C_1e^x - C_2e^{-x} + C_4 \cos x - C_3 \sin x \end{aligned}$$

, com $C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3' \cos x + C_4' \sin x = 0$.

$$\begin{aligned} y'' &= C_1'e^x - C_2'e^{-x} + C_4' \cos x - C_3' \sin x + C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x \\ &= C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x \end{aligned}$$

, com $C_1'e^x - C_2'e^{-x} - C_3'\sin x + C_4'\cos x = 0$.

$$\begin{aligned} y''' &= C_1'e^x + C_2'e^{-x} - C_3'\cos x - C_4'\sin x + C_1e^x - C_2e^{-x} + C_3\sin x - C_4\cos x \\ &= C_1e^x - C_2e^{-x} + C_3\sin x - C_4\cos x \end{aligned}$$

, com $C_1'e^x + C_2'e^{-x} - C_3'\cos x - C_4'\sin x = 0$.

$$y^{(4)} = C_1'e^x - C_2'e^{-x} + C_3'\sin x - C_4'\cos x + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$

E, agora, vem

$$y^{(4)} - y = C_1'e^x - C_2'e^{-x} + C_3'\sin x - C_4'\cos x = \sin x$$

$$\text{, com } \begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3'\cos x + C_4'\sin x = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} - C_3'\sin x + C_4'\cos x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'e^{-x} - C_3'\cos x - C_4'\sin x = 0 \end{cases}.$$

Então, vem sucessivamente:

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} + C_3'\cos x + C_4'\sin x = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} - C_3'\sin x + C_4'\cos x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'e^{-x} - C_3'\cos x - C_4'\sin x = 0 \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} + C_3'\sin x - C_4'\cos x = \sin x \end{cases} \quad \begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^{-x} = 0 \\ C_3'\cos x + C_4'\sin x = 0 \\ 2C_1'e^x - 2C_2'e^{-x} = \sin x \\ 2C_3'\sin x - 2C_4'\cos x = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -C_2'e^{-2x} \\ 2C_3'\cos^2 x + 2C_4'\sin x \cos x = 0 \\ -3C_2'e^{-x} = \sin x \\ 2C_3'\sin^2 x - 2C_4'\sin x \cos x = \sin^2 x \end{cases} \quad \begin{cases} C_1' = -C_2'e^{-2x} \\ C_3'\cos x + C_4'\sin x = 0 \\ C_2' = -\frac{1}{3}e^x \sin x \\ 2C_3' = \sin^2 x \\ C_3' = \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{cases}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} C_1' = -\frac{1}{3}e^{-x} \sin x \\ C_3' = \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \times \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1-\cos(2x)}{4} \\ C_2 = -\frac{1}{3} \int e^x \sin x dx = \frac{1}{6} e^x \cos x - \frac{1}{6} e^x \sin x + K_2 \\ C_4 = \frac{1}{8} \cos(2x) + K_4 \end{cases}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{3} \int e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{6} e^{-x} \cos x + \frac{1}{6} e^{-x} \sin x + K_1 \\ C_2 = \frac{1}{6} e^x \cos x - \frac{1}{6} e^x \sin x + K_2 \\ C_3 = \frac{1}{8} \int (2 - 2 \cos(2x)) dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \sin(2x) + K_3 \\ C_4 = \frac{1}{8} \cos(2x) + K_4 \end{cases}$$

Logo, a solução geral da equação completa é

$$\begin{aligned} y &= C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x \\ &= \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{6} \sin x + K_1e^x + \frac{1}{6} \cos x - \frac{1}{6} \sin x + K_2e^{-x} + \\ &\quad + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8} \sin(2x) + K_3 \right) \cos x + \left(-\frac{1}{8} \cos(2x) + K_4 \right) \sin x \\ &= \frac{1}{3} \cos x + K_1e^x + K_2e^{-x} + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8} \sin(2x) + K_3 \right) \cos x + \left(\frac{1}{8} \cos(2x) + K_4 \right) \sin x \end{aligned}$$

Exemplo 400 Resolva a equação diferencial $y''' + y' = \sec x$.

Resolução

Equação homogênea: $y''' + y' = 0$. Equação característica: $\lambda^3 + \lambda = 0$. Então, $\lambda = 0 \vee \lambda = \pm i$.

A solução geral da equação homogênea é $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Então,

$$\begin{cases} y' = C_1' + C_2'\cos x + C_3'\sin x - C_2\sin x + C_3\cos x = -C_2\sin x + C_3\cos x \\ y'' = -C_2'\sin x + C_3'\cos x - C_2\cos x - C_3\sin x = -C_2\cos x - C_3\sin x \\ y''' = -C_2'\cos x - C_3'\sin x + C_2\sin x - C_3\cos x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \text{, com } \begin{cases} C_1' + C_2' \cos x + C_3' \sin x = 0 \\ -C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0 \\ -C_2' \cos x - C_3' \sin x = \sec x \end{cases} \quad . \text{ Então,} \\
& \begin{cases} C_1' = \sec x \\ -C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0 \\ -C_2' \cos x - C_3' \sin x = \sec x \end{cases} \iff \begin{cases} C_1' = \sec x \\ -C_2' \sin^2 x + C_3' \sin x \cos x = 0 \\ -C_2' \cos^2 x - C_3' \sin x \cos x = 1 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} C_1 = \ln(\sec x + \tan x) + K_1 \\ C_2' = -1 \\ \sin x + C_3' \cos x = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} C_1 = \ln(\sec x + \tan x) + K_1 \\ C_2 = -x + K_2 \\ C_3' = \frac{-\sin x}{\cos x} \implies C_3 = \ln \cos x + K_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

A solução geral da equação homogênea é

$$y = \ln(\sec x + \tan x) + K_1 + (K_2 - x) \cos x + (K_3 + \ln \cos x) \sin x$$

Observemos que podíamos ter começado por baixar a ordem da equação diferencial:

$$y''' + y' = \sec x \implies y'' + y = C_1 + \ln(\sec x + \tan x)$$

Exemplo 401 Resolva a equação diferencial $y'' + 4y = 2 \tan x = 0$.

Resolução

Equação homogênea: $y'' + 4y = 0$. Equação característica: $\lambda^2 + 4 = 0$. Então, $\lambda = \pm 2i$.

A solução geral da equação homogênea é $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

Suponhamos que C_1 e C_2 são funções de x .

Então,

$$\begin{cases} y' = C_1' \cos(2x) - 2C_1 \sin(2x) + C_2' \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x) = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x) \\ y'' = -2C_1' \sin(2x) - 4C_1 \cos(2x) + 2C_2' \cos(2x) - 4C_2 \sin(2x) \end{cases}$$

$$\text{, com } \begin{cases} C_1' \cos(2x) + C_2' \sin(2x) = 0 \\ -2C_1' \sin(2x) + 2C_2' \cos(2x) = 2 \tan x \end{cases}$$

Então, $C_1' \sin(2x) - C_2' \cos(2x) = -\tan x$. Mas, $C_1' = -C_2' \tan(2x)$.

Logo, $-C_2' \tan(2x) \sin(2x) - C_2' \cos(2x) = -\tan x$.

Então, $C_2' [\tan(2x) \sin(2x) + \cos(2x)] = \tan x$.

Então,

$$\begin{aligned}
C_2' &= \frac{\tan x}{\tan(2x) \sin(2x) + \cos(2x)} = \frac{\tan x}{\frac{\sin^2(2x)}{\cos(2x)} + \cos(2x)} = \tan x \cos(2x) \\
&= \frac{\sin x (2 \cos^2 x - 1)}{\cos x} = 2 \sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x}
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } C_2 = \int \left(2 \sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \sin^2 x + \ln(\cos x) + K_2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
C_1' &= -C_2' \tan(2x) = -2 \sin x \cos^2 x \frac{2 \sin x}{\cos(2x)} + \frac{2 \sin^2 x}{\cos(2x)} = \frac{2 \sin^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos(2x)} \\
&= -2 \sin^2 x \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos(2x)} = -2 \sin^2 x = \cos(2x) - 1
\end{aligned}$$

$$\text{Então, } C_1 = \int \cos(2x) dx - x + K_1 = \frac{1}{2} \sin(2x) - x + K_1$$

Então,

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) = \left(\frac{1}{2} \sin(2x) - x + K_1 \right) \cos(2x) + (\sin^2 x + \ln(\cos x) + K_2) \sin(2x)$$

13.3 Métodos formais

Estes métodos aplicam-se a equações diferenciais com funções de determinada forma.

13.3.1 Equações homogêneas

Chama-se equação diferencial homogênea a toda a equação do tipo $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Exemplo 402 Resolva a equação diferencial $y' = \frac{x^2+xy}{y^2+xy}$.

Resolução

Observemos que o numerador e o denominador de $\frac{x^2+xy}{y^2+xy}$ são polinômios homogêneos de 2º grau.

$$y' = \frac{x^2+xy}{y^2+xy} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}}$$

A mudança de variável é $\frac{y}{x} = u$, ou seja, $y = ux$. Então, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.
Então, $\frac{1+u}{u^2+u} = u + x\frac{du}{dx}$, ou seja, $\frac{1}{u} - u = x\frac{du}{dx}$. Ora,

$$\frac{1}{u} - u = x\frac{du}{dx} \iff \frac{1-u^2}{u} = x\frac{du}{dx} \iff \frac{1}{x}dx = \frac{u}{1-u^2}du \iff \ln x + C = -\frac{1}{2}\ln(1-u^2)$$

Então,

$$\ln x + C = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{x^2 - y^2}{x^2} = -\frac{1}{2}\ln(x^2 - y^2) + \ln x$$

Então, $C = -\frac{1}{2}\ln(x^2 - y^2)$, donde vem $x^2 - y^2 = K$. Logo,

$$y = \sqrt{x^2 - K} \vee y = -\sqrt{x^2 - K}$$

Exemplo 403 Resolva a equação diferencial $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$.

Resolução

Neste caso, $x+y$ e $x-y$ são polinômios homogêneos de 1º grau.

A mudança de variável é $y = ux$. Então, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, ou seja, $dy = udx + xdu$.

Então, $(x+ux)dx + (x-ux)dy = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} (x+ux)dx + (x-ux)(udx+xdu) &= 0 \iff (x+ux)dx + (xu-u^2x)dx + (x^2-ux^2)du = 0 \\ &\iff (x+2ux-u^2x)dx + (x^2-ux^2)du = 0 \\ &\iff x(1+2u-u^2)dx + x^2(1-u)du = 0 \\ &\iff \frac{1}{x}dx + \frac{1-u}{1+2u-u^2}du = 0 \\ &\iff \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\frac{2-2u}{1+2u-u^2}du = 0 \\ &\iff \ln x + \frac{1}{2}\ln(u^2-2u-1) = \frac{C}{2} \\ &\iff \ln(x^2) + \ln[(u-1)^2-2] = C \\ &\iff x^2\left[\left(\frac{y}{x}-1\right)^2-2\right] = K \end{aligned}$$

Então,

$$\left(\frac{y}{x}-1\right)^2-2 = \frac{K}{x^2} \iff \frac{y}{x}-1 = \pm\sqrt{2+\frac{K}{x^2}} \iff y = \left(1 \pm \sqrt{2+\frac{K}{x^2}}\right)x$$

Note-se que, na equação diferencial $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$, temos $\frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x-y)$, pelo que se trata duma diferencial exacta.

Então, para $f(x, y) = xy + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$, temos $\frac{\partial f}{\partial x} = y + x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x - y$. Então, $xy + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C$.

Note-se que ao escrevermos $y = \left(1 \pm \sqrt{2 + \frac{K}{x^2}}\right)x$, estamos a referir-nos a duas funções distintas (e não a uma função multívoca).

Exemplo 404 Resolva a equação diferencial $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned}\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0 &\iff \frac{2x}{y}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^2} = 0 \\ &\iff \frac{2x}{y}dx + \left(1 - 3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)dy = 0\end{aligned}$$

Faz-se a substituição $y = ux$. Então, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, pelo que $dy = udx + xdu$.

Substituindo, vem $\frac{2}{u}dx + \left(1 - \frac{3}{u^2}\right)(udx + xdu) = 0$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{2}{u}dx + \left(1 - \frac{3}{u^2}\right)(udx + xdu) = 0 &\iff \frac{2}{u}dx + udx + xdu - \frac{3}{u}dx - \frac{3x}{u^2}du = 0 \\ &\iff -\frac{1}{u}dx + udx + xdu - \frac{3x}{u^2}du = 0 \\ &\iff \left(u - \frac{1}{u}\right)dx + x\left(1 - \frac{3}{u^2}\right)du = 0 \\ &\iff \frac{u^2-1}{u}dx + \frac{x(u^2-3)}{u^2}du = 0 \\ &\iff \frac{dx}{x} + \frac{(u^2-3)u}{u^2(u^2-1)}du = 0 \\ &\iff \frac{dx}{x} + \frac{u^2-3}{u(u^2-1)}du = 0\end{aligned}$$

$\frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1} = \frac{A(u^2-1)+B(u^2+u)+C(u^2-u)}{u(u^2-1)} = \frac{u^2-3}{u(u^2-1)}$. Então, $A(u^2-1) + B(u^2+u) + C(u^2-u) = u^2-3$.

Para $a = 1$, temos $2B = -2$, pelo que $B = -1$. Para $a = 0$, temos $-A = -3$, pelo que $A = 3$.

Para $a = -1$, temos $2C = -2$, pelo que $C = -1$.

Então, $\frac{dx}{x} + \frac{u^2-3}{u(u^2-1)}du = 0 \iff \frac{dx}{x} + \frac{3}{u}du - \frac{1}{u-1}du - \frac{1}{u+1}du = 0$.

Logo, $\ln x + \ln(u^3) - \ln(u-1) - \ln(u+1) = \ln C$. Então, $\frac{xu^3}{u^2-1} = C$.

Logo,

$$\frac{x\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1} = C \iff \frac{y^3}{x^2} = \frac{Cy^2}{x^2} - C \iff y^3 = Cy^2 - Cx^2$$

Exemplo 405 Resolva a equação diferencial $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$.

Resolução

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0 \iff \left(1 + \frac{y}{x}\right)dx + \left(\frac{y}{x} - 1\right)dy = 0$$

Faz-se a substituição $y = ux$. Então, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, pelo que $dy = udx + xdu$.

Substituindo, vem $(1+u)dx + (u-1)(udx + xdu) = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
 (1+u)dx + (u-1)(udx + xdu) = 0 &\iff (1+u+u^2-u)dx + x(u-1)du = 0 \\
 &\iff (u^2+1)dx + x(u-1)du = 0 \\
 &\iff \frac{1}{x}dx + \frac{u}{u^2+1}du - \frac{1}{u^2+1}du = 0 \\
 &\iff \ln x + \frac{1}{2}\ln(u^2+1) - \arctan u = \frac{C}{2} \\
 &\iff 2\ln x + \ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) - 2\arctan \frac{y}{x} = C \\
 &\iff \ln(y^2+x^2) - 2\arctan \frac{y}{x} = C
 \end{aligned}$$

Exemplo 406 Resolva a equação diferencial $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$.

Resolução

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx \iff dy - \frac{y}{x}dx = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}dx \iff dy = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}dx + \frac{y}{x}dx$$

Faz-se a substituição $y = ux$. Então, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, pelo que $dy = udx + xdu$.

Substituindo, vem $udx + xdu = \sqrt{1+u^2}dx + udx$. Então,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+u^2}dx = xdu &\iff \frac{1}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du \iff \frac{1}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} \frac{d \tan t}{dt} dt \\
 &\iff \frac{1}{x}dx = \cos t \sec^2 t dt \iff \frac{1}{x}dx = \sec t dt \\
 &\iff \ln x + \ln C = \ln(\sec t + \tan t) \iff Cx = \sec t + \tan t
 \end{aligned}$$

Então, $Cx = u + \sqrt{1+u^2} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$, donde vem $Cx^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2}$. Se isolarmos o radical, elevarmos ao quadrado e dividirmos ambos os membros por x^2 , obtemos $C^2x^2 - 2Cy - 1 = 0$.

Exemplo 407 Resolva a equação diferencial $x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$.

Resolução

$$x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x \iff \frac{dy}{dx} \cos \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} - 1 \iff \cos \frac{y}{x} dy = \left(\frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} - 1 \right) dx$$

Faz-se a substituição $y = ux$. Então, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, pelo que $dy = udx + xdu$.

Substituindo, vem $\cos u(udx + xdu) = (u \cos u - 1)dx$. Então,

$$\begin{aligned}
 \cos u(udx + xdu) &= (u \cos u - 1)dx \iff u \cos u dx + x \cos u du = (u \cos u - 1)dx \\
 &\iff x \cos u du = -dx \iff \cos u du = -\frac{1}{x}dx \\
 &\iff \sin u = -\ln x + \ln C \iff \frac{C}{x} = e^{\sin u}
 \end{aligned}$$

Mas, $u = \frac{y}{x}$, pelo que $\frac{C}{x} = e^{\sin \frac{y}{x}}$, ou seja, $xe^{\sin \frac{y}{x}} = C$

Exemplo 408 Resolva a equação diferencial $(x^2 + 2xy) \frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 2xy) \frac{dy}{dx} &= y^2 - 2xy \iff (x^2 + 2xy) dy = (y^2 - 2xy) dx \\
 &\iff \left(1 + \frac{2y}{x}\right) dy = \left(\frac{y^2}{x^2} - \frac{2y}{x}\right) dx
 \end{aligned}$$

Faz-se a substituição $y = ux$. Então, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, pelo que $dy = udx + xdu$. Substituindo, vem $(1 + 2u)(udx + xdu) = (u^2 - 2u)dx$. Então,

$$\begin{aligned}(1 + 2u)(udx + xdu) &= (u^2 - 2u)dx &\iff (2u^2 + u)dx + x(1 + 2u)du &= (u^2 - 2u)dx \\ &\iff (u^2 + 3u)dx + x(1 + 2u)du &= 0 \\ &\iff \frac{1}{x}dx + \frac{2u + 1}{u^2 + 3u}du &= 0\end{aligned}$$

Ora, $\frac{2u+1}{u^2+3u} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u} = \frac{Au+Bu+3B}{u^2+3u}$. Então, $\begin{cases} A+B=2 \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}$. Então, $\begin{cases} A=\frac{5}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}$.

Logo, $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{u+3} + \frac{1}{u}\right)du = 0$. Então, $\ln x + \frac{5}{3}\ln(u+3) + \frac{1}{3}\ln u = \ln C$.

Logo, $x\sqrt[3]{u(u+3)^5} = C$, donde vem $x^3\left(\frac{y}{x} + 3\right)^5 \frac{y}{x} = C^3$, ou seja, $(3x+y)^5 y = Kx^3$.

13.3.2 Equações quase homogêneas

Equação quase homogênea é uma equação do tipo $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, com $a, a_1, c, c_1 \neq 0$.

Temos dois casos a considerar, consoante as rectas de equações $ax + by + c = 0$ e $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ são concorrentes ou estritamente paralelas.

Se as rectas forem paralelas, isto é, se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \beta$, faz-se a substituição $a_1x + b_1y = u$.

Então, $a_1 + b_1\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$, donde vem $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx} - a_1\right)\frac{1}{b_1}$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{du}{dx} - a_1}{b_1} &= f\left(\frac{\beta u + c}{u + c_1}\right) \implies \frac{du}{dx} - a_1 = b_1 f\left(\frac{\beta u + c}{u + c_1}\right) \implies \frac{du}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{\beta u + c}{u + c_1}\right) \\ &\implies \frac{du}{a_1 + b_1 f\left(\frac{\beta u + c}{u + c_1}\right)} = dx\end{aligned}$$

Obtivemos, assim, uma equação de variáveis separadas.

Se as rectas forem concorrentes, isto é, se $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$, fazemos as substituições $X = x - x_0, Y = y - y_0$, onde (x_0, y_0) é o ponto de intersecção das duas rectas.

Exemplo 409 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y+1}{x+y-1}$.

Resolução

Neste caso, as rectas são paralelas, pelo que se faz a substituição $x + y = u$.

Então, $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, pelo que $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} - 1 &= \frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y+1}{x+y-1} \implies \frac{du}{dx} - 1 = \frac{2u+1}{u-1} \\ &\implies \frac{du}{dx} = \frac{2u+1+u-1}{u-1} = \frac{3u}{u-1} \implies \frac{u-1}{u}du = 3dx \\ &\implies \left(1 - \frac{1}{u}\right)du = 3dx \implies u - \ln u = 3x + C\end{aligned}$$

Então, $x + y - \ln(x + y) = 3x + C$.

Note-se que, se fixarmos a fórmula antes apresentada, a resolução é mais rápida.

Exemplo 410 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y}$.

Resolução

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = -2 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Então, $X = x + 1, Y = y + 1$, pelo que $dX = dx$ e $dY = dy$. Logo, $\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$.

Seja $Y = UX$. Então, $\frac{dY}{dX} = U + X\frac{dU}{dX}$.

Logo, $U + X \frac{dU}{dX} = \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y} = \frac{X+UX}{X-UX} = \frac{1+U}{1-U}$.
Então,

$$X \frac{dU}{dX} = \frac{1+U}{1-U} - U = \frac{1+U-U+U^2}{1-U} = \frac{1+U^2}{1-U}$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} = \frac{1-U}{1+U^2} dU &\iff \frac{dX}{X} = \frac{1}{1+U^2} dU - \frac{1}{2} \frac{2U}{1+U^2} dU \\ &\iff \ln X + \frac{C}{2} = \arctan U - \frac{1}{2} \ln(1+U^2) \end{aligned}$$

Desfazendo a segunda substituição, temos

$$2 \ln X + C = 2 \arctan \frac{Y}{X} - \ln \left(1 + \frac{Y^2}{X^2} \right) \iff C + \ln(X^2 + Y^2) = 2 \arctan \frac{Y}{X}$$

Desfazendo a primeira substituição, temos

$$C + \ln(x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2) = 2 \arctan \frac{y+1}{x+1}$$

Exemplo 411 Resolva a equação diferencial $(2x - y + 4) dy + (x - 2y + 5) dx = 0$.

Resolução

Trata-se duma equação quase homogênea. As rectas $2x - y + 4 = 0$ e $x - 2y + 5 = 0$ são concorrentes.

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 3 = 0 \\ 3y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Então, $X = x + 1, Y = y - 2$, pelo que $dX = dx$ e $dY = dy$.

Mas, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-2y+5}{2x-y+4} = -\frac{X-1-2Y-4+5}{2X-2-Y-2+4} = -\frac{X-2Y}{2X-Y}$. Logo, $\frac{dY}{dX} = -\frac{X-2Y}{2X-Y}$.

Seja $Y = UX$. Então, $\frac{dY}{dX} = U + X \frac{dU}{dX}$.

Logo, $U + X \frac{dU}{dX} = \frac{dY}{dX} = -\frac{X-2Y}{2X-Y} = -\frac{X-2UX}{2X-UX} = -\frac{1-2U}{2-U} = \frac{2U-1}{2-U}$.

Então,

$$X \frac{dU}{dX} = \frac{2U-1}{2-U} - U = \frac{2U-1-2U+U^2}{2-U} = \frac{U^2-1}{2-U}$$

Separando as variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} = \frac{2-U}{U^2-1} dU &\iff \frac{dX}{X} = \frac{2}{U^2-1} dU - \frac{1}{2} \frac{2U}{U^2-1} dU \\ &\iff \frac{dX}{X} = \left(\frac{1}{U-1} - \frac{1}{U+1} \right) dU - \frac{1}{2} \frac{2U}{U^2-1} dU \\ &\iff \ln X + \frac{\ln C}{2} = \ln(U-1) - \ln(U+1) - \frac{1}{2} \ln(U^2-1) \\ &\iff 2 \ln X + \ln C = 2 \ln(U-1) - 2 \ln(U+1) - \ln(U^2-1) \\ &\iff CX^2 = \frac{(U-1)^2}{(U+1)^2(U^2-1)} = \frac{U-1}{(U+1)^3} \end{aligned}$$

Desfazendo a segunda substituição, temos

$$CX^2 = \frac{U-1}{(U+1)^3} = \frac{\frac{Y}{X}-1}{\left(\frac{Y}{X}+1\right)^3} = \frac{\frac{Y-X}{X}}{\left(\frac{Y+X}{X}\right)^3} = \frac{Y-X}{X} \times \frac{X^3}{(Y+X)^3} = \frac{X^2(Y-X)}{(Y+X)^3}$$

Logo,

$$Y - X = C(Y + X)^3$$

E, finalmente, $y - 2 - x - 1 = C(y - 2 + x + 1)^3$, ou seja

$$y - x - 3 = C(x + y - 1)^3$$

Exemplo 412 Resolva a equação diferencial $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$.

Resolução

Trata-se duma equação quase homogênea. As rectas $x+2y+1=0$ e $2x+4y+3=0$ são estritamente paralelas.

Seja $u = x + 2y$. Então, $\frac{du}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx} = 1 + 2\left(\frac{x+2y+1}{2x+4y+3}\right) = 1 + 2\left(\frac{u+1}{2u+3}\right) = \frac{4u+5}{2u+3}$.

Então, $\frac{2u+3}{4u+5}du = dx$, donde vem $\frac{2u+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{4u+5}du = dx$ e, por fim, $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4u+5}\right) du = dx$.

Logo, $\frac{u}{2} + \frac{1}{8} \ln(4u+5) = x + C$. Mas, $u = x + 2y$. Logo, $\frac{x}{2} + y + \frac{1}{8} \ln(4x+8y+5) = x + C$.

Então, $x + 2y + \frac{1}{4} \ln(4x+8y+5) = 2x + K$.

Exemplo 413 Resolva a equação diferencial $(2x - 4y + 5) dy = (x - 2y + 3) dx$.

Resolução

Trata-se duma equação quase homogênea. As rectas $2x-4y+5=0$ e $x-2y+3=0$ são estritamente paralelas.

Seja $u = x - 2y$. Então, $\frac{du}{dx} = 1 - 2\frac{dy}{dx} = 1 - 2\left(\frac{x-2y+3}{2x-4y+5}\right) = 1 - 2\left(\frac{u+3}{2u+5}\right) = \frac{2u+5-2u-6}{2u+5} = -\frac{1}{2u+5}$.

Então, $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2u+5}$, donde vem $(2u+5) du = -dx$ e, por fim, $u^2 + 5u = -x + C$.

Logo, $(x-2y)^2 + 5(x-2y) = -x + C$. Logo, $(x-2y)^2 + 5x - 10y + x = C$.

Então, $(x-2y)^2 + 6x - 10y = C$.

Exemplo 414 Resolva a equação diferencial $(y + ax + b) dy - (y + ax - b) dx = 0$.

Resolução

Trata-se duma equação quase homogênea. As rectas $y+ax+b=0$ e $y+ax-b=0$ são estritamente paralelas.

Seja $u = y + ax$. Então, $\frac{du}{dx} = a + \frac{dy}{dx} = a + \frac{y+ax-b}{y+ax+b} = a + \frac{u-b}{u+b} = \frac{au+ab+u-b}{u+b} = \frac{u(a+1)+b(a-1)}{u+b}$.

Então $\frac{u+b}{u(a+1)+b(a-1)} du = dx$. Mas,

$$\begin{aligned} \frac{u+b}{u(a+1)+b(a-1)} &= \frac{(a+1)(u+b)}{(a+1)u(a+1)+b(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a+1} + \frac{A}{u(a+1)+b(a-1)} \\ &= \frac{au+u+ba-b+A(a+1)}{(a+1)u(a+1)+b(a+1)(a-1)} \end{aligned}$$

Logo, $A = \frac{2b}{a+1}$. Logo, $\left(\frac{1}{a+1} + \frac{2b}{(a+1)^2} \times \frac{a+1}{u(a+1)+b(a-1)}\right) du = dx$.

Então,

$$\frac{u}{a+1} + \frac{2b}{(a+1)^2} \ln(u(a+1)+b(a-1)) = x + C$$

Então,

$$\frac{y+ax}{a+1} + \frac{2b}{(a+1)^2} \ln[(y+ax)(a+1)+b(a-1)] = x + C$$

Multiplicando ambos os membros por $(a+1)^2$, vem

$$(a+1)(y+ax) + 2b \ln[(y+ax)(a+1)+b(a-1)] - (a+1)^2 x = K$$

Simplificando, obtemos

$$(a+1)(y-x) + 2b \ln[(y+ax)(a+1)+b(a-1)] = K$$

Se $b = 0$, vem $y = x + C$, o que está de acordo com $dy = dx$.

Se $a = -1$, temos $\frac{u+b}{u(a+1)+b(a-1)} = \frac{u+b}{-2b} = -\frac{u}{2b} - \frac{1}{2}$. Então, $\frac{u+b}{u(a+1)+b(a-1)} du = dx$ é equivalente a $-\frac{u}{2b} - \frac{1}{2} du = dx$, o que nos conduz a $-\frac{u^2}{4b} - \frac{1}{2}u = x + C$. Então, $-\frac{(y-x)^2}{4b} - \frac{y-x}{2} = x + C$. Logo, $(y-x)^2 + 2b(y-x) + 4bx = C$.

Então, $(y-x)^2 + 2by + 2bx = C$. Resolvendo, em ordem a y , vem

$$y = -b + x \pm \sqrt{b^2 - 4bx + C}$$

Logo, a solução inicial não é válida quando $a = -1 \wedge b \neq 0$, uma vez que é válida se $b = 0$.

A última solução é válida se $a = -1$, podendo b ser qualquer número real.

Exemplo 415 Resolva a equação diferencial $(3y - x) \frac{dy}{dx} = 3x - y + 4$.

Resolução

Trata-se duma equação quase homogênea. As rectas $3y - x = 0$ e $3x - y + 4 = 0$ são concorrentes.

$$\begin{cases} 3y - x = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y \\ 8y = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Sejam $X = x + \frac{3}{2}$, $Y = y + \frac{1}{2}$. Então,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = \frac{3x - y + 4}{3y - x} = \frac{3(X - \frac{3}{2}) - Y + \frac{1}{2} + 4}{3(Y - \frac{1}{2}) - X + \frac{3}{2}} = \frac{3X - Y}{3Y - X}$$

E obtivemos uma equação homogênea. Seja $Y = UX$. Então, $\frac{dY}{dX} = U + X \frac{dU}{dX}$. Logo,

$$U + X \frac{dU}{dX} = \frac{dY}{dX} = \frac{3X - Y}{3Y - X} = \frac{3X - UX}{3UX - X} = \frac{3 - U}{3U - 1}$$

Logo, $X \frac{dU}{dX} = \frac{3-U}{3U-1} - U = \frac{3-U-3U^2+U}{3U-1} = \frac{3-3U^2}{3U-1}$, pelo que $\frac{dX}{X} = \frac{3U-1}{3-3U^2} dU$.

Logo, $\ln X + \ln C = -\frac{1}{2} \ln(3 - 3U^2) - \int \frac{1}{3 - 3U^2} dU$.

Ora, $\frac{1}{3-3U^2} = \frac{A}{3(1+U)} + \frac{B}{3(1-U)} = \frac{A(1-U)+B(1+U)}{3-3U^2} = \frac{A-AU+B+BU}{3-3U^2}$.

Então, $\begin{cases} A+B=1 \\ B-A=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=A \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Então, $\int \frac{1}{3-3U^2} dU = \frac{1}{6} \int \frac{1}{1+U} dU - \frac{1}{6} \int \frac{-1}{1-U} dU = \frac{1}{6} \ln \frac{1+U}{1-U}$.

Logo, $\ln(CX) = -\frac{1}{2} \ln(3 - 3U^2) - \frac{1}{6} \ln \frac{1+U}{1-U}$.

Então, $6 \ln(CX) = -3 \ln(3 - 3U^2) - \ln \frac{1+U}{1-U}$, donde $(\ln(CX))^6 = \ln \frac{1-U}{(1+U)(3-3U^2)^3}$.

Então, $C^6 X^6 = \frac{1-\frac{Y}{X}}{(1+\frac{Y}{X})(3-3\frac{Y^2}{X^2})^3}$, pelo que $27C^6 X^6 = \frac{\frac{X-Y}{X}}{\frac{X+Y}{X}(\frac{X^2-Y^2}{X^2})^3}$.

Então, $27C^6 X^6 = \frac{\frac{X-Y}{X}}{\frac{X+Y}{X}(\frac{X^2-Y^2}{X^2})^3} = \frac{X-Y}{(X+Y)(\frac{X^2-Y^2}{X^2})^3} \frac{X-Y}{X+Y} \times \frac{X^6}{(X^2-Y^2)^3}$.

Logo, $27C^6 = \frac{X-Y}{X+Y} \times \frac{1}{(X+Y)^3(X-Y)^3} = \frac{1}{(X+Y)^4(X-Y)^2}$.

Então, $(X+Y)^2(X-Y) = C_1$. Logo, $(x + \frac{3}{2} + y + \frac{1}{2})^2(x + \frac{3}{2} - y - \frac{1}{2}) = C_1$.

Então,

$$(x + y + 2)^2(x - y + 1) = C_1$$

Exemplo 416 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{5y-x-5}{5x-y+1}$.

Resolução

Trata-se duma equação quase homogênea. As rectas $5y - x - 5 = 0$ e $5x - y + 1 = 0$ são concorrentes.

$$\begin{cases} 5y - x - 5 = 0 \\ 5x - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5y - 5 \\ 25y - 25 - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Sejam $X = x$, $Y = y - 1$. Então,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = \frac{5(Y+1) - X - 5}{5X - (Y+1) + 1} = \frac{5Y - X}{5X - Y}$$

E obtivemos uma equação homogênea. Seja $Y = UX$. Então, $\frac{dY}{dX} = U + X \frac{dU}{dX}$. Logo,

$$U + X \frac{dU}{dX} = \frac{dY}{dX} = \frac{5Y - X}{5X - Y} = \frac{5UX - X}{5X - UX} = \frac{5U - 1}{5 - U}$$

Logo, $X \frac{dU}{dX} = \frac{5U-1}{5-U} - U = \frac{5U-1-5U+U^2}{5-U} = \frac{U^2-1}{5-U}$, pelo que $\frac{2dX}{X} = \frac{10-2U}{U^2-1} dU = \frac{-2U}{U^2-1} dU + \frac{10}{U^2-1} dU$.

Mas, $\frac{10}{U^2-1} = \frac{5}{U-1} - \frac{5}{U+1}$.

Então, $2 \ln X + \ln C = -\ln(U^2 - 1) + 5 \ln(U - 1) - 5 \ln(U + 1)$, pelo que $\ln(CX^2) = \ln \frac{(U-1)^5}{(U^2-1)(U+1)^5}$.

Então, $CX^2 = \frac{(U-1)^5}{(U^2-1)(U+1)^5} = \frac{(U-1)^4}{(U+1)^6}$, donde vem $CX = \frac{(U-1)^2}{(U+1)^3}$.

Então, $CX(U+1)^3 = (U-1)^2$. Então, $CX\left(\frac{Y}{X} + 1\right)^3 = \left(\frac{Y}{X} - 1\right)^2$.

Logo, $CX\frac{(Y+X)^3}{X^3} = \frac{(Y-X)^2}{X^2}$, donde vem $C(Y+X)^3 = (Y-X)^2$.

Desfazendo a substituição, vem

$$C(x+y-1)^3 = (y-x-1)^2$$

Exemplo 417 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+y-1}{2x+2y+3}\right)^2$.

Resolução

As rectas $x+y-1=0$ e $2x+2y+3=0$ são estritamente paralelas.

Seja $u = x+y$. Então, $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{x+y-1}{2x+2y+3}\right)^2 = 1 + \left(\frac{u-1}{2u+3}\right)^2$.

Então, $\frac{du}{dx} = \frac{u^2-2u+1+4u^2+12u+9}{4u^2+12u+9} = \frac{5u^2+10u+10}{4u^2+12u+9} = \frac{5(u^2+2u+2)}{4u^2+12u+9}$.

Logo, $5dx = \frac{4u^2+12u+9}{u^2+2u+2} du$, pelo que $5dx = \frac{4u^2+8u+8+4u+1}{u^2+2u+2} du$.

Logo, $5dx = \left(4 + \frac{4u+4}{u^2+2u+2}\right) du = \left(4 + \frac{4u+4}{u^2+2u+2} - \frac{3}{(u+1)^2+1}\right) du$.

Então, $5x + C = 4u + 2 \ln(u^2 + 2u + 2) - 3 \arctan(u + 1)$.

Então,

$$5x + C = 4x + 4y + 2 \ln(x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 2) - 3 \arctan(x + y + 1)$$

Logo, $-x + 4y + 2 \ln(x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 2) - 3 \arctan(x + y + 1) = C$.

13.3.3 Equação linear

Equação linear é uma equação da forma $y' = P(x)y + Q(x)$.

Chamamos a atenção para o facto de haver termos com dois significados. Assim, equação homogénea pode ser a equação $y'' - xy' + y = 0$ ou pode ser $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. O mesmo se passa com equação linear: as equações $y'' + 3y' + 2y = \sin x$ e $y' = P(x)y + Q(x)$ são equações lineares com sentidos diferentes.

$y' = P(x)y + Q(x) \iff y' - P(x)y = Q(x)$

Consideremos a equação homogénea $y' - P(x)y = 0$. Então, $\frac{y'}{y} = P(x)$, donde vem $\ln y = \int P(x) dx + C$.

Logo, $y = Ke^{\int P(x) dx}$. Utilizando o método da variação da constante, temos

$$y' = K'e^{\int P(x) dx} + Ke^{\int P(x) dx} P(x) = P(x)y + Q(x)$$

Então, $K'e^{\int P(x) dx} = Q(x)$, donde vem $K' = Q(x)e^{-\int P(x) dx}$. Então,

$$K = \int Q(x)e^{-\int P(x) dx} dx + K_2$$

Logo, a solução da equação dada é $y = e^{\int P(x) dx} \left(\int Q(x)e^{-\int P(x) dx} dx + K_2 \right)$.

Exemplo 418 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = xy + x$.

Resolução

Começamos por resolver a equação $\frac{dy}{dx} = xy$. Então, $\frac{dy}{y} = x dx$. Logo, $\ln y = \frac{x^2}{2} + C$.

Então, $y = e^{\frac{x^2}{2} + C} = Ke^{\frac{x^2}{2}}$. Consideremos que K depende de x . Então, $y = K(x)e^{\frac{x^2}{2}}$.

Logo, $y' = K'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + xK(x)e^{\frac{x^2}{2}}$. Então, devemos ter $K'(x)e^{\frac{x^2}{2}} = x^3$, donde vem $K'(x) = x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$K(x) = \int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Podemos primitivar por partes:

$$K(x) = \int -x^2 \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2 \int -xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} + A = (-x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}} + A$$

$$\text{Logo, } y = K(x)e^{\frac{x^2}{2}} = \left((-x^2 - 2)e^{-\frac{x^2}{2}} + C \right) e^{\frac{x^2}{2}} = -x^2 - 2 + Ae^{\frac{x^2}{2}}.$$

Exemplo 419 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$.

Resolução

Consideremos a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Então, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, pelo que $\ln y = \ln x + \ln C$.

Então $y = Cx$. Consideremos que C depende de x , isto é, $y = xC(x)$. Então, $y' = C(x) + xC'(x)$.

Como $C(x) = \frac{y}{x}$, devemos ter $xC'(x) = -1$, pelo que $C'(x) = -\frac{1}{x}$ e $C(x) = -\ln x + K$.

Logo, $y = -x \ln x + Kx = x(K - \ln x)$.

Exemplo 420 Resolva a equação diferencial $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$.

Resolução

Consideremos a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-x^2}$. Então, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1-x^2}$.

Mas, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{F}{1-x} = \frac{A-Ax+F+Fx}{1-x^2}$. Então, $\begin{cases} A+F=1 \\ F-A=0 \end{cases}$. Logo, $\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ F=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Então, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}$. Então, $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1-x^2} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \right) dx$, pelo que

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) + \ln C$$

, ou seja, $\ln y = \ln \left(C \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$. Então, $y = C \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Suponhamos que C depende de x :

$$y = C(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Então,

$$\begin{aligned} y' &= C'(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C(x) \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = C'(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{C(x)}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \\ &= C'(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{C(x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{(1-x)^2} = C'(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{C(x) \sqrt{1-x} \sqrt{1-x}}{(1-x)^2 \sqrt{1+x} \sqrt{1-x}} \\ &= C'(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{(1-x)C(x)}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}} = C'(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{C(x)}{(1-x) \sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$C'(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1+x \iff C'(x) = \frac{(1+x) \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \iff C'(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Mas,

$$\begin{aligned} C(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int [1 + \cos(2t)] dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) + K \\ &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + K = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + K \end{aligned}$$

Então, a solução geral da equação é

$$y = C(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \left(\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + K \right) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Exemplo 421 Resolva a equação diferencial $(x+1)y' - y = 3x^4 + 4x^3$.

Resolução

A equação dada é equivalente a $y' - \frac{y}{x+1} = \frac{3x^4+4x^3}{x+1}$.
Consideremos a equação diferencial $y' - \frac{y}{x+1} = 0$.

Então, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}$, pelo que $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$. Então, $\ln y = \ln(x+1) + \ln C$. Logo, $y = C(x+1)$.

Suponhamos, agora, que em vez de C , temos $C(x)$.

Então, $y = (x+1)C(x)$, pelo que $y' = C(x) + (x+1)C'(x)$.

Logo, $(x+1)C'(x) = \frac{3x^4+4x^3}{x+1}$, donde vem $C'(x) = \frac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2}$.

Mas, $\frac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2} = \frac{3x^4+4x^3}{x^2+2x+1} = 3x^2 + ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2x+1}$.

Então, $(3x^2 + ax + b)(x^2 + 2x + 1) + cx + d = 3x^4 + 4x^3$.

Para $x = 0$, temos $b + d = 0$.

Para $x = -1$, temos $-c + d = -1$.

Para $x = 1$, vem $4(3 + a + b) + c + d = 7$.

Para $x = 2$, temos $9(12 + 2a + b) + 2c + d = 80$. Logo,

$$\begin{aligned} \begin{cases} b = -d \\ c = d + 1 \\ 12 + 4a - 4d + d + 1 + d = 7 \\ 108 + 18a - 9d + 2d + 2 + d = 80 \end{cases} &\iff \begin{cases} b = -d \\ c = d + 1 \\ 4a - 2d = -6 \\ 18a - 6d = -30 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -d \\ c = d + 1 \\ d = 2a + 3 \\ 3a - d = -5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = -d \\ c = d + 1 \\ d = 2a + 3 \\ 3a - 2a - 3 = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ c = 0 \\ d = -1 \\ a = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $C'(x) = 3x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$. Logo, $C(x) = x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x+1} + K$.

Logo,

$$\begin{aligned} y &= (x+1)C(x) = (x+1) \left(x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x+1} + K \right) \\ &= (x+1)K + 1 + x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x = (x+1)K + 1 + x^4 + x \end{aligned}$$

Exemplo 422 Resolva a equação diferencial $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

Resolução

Consideremos a equação diferencial $y' + y \cos x = 0$.

Então, $\frac{dy}{dx} = -y \cos x$, pelo que $\frac{dy}{y} = -\cos x dx$. Então, $\ln y + \ln C = -\sin x$. Logo, $Cy = e^{-\sin x}$.

Então, $y = C_1 e^{-\sin x}$. Suponhamos, agora, que em vez de C_1 , temos $C_1(x)$. Então, $y = C_1(x) e^{-\sin x}$, pelo que $y' = C_1'(x) e^{-\sin x} + C_1(x) e^{-\sin x} (-\cos x)$.

Logo, $C_1'(x) e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin(2x)$, donde vem $C_1'(x) = \sin x \cos x e^{\sin x}$.

Então, $C_1(x) = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx$.

Fazendo $u' = e^{\sin x} \cos x$ e $v = \sin x$, temos $u = e^{\sin x}$ e $v' = \cos x$.

Logo,

$$\int \sin x \cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} \sin x - \int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} + K$$

Então, a solução geral da equação é

$$y = e^{-\sin x} (e^{\sin x} \sin x - e^{\sin x} + K) = -1 + \sin x + K e^{-\sin x}$$

Exemplo 423 Resolva a equação diferencial $y' = \frac{y^2}{2xy + y^2 - x}$.

Resolução

$$y' = \frac{y^2}{2xy + y^2 - x} \iff y' = \frac{2xy + y^2 - x + x - 2xy}{2xy + y^2 - x} \iff y' = 1 + \frac{x - 2xy}{2xy + y^2 - x}$$

A equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2xy + y^2 - x}$ é equivalente a $\frac{dx}{dy} = \frac{2xy + y^2 - x}{y^2} = 1 + \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}\right)x$.

A equação obtida é uma equação linear em x .

Seja $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}\right)x$. Então, $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{2y-1}{y^2}\right)x$.

Então, $\frac{2y-1}{y^2}dy = \frac{dx}{x}$. Então, $\left(\frac{2y}{y^2} - \frac{1}{y^2}\right)dy = \frac{dx}{x}$. Logo, $\ln(y^2) + \ln C + \frac{1}{y} = \ln x$.

Então, $\ln(Cy^2e^{\frac{1}{y}}) = \ln x$. Então, $x = Cy^2e^{\frac{1}{y}}$.

Suponhamos, agora, que em vez de C , temos $C(y)$.

Então, $x = C(y)y^2e^{\frac{1}{y}}$, pelo que $\frac{dx}{dy} = C'(y)y^2e^{\frac{1}{y}} + 2yC(y)e^{\frac{1}{y}} - C(y)e^{\frac{1}{y}}$.

Logo, $C'(y)y^2e^{\frac{1}{y}} = 1$, donde vem $C'(y) = \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}$. Logo, $C(y) = e^{-\frac{1}{y}} + K$.

Logo,

$$x = \left(e^{-\frac{1}{y}} + K\right)y^2e^{\frac{1}{y}} = y^2\left(1 + Ke^{\frac{1}{y}}\right)$$

Exemplo 424 Resolva a equação diferencial $x(1-x^2)dy + (2x^2-1)ydx = ax^3dx$.

Resolução

$$\begin{aligned} x(1-x^2)dy + (2x^2y - y - ax^3)dx &= 0 \iff x(x^2-1)dy = (2x^2y - y - ax^3)dx \\ &\iff \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y - ax^3}{x(x^2-1)} \\ &\iff \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}y - \frac{ax^2}{x^2-1} \end{aligned}$$

A equação obtida é uma equação linear em y .

Consideremos a equação homogénea $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}y$. Então, $\frac{dy}{y} = \frac{2x^2-1}{x^3-x}dx$.

Mas, $\frac{2x^2-1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+B(x^2+x)+C(x^2-x)}{x(x^2-1)} = \frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x^2-1)}$.

Então, $\begin{cases} A+B+C=2 \\ B-C=0 \\ -A=-1 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} C=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ A=1 \end{cases}$.

Logo, $\int \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}dx = \int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1}dx = \ln x + \ln \sqrt{x-1} + \ln \sqrt{x+1} + \ln C$.

Então, $\ln y = \ln(Cx\sqrt{x^2-1})$, donde se conclui que $y = Cx\sqrt{x^2-1}$.

Suponhamos, agora, que em vez de C , temos $C(x)$. Então, $y = xC(x)\sqrt{x^2-1}$.

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = C(x)\sqrt{x^2-1} + xC'(x)\sqrt{x^2-1} + xC(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Então, $xC'(x)\sqrt{x^2-1} = -\frac{ax^2}{x^2-1}$. Logo, $C'(x) = -\frac{a}{2}(2x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$.

Então, $C(x) = -\frac{a}{2}\frac{(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + K = \frac{a}{\sqrt{x^2-1}} + K$.

Logo,

$$y = \frac{ax}{\sqrt{x^2-1}}\sqrt{x^2-1} + Kx\sqrt{x^2-1} = ax + Kx\sqrt{x^2-1}$$

É claro que, para $a = 0$, temos $y = Kx\sqrt{x^2-1}$ que é a solução geral da equação homogénea.

Exemplo 425 Resolva a equação diferencial $\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} + y = 2x$.

Resolução

$$\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} + y = 2x \iff \frac{dy}{dx} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} y = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

A equação obtida é uma equação linear em y .

Consideremos a equação $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} y$. Então, $\frac{dy}{y} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Logo,

$$\ln y = \ln C - \operatorname{arcsinh} x$$

Então, $y = Ce^{-\operatorname{arcsinh} x} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}+x} = C(\sqrt{1+x^2}-x)$.

Note-se que $\operatorname{arcsinh} x = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$.

Se não quisermos utilizar a trigonometria hiperbólica, fazemos a substituição $x = \tan t$:

$$-\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = -\int \frac{1}{\sec t} \sec^2 t dt = -\int \sec t dt = -\ln(\sec t + \tan t) = -\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$$

Então, $\ln y = \ln C - \ln(\sqrt{1+x^2}+x) = \ln \frac{C}{\sqrt{1+x^2}+x} = \ln(C(\sqrt{1+x^2}-x))$.

Logo, $y = C(\sqrt{1+x^2}-x)$. Seja $y = C(x)(\sqrt{1+x^2}-x)$. Então,

$$y' = (\sqrt{1+x^2}-x) C'(x) + \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) C(x)$$

Logo, devemos ter $(\sqrt{1+x^2}-x) C'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$, pelo que $C'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$. Ora,

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{2x(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)} \\ &= \frac{2x(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}} = 2x + \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Então,

$$C(x) = x^2 + K + \int 2x \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx = x^2 + K + 2x\sqrt{1+x^2} - \int 2\sqrt{1+x^2} dx$$

Mas,

$$\int 2\sqrt{1+x^2} dx = 2 \int \sqrt{1+\tan^2 t} \sec^2 t dt = 2 \int \sec^3 t dt$$

E,

$$\begin{aligned} \int \sec^3 t dt &= \int \sec t (1 + \tan^2 t) dt = \int \sec t dt + \int \sec t \tan^2 t dt \\ &= \int \sec t dt + \int \sec t \tan t \tan t dt = \sec t \tan t + \int \sec t dt - \int \sec t \sec^2 t dt \end{aligned}$$

Então,

$$2 \int \sec^3 t dt = \sec t \tan t + \int \sec t dt = \sec t \tan t + \ln(\sec t + \tan t) + K$$

Logo,

$$\int 2\sqrt{1+x^2} dx = \sec t \tan t + \ln(\sec t + \tan t) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Logo,

$$C(x) = x^2 + K + x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Então,

$$y = (\sqrt{1+x^2}-x) \left(x^2 + K + x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right)$$

Exemplo 426 Resolva a equação diferencial $\frac{1}{2} \frac{dy}{dx} = y \tan(2x) + 1 + \sec(2x)$.

Resolução

$$\frac{dy}{dx} = 2y \tan(2x) + 2 + 2 \sec(2x)$$

Consideremos a equação $\frac{dy}{dx} = 2y \tan(2x)$. Então, $\frac{dy}{y} = 2 \tan(2x) dx = 2 \frac{dy}{dx} = -\frac{2 \sin(2x)}{\cos(2x)}$.

Logo, $\ln y = \ln C - \ln \cos(2x)$, pelo que $y = \frac{C}{\cos(2x)} = C \sec(2x)$.

Consideremos $y = C(x) \sec(2x)$. Então, $y' = C'(x) \sec(2x) + C(x) \sec(2x) \tan(2x)$.

Então, $C'(x) \sec(2x) = 2 + 2 \sec(2x)$, donde vem $C'(x) = 2 + 2 \cos(2x)$.

Então, $C(x) = K + 2x + \sin(2x)$. Logo, a solução geral da equação dada é

$$y = (K + 2x + \sin(2x)) \sec(2x) = (K + 2x) \sec(2x) + \tan(2x)$$

Exemplo 427 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} - y = x + \sin x$.

Resolução

$$\frac{dy}{dx} = y \iff y = Ce^x$$

Seja $y = C(x)e^x$. Então, $y' = C'(x)e^x + C(x)e^x$, pelo que $C'(x)e^x = x + \sin x$.

Logo, $C'(x) = xe^{-x} + e^{-x} \sin x$. Então, $C(x) = \int xe^{-x} dx + \int e^{-x} \sin x dx$.

Podemos calcular as duas primitivas por partes, mas é mais fácil saber a forma das primitivas:

$$\int xe^{-x} dx = (Ax + B)e^{-x} \implies xe^{-x} = (-Ax - B + A)e^{-x} \implies A = -1 \wedge B = -1.$$

$$\text{Então, } \int xe^{-x} dx = (-x - 1)e^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = (D \cos x + E \sin x)e^{-x} \implies e^{-x} \sin x = (-D \cos x - E \sin x - D \sin x + E \cos x)e^{-x}$$

$$\text{Então, } E - D = 0 \wedge -E - D = 1. \text{ Então, } E = D = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Logo, } C(x) = \int xe^{-x} dx + \int e^{-x} \sin x dx = -xe^{-x} - e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} \cos x - \frac{1}{2}e^{-x} \sin x + K.$$

$$\text{Logo, } C(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(2x + 2 + \cos x + \sin x) + K$$

$$\text{E, por fim, } y = C(x)e^x = Ke^x - x - 1 - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x.$$

13.3.4 Equação de Bernoulli

Equação de Bernoulli é uma equação da forma $y' = yP(x) + y^nQ(x)$.

$$y'y^{-n} = y^{1-n}P(x) + Q(x)$$

Utilizemos a mudança de variável $z = y^{1-n}$.

Então, $z' = (1-n)y^{-n}y'$, donde vem

$$\frac{z'}{1-n} = y^{-n}y' = y^{1-n}P(x) + Q(x) = zP(x) + Q(x)$$

Logo, $z' = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x)$.

Esta equação é uma equação linear, a qual se resolve como acabámos de ver.

Exemplo 428 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + xy^2$.

Resolução

$y' = \frac{1}{x}y + xy^2$; Seja $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$;

Então, $z' = -\frac{1}{y^2}y' = -\frac{1}{y^2}\left(\frac{y}{x} + xy^2\right) = -\frac{1}{xy} - x = -\frac{z}{x} - x$.

A equação $z' = -\frac{1}{x}z - x$ é uma equação linear.

Consideremos a equação $z' = -\frac{1}{x}z$. Então, $\frac{dz}{z} = -\frac{1}{x}dx$, donde vem $\frac{dz}{z} + \frac{1}{x}dx = 0$.

Então, $\ln z + \ln x = \ln C$, donde vem $xz = C$.

Considerando $C = C(x)$, temos $z = \frac{C(x)}{x}$. Então, $z' = \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$

Então, $\frac{C'(x)}{x} = -x$, donde vem $C'(x) = -x^2$, pelo que $C(x) = -\frac{1}{3}x^3 + K$.

Logo, $z = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + K}{x} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{K}{x}$. Mas, $y = \frac{1}{z}$, pelo que $y = \frac{1}{-\frac{1}{3}x^2 + \frac{K}{x}} = -\frac{3x}{x^3 - K}$.

Exemplo 429 Resolva a equação diferencial $3y^2 \frac{dy}{dx} - ay^3 = x + 1$.

Resolução

Se $a = 0$, vem $3y^2 \frac{dy}{dx} = x + 1$. Logo, $3y^2 dy = (x + 1) dx$. Então, $y^3 = \frac{x^2}{2} + x + C$, pelo que $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} + x + C}$.

Se $a \neq 0$, temos uma equação de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{a}{3}y = \frac{x+1}{3}y^{-2}$$

Mudança de variável: $z = y^{1+2} = y^3$. Então, $z' = 3y^2 y' = 3y^2 \left(\frac{a}{3}y + \frac{x+1}{3}y^{-2}\right) = ay^3 + x + 1 = az + x + 1$.

consideremos a equação $\frac{dz}{dz} = az$. Então, $\frac{dz}{z} = adx$, donde vem $\ln z = \ln C + ax$.

Logo, $z = C e^{ax}$. Seja $z = C(x) e^{ax}$. Então, $z' = C'(x) e^{ax} + aC(x) e^{ax}$.

Logo, $C'(x) e^{ax} = x + 1$, donde vem $C'(x) = (x + 1) e^{-ax}$.

Então, $C(x) = \int (x + 1) e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}(x + 1) e^{-ax} + \int \frac{1}{a} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a}(x + 1) e^{-ax} - \frac{1}{a^2} e^{-ax} + K$.

Logo,

$$z = C(x) e^{ax} = \left(-\frac{1}{a}(x + 1) e^{-ax} - \frac{1}{a^2} e^{-ax} + K\right) e^{ax} = -\frac{1}{a}(x + 1) - \frac{1}{a^2} + K e^{ax}$$

Então,

$$y^3 = K e^{ax} - \frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2}$$

Exemplo 430 Resolva a equação diferencial $x \frac{dy}{dx} = y + 2xy^2$.

Resolução

A equação dada é equivalente a $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y + 2y^2$, a qual é uma equação de Bernoulli:

Mudança de variável: $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$. Então, $z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{\frac{1}{x}y + 2y^2}{y^2} = -\frac{1}{xy} - 2 = -\frac{1}{x}z - 2$.

A equação inicial foi transformada numa equação linear.

$z' = -\frac{1}{x}z \iff \frac{dz}{z} + \frac{dx}{x} = 0 \iff \ln z + \ln x = \ln C \iff zx = C \iff z = \frac{C}{x}$.

Seja $z = \frac{C(x)}{x}$. Então, $z' = \frac{x C'(x) - C(x)}{x^2}$. Logo, $\frac{C'(x)}{x} = -2$. Então, $C'(x) = -2x$, pelo que vem $C(x) = K - x^2$.

Logo, $z = \frac{C(x)}{x} = \frac{K - x^2}{x}$. Então, $y = \frac{x}{K - x^2}$.

Exemplo 431 Resolva a equação diferencial $(x^2 y^3 + xy) \frac{dy}{dx} = 1$.

Resolução

$\frac{dx}{dy} = yx + y^3 x^2$; trata-se duma equação de Bernoulli. Seja $z = x^{1-2} = \frac{1}{x}$.

Então, $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{x^2} (yx + y^3 x^2) = -\frac{y}{x} - y^3 = -zy - y^3$.

A equação $\frac{dz}{dy} = -zy - y^3$ é uma equação linear em z .

Consideremos a equação $\frac{dz}{dz} = -zy$. Então, $\frac{dz}{z} = -y dy$.

Então, $\ln z = \ln C - \frac{y^2}{2}$, donde vem $z = C e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Considerando $C = C(y)$, temos $z = C(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$. Então, $\frac{dz}{dy} = e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{d}{dy} C(y) - y C(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$.

Logo, devemos ter $e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{d}{dy} C(y) = -y^3$. Então, $\frac{d}{dy} C(y) = -y^3 e^{\frac{y^2}{2}}$.

Logo,

$$C(y) = - \int y^3 e^{\frac{y^2}{2}} dy = - \int y^2 y e^{\frac{y^2}{2}} dy = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + \int 2y e^{\frac{y^2}{2}} dy = -y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + K$$

Então,

$$z = C(y) e^{-\frac{y^2}{2}} = \left(-y^2 e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + K \right) e^{-\frac{y^2}{2}} = 2 - y^2 + K e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Então, $x = \frac{1}{2 - y^2 + K e^{-\frac{y^2}{2}}}$, ou seja, $\left(2 - y^2 + K e^{-\frac{y^2}{2}} \right) x = 1$.

Exemplo 432 Resolva a equação diferencial $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x + y^3 = 0$.

Resolução

$\frac{dy}{dx} + y \tan x + y^3 \sec x = 0$ é uma equação de Bernoulli. Seja $z = y^{1-3} = \frac{1}{y^2}$.

Então, $\frac{dz}{dx} = -\frac{2}{y^3} \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{y^3} (-y \tan x - y^3 \sec x) = \frac{2}{y^2} \tan x + 2 \sec x = 2z \tan x + 2 \sec x$.

A equação $\frac{dz}{dx} = 2z \tan x + 2 \sec x$ é uma equação linear em z .

Consideremos a equação $\frac{dz}{dx} = 2z \tan x$. Então, $\frac{dz}{z} = 2 \tan x dx$.

Então, $\ln z = \ln C - 2 \ln \cos x$, donde vem $z = \frac{C}{\cos^2 x} = C \sec^2 x$.

Considerando $C = C(x)$, temos $z = C(x) \sec^2 x$. Então, $z' = C'(x) \sec^2 x + 2C(x) \sec x \sec x \tan x$.

Então, $z' = C'(x) \sec^2 x + 2C(x) \sec^2 x \tan x$.

Logo, devemos ter $C'(x) \sec^2 x = 2 \sec x$. Então, $C'(x) = 2 \cos x$. Logo, $C(x) = K + 2 \sin x$.

Logo, $z = (K + 2 \sin x) \sec^2 x = K \sec^2 x + 2 \sec x \tan x$.

Então, $y^2 = \frac{1}{K \sec^2 x + 2 \sec x \tan x}$, isto é, $y^2 (K \sec^2 x + 2 \sec x \tan x) = 1$.

13.3.5 Equação de Riccati

Equação de Riccati é uma equação da forma $y' = P(x) + yQ(x) + y^2R(x)$.

Então, a equação linear e o caso $n = 2$ da equação de Bernoulli são casos particulares da equação de Riccati.

O método para a resolução duma equação de Riccati exige o conhecimento prévio duma solução particular da equação diferencial.

Seja y_p uma solução particular da equação $y' = P(x) + yQ(x) + y^2R(x)$.

Fazendo a substituição $y = y_p + \frac{1}{z}$, obtemos uma equação linear.

Exemplo 433 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \cos x - y - y^2 \tan x \sec x$, sabendo que a função $\cos x$ é uma solução da equação dada.

Resolução

Seja $y = \cos x + \frac{1}{z}$. Então, $\frac{dy}{dx} = -\sin x - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$.

Logo, $\cos x - y - y^2 \tan x \sec x = -\sin x - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$.

Então,

$$\begin{aligned} -\sin x - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= \cos x - \cos x - \frac{1}{z} - \left(\cos x + \frac{1}{z} \right)^2 \tan x \sec x \\ &= -\frac{1}{z} - \left(\cos^2 x + \frac{2 \cos x}{z} + \frac{1}{z^2} \right) \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{z} - \sin x - \frac{2 \sin x}{z \cos x} - \frac{\sin x}{z^2 \cos^2 x} \end{aligned}$$

Logo, $-\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z} - \frac{2 \sin x}{z \cos x} - \frac{\sin x}{z^2 \cos^2 x}$, pelo que

$$\frac{dz}{dx} = z + \frac{2 \sin x}{\cos x} z + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = z(1 + 2 \tan x) + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Seja $\frac{dz}{dx} = z(1 + 2 \tan x)$. Então, $\frac{dz}{z} = \left(1 + 2 \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx$.

Logo, $\ln z = x - 2 \ln \cos x + C$, donde vem $\ln z + \ln \cos^2 x = x + C$.

Então, $z \cos^2 x = Ke^x$, ou seja, $z = \frac{Ke^x}{\cos^2 x}$.

Aplicando o método da variação da constante, vem

$$\begin{aligned} z' &= \frac{(K'e^x + Ke^x) \cos^2 x + 2Ke^x \sin x \cos x}{\cos^4 x} \\ &= \frac{K'e^x \cos x + Ke^x \cos x + 2Ke^x \sin x}{\cos^3 x} \\ &= \frac{K'e^x}{\cos^2 x} + Ke^x (1 + 2 \tan x) \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{K'e^x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Logo, $K'e^x = \sin x$, donde se conclui que

$$K' = e^{-x} \sin x$$

Fazendo $K = (A \cos x + B \sin x) e^{-x}$, temos

$$\begin{aligned} K' &= (-A \cos x - B \sin x) e^{-x} + (-A \sin x + B \cos x) e^{-x} \\ &= ((-A + B) \cos x - (A + B) \sin x) e^{-x} \end{aligned}$$

Então, $\begin{cases} -A + B = 0 \\ A + B = -1 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Então, $K = -\frac{1}{2} (\cos x + \sin x) e^{-x} + D$

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2} (\cos x + \sin x) e^{-x} \frac{e^x}{\cos^2 x} + \frac{De^x}{\cos^2 x} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x} \right) + \frac{De^x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{-\cos x - \sin x + 2De^x}{2 \cos^2 x} \end{aligned}$$

Logo,

$$y = \cos x + \frac{1}{z} = \cos x - \frac{2 \cos^2 x}{\cos x + \sin x - 2De^x}$$

Exemplo 434 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + xy^2$, sabendo que a função $-\frac{3}{x^2}$ é uma solução da equação dada.

Resolução

Seja $y = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{z} = -3x^{-2} + \frac{1}{z}$. Então, $\frac{dy}{dx} = 6x^{-3} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{6}{x^3} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$.

Logo, $\frac{6}{x^3} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{y}{x} + xy^2$.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{6}{x^3} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= \frac{y}{x} + xy^2 = -\frac{3}{x^3} + \frac{1}{xz} + x \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{z} \right)^2 \\ &= -\frac{3}{x^3} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{x^3} - \frac{6}{xz} + \frac{x}{z^2} \\ &= -\frac{3}{x^3} + \frac{9}{x^3} - \frac{5}{xz} + \frac{x}{z^2} \end{aligned}$$

Logo, $-\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{5}{xz} + \frac{x}{z^2}$, pelo que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5}{x} z - x$$

Seja $\frac{dz}{dx} = \frac{5}{x} z$. Então, $\frac{dz}{z} = \frac{5}{x} dx$.

Logo, $\ln z = 5 \ln x + \ln C$, donde vem $z = Cx^5$.

Então, $z = x^5 C(x)$, pelo que $\frac{dz}{dx} = x^5 C'(x) + 5x^4 C(x)$.

Logo, devemos ter $x^5 C'(x) = -x$, ou seja, $C'(x) = -\frac{1}{x^4} = -x^{-4}$.

Então, $C(x) = \frac{1}{3}x^{-3} + D = \frac{1}{3x^3} + D$.

Logo, $z = x^5 C(x) = \left(\frac{1}{3x^3} + D\right)x^5 = \frac{x^2}{3} + Dx^5$.

Logo,

$$y = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{z} = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{\frac{x^2}{3} + Dx^5}$$

Embora possa não parecer, obtivemos a mesma família de funções que havíamos obtido anteriormente, quando considerámos a equação dada como uma equação de Bernoulli.

Exemplo 435 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = xy + x^3$, sabendo que a função $-x^2 - 2$ é uma solução da equação dada.

Resolução

A equação dada é uma equação linear e, também, uma equação de Riccati. Vamos resolvê-la como equação de Riccati.

Seja $y = -x^2 - 2 + \frac{1}{z}$. Então, $\frac{dy}{dx} = -2x - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$.

Logo, $-2x - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = xy + x^3$.

Então,

$$-2x - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = xy + x^3 = x(y + x^2) = x\left(-2 + \frac{1}{z}\right) = -2x + \frac{x}{z}$$

Logo, $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$. Então, $\frac{dz}{z} = -x dx$, pelo que $\ln z = -\frac{x^2}{2} + \ln C$.

Logo, $z = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, pelo que $y = -x^2 - 2 + Ke^{\frac{x^2}{2}}$.

Exemplo 436 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = (y-1)(xy-y-x)$.

Resolução

$\frac{dy}{dx} = (y-1)(xy-y-x) = xy^2 - y^2 - 2xy + y + x = x + (1-2x)y + (x-1)y^2$

Esta equação é uma equação de Riccati que admite a solução particular $y = 1$.

Seja $y = 1 + \frac{1}{z}$. Então, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$. Então,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} &= x + (1-2x)y + (x-1)y^2 \\ &= x + (1-2x)\left(1 + \frac{1}{z}\right) + (x-1)\left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -xz^2 + (2x-1)(z^2+z) - (x-1)(z+1)^2 \\ &= -xz^2 + 2xz^2 + 2xz - z^2 - z - xz^2 - 2xz - x + z^2 + 2z + 1 \\ &= z - x + 1 \end{aligned}$$

Consideremos a equação $\frac{dz}{dx} = z$. Então, $\frac{dz}{z} = dx$, pelo que $\ln z = \ln C + x$.

Logo, $z = Ce^x$. Seja $z = C(x)e^x$. Então, $z' = C'(x)e^x + C(x)e^x$.

Logo, $C'(x)e^x = 1 - x$, donde vem $C'(x) = (1-x)e^{-x}$.

Então,

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{-x} dx + \int (-xe^{-x}) dx = -e^{-x} + xe^{-x} - \int e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + K = xe^{-x} + K \end{aligned}$$

Logo, $z = C(x)e^x = x + Ke^x$. Então,

$$y = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{x + Ke^x}$$

Exemplo 437 A equação diferencial $\frac{dy}{dx} + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$ admite a solução particular $y = ax$.

1. Determine a .

2. Resolva a equação.

Resolução

1. $\frac{d(ax)}{dx}a$. Então, $a + xa^2x^2 - (2x^2 + 1)ax + x^3 + x - 1 = 0$. Logo, $a + a^2x^3 - 2ax^3 - ax + x^3 + x - 1 = 0$.

Então, $a = 1$.

2. $\frac{dy}{dx} = -xy^2 + (2x^2 + 1)y - x^3 - x + 1$

Esta equação é uma equação de Riccati que admite a solução particular $y = x$.

Seja $y = x + \frac{1}{z}$. Então, $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$. Então,

$$1 - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -xy^2 + (2x^2 + 1)y - x^3 - x + 1$$

Então,

$$-\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -xy^2 + (2x^2 + 1)y - x^3 - x \iff \frac{dz}{dx} = xy^2z^2 - (2x^2 + 1)yz^2 + (x^3 + x)z^2$$

Mas, $y = x + \frac{1}{z}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= x \left(x + \frac{1}{z} \right)^2 z^2 - (2x^2 + 1) \left(x + \frac{1}{z} \right) z^2 + (x^3 + x) z^2 \\ &= x(xz + 1)^2 - (2x^2 + 1)(xz^2 + z) + (x^3 + x)z^2 \\ &= x^3z^2 + 2x^2z + x - 2x^3z^2 - 2x^2z - xz^2 - z + x^3z^2 + xz^2 \\ &= x - z \end{aligned}$$

Consideremos a equação linear $\frac{dz}{dx} = -z + x$.

Seja $\frac{dz}{dx} = -z$. Então, $\frac{dz}{z} = -dx$, pelo que $\ln z = \ln C - x$. Então, $z = Ce^{-x}$.

Seja, $z = C(x)e^{-x}$. Então, $z' = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$.

Então, $C'(x)e^{-x} = x$, donde vem $C'(x) = xe^x$. Então,

$$C(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K$$

Logo, $z = C(x)e^{-x} = (xe^x - e^x + K)e^{-x} = x - 1 + Ke^{-x}$.

Então, $y = x + \frac{1}{z} = x + \frac{1}{x-1+Ke^{-x}}$.

13.4 Equações de 1ª ordem não resolvidas

Suponhamos que temos uma equação diferencial da forma $f(x, y, y') = 0$. Fazendo $y' = p$, temos $f(x, y, p) = 0$.

Em princípio, temos três maneiras para resolver esta equação diferencial: em ordem a p , em ordem a y e em ordem a x .

13.4.1 Equações resolúveis em ordem a y'

Exemplo 438 Resolva a equação diferencial $x(y')^2 + 2xy' - y = 0$

Resolução

$$\begin{aligned}
x(y')^2 + 2xy' - y &= 0 \iff y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + xy}}{x} \\
&\iff y' = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{y}{x}} \\
&\iff y' = -1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}} \vee y' = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}
\end{aligned}$$

Cada uma das equações obtidas é uma equação homogênea.

Consideremos a equação $y' = -1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}}$.

Seja $y = ux$. Então, $y' = \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$. Logo, $u + x \frac{du}{dx} = -1 - \sqrt{1 + u}$, donde vem $x \frac{du}{dx} = -u - 1 - \sqrt{1 + u}$.

Então, $\frac{dx}{x} = -\frac{1}{u+1+\sqrt{u+1}} du = -\frac{1}{(1+\sqrt{u+1})\sqrt{u+1}} du = -2(1+\sqrt{u+1})^{-1} \times \frac{1}{2\sqrt{u+1}} du$.

Logo, $\ln x = -2 \ln(1 + \sqrt{u+1}) + \ln C$. Então, $x(1 + \sqrt{u+1})^2 = C$. Logo, $x(1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}})^2 = C$.

Analogamente, para a equação $y' = -1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}}$, obtendo-se $x(1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}})^2 = C$.

Então, $(1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}})^2 - \frac{C}{x} = 0 \vee (1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}})^2 - \frac{C}{x} = 0$. Então,

$$\left[\left(1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}} \right)^2 - \frac{C}{x} \right] \left[\left(1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}} \right)^2 - \frac{C}{x} \right] = 0$$

Então,

$$\left(1 - 1 - \frac{y}{x} \right)^2 - \frac{C}{x} \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + 1 + \frac{y}{x} \right) - \frac{C}{x} \left(1 - 2\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + 1 + \frac{y}{x} \right) + \frac{C^2}{x^2} = 0$$

Simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{x^2} - \frac{C}{x} \left(4 + \frac{2y}{x} \right) + \frac{C^2}{x^2} &= 0 \iff \frac{y^2}{x^2} - \frac{4Cx}{x^2} - \frac{2Cy}{x^2} + \frac{C^2}{x^2} = 0 \\
&\iff y^2 - 4Cx - 2Cy + C^2 = 0 \\
&\iff (y - C)^2 - 4Cx = 0
\end{aligned}$$

Exemplo 439 Resolva a equação diferencial $(y')^2 - 2y' + x = 0$

Resolução

Então, $y' = 1 \pm \sqrt{1 - x}$.

$$y' = 1 \pm \sqrt{1 - x} \iff y = x \mp \frac{2}{3}(1 - x)^{\frac{3}{2}} + C$$

Exemplo 440 Resolva a equação diferencial $(y')^2 + y^2 = 1$.

Resolução

Então, $y' = \pm \sqrt{1 - y^2}$.

$$y' = \pm \sqrt{1 - y^2} \iff \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{1 - y^2} \iff \pm \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx \iff x + C = \pm \arcsin y$$

Logo, $y = \pm \sin(x + C)$.

Exemplo 441 Resolva a equação diferencial $y(y')^2 - 2xy' + y = 0$.

Resolução

Então, $y' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{y} = \frac{x}{y} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1}$. A equação obtida é uma equação homogênea, pelo que fazemos a substituição $y = ux$.

Então, $y' = u + x \frac{du}{dx}$. Logo,

$$\begin{aligned} u + x \frac{du}{dx} &= \frac{1}{u} \pm \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} \iff x \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2}{u} \pm \sqrt{\frac{1 - u^2}{u^2}} \\ &\iff x \frac{du}{dx} = \frac{1 - u^2 \pm \sqrt{1 - u^2}}{u} \\ &\iff \frac{dx}{x} = \frac{u}{1 - u^2 \pm \sqrt{1 - u^2}} du \end{aligned}$$

Façamos a mudança de variável $1 - u^2 = t^2$. Então, $-2udu = 2tdt$, pelo que $\frac{du}{dt} = -\frac{t}{u}$.

Ora, $\int \frac{u}{1 - u^2 \pm \sqrt{1 - u^2}} du = \int \frac{u}{t^2 \pm t} \frac{du}{dt} dt = - \int \frac{u}{t^2 \pm t} \frac{t}{u} dt = - \int \frac{1}{t \pm 1} dt = -\ln(t \pm 1)$.

Logo,

$$\ln x = -\ln(t \pm 1) + \ln C \iff x(t \pm 1) = C \iff t = \frac{C}{x} \pm 1$$

Mas, $t = \sqrt{1 - u^2}$. Então,

$$\sqrt{1 - u^2} = \frac{C}{x} \pm 1 \implies \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{C}{x} \pm 1 \implies \sqrt{x^2 - y^2} = C \pm x$$

Exemplo 442 Resolva a equação diferencial $(y')^2 - 2xy' + x^2 - y^2 = 0$.

Resolução

Então, $y' = x \pm \sqrt{x^2 - x^2 + y^2} = x \pm y$.

Consideremos as equações $y' = \pm y$. Então, $\frac{y'}{y} = \pm 1$, pelo que $\ln y = \pm x + C$. Então, $y = Ke^{\pm x}$. Consideremos K dependente de x . Então,

$$y' = K'(x)e^x + K(x)e^x \vee y' = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x}$$

Então,

$$\begin{aligned} K'(x)e^x &= x \vee K'(x)e^{-x} = x \iff K'(x) = xe^{-x} \vee K'(x) = e^x \\ &\iff K(x) = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx \vee K(x) = xe^x - \int e^x dx \\ &\iff K(x) = -xe^{-x} + e^{-x} + C_1 \vee K(x) = xe^x - e^x + C_1 \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação dada é

$$y = -x + 1 + C_1 e^x \vee y = x - 1 + C_1 e^{-x}$$

13.4.2 Equações resolúveis em ordem a y

Exemplo 443 Resolva a equação diferencial $x(y')^2 - 2yy' - x = 0$

Resolução

Seja $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Resolvendo a equação dada em ordem a y , obtemos

$$y = \frac{x(y')^2 - x}{2y'} = x \frac{p^2 - 1}{2p}$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned} p &= \frac{dy}{dx} = \frac{p^2 - 1}{2p} + x \frac{2p \times 2p - 2(p^2 - 1)}{4p^2} \frac{dp}{dx} = \frac{p^2 - 1}{2p} + x \frac{2p^2 + 2}{4p^2} \frac{dp}{dx} \\ &= \frac{p^2 - 1}{2p} + x \frac{p^2 + 1}{2p^2} \frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{2p^2}{2p} = \frac{p^2 - 1}{2p} + x \frac{p^2 + 1}{2p^2} \frac{dp}{dx} &\iff \frac{p^2 + 1}{2p} = x \frac{p^2 + 1}{2p^2} \frac{dp}{dx} \\ &\iff \frac{1}{2p} = \frac{x}{2p^2} \frac{dp}{dx} \iff p = x \frac{dp}{dx} \iff \frac{dx}{x} = \frac{dp}{p} \end{aligned}$$

Então, $\ln x + \ln C = \ln p$, donde se conclui que $p = Cx$.

Então,

$$y = x \frac{c^2 x^2 - 1}{2cx} = \frac{c^2 x^2 - 1}{2c}$$

Exemplo 444 Resolva a equação diferencial $y = xg(y') + h(y')$.

Resolução

Seja $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Então, $y = xg(p) + h(p)$. Derivando em ordem a x , vem

$$\begin{aligned} p = g(p) + xg'(p) \frac{dp}{dx} + h'(p) \frac{dp}{dx} &\iff \frac{dp}{dx} = \frac{p - g(p)}{xg'(p) + h'(p)} \\ &\iff \frac{dx}{dp} = \frac{xg'(p) + h'(p)}{p - g(p)} \\ &\iff \frac{dx}{dp} + x \frac{g'(p)}{g(p) - p} = \frac{h'(p)}{p - g(p)} \end{aligned}$$

Obtivemos, assim, uma equação linear em x .

Exemplo 445 Resolva a equação diferencial $3(y')^2 y = [2(y')^3 - 1]x$

Resolução

Então, $y = \frac{2(y')^3 - 1}{3(y')^2} x = \frac{2p^3 - 1}{3p^2} x = \frac{2p}{3} x - \frac{x}{3p^2}$, com $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Derivando em ordem a x , vem

$$p = \frac{2p}{3} + \frac{2}{3} x \frac{dp}{dx} - \frac{3p^2 - 6px \frac{dp}{dx}}{9p^4} = \frac{2p}{3} + \frac{2}{3} x \frac{dp}{dx} - \frac{1}{3p^2} + \frac{2x}{3p^3} \frac{dp}{dx}$$

Então,

$$\begin{aligned} 3p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2} + \frac{2x}{p^3} \frac{dp}{dx} &\iff p + \frac{1}{p^2} = 2x \left(1 + \frac{1}{p^3}\right) \frac{dp}{dx} \\ &\iff \frac{1}{2x} dx = \frac{1 + \frac{1}{p^3}}{p + \frac{1}{p^2}} dp \iff \frac{1}{2x} dx = \frac{\frac{p^3 + 1}{p^3}}{\frac{p^3 + 1}{p^2}} dp \\ &\iff \frac{1}{x} dx = \frac{2}{p} dp \iff \ln x + \ln C = 2 \ln p \\ &\iff Cx = p^2 \iff p = \pm \sqrt{Cx} \end{aligned}$$

Mas, $y = \frac{2p}{3} x - \frac{x}{3p^2}$. Então, $y = \pm \frac{2}{3} x \sqrt{Cx} - \frac{1}{3C}$, ou seja, $\left(3y + \frac{1}{C}\right)^2 = 4Cx^3$.

Exemplo 446 Resolva a equação diferencial $x(y')^2 + 2xy' - y = 0$

Resolução

Resolvendo a equação dada em ordem a y , obtemos $y = x(y')^2 + 2xy'$.

Seja $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Então, $y = xp^2 + 2xp$.

Derivando em ordem a x , vem $p = y' = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 2p + 2x\frac{dp}{dx}$. Então

$$\begin{aligned} p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 2p + 2x\frac{dp}{dx} &\iff -p - p^2 = 2x(p+1)\frac{dp}{dx} \iff -p(p+1) = 2x(p+1)\frac{dp}{dx} \\ &\iff -p = 2x\frac{dp}{dx} \iff \frac{dx}{x} + \frac{2}{p}dp = 0 \iff \ln x + 2\ln p = \ln C \\ &\iff xp^2 = C \iff p = \pm\sqrt{\frac{C}{x}} \end{aligned}$$

Então, $p = \pm\sqrt{\frac{C}{x}}$. Mas, $y = x(y')^2 + 2xy'$. Então,

$$y = x(y')^2 + 2xy' = xp^2 + 2xp = C \pm 2x\sqrt{\frac{C}{x}}$$

Então, $(y - C)^2 = 4Cx$.

Exemplo 447 Resolva a equação diferencial $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.

Resolução

Seja $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Então, $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$.

Derivando em ordem a x , vem $p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}$. Então, $x\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} = 0$. Ora,

$$x\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} = 0 \iff \left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

Então, $\frac{dp}{dx} = 0$. Logo, $p = C$, pelo que $y = \frac{1}{C} + Cx$.

Exemplo 448 Resolva a equação diferencial $y = x(1 + y') + (y')^2$

Resolução

Seja $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Então, $y = x(1 + p) + p^2$.

Logo, derivando em ordem a x , vem $p = 1 + p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$.

Então, $x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} = -1$, donde vem $x + 2p = -\frac{dx}{dp}$.

Então, $x + 2p = -\frac{dx}{dp}$. Logo, $\frac{dx}{dp} + x = -2p$. A solução geral da equação homogênea é $x = Ce^{-p}$.

Seja $x = Ap + B$, uma solução particular. Então, $A + Ap + B = -2p$. Logo, $A = -2, B = 2$.

A solução geral da equação completa é $x = Ce^{-p} - 2p + 2$.

Logo,

$$\begin{aligned} y &= (Ce^{-p} - 2p + 2)(1 + p) + p^2 = Ce^{-p} - 2p + 2 + Cpe^{-p} - 2p^2 + 2p + p^2 \\ &= Ce^{-p} + Cpe^{-p} - p^2 + 2 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} x = Ce^{-p} + 2 - 2p \\ y = Ce^{-p} + Cpe^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$$

A função fica definida por equações paramétricas.

13.4.3 Equações resolúveis em ordem a x **Exemplo 449** Resolva a equação diferencial $x(y')^2 - 2yy' - x = 0$ **Resolução**Seja $p = y' = \frac{dy}{dx}$. Resolvendo a equação dada em ordem a x , obtemos

$$x = \frac{2yy'}{(y')^2 - 1} = \frac{2py}{p^2 - 1}$$

Derivando em ordem a y , vem

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\left(2p + 2y \frac{dp}{dy}\right)(p^2 - 1) - 2py \times 2p \frac{dp}{dy}}{(p^2 - 1)^2} = \frac{2p}{p^2 - 1} + \frac{2y(p^2 - 1) - 4p^2y}{(p^2 - 1)^2} \frac{dp}{dy}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{2y(-p^2 - 1)}{(p^2 - 1)^2} \frac{dp}{dy} &= \frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2 - 1} \iff \frac{2y(p^2 + 1)}{(p^2 - 1)^2} \frac{dp}{dy} = \frac{2p}{p^2 - 1} - \frac{1}{p} \\ &\iff \frac{2y(p^2 + 1)}{(p^2 - 1)^2} \frac{dp}{dy} = \frac{2p^2 - p^2 + 1}{(p^2 - 1)p} \\ &\iff \frac{2(p^2 + 1)}{p^2 - 1} dp = \frac{p^2 + 1}{p} \frac{dy}{y} \\ &\iff \frac{2p}{p^2 - 1} dp = \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

Logo, $\ln(p^2 - 1) = \ln y + \ln C$, donde se conclui que $p^2 - 1 = Cy$ Substituindo na equação dada, temos $x(1 + Cy) - 2y\sqrt{1 + Cy} - x = 0$, ou seja, $Cxy - 2y\sqrt{1 + Cy} = 0$.Logo, $Cx = 2\sqrt{1 + Cy}$, ou $C^2x^2 = 4 + 4Cy$, ou ainda, $y = \frac{C^2x^2 - 4}{4C}$ **13.5 Equações de ordem superior à 1ª**

Já resolvemos as equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Vejamos outros exemplos

Exemplo 450 Resolva a equação diferencial $y''' = x^2$ **Resolução**

$$y''' = x^2 \implies y'' = \frac{x^3}{3} + C_1 \implies y' = \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2 \implies y = \frac{x^5}{60} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

Exemplo 451 Resolva a equação diferencial $y''' = \frac{1}{x}$ **Resolução**

$$\begin{aligned} y''' = \frac{1}{x} &\implies y'' = \ln x + C_1 \\ &\implies y' = \int 1 \ln x dx + C_1x + C_2 = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx + C_1x + C_2 \\ &\implies y' = x \ln x - x + C_1x + C_2 = x \ln x + (C_1 - 1)x + C_2 \\ &\implies y = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2x} dx + (C_1 - 1) \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \\ &\implies y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + (C_1 - 1) \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \\ &\implies y = \frac{x^2}{2} \ln x + K_1x^2 + K_2x + K_3 \end{aligned}$$

Exemplo 452 Resolva a equação diferencial $y''' = \frac{1}{x^2} + \sin x$

Resolução

$$\begin{aligned} y''' = \frac{1}{x^2} + \sin x &\implies y'' = -\frac{1}{x} - \cos x + C_1 \implies y' = -\ln x dx - \sin x + C_1 x + C_2 \\ &\implies y = -\int 1 \ln x + \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ &\implies y = -x \ln x + \int 1 dx + \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ &\implies y = -x \ln x + x + \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ &\implies y = -x \ln x + \cos x + K_1 x^2 + K_2 x + K_3 \end{aligned}$$

Exemplo 453 Resolva a equação diferencial $y''' = xe^x$.

Resolução

$$\begin{aligned} y''' = xe^x &\implies y'' = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_1 = (x-1)e^x + C_1 \\ &\implies y' = (x-2)e^x + C_1 x + C_2 \\ &\implies y = (x-3)e^x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \end{aligned}$$

Exemplo 454 Resolva a equação diferencial $y''' = \frac{2}{x}$.

Resolução

$$\begin{aligned} y''' = \frac{2}{x} &\implies y'' = 2 \ln x + C_1 \\ &\implies y' = 2x \ln x - \int \frac{2x}{x} dx + C_1 x + C_2 = 2x \ln x - 2x + C_1 x + C_2 \\ &\implies y = x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{x} dx - x^2 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ &\implies y = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} - x^2 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \\ &\implies y = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} - x^2 + K_1 x^2 + K_2 x + K_3 \end{aligned}$$

Exemplo 455 Resolva a equação diferencial $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0$.

Resolução

A equação dada é uma equação linear. Podemos substituir y' por z , embora tal não seja necessário. Então, obtemos $z' = \frac{x+2}{x+1}z - \frac{x+2}{x+1}$.

Consideremos a equação $z' = \frac{x+2}{x+1}z$. Então, $\frac{z'}{z} = \frac{x+2}{x+1}$.

$$z' = \frac{x+2}{x+1}z \implies \frac{z'}{z} = 1 + \frac{1}{x+1} \implies \ln z = x + \ln(x+1) + \ln C \implies z = C(x+1)e^x$$

Consideremos $C = C(x)$. Então, $z = (x+1)e^x C(x)$. Logo, $z' = e^x C(x) + (x+1)e^x C'(x) + (x+1)e^x C''(x)$. Logo, $(x+1)e^x C''(x) = -\frac{x+2}{x+1}$. Então, $C''(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2}e^{-x}$.

Mas, $\frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$. Então, $A = B = 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} C(x) &= -\int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) e^{-x} dx = -\int \frac{1}{x+1} e^{-x} dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2} e^{-x} dx \\ &= -\int \frac{1}{x+1} e^{-x} dx + \frac{1}{x+1} e^{-x} - \int \frac{1}{x+1} (-e^{-x}) dx \\ &= \frac{1}{x+1} e^{-x} + K_1 \end{aligned}$$

Então, $z = (x+1)e^x C(x) = (x+1)e^x \left(\frac{1}{x+1}e^{-x} + K_1 \right) = 1 + K_1(x+1)e^x$.

Então, $y = \int 1 dx + \int K_1(x+1)e^x dx = x + K_2 + K_1xe^x$.

13.5.1 Equação de Euler

Equação de Euler é uma equação diferencial da forma

$$(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_{n-1}(ax+b)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_1(ax+b) \frac{dy}{dx} + A_0 y = f(x)$$

A equação anterior resolve-se por meio da substituição $ax+b = e^t$.

Exemplo 456 Resolva a equação diferencial $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x \ln x$.

Resolução

Seja $x = e^t$. Então, $\frac{dx}{dt} = e^t$ e $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$. Logo, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$. E, agora, vem

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \times \frac{dt}{dx} \\ &= e^{-t} \left(-e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

Substituindo, na equação inicial, temos

$$e^{2t} e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + e^t e^{-t} \frac{dy}{dt} - y = te^t \iff \frac{d^2 y}{dt^2} - y = te^t$$

Consideremos a equação $\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$. A equação característica é $\lambda^2 - 1 = 0$, cujas raízes são ± 1 .

Então, a solução geral da equação $\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$ é $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Seja $y_p = (At+B)te^t = (At^2+Bt)e^t$.

Então, $\frac{dy_p}{dt} = (At^2+2At+Bt+B)e^t = (At^2+(2A+B)t+B)e^t$.

E $\frac{d^2 y_p}{dt^2} = (At^2+(2A+B)t+B+2At+2A+B)e^t = (At^2+(4A+B)t+2A+2B)e^t$.

Logo, $(At^2+(4A+B)t+2A+2B)e^t - (At^2+Bt)e^t = te^t$.

Simplificando o primeiro membro, obtemos $(4At+2A+2B)e^t = te^t$.

Então, $\begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$, pelo que $\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$. Então, $y_p = \left(\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t \right) e^t$.

A solução geral da equação $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x \ln x$ é $y = C_2 e^{-t} + \frac{1}{4}(t^2 - t + 4C_1)e^t$.

É claro que podemos substituir $4C_1$ por C_1 . Logo, $y = C_2 e^{-t} + \frac{1}{4}(t^2 - t + C_1)e^t$.

Mas, $t = \ln x$, pelo que vem

$$y = \frac{C_2}{x} + \frac{x}{4} (\ln^2 x - \ln x + C_1)$$

Exemplo 457 Resolva a equação diferencial $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x + x^3 + x^2 \ln x$.

Resolução

Seja $x = e^t$. Então, $\frac{dx}{dt} = e^t$ e $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$. Logo, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$. E, agora, vem

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Substituindo, na equação inicial, temos

$$e^{2t} e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) - 2e^t e^{-t} \frac{dy}{dt} + 2y = e^t + e^{3t} + te^{2t} \iff \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + 2y = e^t + te^{2t} + e^{3t}$$

Consideremos a equação $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$. A equação característica é $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, cujas raízes são 1 e 2.

Então, a solução geral da equação $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ é $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$.

Seja $y_p = Ate^t + (Bt + C)te^{2t} + De^{3t} = Ate^t + (Bt^2 + Ct)e^{2t} + De^{3t}$.

Então, $\frac{dy_p}{dt} = (At + A)e^t + (2Bt^2 + 2Ct + 2Bt + C)e^{2t} + 3De^{3t}$.

E $\frac{d^2y}{dt^2} = (At + 2A)e^t + (4Bt^2 + 4Ct + 4Bt + 2C + 4Bt + 2C + 2B)e^{2t} + 9De^{3t}$.

Então, $\frac{d^2y}{dt^2} = (At + 2A)e^t + (4Bt^2 + 8Bt + 4Ct + 2B + 4C)e^{2t} + 9De^{3t}$

E podemos formar o seguinte quadro para facilitar os cálculos:

| te^t | e^t | t^2e^{2t} | te^{2t} | e^{2t} | e^{3t} |
|--------|-------|-------------|------------|-----------|----------|
| A | $2A$ | $4B$ | $8B + 4C$ | $2B + 4C$ | $9D$ |
| $-3A$ | $-3A$ | $-6B$ | $-6C - 6B$ | $-3C$ | $-9D$ |
| $2A$ | 0 | $2B$ | $2C$ | 0 | $2D$ |
| 0 | $-A$ | 0 | $2B$ | $2B + C$ | $2D$ |

Logo, vem

$$-Ae^t - 2Bte^{2t} + (2B - C)e^{2t} + 2De^{3t} = e^t + te^{2t} + e^{3t}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} -A = 1 \\ 2B = 1 \\ 2B + C = 0 \\ 2D = 1 \end{cases}, \text{ donde vem } \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -1 \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Então,

$$y_p = -te^t + \left(\frac{1}{2}t - 1\right)te^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$-te^t + (Bt^2 + Ct)e^{2t} + De^{3t}$$

A solução geral da equação $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^t + te^{2t} + e^{3t}$ é

$$\begin{aligned} y &= C_1e^t + C_2e^{2t} - te^t + \left(\frac{1}{2}t - 1\right)te^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ &= (C_1 - t)e^t + \left(\frac{1}{2}t^2 - t + C_2\right)e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{aligned}$$

Mas, $x = e^t$, pelo que $t = \ln x$. Então, a solução geral da equação $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x + x^3 + x^2 \ln x$ é

$$y = x(C_1 - \ln x) + x^2 \left(\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x + C_2 \right) + \frac{1}{2}x^3$$

Exemplo 458 Resolva a equação diferencial $2(x+1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x+1) \frac{dy}{dx} + y = x$.

Resolução

Seja $x+1 = e^t$. Então, $\frac{dx}{dt} = e^t$ e $\frac{dt}{dx} = e^{-t}$. Logo, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$. E, agora, vem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Substituindo, na equação inicial, temos

$$2e^{2t}e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) - e^te^{-t} \frac{dy}{dt} + y = e^t - 1 \iff 2 \frac{d^2y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + y = e^t - 1$$

Consideremos a equação $2 \frac{d^2y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + y = 0$. A equação característica é $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, cujas raízes são 1 e $\frac{1}{2}$.

Então, a solução geral da equação $2 \frac{d^2y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} + y = 0$ é $y = C_1e^t + C_2e^{\frac{t}{2}}$.

Seja $y_p = Ate^t + C$. Então, $\frac{dy_p}{dt} = (At + A)e^t$. E $\frac{d^2y}{dt^2} = (At + 2A)e^t$.

Logo,

$$2(At + 2A)e^t - 3(At + A)e^t + Ate^t + C = e^t - 1 \iff Ae^t + C = e^t - 1$$

Logo, $\begin{cases} A = 1 \\ C = -1 \end{cases}$. Então, $y_p = te^t - 1$.

A solução geral da equação $2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + y = e^t - 1$ é

$$y = C_1e^t + C_2e^{\frac{t}{2}} + te^t - 1 = (C_1 + t)e^t + C_2e^{\frac{t}{2}} - 1$$

Mas, $x + 1 = e^t$ e $t = \ln(x + 1)$. Então, a solução geral da equação $2(x + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x + 1) \frac{dy}{dx} + y = x$ é

$$y = (C_1 + t)e^t + C_2e^{\frac{t}{2}} - 1 = (x + 1)[C_1 + \ln(x + 1)] + C_2\sqrt{x + 1} - 1$$

Exemplo 459 Resolva a equação diferencial $2(x + 1)^3 \frac{d^2y}{dx^2} - (x + 1)^2 \frac{dy}{dx} + (x + 1)y = x$.

Resolução

A equação dada é equivalente a $2(x + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x + 1) \frac{dy}{dx} + y = \frac{x}{x+1}$.

No exemplo anterior, resolvemos a equação $2(x + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x + 1) \frac{dy}{dx} + y = 0$, cuja solução geral é

$$y = C_1e^t + C_2e^{\frac{t}{2}}$$

com $x + 1 = e^t$. Então, $\frac{x}{x+1} = \frac{e^t - 1}{e^t} = 1 - e^{-t}$.

Seja $y_p = Ae^{-t} + C$. Então, $\frac{d}{dt}y_p = -Ae^{-t}$ e $\frac{d^2}{dt^2}y_p = Ae^{-t}$.

Logo, $2\frac{d^2}{dt^2}y_p - 3\frac{d}{dt}y_p + y_p = 2Ae^{-t} + 3Ae^{-t} + Ae^{-t} + C = 1 - e^{-t}$.

Então, $\begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ C = 1 \end{cases}$, pelo que $y_p = -\frac{1}{6}e^{-t} + 1$.

Então, $y = C_1e^t + C_2e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{6}e^{-t} + 1$. Então

$$y = C_1(x + 1) + C_2\sqrt{x + 1} - \frac{1}{6(x + 1)} + 1$$

Capítulo 14

Sistemas de equações diferenciais

Observação sobre o cálculo de e^A , onde A é uma matriz quadrada:

Seja A uma matriz quadrada. Vejamos como calcular e^A :

Sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Por isso, é natural apresentar a seguinte definição:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

Estamos a supor que A é uma matriz quadrada, para que possamos calcular as potências de A .

Em geral, é difícil calcular as sucessivas potências de A .

Se a matriz A for diagonalizável, teremos $A = PDP^{-1}$, pelo que $A^n = PD^nP^{-1}$. Então,

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \frac{1}{n!}A^n + \cdots \\ &= PIP^{-1} + PDP^{-1} + \frac{1}{2!}PD^2P^{-1} + \frac{1}{3!}PD^3P^{-1} + \cdots \frac{1}{n!}PD^nP^{-1} + \cdots \\ &= P \left(I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \cdots \frac{1}{n!}D^n + \cdots \right) P^{-1} \end{aligned}$$

O problema transformou-se em saber calcular $I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \cdots \frac{1}{n!}D^n + \cdots$, ou seja, e^D , com D matriz diagonal.

Exemplo 460 Seja $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule e^D .

Resolução

$$\begin{aligned} e^D &= I + D + \frac{1}{2!}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \cdots \frac{1}{n!}D^n + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \cdots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, se } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \text{ então } e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix}.$$

Exercício 461 Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais $\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$.

Resolução

O sistema anterior costuma escrever-se $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases}$, com x, y, z funções de t .

Então,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{bmatrix}$$

De forma análoga à equação diferencial $y' = ky$, cuja solução é $y = Ce^{kx}$, temos que a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ é } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = e^{t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e determinemos os valores próprios de A :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 & \lambda + 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda + 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)(-\lambda + \lambda^2 - 2) \\ &= -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) \end{aligned}$$

De $|A - \lambda I| = 0$, vem $\lambda = -1 \vee \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, ou seja $\lambda = -1 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 2$.

Vectores próprios associados a $\lambda = -1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = -x - y \end{aligned}$$

Este subespaço próprio tem dimensão 2, valor igual à multiplicidade da raiz -1 .

Dois vectores próprios linearmente independentes: $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$.

Vectores próprios associados a $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ x - 2y + 2x - y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x - y \\ 3x - 3y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = x \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = x \end{cases} \end{aligned}$$

Um vector próprio: $(1, 1, 1)$.

Então, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$.

Logo,

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, tendo-se $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Então,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \\ -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\frac{C_1}{e^t} + \frac{1}{3}C_1e^{2t} - \frac{1}{3}\frac{C_2}{e^t} + \frac{1}{3}C_2e^{2t} - \frac{1}{3}\frac{C_3}{e^t} + \frac{1}{3}C_3e^{2t} \\ -\frac{1}{3}\frac{C_1}{e^t} + \frac{1}{3}C_1e^{2t} + \frac{2}{3}\frac{C_2}{e^t} + \frac{1}{3}C_2e^{2t} - \frac{1}{3}\frac{C_3}{e^t} + \frac{1}{3}C_3e^{2t} \\ -\frac{1}{3}\frac{C_1}{e^t} + \frac{1}{3}C_1e^{2t} - \frac{1}{3}\frac{C_2}{e^t} + \frac{1}{3}C_2e^{2t} + \frac{2}{3}\frac{C_3}{e^t} + \frac{1}{3}C_3e^{2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2C_1 - C_2 - C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \\ \frac{-C_1 + 2C_2 - C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \\ \frac{-C_1 - C_2 + 2C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, $\begin{cases} x = \frac{2C_1 - C_2 - C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \\ y = \frac{-C_1 + 2C_2 - C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \\ z = \frac{-C_1 - C_2 + 2C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \end{cases}$.

Outra resolução

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - y' = y - x \\ x' - z' = z - x \\ x' + y' + z' = 2x + 2y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)' = -(x - y) \\ (x - z)' = -(x - z) \\ (x + y + z)' = 2(x + y + z) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x - y = Ae^{-t} \\ x - z = Be^{-t} \\ x + y + z = Ce^{2t} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - Ae^{-t} \\ z = x - Be^{-t} \\ x + x - Ae^{-t} + x - Be^{-t} = Ce^{2t} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{A}{3}e^{-t} + \frac{B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} - Ae^{-t} \\ z = \frac{A}{3}e^{-t} + \frac{B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} - Be^{-t} \\ x = \frac{A}{3}e^{-t} + \frac{B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-2A+B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} \\ z = \frac{A-2B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} \\ x = \frac{A+B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{A+B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} \\ y = \frac{-2A+B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} \\ z = \frac{A-2B}{3}e^{-t} + \frac{C}{3}e^{2t} \end{cases}
 \end{aligned}$$

É claro que estamos a supor que A, B, C, C_1, C_2, C_3 são constantes reais.

Exercício 462 Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais $\begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) + 3e^{-t} \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$.

Resolução

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z + 3e^{-t} \\ z' = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - z' = -(x - z) \\ y' = x + z + 3e^{-t} \\ x' + y' + z' = 2(x + y + z) + 3e^{-t} \end{cases}$$

Consideremos a equação diferencial $u' - 2u = 3e^{-t}$. A solução geral da equação homogênea é $u = Ae^{2t}$. Seja $u_p = Ke^{-t}$. Então, $u'_p = -Ke^{-t}$, pelo que devemos ter $-Ke^{-t} - 2Ke^{-t} = 3e^{-t}$. Logo, $K = -1$, pelo que a solução geral da equação completa é $u = Ae^{2t} - e^{-t}$.

Então, $x + y + z = Ae^{2t} - e^{-t}$.

Consideremos $(x - z)' = -(x - z)$. Seja $v' = -v$. Então, $v = Be^{-t}$. Logo, $x - z = Be^{-t}$.

Logo, $x = z + Be^{-t}$ e $z + Be^{-t} + y + z = Ae^{2t} - e^{-t}$.

Então, $y = -2z + Ae^{2t} - e^{-t} - Be^{-t} = -2z + Ae^{2t} - (B + 1)e^{-t}$.

Logo,

$$z' = x + y = z + Be^{-t} - 2z + Ae^{2t} - (B + 1)e^{-t} = -z - e^{-t} + Ae^{2t}$$

Então, $z' + z = -e^{-t} + Ae^{2t}$.

Solução geral da equação homogênea: $z = Ce^{-t}$. Seja $z_p = Dte^{-t} + Fe^{2t}$. Então, $z'_p = De^{-t} - Dte^{-t} + 2Fe^{2t}$, pelo que devemos ter $De^{-t} - Dte^{-t} + 2Fe^{2t} + Dte^{-t} + Fe^{2t} = -e^{-t} + Ae^{2t}$.

Logo, $De^{-t} + 3Fe^{2t} = -e^{-t} + Ae^{2t}$, donde vem $D = -1 \wedge F = \frac{A}{3}$.

Então, $z_p = -te^{-t} + \frac{A}{3}e^{2t}$ e $z = Ce^{-t} - te^{-t} + \frac{A}{3}e^{2t}$.

Agora, temos

$$\begin{aligned}
 y &= -2z + Ae^{2t} - (B + 1)e^{-t} = -2Ce^{-t} + 2te^{-t} - \frac{2A}{3}e^{2t} + Ae^{2t} - (B + 1)e^{-t} \\
 &= -(2C + B + 1)e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{A}{3}e^{2t}
 \end{aligned}$$

De $x = z + Be^{-t}$, vem

$$x = z + Be^{-t} = Ce^{-t} - te^{-t} + \frac{A}{3}e^{2t} + Be^{-t} = \frac{A}{3}e^{2t} + (B + C)e^{-t} - te^{-t}$$

Então,

$$\begin{cases} x = \frac{A}{3}e^{2t} + (B + C)e^{-t} - te^{-t} \\ y = -(2C + B + 1)e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{A}{3}e^{2t} \\ z = Ce^{-t} - te^{-t} + \frac{A}{3}e^{2t} \end{cases}$$

Outra resolução

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z+3e^{-t} \\ x+y \end{bmatrix}$$

Já resolvemos $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix}.$

A solução obtida foi

$$\begin{cases} x = \frac{2C_1 - C_2 - C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \\ y = \frac{-C_1 + 2C_2 - C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \\ z = \frac{-C_1 - C_2 + 2C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} \end{cases}$$

Seja $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ate^{-t} \\ Bte^{-t} + Ce^{-t} \\ Dte^{-t} \end{bmatrix}$. Então, $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} Ae^{-t} - Ate^{-t} \\ Be^{-t} - Bte^{-t} - Ce^{-t} \\ De^{-t} - Dte^{-t} \end{bmatrix}.$

Logo, devemos ter

$$\begin{cases} Ae^{-t} - Ate^{-t} = Bte^{-t} + Ce^{-t} + Dte^{-t} \\ Be^{-t} - Bte^{-t} - Ce^{-t} = Ate^{-t} + Dte^{-t} + 3e^{-t} \\ De^{-t} - Dte^{-t} = Ate^{-t} + Bte^{-t} + Ce^{-t} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} A = C \\ -A = B + D \\ B - C = 3 \\ -B = A + D \\ D = C \\ -D = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ D = C \\ B = 3 + C \\ 3C + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ D = -1 \\ B = 2 \\ C = -1 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^{-t} \\ 2te^{-t} - e^{-t} \\ -te^{-t} \end{bmatrix}$$

Finalmente, temos

$$\begin{cases} x = \frac{2C_1 - C_2 - C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} - te^{-t} \\ y = \frac{-C_1 + 2C_2 - C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} + 2te^{-t} - e^{-t} \\ z = \frac{-C_1 - C_2 + 2C_3}{3}e^{-t} + \frac{C_1 + C_2 + C_3}{3}e^{2t} - te^{-t} \end{cases}$$

Exercício 463 Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais $\begin{cases} x' = 3x - \frac{3}{2}y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$, com $x(0) = 4$ e $y(0) = 6$.

Resolução

$$\begin{cases} 4x' = 12x - 6y \\ 3y' = 12x - 6y \end{cases} \Rightarrow 4x' = 3y' \Rightarrow 4x = 3y + 4C \Rightarrow x = \frac{3}{4}y + C$$

Então,

$$y' = 3y + 4C - 2y = y + 4C$$

Logo, $y = Ae^t - 4C$ e $x = \frac{3}{4}(Ae^t - 4C) + C = \frac{3}{4}Ae^t - 2C$.

Resposta: $\begin{cases} x = \frac{3}{4}Ae^t + C \\ y = Ae^t + 2C \end{cases}$, $A, C \in \mathbb{R}$

Logo, $\begin{cases} \frac{3}{4}A + C = 4 \\ A + 2C = 6 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} 3A + 4C = 16 \\ A = 6 - 2C \end{cases}$. Então, $18 - 6C + 4C = 16$, donde se conclui que $C = 1$ e $A = 4$.

Logo, $\begin{cases} x = 3e^t + 1 \\ y = 4e^t + 2 \end{cases}.$

Outra resolução

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Então, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{tB}$, com $B = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Cálculo dos vectores próprios da matriz B :

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -\frac{3}{2} \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 0$$

Determinação dos vectores próprios:

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x - \frac{3}{2}y \\ 4x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y$$

Um vector próprio é $(3, 4)$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x - \frac{3}{2}y \\ 4x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow y = 2x$$

Outro vector próprio (não colinear com o anterior) é $(1, 2)$.

A matriz diagonal correspondente é $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Então, $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, pelo que $\det P = 6 - 4 = 2$.

Logo, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Ora,

$$\begin{aligned} e^{tB} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t & -e^t \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6e^t - 4 & -3e^t + 3 \\ 8e^t - 8 & -4e^t + 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3e^t - 2 & -\frac{3}{2}e^t + \frac{3}{2} \\ 4e^t - 4 & -2e^t + 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^t - 2 & -\frac{3}{2}e^t + \frac{3}{2} \\ 4e^t - 4 & -2e^t + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3Ae^t - 2A - \frac{3}{2}Be^t + \frac{3}{2}B \\ 4Ae^t - 4A - 2Be^t + 3B \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} 3A - 2A - \frac{3}{2}B + \frac{3}{2}B \\ 4A - 4A - 2B + 3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12e^t - 8 - 9e^t + 9 \\ 16e^t - 16 - 12e^t + 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^t + 1 \\ 4e^t + 2 \end{bmatrix}$$

Ou seja, $\begin{cases} x = 3e^t + 1 \\ y = 4e^t + 2 \end{cases}$.

Capítulo 15

Grupóides, Semigrupos e Grupos

Definição 464 Grupóide é um par ordenado (A, θ) , onde A é um conjunto não vazio e θ é uma operação binária definida em A , ou seja, θ é uma aplicação de A^2 em A .

Alguns exemplos de grupóides:

$$(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{N}, \times), (\mathbb{Z}, \times), (\mathbb{Q}, \times), (\mathbb{R}, \times), (\mathbb{C}, \times), (\mathbb{Z}, -), (\mathbb{Q}, -), (\mathbb{R}, -), (\mathbb{C}, -)$$

Definição 465 Um grupóide (A, θ) é comutativo se $x\theta y = y\theta x, \forall x, y \in A$.

Todos os grupóides acima apresentados são comutativos.

Alguns exemplos de grupóides não comutativos:

$$(\mathbb{Q}^+, \div), (\mathbb{R}^+, \div), \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}), \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

$\mathcal{M}_{n \times n}(X)$ representa o conjunto das matrizes com n linhas e n colunas e cujos elementos pertencem a X .

Definição 466 Um grupóide (A, θ) tem elemento neutro se existir um elemento $u \in A$, que verifique as condições $u\theta a = a\theta u = a, \forall a \in A$.

Exemplos de grupóides com elemento neutro:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{N}, \times), (\mathbb{Z}, \times), (\mathbb{Q}, \times), (\mathbb{R}, \times), (\mathbb{C}, \times), \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

Exemplos de grupóides sem elemento neutro:

$$(\mathbb{Q}^+, \div), (\mathbb{R}^+, \div), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div), (2\mathbb{Z}, \times), (2\mathbb{N}, +)$$

Definição 467 Seja (A, θ) um grupóide e seja B um subconjunto não vazio de A . Diz-se que (B, θ) é um subgrupóide de (A, θ) , se $b_1\theta b_2 \in B, \forall b_1, b_2 \in B$, isto é, se o conjunto B é fechado para a operação θ .

O conjunto dos números naturais pares é fechado para a adição, pelo que $(2\mathbb{N}, +)$ é um subgrupóide de $(\mathbb{N}, +)$.

O conjunto dos números naturais ímpares é fechado para a multiplicação, pelo que $(1 + 2\mathbb{N}, \times)$ é um subgrupóide de (\mathbb{N}, \times) .

Definição 468 Sejam (A, θ) e (B, φ) dois grupóides e f uma aplicação de A em B . Diz-se que f é um isomorfismo de (A, θ) em (B, φ) , se f é bijectiva e satisfaz a condição $f(x\theta y) = f(x)\varphi f(y), \forall x, y \in A$. Diz-se que (A, θ) é isomorfo a (B, φ) , se existir um isomorfismo de (A, θ) em (B, φ) .

Proposição 469 Sejam (A, θ) e (B, φ) dois grupóides tais que f é um isomorfismo de (A, θ) em (B, φ) . Então, f^{-1} é um isomorfismo de (B, φ) em (A, θ) .

Prova. Sejam $b_1, b_2 \in B$. Como f é sobrejectiva, existem $a_1, a_2 \in A$, tais que $b_1 = f(a_1)$ e $b_2 = f(a_2)$. Como f é injectiva, a_1 e a_2 são únicos.

$$\text{Então, } f^{-1}(b_1\varphi b_2) = f^{-1}(f(a_1)\varphi f(a_2)) = f^{-1}(f(a_1\theta a_2)) = a_1\theta a_2 = f^{-1}(b_1)\theta f^{-1}(b_2).$$

É claro que f^{-1} é uma aplicação bijectiva de B em A , o que termina a demonstração. ■

Proposição 470 *Sejam (A, θ) e (B, φ) dois grupóides tais que f é um isomorfismo de (A, θ) em (B, φ) e u é elemento neutro de (A, θ) . Então, $f(u)$ é elemento neutro de (B, φ) .*

Prova. Seja $b \in B$. Então, existe $a \in A$, tal que $b = f(a)$. Logo, $b\varphi f(u) = f(a)\varphi f(u) = f(a\theta u) = f(a) = b$. Analogamente, $f(u)\varphi b = f(u)\varphi f(a) = f(u\theta a) = f(a) = b$. ■

Proposição 471 *O elemento neutro dum grupóide, se existir, é único.*

Prova. Sejam $u, v \in A$ dois elementos neutros do grupóide (A, θ) . Então, $u = u\theta v$, porque v é elemento neutro. Mas, $u\theta v = v$, porque u é elemento neutro. Então, $u = v$. ■

Proposição 472 *Sejam (A, θ) e (B, φ) dois grupóides tais que f é um isomorfismo de (A, θ) em (B, φ) e (A, θ) é comutativo. Então, (B, φ) é um grupóide comutativo.*

Prova. Sejam $b_1, b_2 \in B$. Então, existem $a_1, a_2 \in A$, tais que $b_1 = f(a_1)$ e $b_2 = f(a_2)$.

Logo, $b_1\varphi b_2 = f(a_1)\varphi f(a_2) = f(a_1\theta a_2) = f(a_2\theta a_1) = f(a_2)\varphi f(a_1) = b_2\varphi b_1$. ■

Definição 473 *Semigrupo é um grupóide (A, θ) em que a operação θ verifica a propriedade associativa, isto é, $(x\theta y)\theta z = x\theta(y\theta z)$, $\forall x, y, z \in A$.*

Exemplos de semigrupos:

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{N}, \times), (\mathbb{Z}, \times), (\mathbb{Q}, \times), (\mathbb{R}, \times), (\mathbb{C}, \times), \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

Exemplos de grupóides não associativos:

$$(\mathbb{Q}^+, \div), (\mathbb{R}^+, \div), (\mathbb{Z}, -), (\mathbb{Q}, -), (\mathbb{R}, -), (\mathbb{C}, -)$$

Proposição 474 *Sejam (A, θ) e (B, φ) dois grupóides tais que f é um isomorfismo de (A, θ) em (B, φ) e (A, θ) é semigrupo. Então, (B, φ) também é semigrupo.*

Prova. Sejam $b_1, b_2, b_3 \in B$. Então, existem $a_1, a_2, a_3 \in A$, tais que $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$ e $b_3 = f(a_3)$. Então,

$$\begin{aligned} (b_1\varphi b_2)\varphi b_3 &= (f(a_1)\varphi f(a_2))\varphi f(a_3) = f(a_1\theta a_2)\varphi f(a_3) = f((a_1\theta a_2)\theta a_3) = f(a_1\theta(a_2\theta a_3)) \\ &= f(a_1)\varphi f(a_2\theta a_3) = b_1\varphi(f(a_2)\varphi f(a_3)) = b_1\varphi(b_2\varphi b_3) \end{aligned}$$

Está, assim, terminada a demonstração. ■

Proposição 475 *Sejam (A, θ) , (B, φ) e (C, ψ) três grupóides tais que existe um isomorfismo f de (A, θ) em (B, φ) e um isomorfismo g de (B, φ) em (C, ψ) . Então, existe um isomorfismo de (A, θ) em (C, ψ) .*

Prova. Consideremos a aplicação $g \circ f$, de A em C . Sejam $a_1, a_2 \in A$, tais que $a_1 \neq a_2$. Então, $f(a_1) \neq f(a_2)$, pois f é injectiva. Logo, $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$, pois g é injectiva. Então, $g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$, donde se conclui que $g \circ f$ é injectiva.

Seja $c \in C$. Então, existe $b \in B$, tal que $g(b) = c$, uma vez que g é sobrejectiva. Mas, como f é injectiva, existe $a \in A$, tal que $f(a) = b$. Então, $c = g(b) = g(f(a)) = g \circ f(a)$. Então, $g \circ f$ é uma aplicação bijectiva de A em B .

Sejam $a_1, a_2 \in A$. Então,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a_1\theta a_2) &= g(f(a_1\theta a_2)) = g(f(a_1)\varphi f(a_2)) = g(f(a_1))\psi g(f(a_2)) \\ &= (g \circ f)(a_1)\psi (g \circ f)(a_2) \end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é um isomorfismo de (A, θ) em (C, ψ) . ■

Proposição 476 *Seja (A, θ) um grupóide. Então, a aplicação I_A , de A em A , definida por $I_A(a) = a, \forall a \in A$, é um isomorfismo.*

Prova. Dado $a \in A$, temos que $a = I_A(a)$, pelo que I_A é sobrejectiva. Por outro lado, sejam $a_1, a_2 \in A$, tais que $a_1 \neq a_2$. Então, $I_A(a_1) \neq I_A(a_2)$, pelo que I_A é injectiva. Então, I_A é uma aplicação bijectiva de A em A .

E, finalmente, temos $I_A(a_1 \theta a_2) = a_1 \theta a_2 = (I_A(a_1)) \theta (I_A(a_2))$, o que termina a demonstração. ■

Proposição 477 *A relação de isomorfia entre grupóides é uma relação de equivalência.*

Prova. Relação de isomorfia significa "ser isomorfo a". Relação de equivalência é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Seja (A, θ) um grupóide. Então, (A, θ) é isomorfo a si próprio, pois a aplicação identidade (I_A) é um isomorfismo de (A, θ) em (A, θ) . Logo, a relação de isomorfia é reflexiva.

Sejam (A, θ) e (B, φ) dois grupóides tais que (A, θ) é isomorfo a (B, φ) . Então, existe um isomorfismo f , de (A, θ) em (B, φ) . Então, f^{-1} é um isomorfismo de (B, φ) em (A, θ) . Logo, (B, φ) é isomorfo a (A, θ) . Logo, a relação de isomorfia é simétrica.

Sejam (A, θ) , (B, φ) e (C, ψ) três grupóides tais que (A, θ) é isomorfo a (B, φ) e (B, φ) é isomorfo a (C, ψ) . Então, existe um isomorfismo f de (A, θ) em (B, φ) e um isomorfismo g de (B, φ) em (C, ψ) . Então, $g \circ f$ é um isomorfismo de (A, θ) em (C, ψ) , pelo que (A, θ) é isomorfo a (C, ψ) . Logo, a relação de isomorfia é transitiva.

Então, a relação de isomorfia (entre grupóides) é uma relação de equivalência. ■

Exemplo 478 *Consideremos o conjunto \mathbb{R} e a operação binária θ , definida por $x\theta y = x + y + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Vejamos algumas propriedades da operação θ :*

Em primeiro lugar, se $x, y \in \mathbb{R}$, então $x + y + 3 \in \mathbb{R}$, tendo-se que, fixando x e y , o resultado de $x + y + 3$ é único. O conjunto \mathbb{R} é fechado para a operação θ . Ora, $y\theta x = y + x + 3 = x + y + 3 = x\theta y, \forall x, y \in \mathbb{R}$, pelo que (\mathbb{R}, θ) é um grupóide comutativo.

Por outro lado, temos $\begin{cases} (x\theta y)\theta z = (x + y + 3)\theta z = (x + y + 3) + z + 3 = x + y + z + 6 \\ x\theta (y\theta z) = x\theta (y + z + 3) = x + (y + z + 3) + 3 = x + y + z + 6 \end{cases}$.

Então, $(x\theta y)\theta z = x\theta (y\theta z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, pelo que a operação θ é associativa, ou seja, o grupóide (\mathbb{R}, θ) é semigrupo, o qual já vimos que é comutativo.

Haverá elemento neutro para a operação θ ? Suponhamos que $x\theta u = x = u\theta x, \forall x \in \mathbb{R}$. Como a operação θ é comutativa, basta-nos considerar a equação $x\theta u = x$. Ora,

$$x\theta u = x \iff x + u + 3 = x \iff u = -3$$

Então, -3 é elemento neutro para a operação θ .

Vamos resolver a equação $x\theta y = -3$, em ordem a y :

$$x\theta y = -3 \iff x + y + 3 = -3 \iff y = -x - 6$$

Então, $x\theta(-x - 6) = x\theta(-x - 6) = -3, \forall x \in \mathbb{R}$. As duas igualdades anteriores significam que $-x - 6$ é o oposto de x , para a operação θ . Podemos também afirmar que todo o elemento $x \in \mathbb{R}$ tem oposto (em \mathbb{R}) para a operação θ . Tal significa que todos os elementos de \mathbb{R} são regulares (para a operação θ).

Definição 479 *Seja (A, θ) um grupóide com elemento neutro u . Um elemento $a \in A$ tem oposto para a operação θ , se existir um elemento $x \in A$, tal que $x\theta a = u \wedge a\theta x = u$. Um elemento regular é um elemento (de A) que tem oposto para a operação θ .*

Definição 480 *Grupo é um semigrupo com elemento neutro em que todos os elementos são regulares.*

Exemplo 481 *O grupóide (\mathbb{R}, θ) , acima referido, em que $x\theta y = x + y + 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$, é um grupo comutativo.*

Exemplo 482 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$ são grupos comutativos. O conjunto das aplicações bijectivas de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3\}$, algebrizado com a operação composição de aplicações, é um grupo não comutativo.

Observação 483 *A operação composição de aplicações é associativa.*

Observação 484 *Num grupo, podemos considerar três operações: uma operação binária que é a operação que define o grupóide, uma operação nulária que consiste na fixação dum elemento com propriedades particulares (o elemento neutro) e uma operação unária que consiste em fazer corresponder a cada elemento do grupo o seu oposto.*

Observação 485 Muitas vezes, ao falarmos dum grupo comutativo, em abstracto, utilizamos a linguagem aditiva. Assim, referimo-nos, por exemplo, ao grupo $(G, +)$ de elemento neutro 0 (ou 0_G , se quisermos evitar confusões com o número real zero) e em que o oposto de x é $-x$. Convém referir que o sinal $+$ utilizado em $(G, +)$ pode não ter nada a ver com o sinal usual de adição de números reais. Quando utilizamos a linguagem aditiva a expressão $x + x$ costuma ser substituída por $2x$. Assim, teremos, por exemplo, $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$, onde o sinal $+$ de $2 + 3$ é o sinal de adição em \mathbb{N} e o sinal $+$ de $2x + 3x$ é um sinal duma operação abstracta (tal operação é uma aplicação de G^2 em G que possui propriedades especiais). Não é costume usar a linguagem aditiva num grupo não comutativo. Outras vezes, utiliza-se a linguagem multiplicativa, escrevendo-se (G, \times) ou (G, \cdot) . É costume escrever $x \times y$ ou $x \cdot y$ ou xy . As expressões $x \times x$ e $x \cdot x$ são substituídas, em geral, por x^2 . Além disso, temos, por exemplo, $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$. É claro que o sinal \times , de (G, \times) , representa uma operação abstracta e não, obrigatoriamente, a multiplicação usual de números reais (ou complexos). O oposto de x , quando se usa a linguagem multiplicativa, é representado por x^{-1} .

Exemplo 486 Analisemos, com detalhe, o exemplo, acima referido, das aplicações bijectivas de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3\}$:

Há seis aplicações bijectivas de $\{1, 2, 3\}$ em $\{1, 2, 3\}$, cada uma das quais pode ser definida por uma tabela:

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ f_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

É imediato concluir que f_1 é a aplicação identidade (elemento neutro para a composição de aplicações). Além disso, temos

$$f_1^{-1} = f_1, f_2^{-1} = f_2, f_3^{-1} = f_3, f_6^{-1} = f_6, f_4^{-1} = f_5, f_5^{-1} = f_4$$

A operação composição pode ser definida pela seguinte tabela de dupla entrada:

| \circ | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f_1 | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 |
| f_2 | f_2 | f_1 | f_5 | f_6 | f_3 | f_4 |
| f_3 | f_3 | f_4 | f_1 | f_2 | f_6 | f_5 |
| f_4 | f_4 | f_3 | f_6 | f_5 | f_1 | f_2 |
| f_5 | f_5 | f_6 | f_2 | f_1 | f_4 | f_3 |
| f_6 | f_6 | f_5 | f_4 | f_3 | f_2 | f_1 |

Alguns casos da tabela:

$$f_2 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_5$$

$$f_2 \circ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_6$$

$$f_2 \circ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = f_3$$

$$f_3 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_4$$

$$f_3 \circ f_4 = f_3 \circ f_3 \circ f_2 = f_2$$

$$f_4 \circ f_2 = f_3 \circ f_2 \circ f_2 = f_3, \dots$$

O grupo referido neste exemplo é conhecido por grupo simétrico e é representado por S_3 , uma vez que o conjunto inicial tem 3 elementos. No caso geral, teremos S_n que é um grupo com $n!$ elementos (os quais são aplicações bijectivas de $\{1, 2, \dots, n\}$ em $\{1, 2, \dots, n\}$). Para $n \geq 3$, S_n não é comutativo.

Proposição 487 Sejam (A, θ) um semigrupo com elemento neutro u e $a \in A$. Então, o oposto de a , se existir, é único.

Prova. Sejam a' e a'' dois opostos de a . Então

$$a'' = a''\theta u = a''\theta(a\theta a') = (a''\theta a)\theta a' = u\theta a' = a'$$

Está, assim, terminada a demonstração. ■

Exercício 488 Seja θ a operação binária definida em \mathbb{R} por $x\theta y = x + y - xy$. Mostre que (\mathbb{R}, θ) é um semigrupo comutativo com elemento neutro e que apenas um elemento não tem oposto para a operação θ .

Resolução

(\mathbb{R}, θ) é grupóide, porque, fixando x e y , o valor de $x + y - xy$ é único. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (x\theta y)\theta z = (x + y - xy)\theta z = x + y - xy + z - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz \\ x\theta(y\theta z) = x\theta(y + z - yz) = x + y + z - yz - x(y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz \\ \quad = x + y + z - xy - xz - yz + xyz \end{cases}$$

Logo, (\mathbb{R}, θ) é semigrupo, porque $(x\theta y)\theta z = x\theta(y\theta z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ora, $x\theta y = x + y - xy = y + x - yx = y\theta x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Logo, (\mathbb{R}, θ) é semigrupo comutativo.

Determinação do elemento neutro:

$$x\theta u = x \iff x + u - xu = x \iff u - xu = 0 \iff u(1 - x) = 0 \iff u = 0 \vee x = 1$$

Como podemos verificar, $x\theta 0 = x + 0 - 0 = x = 0\theta x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que o elemento neutro é zero.

Além disso, temos que $1\theta x = 1 + x - x = 1 = x\theta 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. O elemento 1 é chamado elemento absorvente.

Determinação do oposto de x :

$$x\theta y = 0 \iff x + y - xy = 0 \iff y - xy = -x \iff y(1 - x) = -x$$

Logo, $y = \frac{x}{x-1}$, desde que $x \neq 1$. Então, o oposto de x é $\frac{x}{x-1}$, sendo que 1 não admite oposto.

Então, (\mathbb{R}, θ) não é grupo. E se considerarmos o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, em vez de \mathbb{R} ?

Temos de provar que, se $x \neq 1 \wedge y \neq 1$, então $x + y - xy \neq 1$. Ora,

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ 1 - y \neq 0 \end{cases} \implies (x - 1)(1 - y) \neq 0 \implies x - xy - 1 + y \neq 0 \implies x + y - xy \neq 1$$

É claro que θ é comutativa e associativa, que zero é elemento neutro e que todo o elemento de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ é regular (tem oposto). Logo, $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \theta)$ é grupo comutativo.

Exemplo 489 Consideremos o conjunto \mathbb{R}^2 algebrizado com a operação \oplus definida por $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Vejamos que (\mathbb{R}^2, \oplus) é grupo comutativo:

Se $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, então $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in \mathbb{R}$, sendo o resultado único, uma vez fixados x_1, x_2, y_1, y_2 . Então, (\mathbb{R}^2, \oplus) é grupóide.

Ora,

$$\begin{cases} ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \oplus (z_1, z_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \oplus (z_1, z_2) = ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) \\ (x_1, x_2) \oplus ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)) = (x_1, x_2) \oplus (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) \end{cases}$$

Mas, a adição em \mathbb{R} é associativa, pelo que $(x_1 + y_1) + z_1 = x_1 + (y_1 + z_1)$ e $(x_2 + y_2) + z_2 = x_2 + (y_2 + z_2)$. Então,

$$((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)) \oplus (z_1, z_2) = (x_1, x_2) \oplus ((y_1, y_2) \oplus (z_1, z_2)), \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$$

Logo, (\mathbb{R}^2, \oplus) é semigrupo.

Quanto à comutatividade, temos

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = (y_1, y_2) \oplus (x_1, x_2), \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Logo, (\mathbb{R}^2, \oplus) é semigrupo comutativo.

Como $(x_1, x_2) \oplus (0, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) = (0, 0) \oplus (x_1, x_2) \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, concluímos que $(0, 0)$ é elemento neutro.

E, de $(x_1, x_2) \oplus (-x_1, -x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0, 0) = (-x_1, -x_2) \oplus (x_1, x_2)$, vem que todo o elemento de \mathbb{R}^2 é regular.

Então, (\mathbb{R}^2, \oplus) é grupo comutativo.

Observe-se que, habitualmente, escrevemos $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ em vez de $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2)$.

Exemplo 490 Vejamos o conhecido exemplo da "prova dos noves", através das tabelas para a adição e para a multiplicação:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 6 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 7 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 8 | 8 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 3 | 7 | 2 | 6 | 1 | 5 |
| 5 | 0 | 5 | 1 | 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 4 |
| 6 | 0 | 6 | 3 | 0 | 6 | 3 | 0 | 6 | 3 |
| 7 | 0 | 7 | 5 | 3 | 1 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 8 | 0 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

As operações acima definidas costumam ser chamadas de *adição, módulo 9* e de *multiplicação, módulo 9* e desempenham um papel muito importante em Matemática. É claro que em vez de 9, podemos ter outro número natural qualquer.

Definição 491 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Diz-se que $a \equiv b \pmod{m}$, se m divide $a - b$. Note-se que $a \equiv b \pmod{m}$ se lê " a é congruente com b , módulo m ".

Exercício 492 Mostre que a relação binária anterior é uma relação de equivalência.

Prova. A relação é reflexiva, porque $a \equiv a \pmod{m}$, $a \in \mathbb{Z}$, uma vez que m divide zero ($a - a = 0$).

Suponhamos que $a \equiv b \pmod{m}$. Então, existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $a - b = mq$. Então, $b - a = m(-q)$, donde vem que $b \equiv a \pmod{m}$. Então, a relação é simétrica.

Suponhamos, agora, que $a \equiv b \pmod{m} \wedge b \equiv c \pmod{m}$. Então, existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $a - b = mq_1$ e $b - c = mq_2$. Somando, membro a membro, temos $(a - b) + (b - c) = mq_1 + mq_2$.

Então, $a - c = mq_1 + mq_2 = m(q_1 + q_2)$, donde se conclui que $a \equiv c \pmod{m}$. Então, a relação é transitiva.

Logo, trata-se duma relação de equivalência. ■

Exercício 493 Prove que a relação $x \equiv y \pmod{m}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$, verifica as seguintes propriedades:

1. Se $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
2. Se $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$
3. Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

Prova.

1. Se $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m}$, então existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $a - b = mq_1$ e $c - d = mq_2$.

Então, $a = b + mq_1$ e $c = d + mq_2$. Então, $a + c = b + d + mq_1 + mq_2$.

Logo, $(a + c) - (b + d) = m(q_1 + q_2)$. Então, $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

2. Se $a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m}$, então existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, tais que $a - b = mq_1$ e $c - d = mq_2$.

Então, $a = b + mq_1$ e $c = d + mq_2$. Então, $ac = bd + bmq_2 + mq_1d + m^2q_1q_2$.

Logo, $ac - bd = m(bq_2 + q_1d + mq_1q_2)$. Então, $ac \equiv bd \pmod{m}$.

3. A demonstração faz-se por indução em n .

Em primeiro lugar, temos $a^0 \equiv b^0 \pmod{m}$.

Hipótese de indução: Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Tese: Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{m}$.

Suponhamos que $a \equiv b \pmod{m}$. Então, por hipótese, $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

E, aplicando a propriedade do número anterior, vem $a^n \times a \equiv b^n \times b \pmod{m}$.

Logo, $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \pmod{m}$, conforme se pretendia mostrar. ■

Relacionada com a relação anterior (relação de congruência), temos o importante exemplo de \mathbb{Z}_m .

A relação $x \equiv y \pmod{m}$ faz aparecer o chamado conjunto quociente que é o conjunto de todas as classes de equivalência.

Suponhamos que $m = 5$. Então, $[0] = \{z \in \mathbb{Z} : z \equiv 0 \pmod{m}\} = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \dots\} = 5\mathbb{Z} = 0 + 5\mathbb{Z}$.

Observe-se que $[0] = [5] = [10] = [-5] = [-10] = \dots$

Analogamente, temos

$$[1] = \{z \in \mathbb{Z} : z \equiv 1 \pmod{m}\} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, \dots\} = 1 + 5\mathbb{Z} = 6 + 5\mathbb{Z} = \dots$$

$$[2] = \{z \in \mathbb{Z} : z \equiv 2 \pmod{m}\} = \{\dots, -8, -3, 2, 7, \dots\} = 2 + 5\mathbb{Z}$$

$$[3] = \{z \in \mathbb{Z} : z \equiv 3 \pmod{m}\} = \{\dots, -7, -2, 3, 8, \dots\} = 3 + 5\mathbb{Z}$$

$$[4] = \{z \in \mathbb{Z} : z \equiv 4 \pmod{m}\} = \{\dots, -6, -1, 4, 9, \dots\} = 4 + 5\mathbb{Z}$$

O conjunto quociente é $\{5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}$. Este conjunto é representado por \mathbb{Z}_5 .

No conjunto quociente podem definir-se as seguintes operações binárias, com $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} (a + 5\mathbb{Z}) \oplus (b + 5\mathbb{Z}) = (a + b) + 5\mathbb{Z} \\ (a + 5\mathbb{Z}) \otimes (b + 5\mathbb{Z}) = (ab) + 5\mathbb{Z} \end{cases}$$

Mas, quando trabalhamos com classes de equivalência, temos um problema que consiste em mostrar que o resultado não se altera, quando mudamos de "representante".

Suponhamos que $a + 5\mathbb{Z} = c + 5\mathbb{Z}$ e que $b + 5\mathbb{Z} = d + 5\mathbb{Z}$. Então, teremos $(c + 5\mathbb{Z}) \oplus (d + 5\mathbb{Z}) = (c + d) + 5\mathbb{Z}$. Para que a operação \oplus esteja bem definida devemos ter $(a + b) + 5\mathbb{Z} = (c + d) + 5\mathbb{Z}$. Ora, de $a + 5\mathbb{Z} = c + 5\mathbb{Z}$, vem que 5 divide $a - c$. De $b + 5\mathbb{Z} = d + 5\mathbb{Z}$, vem que 5 divide $b - d$. Logo, 5 divide $a - c + b - d$, ou seja, 5 divide $(a + b) - (c + d)$. Logo, $a + b \equiv c + d \pmod{5}$, pelo que $(a + b) + 5\mathbb{Z} = (c + d) + 5\mathbb{Z}$.

Analogamente, temos $(a + 5\mathbb{Z}) \otimes (b + 5\mathbb{Z}) = ab + 5\mathbb{Z}$ e $(c + 5\mathbb{Z}) \otimes (d + 5\mathbb{Z}) = cd + 5\mathbb{Z}$, pelo que devemos ter $ab + 5\mathbb{Z} = cd + 5\mathbb{Z}$.

Ora, de $a + 5\mathbb{Z} = c + 5\mathbb{Z}$, vem que $a \equiv c \pmod{5}$. E, de $b + 5\mathbb{Z} = d + 5\mathbb{Z}$, vem que $b \equiv d \pmod{5}$. Então, $ab \equiv cd \pmod{5}$.

Logo, $ab + 5\mathbb{Z} = cd + 5\mathbb{Z}$.

E, agora, podemos provar que (\mathbb{Z}_5, \oplus) é grupo comutativo:

De $(a + 5\mathbb{Z}) \oplus (b + 5\mathbb{Z}) = (a + b) + 5\mathbb{Z}$ vem que o resultado é único e pertence a \mathbb{Z}_5 . Então, $(\mathbb{Z}_5, +)$ é grupóide.

Como $(b + 5\mathbb{Z}) \oplus (a + 5\mathbb{Z}) = (b + a) + 5\mathbb{Z} = (a + b) + 5\mathbb{Z} = (a + 5\mathbb{Z}) \oplus (b + 5\mathbb{Z})$, então $(\mathbb{Z}_5, +)$ é grupóide comutativo.

Ora,

$$\begin{aligned} ((a + 5\mathbb{Z}) \oplus (b + 5\mathbb{Z})) \oplus (c + 5\mathbb{Z}) &= ((a + b) + 5\mathbb{Z}) \oplus (c + 5\mathbb{Z}) = ((a + b) + c) + 5\mathbb{Z} \\ &= (a + (b + c)) + 5\mathbb{Z} = (a + 5\mathbb{Z}) \oplus ((b + c) + 5\mathbb{Z}) \\ &= (a + 5\mathbb{Z}) \oplus ((b + 5\mathbb{Z}) \oplus (c + 5\mathbb{Z})), \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo, (\mathbb{Z}_5, \oplus) é semigrupo comutativo. Mas, $(a + 5\mathbb{Z}) \oplus (0 + 5\mathbb{Z}) = (a + 0) + 5\mathbb{Z} = a + 5\mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Z}$. Como a operação \oplus é comutativa, então $0 + 5\mathbb{Z}$ é elemento neutro. É claro que o oposto de $a + 5\mathbb{Z}$ é $(-a) + 5\mathbb{Z}$.

Então, (\mathbb{Z}_5, \oplus) é grupo comutativo.

Vejamos, agora, a operação \otimes :

De $(a + 5\mathbb{Z}) \otimes (b + 5\mathbb{Z}) = ab + 5\mathbb{Z}$ vem que o resultado é único e pertence a \mathbb{Z}_5 . Então, $(\mathbb{Z}_5, +)$ é grupóide. Mas,

$$((a + 5\mathbb{Z}) \otimes (b + 5\mathbb{Z})) = ab + 5\mathbb{Z} = ba + 5\mathbb{Z} = (b + 5\mathbb{Z}) \otimes (a + 5\mathbb{Z}), \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Então, (\mathbb{Z}_5, \otimes) é grupóide comutativo. Ora,

$$\begin{aligned} ((a + 5\mathbb{Z}) \otimes (b + 5\mathbb{Z})) \otimes (c + 5\mathbb{Z}) &= (ab + 5\mathbb{Z}) \otimes (c + 5\mathbb{Z}) = (ab)c + 5\mathbb{Z} \\ &= a(bc) + 5\mathbb{Z} = (a + 5\mathbb{Z}) \otimes ((bc) + 5\mathbb{Z}) \\ &= (a + 5\mathbb{Z}) \otimes ((b + 5\mathbb{Z}) \otimes (c + 5\mathbb{Z})), \forall a, b, c \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo, (\mathbb{Z}_5, \otimes) é semigrupo comutativo.

Mas, $(a + 5\mathbb{Z}) \otimes (1 + 5\mathbb{Z}) = (a \times 1) + 5\mathbb{Z} = a + 5\mathbb{Z} = (1 + 5\mathbb{Z}) \otimes (a + 5\mathbb{Z}), \forall a \in \mathbb{Z}$. Então, (\mathbb{Z}_5, \otimes) tem elemento neutro.

Tabelas da adição e multiplicação em \mathbb{Z}_5 :

| \oplus | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [4] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [4] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [4] | [0] | [1] | [2] |
| [4] | [4] | [0] | [1] | [2] | [3] |

| \otimes | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] |
| [1] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [2] | [0] | [2] | [4] | [1] | [3] |
| [3] | [0] | [3] | [1] | [4] | [2] |
| [4] | [0] | [4] | [3] | [2] | [1] |

Como podemos verificar pela tabela, existe elemento absorvente para a multiplicação, que é [0]; além disso, os restantes quatro elementos têm oposto para a multiplicação.

Registe-se que as duas tabelas anteriores costumam ser simplificadas do seguinte modo:

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| \times | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Proposição 494 Num grupo, são válidas as leis do corte à esquerda e à direita.

Prova. Suponhamos que (A, θ) é grupo de elemento neutro u e que $a\theta b = a\theta c$, com $a, b, c \in A$. Seja a' o oposto de a , para θ .

Então, $a'\theta(a\theta b) = a'\theta(a\theta c)$, pelo que $(a'\theta a)\theta b = (a'\theta a)\theta c$. Então, $u\theta b = u\theta c$. Logo, $b = c$.

Se $x\theta a = y\theta a$, então $(x\theta a)\theta a' = (y\theta a)\theta a'$, pelo que $x\theta(a\theta a') = y\theta(a\theta a')$. Logo, $x = y$. ■

Proposição 495 Num grupo, existe um único elemento idempotente, que é o elemento neutro. Note-se que x é idempotente para θ , se $x\theta x = x$.

Prova. Suponhamos que (A, θ) é grupo de elemento neutro u . É claro que $u\theta u = u$, pelo que u é idempotente.

Suponhamos que $x\theta x = x$. Então, $x\theta x = x\theta u$. E, aplicando a lei do corte à esquerda, temos $x = u$. ■

Capítulo 16

Anéis e Corpos

Definição 496 Anel é um terno ordenado (A, θ, φ) , tal que (A, θ) é grupo comutativo, (A, φ) é semigrupo e, além disso, a operação φ é distributiva em relação a θ , à esquerda e à direita, isto é, $\left\{ \begin{array}{l} a\varphi(b\theta c) = (a\varphi b)\theta(a\varphi c) \\ (b\theta c)\varphi a = (b\varphi a)\theta(c\varphi a) \end{array} \right.$.

Um Anel (A, θ, φ) é comutativo, se (A, φ) é semigrupo comutativo. Registe-se que zero do Anel (A, θ, φ) é o elemento neutro do grupo (A, θ) .

A definição anterior permite a existência de Anéis com um único elemento (Anéis triviais).

Exemplo 497 $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$ é Anel comutativo, porque, além das propriedades já verificadas no Capítulo anterior, verifica-se a propriedade distributiva de \otimes , em relação a \oplus :

$$\begin{aligned}(a + 5\mathbb{Z}) \otimes ((b + 5\mathbb{Z}) \oplus (c + 5\mathbb{Z})) &= (a + 5\mathbb{Z}) \otimes ((b + c) + 5\mathbb{Z}) = (a(b + c)) + 5\mathbb{Z} \\ &= (ab + ac) + 5\mathbb{Z} = (ab + 5\mathbb{Z}) \oplus (ac + 5\mathbb{Z}), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Como a operação \otimes é comutativa, nada mais há a mostrar.

Note-se que habitualmente escrevemos $(\mathbb{Z}_5, +, \times)$ em vez de $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$, conforme vimos em tabelas anteriores.

Definição 498 Corpo é um Anel comutativo (A, θ, φ) , com dois ou mais elementos, com elemento neutro para a operação φ e em que todo o elemento diferente do zero do Anel tem oposto para a operação φ .

Exemplo 499 $(\mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$ é Corpo, segundo tudo aquilo que já vimos. Em geral, $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \otimes)$ é Corpo se e só se m é primo. Se m é um número natural não primo, então $(\mathbb{Z}_m, \oplus, \otimes)$ é Anel, mas não é Corpo. Como exemplos de Corpos, temos $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ e $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Exercício 500 Considere, em \mathbb{R} , as operações definidas por $x\theta y = x + y - 1$ e $x\varphi y = x + y - xy$. Prove que $(\mathbb{R}, \theta, \varphi)$ é Corpo.

Prova. (\mathbb{R}, θ) é grupóide. Ora, $y\theta x = y + x - 1 = x + y - 1 = x\theta y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

De $\left\{ \begin{array}{l} (x\theta y)\theta z = (x + y - 1)\theta z = x + y - 1 + z - 1 = x + y + z - 2 \\ x\theta(y\theta z) = x\theta(y + z - 1) = x + y + z - 1 - 1 = x + y + z - 2 \end{array} \right.$ vem $(x\theta y)\theta z = x\theta(y\theta z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Então, (\mathbb{R}, θ) é semigrupo comutativo.

Ora, $x\theta u = x \Leftrightarrow x + u - 1 = x \Leftrightarrow u = 1$. Então, 1 é elemento neutro de (\mathbb{R}, θ) .

E, $x\theta y = 1 \Leftrightarrow x + y - 1 = 1 \Leftrightarrow y = 2 - x$. Como a operação θ é comutativa, podemos concluir que o oposto de x , para a operação θ , é $2 - x$, pelo que todo o elemento de \mathbb{R} tem oposto (para θ).

Então, (\mathbb{R}, θ) é grupo comutativo.

Vimos, no Capítulo anterior, que (\mathbb{R}, φ) é semigrupo com elemento neutro 0 (zero) e todo o elemento diferente de 1 tem oposto para a operação φ .

Ora,

$$\begin{aligned}x\varphi(y\theta z) &= x\varphi(y + z - 1) = x + y + z - 1 - x(y + z - 1) \\ &= x + y + z - 1 - xy - xz + x = 2x + y + z - xy - xz - 1\end{aligned}$$

E, por outro lado

$$\begin{aligned}(x\varphi y)\theta(x\varphi z) &= (x+y-xy)\theta(x+z-xz) = (x+y-xy) + (x+z-xz) - 1 \\ &= 2x+y+z-xy-xz-1\end{aligned}$$

Então, $x\varphi(y\theta z) = (x\varphi y)\theta(x\varphi z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. E, como a operação φ é comutativa, temos que φ é distributiva em relação a θ .

Então, $(\mathbb{R}, \theta, \varphi)$ é Corpo. ■

Exercício 501 Considere o conjunto \mathbb{R}^2 , algebrizado com as operações \oplus e \otimes , assim definidas.

$$\begin{cases} (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \\ (a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd) \end{cases}$$

Exemplo 502 Mostre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ é Anel comutativo, mas não é Corpo.

Prova. É claro que (\mathbb{R}^2, \oplus) e (\mathbb{R}^2, \otimes) são grupóides.

Ora, $(c, d) \oplus (a, b) = (c + a, d + b) = (a + c, b + d) = (a, b) \oplus (c, d)$. Logo, a operação \oplus é comutativa. De

$$\begin{aligned}((a, b) \oplus (c, d)) \oplus (e, f) &= (a + c, b + d) \oplus (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) = (a, b) \oplus (c + e, d + f) \\ &= (a, b) \oplus ((c, d) \oplus (e, f))\end{aligned}$$

vem que a operação \oplus é associativa.

Mas, $(a, b) \oplus (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$. Então, devido à comutatividade, já podemos concluir que $(0, 0)$ é elemento neutro. E, de $(a, b) \oplus (-a, -b) = (0, 0) = (-a, -b) \oplus (a, b)$, concluimos que o oposto de (a, b) , para a operação \oplus , é $(-a, -b)$, pelo que todos os elementos de \mathbb{R}^2 são regulares.

Logo, (\mathbb{R}^2, \oplus) é grupo comutativo.

Quanto à operação \otimes , temos:

$$\begin{aligned}((a, b) \otimes (c, d)) \otimes (e, f) &= (ac, bd) \otimes (e, f) = ((ac)e, (bd)f) \\ &= (a(ce), b(df)) = (a, b) \otimes (ce, df) \\ &= (a, b) \otimes ((c, d) \otimes (e, f))\end{aligned}$$

Logo, a operação \otimes é associativa. E, quanto à comutatividade:

$$(c, d) \otimes (a, b) = (ca, db) = (ac, bd) = (a, b) \otimes (c, d)$$

Logo, (\mathbb{R}^2, \otimes) é semigrupo comutativo.

Distributividade:

$$\begin{aligned}(a, b) \otimes ((c, d) \oplus (e, f)) &= (a, b) \otimes (c + e, d + f) = (a(c + e), b(d + f)) \\ &= (ac + ae, bd + bf) = (ac, bd) \oplus (ae, bf) \\ &= ((a, b) \otimes (c, d)) \oplus ((a, b) \otimes (e, f))\end{aligned}$$

E, devido à comutatividade de \otimes , podemos concluir que a operação \otimes é distributiva em relação à operação \oplus .

Então, $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ é Anel comutativo.

É fácil verificar que $(a, b) \otimes (1, 1) = (1, 1) \otimes (a, b) = (a, b)$. Então, $(1, 1)$ é o elemento neutro da operação \otimes .

Logo, $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ é Anel comutativo com elemento identidade.

Outro facto é o seguinte: O oposto de (a, b) , para a operação \otimes , é $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$, com $a \neq 0 \wedge b \neq 0$. Então, os elementos da forma $(a, 0)$ e os elementos da forma $(0, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, não têm inverso, pelo que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ não é Corpo.

Observe-se que $(a, 0) \otimes (0, b) = (0, 0)$. Os elementos da forma $(a, 0)$, com $a \neq 0$ e os elementos da forma $(0, b)$, com $a \neq 0$ são chamados de divisores de zero. ■

Exercício 503 Considere o conjunto \mathbb{R}^2 , algebrizado com as operações \oplus e \otimes , assim definidas.

$$\begin{cases} (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \\ (a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \end{cases}$$

Exemplo 504 Mostre que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ é Corpo.

Prova. Vimos, no exercício anterior, que (\mathbb{R}^2, \oplus) é grupo comutativo.

É claro que (\mathbb{R}^2, \otimes) é grupóide. Ora,

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = (c, d) \otimes (a, b)$$

Então, (\mathbb{R}^2, \otimes) é grupóide comutativo.

Associatividade:

$$\begin{aligned} ((a, b) \otimes (c, d)) \otimes (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) \otimes (e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} (a, b) \otimes ((c, d) \otimes (e, f)) &= (a, b) \otimes (ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \end{aligned}$$

Então, $((a, b) \otimes (c, d)) \otimes (e, f) = (a, b) \otimes ((c, d) \otimes (e, f))$, o que prova a associatividade.

Logo, (\mathbb{R}^2, \otimes) é semigrupo comutativo.

$$\begin{aligned} (a, b) \otimes (u, v) = (a, b) &\implies (au - bv, av + bu) = (a, b) \\ &\implies \begin{cases} au - bv = a \\ av + bu = b \end{cases} \implies \begin{cases} a^2u - abv = a^2 \\ b^2u + abv = b^2 \end{cases} \\ &\implies a^2u + b^2u = a^2 + b^2 \implies (a^2 + b^2)u = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Se $a^2 + b^2 \neq 0$, então $u = 1$.

De forma semelhante se descobria que $v = 0$.

Ora, $(a, b) \otimes (1, 0) = (a \times 1 - b \times 0, a \times 0 + b \times 1) = (a, b)$ e $(1, 0) \otimes (a, b) = (a, b)$, pelo que $(1, 0)$ é o elemento neutro de (\mathbb{R}^2, \otimes) .

Se quisermos descobrir os elementos invertíveis de (\mathbb{R}^2, \otimes) , temos:

$$\begin{aligned} (a, b) \otimes (x, y) = (1, 0) &\implies (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \implies \begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} a^2x - aby = a \\ b^2x + aby = 0 \\ abx - b^2y = b \\ -abx - a^2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (a^2 + b^2)x = a \\ (a^2 + b^2)y = -b \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}, \text{ com } a^2 + b^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Então, o inverso de (a, b) é $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$, com $a^2 + b^2 \neq 0$. Recordamos que a operação \otimes é comutativa.

Logo, $(0, 0)$ é o único elemento de \mathbb{R}^2 que não é invertível.

Distributividade de \otimes em relação a \oplus :

$$\begin{aligned}
 (a, b) \otimes ((c, d) \oplus (e, f)) &= (a, b) \otimes (c + e, d + f) \\
 &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\
 &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) \oplus (ae - bf, af + be) \\
 &= ((a, b) \otimes (c, d)) \oplus ((a, b) \otimes (e, f)) \\
 &= (a, b) \otimes (c, d) \oplus (a, b) \otimes (e, f)
 \end{aligned}$$

Como a operação \otimes é comutativa, podemos concluir que a operação \otimes é distributiva em relação à operação \oplus .

Então, está provado que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ é Corpo. ■

Observação 505 O Corpo do exercício anterior é isomorfo ao Corpo $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Exemplo 506 Considere o conjunto $Q = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ algebrizado com as operações \oplus e \otimes definidas por:

$$\begin{aligned}
 (a + bi + cj + dk) \oplus (A + Bi + Cj + Dk) &= (a + A) + (b + B)i + (c + C)j + (d + D)k \\
 (a + bi + cj + dk) \otimes (A + Bi + Cj + Dk) &= X + Yi + Zj + Wk, \text{ com } \begin{cases} X = aA - bB - cC - dD \\ Y = aB + bA + cD - dC \\ Z = aC + cA + dB - bD \\ W = aD + dA + bC - cB \end{cases}
 \end{aligned}$$

Este exemplo, embora muito trabalhoso, é muito interessante, pois trata-se dum Anel não comutativo, em que existe elemento neutro para a operação \oplus (que é chamado identidade do Anel) e em que o zero do Anel é o único elemento que não tem oposto para a operação \otimes .

Logo, a única propriedade que falha para que (Q, \oplus, \otimes) seja Corpo é a comutatividade da operação \otimes .

O Anel (Q, \oplus, \otimes) é conhecido por Anel dos quaterniões e, é claro, não tem nada a ver com o Anel $(\mathbb{Q}, +, \times)$ dos números racionais.

Uma maneira cómoda de trabalhar com produtos no Anel dos quaterniões consiste em aplicar a propriedade distributiva, como habitualmente, e aplicar a seguinte regra:

$$i \otimes j = k; j \otimes k = i; k \otimes i = j; j \otimes i = -k; k \otimes j = -i; i \otimes k = -j$$

Além disso, temos $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, conforme pode ser verificado, utilizando a definição da operação \otimes .

Habitualmente, utilizamos os sinais $+$ e \times , em vez de \oplus e \otimes . Note-se, ainda, que o Corpo dos números complexos, $(\mathbb{C}, +, \times)$, é um subanel de $(Q, +, \times)$. Digamos, que subanel dum Anel é uma parte do Anel que ainda é anel.

Vejamos como calcular $(1 + 2i + 2j + 3k) \otimes (4 + 3i + 5j + 2k)$, expressão esta que vamos substituir por E , por questões de falta de espaço:

$$\begin{aligned}
 E &= (1 + 2i + 2j + 3k) \otimes (4 + 3i + 5j + 2k) = (1 + 2i + 2j + 3k) \times (4 + 3i + 5j + 2k) \\
 &= (1 + 2i + 2j + 3k)(4 + 3i + 5j + 2k) \\
 &= 4 + 3i + 5j + 2k + 8i + 6i^2 + 10ij + 4ik + 8j + 6ji + 10j^2 + 4jk + 12k + 9ki + 15kj + 6k^2 \\
 &= 4 + 3i + 5j + 2k + 8i - 6 + 10ij - 4ki + 8j - 6ij - 10 + 4jk + 12k + 9ki - 15jk - 6 \\
 &= 4 - 6 - 10 - 6 + 3i + 8i + 5j + 2k + 10ij - 6ij - 4ki + 9ki + 8j + 4jk - 15jk + 12k \\
 &= -18 + 3i + 8i + 5j + 2k + 4ij + 5ki + 8j - 11jk + 12k \\
 &= -18 + 11i + 5j + 2k + 4k + 5j + 8j - 11i + 12k \\
 &= -18 + 0i + 18j + 18k = -18 + 18j + 18k
 \end{aligned}$$

Se quisermos, apenas, encontrar o valor final, podemos utilizar o EXCEL. Segue-se uma simulação:

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|-----------|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|
| 1 | 1º Factor | | | | 2º Factor | | | | Produto | | | |
| 2 | 1 | i | j | k | 1 | i | j | k | 1 | i | j | k |
| 3 | | | | | | | | | $= A_3 * E_3 - B_3 * F_3 - C_3 * G_3 - D_3 * H_3$ | | | |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 2 | -18 | 0 | 18 | 18 |

Na célula I3, está escrita a fórmula que nos dá o número que iremos multiplicar por 1. Ao copiarmos esta célula para I4, aparece o valor -18.

Se escrevermos as fórmulas correspondentes aos coeficientes de i , j e k , obteremos, à direita de -18, os valores 0, 18 e 18. Tal significa que $(1 + 2i + 2j + 3k) \otimes (4 + 3i + 5j + 2k) = -18 + 0i + 18j + 18k$.

É claro que não se apresentaram as restantes fórmulas por uma questão de falta espaço.

De modo análogo ao Corpo dos Complexos, podemos falar no conjugado e obter fórmulas interessantes, como, por exemplo, o conjugado do produto de dois factores é o produto dos conjugados desses factores, mas por ordem inversa. Registe-se que o conjugado de $a + bi + cj + dk$ (com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) é $a - bi - cj - dk$.

Outra maneira de obter os resultados é trabalhar com a seguinte função de 8 variáveis, sendo que as primeiras 4 variáveis correspondem ao primeiro factor e as últimas 4 correspondem ao segundo factor:

$$g(a, b, c, d, A, B, C, D) = (aA - bB - cC - dD, aB + bA + cD - dC, aC + cA + dB - bD, aD + dA + bC - cB)$$

$$g(1, 2, 2, 3, 4, 3, 5, 2) = (-18, 0, 18, 18)$$

$$g(4, -3, -5, -2, 1, -2, -2, -3) = (-18, 0, -18, -18)$$

$$g(4, 3, 5, 2, 1, 2, 2, 3) = (-18, 22, 8, 10)$$

$$g(1, -2, -2, -3, 4, -3, -5, -2) = (-18, -22, -8, -10)$$

$$g(a, b, c, d, a, -b, -c, -d) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, 0, 0, 0)$$

$$g(a, -b, -c, -d, a, b, c, d) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2, 0, 0, 0)$$

Convém referir de modo especial que, devido à não comutatividade da multiplicação, há dificuldades em definir a divisão.

Recordemos que dividir 8 por 2 consiste em encontrar o número que multiplicado por 2 dá 8. Tal número é 4, uma vez que $4 \times 2 = 2 \times 4 = 8$. Neste caso, não há problemas, porque a multiplicação é comutativa. Vejamos a situação no Anel dos Quaterniões:

$$\begin{cases} (1 + 2i + 2j + 3k) \otimes (4 + 3i + 5j + 2k) = -18 + 0i + 18j + 18k \\ (4 + 3i + 5j + 2k) \otimes (1 + 2i + 2j + 3k) = -18 + 22i - 8j - 10k \end{cases}$$

Qual será o quociente de $-18 + 0i + 18j + 18k$ por $1 + 2i + 2j + 3k$? Teria de ser "algo" que multiplicado por $1 + 2i + 2j + 3k$ desse $-18 + 0i + 18j + 18k$. Mas, multiplicado como? À esquerda? Ou à direita?

Começemos por verificar como calcular o inverso de $a + bi + cj + dk$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + bi + cj + dk} &= \frac{a - bi - cj - dk}{(a + bi + cj + dk) \otimes (a - bi - cj - dk)} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} - \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}i - \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}j - \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}k \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} &g\left(a, b, c, d, \frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right) = \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} + \frac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, 0, 0, 0\right) = (1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

E,

$$g\left(\frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, a, b, c, d\right) = (1, 0, 0, 0)$$

Observe-se que $(a + bi + cj + dk) \otimes (a - bi - cj - dk) = (a - bi - cj - dk) \otimes (a + bi + cj + dk)$, pelo que faz sentido escrever $\frac{1}{a + bi + cj + dk} = \frac{a - bi - cj - dk}{(a + bi + cj + dk) \otimes (a - bi - cj - dk)}$.

Neste caso, não há perigo em escrever $\frac{1}{a + bi + cj + dk}$, embora seja mais razoável escrever $(a + bi + cj + dk)^{-1}$.

No caso geral, fala-se em quociente à esquerda e quociente à direita. Assim, $\alpha\beta^{-1}$ é o quociente de α por β à direita e $\beta^{-1}\alpha$ é o quociente de α por β à esquerda. Em Anéis em que a multiplicação é comutativa, os dois quocientes coincidem.

Convém registrar que o Anel dos quaterniões contém três subanéis isomorfos ao Anel (e Corpo) dos complexos.

Exemplo 507 Vejamos as tabelas relativas à adição e à multiplicação em \mathbb{Z}_{12} :

| \oplus | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [0] | [1] | [2] |
| [4] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [0] | [1] | [2] | [3] |
| [5] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] |
| [6] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] |
| [7] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] |
| [8] | [8] | [9] | [10] | [11] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] |
| [9] | [9] | [10] | [11] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] |
| [10] | [10] | [11] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] |
| [11] | [11] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] |

| \otimes | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] |
|-----------|-----|------|------|-----|-----|------|-----|------|-----|-----|------|------|
| [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] | [0] |
| [1] | [0] | [1] | [2] | [3] | [4] | [5] | [6] | [7] | [8] | [9] | [10] | [11] |
| [2] | [0] | [2] | [4] | [6] | [8] | [10] | [0] | [2] | [4] | [6] | [8] | [10] |
| [3] | [0] | [3] | [6] | [9] | [0] | [3] | [6] | [9] | [0] | [3] | [6] | [9] |
| [4] | [0] | [4] | [8] | [0] | [4] | [8] | [0] | [4] | [8] | [0] | [4] | [8] |
| [5] | [0] | [5] | [10] | [3] | [8] | [1] | [6] | [11] | [4] | [9] | [2] | [7] |
| [6] | [0] | [6] | [0] | [6] | [0] | [6] | [0] | [6] | [0] | [6] | [0] | [6] |
| [7] | [0] | [7] | [2] | [9] | [4] | [11] | [6] | [1] | [8] | [3] | [10] | [5] |
| [8] | [0] | [8] | [4] | [0] | [8] | [4] | [0] | [8] | [4] | [0] | [8] | [4] |
| [9] | [0] | [9] | [6] | [3] | [0] | [9] | [6] | [3] | [0] | [9] | [6] | [3] |
| [10] | [0] | [10] | [8] | [6] | [4] | [2] | [0] | [10] | [8] | [6] | [4] | [2] |
| [11] | [0] | [11] | [10] | [9] | [8] | [7] | [6] | [5] | [4] | [3] | [2] | [1] |

Os divisores de zero são [2], [3], [4], [6], [8], [9] e [10].

[1] é o elemento neutro da multiplicação, pelo que 1 é o elemento identidade do Anel.

Os elementos invertíveis (os que têm oposto para a multiplicação ou as unidades do Anel) são [1], [5], [7], e [11].

Repare-se que todos eles são inversos de si próprios, pelo que todos são solução da equação $x^2 = [1]$.

Capítulo 17

Espaços Vectoriais de Dimensão Finita

O que é um vector? Muitas vezes, ainda no Ensino Básico, diz-se que são segmentos de recta orientados. Convém abandonar a ideia, rapidamente. Vector é um elemento de determinado conjunto que até pode ser uma manada de elefantes...

Definição 508 *Espaço vectorial sobre um Corpo \mathbb{K} é um conjunto V , no qual se define uma operação binária interna $+$, tal que $(V, +)$ é grupo comutativo e uma operação binária externa que é uma aplicação de $\mathbb{K} \times V$ em V , a qual tem as seguintes propriedades:*

- P1) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$*
- P2) $1u = u, \forall u \in V$*
- P3) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V$*
- P4) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$*

Observação 509 *Note-se que o sinal da operação externa costuma omitir-se, escrevendo-se, apenas, αu , em vez de, por exemplo, $\alpha \cdot u$. O mesmo acontece com a multiplicação no Corpo \mathbb{K} , escrevendo-se $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \times \beta$. Assim, $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ podia escrever-se da seguinte forma: $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \times \beta)u$. Observe-se, também que há duas operações que estão a ser representadas pelo mesmo símbolo: a adição em \mathbb{K} e a adição em V . Note-se que os elementos do Espaço Vectorial são chamados vectores e que os elementos do Corpo são chamados escalares.*

Exemplo 510 *Se \mathbb{K} é um Corpo, então $\mathbb{K}, \mathbb{K}^2, \mathbb{K}^3, \dots$ são espaços vectoriais sobre \mathbb{K} . O conjunto \mathbb{C} (dos números complexos) é um espaço vectorial sobre \mathbb{R} . O conjunto dos polinómios em X , de grau menor ou igual a 3 e de coeficientes em \mathbb{R} , é um espaço vectorial sobre \mathbb{R} .*

Exercício 511 *Seja $\mathbb{R}_2[X]$, o conjunto dos polinómios em X , de coeficientes em \mathbb{R} e de grau menor ou igual a 2. Prove que $\mathbb{R}_2[X]$, com as operações usuais, é um espaço vectorial sobre \mathbb{R} .*

Prova. $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$. A adição de polinómios em $\mathbb{R}_2[X]$ e a multiplicação por um escalar são definidas por

$$\begin{aligned}(a_1X^2 + b_1X + c_1) + (a_2X^2 + b_2X + c_2) &= (a_1 + a_2)X^2 + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2) \\ \alpha(aX^2 + bX + c) &= (\alpha a)X^2 + (\alpha b)X + (\alpha c)\end{aligned}$$

É claro que $(\mathbb{R}_2[X], +)$ é grupóide, porque a soma de dois elementos de $\mathbb{R}_2[X]$ é um elemento de $\mathbb{R}_2[X]$ e tal elemento é único (supondo que se fixaram as parcelas).

Ora,

$$\begin{aligned}(a_2X^2 + b_2X + c_2) + (a_1X^2 + b_1X + c_1) &= (a_2 + a_1)X^2 + (b_2 + b_1)X + (c_2 + c_1) \\ &= (a_1 + a_2)X^2 + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2) \\ &= (a_1X^2 + b_1X + c_1) + (a_2X^2 + b_2X + c_2)\end{aligned}$$

Logo, $(\mathbb{R}_2[X], +)$ é grupóide comutativo.

Seja $P(x) = ((a_1X^2 + b_1X + c_1) + (a_2X^2 + b_2X + c_2)) + (a_3X^2 + b_3X + c_3)$, com $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, (i = 1, 2, 3)$.

Então,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= ((a_1X^2 + b_1X + c_1) + (a_2X^2 + b_2X + c_2)) + (a_3X^2 + b_3X + c_3) \\
 &= (a_1 + a_2)X^2 + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2) + (a_3X^2 + b_3X + c_3) \\
 &= ((a_1 + a_2) + a_3)X^2 + ((b_1 + b_2) + b_3)X + ((c_1 + c_2) + c_3) \\
 &= (a_1 + (a_2 + a_3))X^2 + (b_1 + (b_2 + b_3))X + (c_1 + (c_2 + c_3)) \\
 &= (a_1X^2 + b_1X + c_1) + ((a_2 + a_3)X^2 + (b_2 + b_3)X + (c_2 + c_3)) \\
 &= (a_1X^2 + b_1X + c_1) + ((a_2X^2 + b_2X + c_2) + (a_3X^2 + b_3X + c_3))
 \end{aligned}$$

Logo, $(\mathbb{R}_2[X], +)$ é semigrupo comutativo.

O elemento neutro de $(\mathbb{R}_2[X], +)$ é $0X^2 + 0X + 0$.

O simétrico de $aX^2 + bX + c$ é $-aX^2 - bX - c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Então, $(\mathbb{R}_2[X], +)$ é grupo comutativo. Quanto à multiplicação por um escalar, temos que, se $\alpha, a, b, c \in \mathbb{R}$, então $\alpha(aX^2 + bX + c) = (\alpha a)X^2 + (\alpha b)X + (\alpha c)$ que pertence a $\mathbb{R}_2[X]$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
 \alpha(\beta(aX^2 + bX + c)) &= \alpha((\beta a)X^2 + (\beta b)X + (\beta c)) \\
 &= (\alpha(\beta a))X^2 + (\alpha(\beta b))X + (\alpha(\beta c)) \\
 &= ((\alpha\beta)a)X^2 + ((\alpha\beta)b)X + ((\alpha\beta)c) \\
 &= (\alpha\beta)(aX^2 + bX + c)
 \end{aligned}$$

$$E, 1(aX^2 + bX + c) = (1a)X^2 + (1b)X + (1c) = aX^2 + bX + c.$$

Sejam $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta)(aX^2 + bX + c) &= ((\alpha + \beta)a)X^2 + ((\alpha + \beta)b)X + ((\alpha + \beta)c) \\
 &= (\alpha a + \beta a)X^2 + (\alpha b + \beta b)X + (\alpha c + \beta c) \\
 &= (\alpha a)X^2 + (\alpha b)X + (\alpha c) + (\beta a)X^2 + (\beta b)X + (\beta c) \\
 &= \alpha(aX^2 + bX + c) + \beta(aX^2 + bX + c)
 \end{aligned}$$

Sejam $\alpha, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$. Seja $P(x) = (a_1X^2 + b_1X + c_1) + (a_2X^2 + b_2X + c_2)$. Então,

$$\begin{aligned}
 \alpha P(x) &= \alpha((a_1X^2 + b_1X + c_1) + (a_2X^2 + b_2X + c_2)) \\
 &= \alpha((a_1 + a_2)X^2 + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2)) \\
 &= (\alpha(a_1 + a_2))X^2 + (\alpha(b_1 + b_2))X + \alpha(c_1 + c_2) \\
 &= (\alpha a_1 + \alpha a_2)X^2 + (\alpha b_1 + \alpha b_2)X + (\alpha c_1 + \alpha c_2) \\
 &= (\alpha a_1)X^2 + (\alpha b_1)X + (\alpha c_1) + (\alpha a_2)X^2 + (\alpha b_2)X + \alpha c_2 \\
 &= \alpha(a_1X^2 + b_1X + c_1) + \alpha(a_2X^2 + b_2X + c_2)
 \end{aligned}$$

Então, $\mathbb{R}_2[X]$ é um espaço vectorial sobre \mathbb{R} . ■

Note-se que o grau de $0x^2 + 0x + 0$ é $-\infty$, porque pretendemos que o grau do produto de dois polinómios seja a soma dos graus de cada polinómio e que o grau da soma seja menor ou igual ao maior dos graus das parcelas.

Observação 512 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots, \mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots$, são espaços vectoriais sobre \mathbb{R} . $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots$, são espaços vectoriais sobre \mathbb{C} . Como veremos, uma característica importante dos espaços vectoriais sobre um corpo é a sua dimensão.

Definição 513 Seja V um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e seja n um número natural. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. A expressão $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$, ou seja, $\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$, é uma combinação linear dos vectores u_1, u_2, \dots, u_n .

Exemplo 514 Consideremos \mathbb{R}^3 como espaço vectorial real. Sejam $u_1 = (2, 1, 1), u_2 = (3, 1, 2)$ e $v = 2u_1 + 3u_2$.

Então,

$$v = 2(2, 1, 1) + 3(3, 1, 2) = (4, 2, 2) + (9, 3, 2) = (13, 5, 4)$$

Então, v é combinação linear dos vectores u_1 e u_2 . Digamos que v depende linearmente de u_1 e u_2 .

É claro que $2u_1 + 3u_2 - v = (0, 0, 0)$, o que significa que existe uma combinação linear de coeficientes não todos nulos que é igual ao vector nulo, o qual também pode ser escrito da seguinte maneira trivial: $(0, 0, 0) = 0(2, 1, 1) + 0(3, 1, 2) + 0(13, 5, 4)$.

Definição 515 *Seja V um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e seja n um número natural. Sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Os vectores u_1, u_2, \dots, u_n são linearmente independentes se o vector nulo se escreve, de modo único, como combinação linear de u_1, u_2, \dots, u_n .*

Observação 516 *Convém observar que afirmar que dois vectores são linearmente independentes não equivale a afirmar que cada um dos vectores é linearmente independente. Assim, em \mathbb{R}^3 , $(1, 2, 3)$ é um vector linearmente independente, $(2, 4, 6)$ é um vector linearmente independente, mas $(1, 2, 3)$ e $(2, 4, 6)$ são vectores linearmente dependentes, porque $(0, 0, 0) = 0(1, 2, 3) + 0(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3) - 1(2, 4, 6)$.*

Exemplo 517 *Considere \mathbb{R}^3 como espaço vectorial sobre \mathbb{R} . Sejam $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (3, 1, 2)$ e $u_3 = (2, 2, 1)$. Verifique se os vectores anteriores são linearmente dependentes ou independentes.*

Resolução

$$\begin{aligned} \alpha_1(2, 1, 1) + \alpha_2(3, 1, 2) + \alpha_3(2, 2, 1) = (0, 0, 0) &\iff \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -4\alpha_2 - 2\alpha_3 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = \alpha_2 \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $(0, 0, 0)$ escreve-se de modo único como combinação linear de u_1 , u_2 e u_3 . Logo, u_1 , u_2 e u_3 são linearmente independentes.

Exemplo 518 *Exercício 519* *Mostre que todo o vector de \mathbb{R}^3 se escreve, de modo único, como combinação linear de u_1 , u_2 e u_3 , com $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (3, 1, 2)$ e $u_3 = (2, 2, 1)$.*

Resolução

$$\begin{aligned} \alpha_1(2, 1, 1) + \alpha_2(3, 1, 2) + \alpha_3(2, 2, 1) = (x, y, z) &\iff \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = y \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2z - 4\alpha_2 - 2\alpha_3 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ z - 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = y \\ \alpha_1 = z - 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\alpha_2 = x - 2z \\ \alpha_3 - \alpha_2 = y - z \\ \alpha_1 = z - 2\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 = -x + 2z \\ \alpha_3 = -x + 2z + y - z \\ \alpha_1 = z + 2x - 4z - \alpha_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_2 = -x + 2z \\ \alpha_3 = -x + y + z \\ \alpha_1 = 2x - 3z + x - y - z \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_2 = -x + 2z \\ \alpha_3 = -x + y + z \\ \alpha_1 = 3x - y - 4z \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, todo o elemento de \mathbb{R}^3 escreve-se, de modo único, como combinação linear de $(2, 1, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(2, 2, 1)$. Isso significa que \mathbb{R}^3 é o conjunto de todas as combinações lineares de $(2, 1, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(2, 2, 1)$. Então, estes 3 vectores geram \mathbb{R}^3 e formam uma base de \mathbb{R}^3 .

Observação 520 Note-se que $[(2, 1, 1), (3, 1, 2), (2, 2, 1)]$ significa o subespaço de \mathbb{R}^3 gerado pelos vectores $(2, 1, 1)$, $(3, 1, 2)$ e $(2, 2, 1)$.

Exercício 521 Mostre que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base de \mathbb{R}^3 , considerado como espaço vectorial sobre \mathbb{R} .

Resolução

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (x, y, z) \iff (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (x, y, z) \iff \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y \\ \alpha_3 = z \end{cases}$$

Então, os vectores $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ são linearmente independentes e geram o espaço vectorial \mathbb{R}^3 .

Observe-se que o vector nulo é obtido, fazendo $x = y = z = 0$, o que implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Observe-se que a base anterior é conhecida por base canónica de \mathbb{R}^3 , a qual, em rigor é uma base ordenada, ou seja, $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Definição 522 Sejam V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} e L um subconjunto de V . Diz-se que L é um subespaço vectorial de V se L é um espaço vectorial sobre \mathbb{K} .

Proposição 523 Seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} . Seja L um subconjunto não vazio de V . Então, L é um subespaço vectorial de V se e só se $\forall u, v \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha u + \beta v \in L$.

Prova. Se L é um subespaço vectorial de V , então, dados $u, v \in L$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos que αu e $\beta v \in L$, pelo que a sua soma também pertence a L .

Reciprocamente, suponhamos que se verifica que $\forall u, v \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha u + \beta v \in L$.

Então, $\forall u, v \in L, u + v \in L$, pelo que $(L, +)$ é grupóide.

Como L é um subconjunto de V , então a adição é comutativa e associativa em L .

Para $\alpha = 0, \beta = -1$, temos que, se $v \in L$, então $-v \in L$.

Então, $(L, +)$ é grupo comutativo.

Fazendo $\alpha = 1, \beta = 0$, vem que se $u \in L$, então $\alpha u \in L$.

As restantes propriedades de espaço vectorial resultam do facto de L ser um subconjunto, não vazio, de V . ■

Exercício 524 Caracterize o subespaço vectorial de \mathbb{R}^5 gerado por $u_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 2, 2, 1)$ e $u_3 = (1, 2, 0, -2, -1)$.

Resolução

Suponhamos que

$$\alpha(1, -1, 1, -1, 1) + \beta(1, 2, 2, 2, 1) + \gamma(1, 2, 0, -2, -1) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Então,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x_1 \\ -\alpha + 2\beta + 2\gamma = x_2 \\ \alpha + 2\beta = x_3 \\ -\alpha + 2\beta - 2\gamma = x_4 \\ \alpha + \beta - \gamma = x_5 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_3 - 2\beta + \beta + \gamma = x_1 \\ -x_3 + 2\beta + 2\beta + 2\gamma = x_2 \\ \alpha = x_3 - 2\beta \\ -x_3 + 2\beta + 2\beta - 2\gamma = x_4 \\ x_3 - 2\beta + \beta - \gamma = x_5 \end{cases} &\iff \begin{cases} \gamma = x_1 - x_3 + \beta \\ -x_3 + 4\beta + 2x_1 - 2x_3 + 2\beta = x_2 \\ \alpha = x_3 - 2\beta \\ -x_3 + 4\beta - 2x_1 + 2x_3 - 2\beta = x_4 \\ x_3 - \beta - x_1 + x_3 - \beta = x_5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \gamma = x_1 - x_3 + \beta \\ 6\beta = -2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \alpha = x_3 - 2\beta \\ 2\beta = 2x_1 - x_3 + x_4 \\ 2\beta = -x_1 + 2x_3 - x_5 \end{cases} &\iff \begin{cases} \gamma = x_1 - x_3 + \beta \\ 6\beta = -2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \alpha = x_3 - 2 \times \frac{-2x_1 + x_2 + 3x_3}{6} \\ 6\beta = 6x_1 - 3x_3 + 3x_4 \\ 6\beta = 3x_1 - 6x_3 + 3x_5 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6x_1 - 3x_3 + 3x_4 = 3x_1 - 6x_3 + 3x_5$.

Logo,

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6x_1 - 3x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -x_1 + 2x_3 - x_5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 8x_1 - 6x_3 + 3x_4 \\ x_5 = -3x_1 + 3x_3 - x_4 \end{cases}$$

Então, $L = \{(x_1, 8x_1 - 6x_3 + 3x_4, x_3, x_4, -3x_1 + 3x_3 - x_4) : x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

Proposição 525 *Seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} . Então, todas as bases de V têm o mesmo número de vectores.*

Definição 526 *Seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} . Dimensão de V é o número de vectores numa base de V .*

Proposição 527 *Seja V um espaço vectorial de dimensão n , sobre um corpo \mathbb{K} . Então, quaisquer n vectores de V que sejam linearmente independentes formam uma base de V .*

Proposição 528 *Seja V um espaço vectorial de dimensão n , sobre um corpo \mathbb{K} . Seja $m \in \mathbb{N}$, tal que $m > n$. Então, quaisquer m vectores de V são linearmente dependentes.*

Proposição 529 *Seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} e sejam $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Se os vectores u_1, u_2, \dots, u_n são linearmente dependentes, então um dos vectores é combinação linear dos restantes.*

Prova. Se os vectores u_1, u_2, \dots, u_n são linearmente dependentes, então existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_V$, onde 0_V representa o vector nulo. Suponhamos que $\alpha_1 \neq 0$. Então, existe α_1^{-1} .

Logo, $\alpha_1 u_1 = (-\alpha_2) u_2 + \dots + (-\alpha_n) u_n$, donde se conclui que $\alpha_1^{-1} (\alpha_1 u_1) = \alpha_1^{-1} ((-\alpha_2) u_2 + \dots + (-\alpha_n) u_n)$. Mas, $\alpha_1^{-1} (\alpha_1 u_1) = (\alpha_1^{-1} \alpha_1) u_1 = 1 u_1 = u_1$. Então

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1^{-1} ((-\alpha_2) u_2 + \dots + (-\alpha_n) u_n) = \alpha_1^{-1} ((-\alpha_2) u_2) + \dots + \alpha_1^{-1} ((-\alpha_n) u_n) \\ &= (\alpha_1^{-1} (-\alpha_2)) u_2 + \dots + (\alpha_1^{-1} (-\alpha_n)) u_n = (-\alpha_1^{-1} \alpha_2) u_2 + \dots + (-\alpha_1^{-1} \alpha_n) u_n \end{aligned}$$

Logo, u_1 é combinação linear de u_2, \dots, u_n .

Se tivéssemos $\alpha_1 = 0$, procedíamos de igual maneira com $\alpha_k u_k$, para o qual $\alpha_k \neq 0$. ■

Exemplo 530 *Seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} e seja L um subespaço vectorial de V . Definimos, em V , uma relação binária ρ do seguinte modo: $u\rho v \Leftrightarrow u - v \in L$. Mostre que ρ é uma relação de equivalência.*

Prova. Seja $v \in V$. Então, $v - v = 0_V \in L$, pelo que $v\rho v, \forall v \in V$. Então, a relação ρ é reflexiva.

Sejam $u, v \in V$, tais que $u\rho v$. Então, $u - v \in L$, pelo que $-(u - v) \in L$, ou seja, $v - u \in L$. Então, $v\rho u$.

Logo, ρ é simétrica.

Sejam $u, v, w \in V$, tais que $u\rho v \wedge v\rho w$. Então, $u - v \in L$ e $v - w \in L$. Então, $(u - v) + (v - w) \in L$.

Mas, $(u - v) + (v - w) = u - w$. Então, $u\rho w$. Logo, ρ é transitiva.

Logo, ρ é uma relação de equivalência. ■

Uma relação de equivalência provoca a existência de classes de equivalência. Ao conjunto de todas as classes de equivalência chama-se conjunto quociente, conjunto que é representado por V/ρ . Neste caso, o conjunto quociente costuma ser representado por V/L . Então, $V/\rho = V/L = \{[v]_\rho : v \in V\}$, onde

$$\begin{aligned} [v]_\rho &= \{u \in V : u\rho v\} = \{u \in V : u - v \in L\} \\ &= \{u \in V : \exists l \in L u - v = l\} = \{u \in V : \exists l \in L u = v + l\} = \{v + l : l \in L\} \\ &= v + L \end{aligned}$$

Proposição 531 *Seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} e seja L um subespaço vectorial de V . Sejam $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}$. Em V/L , define-se a adição por $(u + L) \oplus (v + L) = (u + v) + L$ e define-se o produto por um escalar da seguinte maneira: $\alpha(u + L) = \alpha u + L$. Nestas condições, V/L é um espaço vectorial sobre \mathbb{K} .*

Prova. Sejam $u, v, u_1, v_1 \in V$ e suponhamos que $u + L = u_1 + L$ e que $v + L = v_1 + L$. Então, $u\rho u_1 \wedge v\rho v_1$, pelo que $u - u_1 \in L \wedge v - v_1 \in L$.

Então, $(u - u_1) + (v - v_1) \in L$, donde vem que $(u + v) - (u_1 + v_1) \in L$. Então, a adição está bem definida, tendo-se que o resultado é um elemento de V/L . Então, $(V/L, \oplus)$ é grupóide.

Ora, $(u + L) \oplus (v + L) = (u + v) + L = (v + u) + L = (v + L) \oplus (u + L)$, pelo que a adição em V/L é comutativa.

Sejam $u, v, w \in L$. Então,

$$\begin{aligned} ((u + L) \oplus (v + L)) \oplus (w + L) &= ((u + v) + L) \oplus (w + L) = ((u + v) + w) + L \\ &= (u + (v + w)) + L = (u + L) \oplus ((v + w) + L) \\ &= (u + L) \oplus ((v + L) \oplus (w + L)) \end{aligned}$$

Logo, $(V/L, \oplus)$ é semigrupo comutativo.

E, de $(u + L) \oplus L = (u + L) \oplus (0_V + L) = (u + 0_V) + L = u + L$, vem que 0_V é o elemento neutro da adição, uma vez que esta é comutativa.

Por outro lado, temos $(u + L) \oplus ((-u) + L) = (u + (-u)) + L = 0_V + L = L$, pelo que todo o elemento de V/L tem simétrico (oposto para a adição).

Então, $(V/L, \oplus)$ é grupo comutativo.

Quanto à multiplicação por um escalar, suponhamos que $u + L = v + L$, com $u, v \in V$. Então, $u - v \in L$, pelo que $\alpha(u - v) \in L, \forall \alpha \in \mathbb{K}$. Então, $\alpha u - \alpha v \in L$, donde vem que $(\alpha u) \rho (\alpha v)$ e, por conseguinte, $\alpha u + L = \alpha v + L$. Então, o produto por um escalar está bem definido. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, u, v \in V$. Então,

1. $\alpha(\beta(u + L)) = \alpha(\beta u + L) = \alpha(\beta u) + L = (\alpha\beta)u + L = (\alpha\beta)(u + L)$
2. $1_{\mathbb{K}}(u + L) = 1_{\mathbb{K}}u + L = u + L$
3. $(\alpha + \beta)(u + L) = (\alpha + \beta)u + L = (\alpha u + \beta u) + L = (\alpha u + L) + (\beta u + L) = \alpha(u + L) + \beta(u + L)$
- 4.

$$\begin{aligned} \alpha((u + L) + (v + L)) &= \alpha((u + v) + L) = \alpha(u + v) + L = (\alpha u + \alpha v) + L \\ &= (\alpha u + L) + (\alpha v + L) = \alpha(u + L) + \alpha(v + L) \end{aligned}$$

Logo, V/L é um espaço vectorial sobre \mathbb{K} . ■

Definição 532 Sejam $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n)$ dois elementos de \mathbb{R}^n , com $n \in \mathbb{N}$. Produto interno (usual) entre u e v , que se denota por $\langle u, v \rangle$, ou por $u \cdot v$, é o número real $\langle u, v \rangle = u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{k=1}^n u_k v_k$.

Definição 533 Norma euclídeana do vector $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, que se denota por $\|u\|$, é o número real não negativo dado por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$. O espaço \mathbb{R}^n , com a norma euclídeana, costuma ser representado por \mathbb{E}^n .

Definição 534 Seja L um subespaço vectorial de \mathbb{E}^n . L^\perp é o conjunto de todos os elementos $v \in \mathbb{E}^n$, tais que $\langle v, l \rangle = 0, \forall l \in L$.

Proposição 535 Seja L um subespaço vectorial de \mathbb{E}^n . Então, L^\perp é um subespaço vectorial de \mathbb{E}^n .

Proposição 536 Seja L um subespaço vectorial de \mathbb{E}^n . Então, $L \cap L^\perp = \{0\}$.

Prova. Suponhamos que $v \in L \cap L^\perp$. Então, $v \in L$ e $v \in L^\perp$, pelo que $v \cdot v = 0$.

Logo, $\|v\|^2 = 0$, pelo que $\|v\| = 0$ e v é o vector nulo. É claro que o vector nulo pertence a L e a L^\perp , donde se conclui que $L \cap L^\perp = \{0\}$. ■

Definição 537 Seja L um subespaço vectorial de \mathbb{E}^n . Base ortogonal de L é uma base de L , tal que quaisquer dois vectores distintos da base são ortogonais, isto é, o seu produto interno é zero.

Exercício 538 Seja $V = \mathbb{E}^5$. Sejam $u = (1, 1, 0, 1, 0)$, $v = (1, 0, 1, 0, 0)$ e $L = [u, v]$. Seja $\pi = (1, 2, 3, 1, 1) + L$.

- a) Determine uma base ortogonal de L .
- b) Determine uma base ortogonal de L^\perp .
- c) Determine o único elemento de π que pertence a L^\perp e calcule a sua norma.
- d) Mostre que o vector encontrado na alínea anterior é o elemento de π que tem norma mínima.

Resolução

- a) O primeiro vector pode ser $(1, 1, 0, 1, 0)$. O segundo vector é $(1, 0, 1, 0, 0) + \alpha(1, 1, 0, 1, 0) = (1 + \alpha, \alpha, 1, \alpha, 0)$. Pretendemos que $\langle (1 + \alpha, \alpha, 1, \alpha, 0), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle = 0$. Então,

$$1 + \alpha + \alpha + 0 + \alpha + 0 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

Logo, o segundo vector da base ortogonal de L é $(1 - \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 0)$, ou seja, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 0)$. Este último vector pode ser substituído por um seu múltiplo, por exemplo, $(2, -1, 3, -1, 0)$.

Se pretendêssemos uma base ortonormada, os vectores seriam $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ e $(\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, 0)$.

b)

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (2, -1, 3, -1, 0) \rangle = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1 - x_2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $L^\perp = \{(x_1, x_2, -x_1, -x_1 - x_2, x_5)\}$.

Ora,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, -x_1, -x_1 - x_2, x_5) &= (x_1, 0, -x_1, -x_1, 0) + (0, x_2, 0, -x_2, 0) + (0, 0, 0, 0, x_5) \\ &= x_1(1, 0, -1, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1, 0) + x_5(0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Então, uma base de L^\perp pode ser formada pelos vectores $(1, 0, -1, -1, 0)$, $(0, 1, 0, -1, 0)$ e $(0, 0, 0, 0, 1)$.

Se repararmos com atenção, podemos ver que $(0, 0, 0, 0, 1)$ é ortogonal aos vectores $(1, 0, -1, -1, 0)$ e $(0, 1, 0, -1, 0)$. Então, basta-nos ortogonalizar estes dois últimos vectores. Para isso, mantemos o vector $(0, 1, 0, -1, 0)$ e substituímos $(1, 0, -1, -1, 0)$ por $(1, 0, -1, -1, 0) + \beta(0, 1, 0, -1, 0) = (1, \beta, -1, -1 - \beta, 0)$. Então,

$$\langle (0, 1, 0, -1, 0), (1, \beta, -1, -1 - \beta, 0) \rangle = 0 \Leftrightarrow 0 + \beta + 0 + 1 + \beta + 0 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

Então, $(1, \beta, -1, -1 - \beta, 0) = (1, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0)$, vector este que é paralelo a $(2, -1, -2, -1, 0)$.

Base ortogonal e ordenada de L^\perp : $((0, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1, 0), (2, -1, -2, -1, 0))$

- c) Suponhamos que $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \pi$. Então,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (1, 2, 3, 1, 1) + \alpha(1, 1, 0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1, 0, 0) \\ &= (1 + \alpha + \beta, 2 + \alpha, 3 + \beta, 1 + \alpha, 1) \end{aligned}$$

Para que $(1 + \alpha + \beta, 2 + \alpha, 3 + \beta, 1 + \alpha, 1)$ pertença a L^\perp , devemos ter

$$\begin{cases} \langle (1 + \alpha + \beta, 2 + \alpha, 3 + \beta, 1 + \alpha, 1), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (1 + \alpha + \beta, 2 + \alpha, 3 + \beta, 1 + \alpha, 1), (1, 0, 1, 0, 0) \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} 1 + \alpha + \beta + 2 + \alpha + 1 + \alpha = 0 \\ 1 + \alpha + \beta + 3 + \beta = 0 \end{cases} \quad \text{Logo, } \begin{cases} \beta = -3\alpha - 4 \\ \alpha + 2\beta = -4 \end{cases} \quad \text{Então, } \begin{cases} \beta = -3\alpha - 4 \\ \alpha - 6\alpha - 8 = -4 \end{cases}$$

E, finalmente, temos $\begin{cases} \beta = -\frac{8}{5} \\ \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$, pelo que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5}(-7, 6, 7, 1, 5)$$

$$\|(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\| = \frac{1}{5}\sqrt{49 + 36 + 49 + 1 + 25} = \frac{1}{5}\sqrt{160} = \frac{4}{5}\sqrt{10}$$

$$d) \pi = (1, 2, 3, 1, 1) + L = \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right) + L$$

Se $x \in \pi$, então $x = \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right) + l$, com $l \in L$.

Então,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\langle \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right) + l, \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right) + l \right\rangle \\ &= \left\langle \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right), \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right) \right\rangle + 2 \left\langle \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right), l \right\rangle + \langle l, l \rangle \\ &= \left\| \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, \frac{5}{5}\right) \right\|^2 + 0 + \|l\|^2 = \frac{4}{5}\sqrt{10} + \|l\|^2 \end{aligned}$$

O valor mínimo de $\|x\|^2$ e, portanto, de $\|x\|$, é $\frac{4}{5}\sqrt{10}$ e corresponde ao caso em que $\|l\| = 0$, isto é, $l = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Observação 539 O exercício anterior pode ser resolvido de muitas outras maneiras. Alguns dos assuntos relacionados com este exercício são: a projecção de um vector sobre outro, a projecção de um vector sobre um subespaço vectorial e o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Exercício 540 Seja $V = \mathbb{E}^5$. Sejam $u = (1, 2, 1, -1, 2)$, $v = (2, -1, -1, 1, -1)$ e $L = [u, v]$. Seja $\pi = (3, 1, 5, 4, 0) + L$.

- Determine uma base ortogonal de L .
- Determine uma base ortogonal de L^\perp .
- Determine o único elemento de π que pertence a L^\perp e calcule a sua norma.
- Mostre que o vector encontrado na alínea anterior é o elemento de π que tem norma mínima.

Resolução

a) O primeiro vector pode ser $u_1 = u = (1, 2, 1, -1, 2)$. O segundo vector pode ser

$$\begin{aligned} u_2 &= (2, -1, -1, 1, -1) - \frac{(2, -1, -1, 1, -1) \cdot (1, 2, 1, -1, 2)}{(1, 2, 1, -1, 2) \cdot (1, 2, 1, -1, 2)} (1, 2, 1, -1, 2) \\ &= (2, -1, -1, 1, -1) - \frac{2 - 2 - 1 - 1 - 2}{1 + 4 + 1 + 1 + 4} (1, 2, 1, -1, 2) \\ &= (2, -1, -1, 1, -1) + \frac{4}{11} (1, 2, 1, -1, 2) \\ &= \frac{1}{11} (26, -3, -7, 7, -3) \end{aligned}$$

Base ortogonal de L : $\{(1, 2, 1, -1, 2), (26, -3, -7, 7, -3)\}$

Base ortonormada de L : $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}} \right), \left(\frac{26}{\sqrt{792}}, -\frac{3}{\sqrt{792}}, -\frac{7}{\sqrt{792}}, \frac{7}{\sqrt{792}}, -\frac{3}{\sqrt{792}} \right) \right\}$

b) $(a, b, c, d, e) \cdot (1, 2, 1, -1, 2) = a + 2b + c - d + 2e$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c, d, e) \cdot (1, 2, 1, -1, 2) = 0 \\ (a, b, c, d, e) \cdot (26, -3, -7, 7, -3) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + 2b + c - d + 2e = 0 \\ 26a - 3b - 7c + 7d - 3e = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = a + 2b + c + 2e \\ 26a - 3b - 7c + 7(a + 2b + c + 2e) - 3e = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = a + 2b + c + 2e \\ 26a - 3b - 7c + 7a + 14b + 7c + 14e - 3e = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = a + 2b + c + 2e \\ 33a + 11b + 11e = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = a + 2b + c + 2(-3a - b) \\ e = -3a - b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = -5a + c \\ e = -3a - b \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $L^\perp = \{(a, b, c, -5a + c, -3a - b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Ora,

$$\begin{aligned}(a, b, c, -5a + c, -3a - b) &= (a, 0, 0, -5a, -3a) + (0, b, 0, 0, -b) + (0, 0, c, c, 0) \\ &= a(1, 0, 0, -5, -3) + b(0, 1, 0, 0, -1) + c(0, 0, 1, 1, 0)\end{aligned}$$

Então, uma base de L^\perp pode ser formada pelos vectores $(1, 0, 0, -5, -3)$, $(0, 1, 0, 0, -1)$ e $(0, 0, 1, 1, 0)$.

Se repararmos com atenção, podemos ver que $(0, 1, 0, 0, -1)$ é ortogonal a $(0, 0, 1, 1, 0)$. Ora,

$$\begin{cases} \frac{(1, 0, 0, -5, -3) \cdot (0, 1, 0, 0, -1)}{(0, 1, 0, 0, -1) \cdot (0, 1, 0, 0, -1)} = \frac{3}{2} \\ \frac{(1, 0, 0, -5, -3) \cdot (0, 0, 1, 1, 0)}{(0, 0, 1, 1, 0) \cdot (0, 0, 1, 1, 0)} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}w &= (1, 0, 0, -5, -3) - \frac{3}{2}(0, 1, 0, 0, -1) + \frac{5}{2}(0, 0, 1, 1, 0) \\ &= \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(2, -3, 5, -5, -3)\end{aligned}$$

Uma base ortogonal de L^\perp pode ser formada pelos vectores $(2, -3, 5, -5, -3)$, $(0, 1, 0, 0, -1)$ e $(0, 0, 1, 1, 0)$.

Uma base ortonormada de L^\perp pode ser formada por $\left(\frac{2}{6\sqrt{2}}, -\frac{3}{6\sqrt{2}}, \frac{5}{6\sqrt{2}}, -\frac{5}{6\sqrt{2}}, -\frac{3}{6\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, ou seja, por $\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{5\sqrt{2}}{12}, -\frac{5\sqrt{2}}{12}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

c) Seja

$$\begin{aligned}t &= (3, 1, 5, 4, 0) + \alpha(1, 2, 1, -1, 2) + \beta(2, -1, -1, 1, -1) \\ &= (3 + \alpha + 2\beta, 1 + 2\alpha - \beta, 5 + \alpha - \beta, 4 - \alpha + \beta, 2\alpha - \beta)\end{aligned}$$

Para que t pertença a L^\perp , devemos ter

$$\begin{cases} (3 + \alpha + 2\beta, 1 + 2\alpha - \beta, 5 + \alpha - \beta, 4 - \alpha + \beta, 2\alpha - \beta) \cdot (1, 2, 1, -1, 2) = 0 \\ (3 + \alpha + 2\beta, 1 + 2\alpha - \beta, 5 + \alpha - \beta, 4 - \alpha + \beta, 2\alpha - \beta) \cdot (2, -1, -1, 1, -1) = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} 11\alpha - 4\beta + 6 = 0 \\ -4\alpha + 8\beta + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 22\beta + 11 - 4\beta + 6 = 0 \\ \alpha = 2\beta + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\frac{17}{8} \\ \alpha = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

Então, $t = (3, 1, 5, 4, 0) + -\frac{8}{9}(1, 2, 1, -1, 2) - \frac{17}{18}(2, -1, -1, 1, -1) = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{91}{18}, \frac{71}{18}, -\frac{5}{6}\right)$

d) Seja

$$\begin{aligned}s &= (3, 1, 5, 4, 0) + \alpha(1, 2, 1, -1, 2) + \beta(26, -3, -7, 7, -3) \\ &= (3 + \alpha + 26\beta, 1 + 2\alpha - 3\beta, 5 + \alpha - 7\beta, 4 - \alpha + 7\beta, 2\alpha - 3\beta) \\ &= \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{91}{18}, \frac{71}{18}, -\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{25}{9} + \alpha + 26\beta, \frac{5}{6} + 2\alpha - 3\beta, -\frac{1}{18} + \alpha - 7\beta, \frac{1}{18} - \alpha + 7\beta, \frac{5}{6} + 2\alpha - 3\beta\right)\end{aligned}$$

Como, $\left(\frac{25}{9} + \alpha + 26\beta, \frac{5}{6} + 2\alpha - 3\beta, -\frac{1}{18} + \alpha - 7\beta, \frac{1}{18} - \alpha + 7\beta, \frac{5}{6} + 2\alpha - 3\beta\right) \in L$ e $\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{91}{18}, \frac{71}{18}, -\frac{5}{6}\right) \in L^\perp$, $\|s\|^2 = \left\|\left(\frac{25}{9} + \alpha + 26\beta, \frac{5}{6} + 2\alpha - 3\beta, -\frac{1}{18} + \alpha - 7\beta, \frac{1}{18} - \alpha + 7\beta, \frac{5}{6} + 2\alpha - 3\beta\right)\right\|^2 + \left\|\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{91}{18}, \frac{71}{18}, -\frac{5}{6}\right)\right\|^2$.

Então, $\|s\| \geq \left\|\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{91}{18}, \frac{71}{18}, -\frac{5}{6}\right)\right\|$, pelo que $\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{91}{18}, \frac{71}{18}, -\frac{5}{6}\right)$ é o elemento de π que tem norma mínima.

Proposição 541 *Seja V um espaço vectorial sobre \mathbb{K} (de dimensão finita) e sejam $v \in V$, L um subespaço de V e $\pi = v + L$. Então, existe em π , um e um só vector de L^\perp .*

Prova. Se $L = \{0_V\} \vee L = V$, a afirmação é trivialmente verdadeira.

Suponhamos que $\{0_V\} \neq L \neq V$; seja $\{l_1, \dots, l_m\}$ uma base de L e seja $\{t_1, \dots, t_n\}$ uma base de L^\perp . Então, $\{l_1, \dots, l_m, t_1, \dots, t_n\}$ é uma base de V . Então, $v = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_m l_m + \beta_1 t_1 + \dots + \beta_n t_n$, com os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$ bem determinados (únicos).

Então,

$$\begin{aligned} \pi &= v + L = (\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_m l_m + \beta_1 t_1 + \dots + \beta_n t_n) + L \\ &= ((\alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_m l_m) + L) + ((\beta_1 t_1 + \dots + \beta_n t_n) + L) \\ &= L + ((\beta_1 t_1 + \dots + \beta_n t_n) + L) = (\beta_1 t_1 + \dots + \beta_n t_n) + L \end{aligned}$$

Ora, $\beta_1 t_1 + \dots + \beta_n t_n \in L^\perp$. Falta demonstrar a unicidade.

Suponhamos que $v + L = w_1 + L = w_2 + L$, com $w_1, w_2 \in L^\perp$.

Então, $w_1 - w_2 \in L$. Mas, por outro lado, $w_1 - w_2 \in L^\perp$. Então, $w_1 - w_2 \in L \cap L^\perp = \{0_V\}$, donde vem $w_1 = w_2$. ■

Proposição 542 *Seja V um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e sejam $v_1, v_2 \in V$, L_1, L_2 subespaços de V , $\pi_1 = v_1 + L_1$ e $\pi_2 = v_2 + L_2$. Se $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, então $\pi_1 \cap \pi_2$ é um plano com subespaço director $L_1 \cap L_2$.*

Prova. Suponhamos que $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$. Então, $v \in V$, tal que $v \in \pi_1 \wedge v \in \pi_2$.

Então, $\pi_1 = v_1 + L_1 = v + L_1$ e $\pi_2 = v_2 + L_2 = v + L_2$.

Suponhamos, agora, que $w \in \pi_1 \cap \pi_2$. Então, $w - v \in L_1 \wedge w - v \in L_2$, pelo que $w - v \in L_1 \cap L_2$.

Logo, $w \in v + L_1 \cap L_2$. Então, $\pi_1 \cap \pi_2 \subseteq v + L_1 \cap L_2$.

Reciprocamente, suponhamos que $w \in v + L_1 \cap L_2$. Então, $w - v \in L_1 \cap L_2$.

Então, $w - v \in L_1 \wedge w - v \in L_2$. Logo, $w \in v + L_1 \wedge w \in v + L_2$, ou seja, $w \in \pi_1 \wedge w \in \pi_2$.

Logo, $w \in \pi_1 \cap \pi_2$. Então, $v + L_1 \cap L_2 \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$.

Então, $v + L_1 \cap L_2 = \pi_1 \cap \pi_2$. ■

Definição 543 *Sejam $u, v \in \mathbb{E}^n$, com v um vector não nulo. Projecção de u sobre v é o vector definido por $\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$.*

Exemplo 544 *Vejam como determinar uma base ortogonal de $L = [(1, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 0)]$ e uma base ortogonal de L^\perp , pelo processo de Gram-Schmidt:*

Resolução

Sejam $u_1 = (1, 1, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (1, 0, 1, 0, 0)$.

Seja $u_1'' = u_1' = u_1 = (1, 1, 0, 1, 0)$. Seja $u_2' = u_2 - \text{proj}_{u_1''} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1'' \rangle}{\langle u_1'', u_1'' \rangle} u_1''$. Então,

$$\begin{aligned} u_2' &= u_2 - \text{proj}_{u_1''} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1'' \rangle}{\langle u_1'', u_1'' \rangle} u_1'' = (1, 0, 1, 0, 0) - \frac{\langle (1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle}{\langle (1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle} (1, 1, 0, 1, 0) \\ &= (1, 0, 1, 0, 0) - \frac{1}{3} (1, 1, 0, 1, 0) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3}, 0 \right) \end{aligned}$$

Seja $u_2'' = (2, -1, 3, -1, 0)$. Então, os vectores $(1, 1, 0, 1, 0)$ e $(2, -1, 3, -1, 0)$ formam uma base ortogonal de L .

O facto de se utilizar u_2'' deve-se a não querermos utilizar fracções.

Passemos à determinação duma base ortogonal de L^\perp , partindo duma base não ortogonal:

Sejam $v_1 = (0, 0, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1, -1, 0)$.

$v_1'' = v_1' = v_1 = (0, 0, 0, 0, 1)$; $v_1 \perp v_2$, pelo que $v_2'' = v_2' = v_2 = (0, 1, 0, -1, 0)$.

Então,

$$\begin{aligned} v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2'' \rangle}{\langle v_2'', v_2'' \rangle} v_2'' = (1, 0, -1, -1, 0) - \frac{\langle (1, 0, -1, -1, 0), (0, 1, 0, -1, 0) \rangle}{\langle (0, 1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1, 0) \rangle} (0, 1, 0, -1, 0) \\ &= (1, 0, -1, -1, 0) - \frac{1}{2} (0, 1, 0, -1, 0) = \left(1, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0 \right) \end{aligned}$$

Logo, $v_3'' = (2, -1, -2, -1, 0)$.

Vejamos como determinar a projecção de $w = (1, 2, 3, 1, 1)$ sobre L e sobre L^\perp :

$$\begin{aligned} \text{proj}_L w &= \text{proj}_{u_1''} w + \text{proj}_{u_2''} w \\ &= \frac{\langle (1, 2, 3, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle}{\langle (1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 0) \rangle} (1, 1, 0, 1, 0) + \frac{\langle (1, 2, 3, 1, 1), (2, -1, 3, -1, 0) \rangle}{\langle (2, -1, 3, -1, 0), (2, -1, 3, -1, 0) \rangle} (2, -1, 3, -1, 0) \\ &= \frac{1+2+1}{1+1+1} (1, 1, 0, 1, 0) + \frac{2-2+9-1}{4+1+9+1} (2, -1, 3, -1, 0) = \frac{4}{3} (1, 1, 0, 1, 0) + \frac{8}{15} (2, -1, 3, -1, 0) \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0 \right) + \left(\frac{16}{15}, -\frac{8}{15}, \frac{8}{5}, -\frac{8}{15}, 0 \right) = \left(\frac{36}{15}, \frac{12}{15}, \frac{8}{5}, \frac{12}{15}, 0 \right) = \left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right) \end{aligned}$$

Então,

$$\text{proj}_{L^\perp} w = w - \text{proj}_L w = (1, 2, 3, 1, 1) - \left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{1}{5}, 1 \right) = \frac{1}{5} (-7, 6, 7, 1, 5)$$

Definição 545 *Seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} e seja L um subespaço vectorial de V . Seja $u \in V$. Então, à classe $u + L$ chamamos plano que passa por u e tem subespaço director L , tendo-se que a dimensão do plano é a dimensão de L . Se a dimensão do plano é 1, o plano recebe o nome particular de recta. Se a dimensão do plano é $\dim V - 1$, o plano recebe o nome particular de hiperplano.*

Observação 546 (Teorema das dimensões) *Seja V um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} . Então, existe, pelo menos, uma base de V . Se existir mais do que uma base, todas têm o mesmo número de elementos. O número de elementos duma base de V é a dimensão do espaço V . Observe-se, ainda, que a base de $V = \{0_V\}$ é \emptyset , pelo que a sua dimensão é zero; neste caso, apenas há uma base de V .*

Definição 547 *Seja L um subespaço do espaço vectorial V . Sejam $u, v \in V$. A distância de u ao plano $v + L$, $d(u, v + L)$, é dada por $d(u, v + L) = \|\text{proj}_{L^\perp}(u - v)\|$.*

Definição 548 *Sejam L_1, L_2 dois subespaços do espaço vectorial V . Sejam $u_1, u_2 \in V$. Os planos $\pi_1 = u_1 + L_1$ e $\pi_2 = u_2 + L_2$ dizem-se paralelos se $L_1 \subseteq L_2$ ou $L_2 \subseteq L_1$. Se, além disso, tivermos $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, os planos dizem-se estritamente paralelos.*

Definição 549 *Sejam L_1, L_2 dois subespaços do espaço vectorial V e $u_1, u_2 \in V$. A distância entre os planos $\pi_1 = u_1 + L_1$ e $\pi_2 = u_2 + L_2$ é o ínfimo das distâncias entre os pontos de π_1 e os pontos de π_2 .*

Proposição 550 *Sejam L_1, L_2 dois subespaços do espaço vectorial V e $u_1, u_2 \in V$. A distância entre os planos $\pi_1 = u_1 + L_1$ e $\pi_2 = u_2 + L_2$ é dada por $d(\pi_1, \pi_2) = \left\| \text{proj}_{(L_1+L_2)^\perp}(u_1 - u_2) \right\|$.*

Prova. Ora,

$$\begin{aligned} d(\pi_1, \pi_2) &= \inf_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} d(u_1 + l_1, u_2 + l_2) = \inf_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} d(u_1 + l_1 - u_2 - l_2) \\ &= \inf_{l_1 \in L_1, l_2 \in L_2} \|u_1 - u_2 + l_1 - l_2\| = \inf_{l \in L_1 + L_2} \|u_1 - u_2 - l\| \\ &= d(u_1 - u_2, L_1 + L_2) = \left\| \text{proj}_{(L_1+L_2)^\perp}(u_1 - u_2) \right\| \end{aligned}$$

Está, assim, terminada a demonstração. ■

Exercício 551 *Mostre que o conjunto dos polinómios de $\mathbb{R}_3[X]$ que se anulam nos pontos 1 e 2 é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_3[X]$.*

Resolução

Seja $S = \{(x-1)(x-2)(ax+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Então, $S \neq \emptyset$.

É claro que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha(x-1)(x-2)(ax+b) = (x-1)(x-2)(\alpha ax + \alpha b) \in S$.

Além disso, $(x-1)(x-2)(ax+b) + (x-1)(x-2)(cx+d) = (x-1)(x-2)((a+c)x + (b+d)) \in S$.

Logo, S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercício 552 Considere o espaço vectorial \mathbb{E}^5 . Sejam $x_1 = (89, 37, 111, 13, 54)$, $x_2 = (42, -16, -39, 71, 3)$, $u_1 = (1, 1, 0, -1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 0, -1, -1)$, $u_3 = (1, 1, 0, 1, 1)$, $u_4 = (1, -1, 0, 1, -1)$. Sejam $L_1 = [u_1, u_2]$, $L_2 = [u_3, u_4]$, $\pi_1 = x_1 + L_1$, $\pi_2 = x_2 + L_2$. Determine a distância entre π_1 e π_2 .

Resolução

A distância entre π_1 e π_2 é dada por $d(\pi_1, \pi_2) = \left\| \text{proj}_{(L_1+L_2)^\perp} (x_1 - x_2) \right\|$. Ora, $L_1 + L_2 = [u_1, u_2, u_3, u_4]$.

Seja $v = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ um elemento de $(L_1 + L_2)^\perp$. Então,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), (1, 1, 0, -1, -1) \rangle = 0 \\ \langle (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), (1, -1, 0, -1, -1) \rangle = 0 \\ \langle (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), (1, 1, 0, 1, 1) \rangle = 0 \\ \langle (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), (1, -1, 0, 1, -1) \rangle = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a_1 + a_2 - a_4 - a_5 = 0 \\ a_1 - a_2 - a_4 - a_5 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_4 - a_5 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_1 + a_2 - a_4 - a_5 = 0 \\ a_2 = 0 \\ 2a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_1 + 2a_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_5 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Uma base de $(L_1 + L_2)^\perp$ é $\{(0, 0, 1, 0, 0)\}$. Então,

$$\begin{aligned} \text{proj}_{(L_1+L_2)^\perp} (x_1 - x_2) &= \text{proj}_{(L_1+L_2)^\perp} ((89, 37, 111, 13, 54) - (42, -16, -39, 71, 3)) \\ &= \text{proj}_{(L_1+L_2)^\perp} (47, 53, 150, -58, 51) \\ &= \text{proj}_{(0,0,1,0,0)} (47, 53, 150, -58, 51) \\ &= \frac{\langle (47, 53, 150, -58, 51), (0, 0, 1, 0, 0) \rangle}{\langle (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0) \rangle} (0, 0, 1, 0, 0) = 150 (0, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Logo, $d(\pi_1, \pi_2) = \left\| \text{proj}_{(L_1+L_2)^\perp} (x_1 - x_2) \right\| = \|150 (0, 0, 1, 0, 0)\| = 150$.

Proposição 553 Uma equação cartesiana do hiperplano de \mathbb{E}^n que passa por $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ e é perpendicular a (a_1, a_2, \dots, a_n) , com $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, é $a_1 (x_1 - \beta_1) + a_2 (x_2 - \beta_2) + \dots + a_n (x_n - \beta_n) = 0$.

Prova. Seja $L_1 = [(a_1, a_2, \dots, a_n)]$. A dimensão de L_1 é 1. Seja $L = L_1^\perp$. Então, L tem dimensão $n - 1$, pelo que $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) + L$ é um hiperplano de \mathbb{E}^n . Seja $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) + L$.

Então, $(x_1, x_2, \dots, x_n) - (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in L$.

Logo, $(x_1 - \beta_1, x_2 - \beta_2, \dots, x_n - \beta_n) \perp (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Logo, $a_1 (x_1 - \beta_1) + a_2 (x_2 - \beta_2) + \dots + a_n (x_n - \beta_n) = 0$.

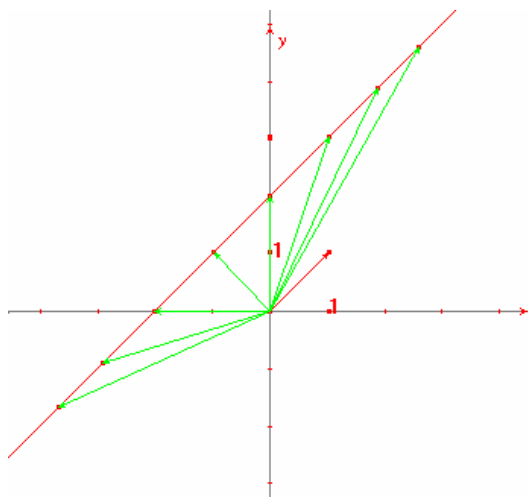
E reciprocamente, pois o raciocínio é reversível. ■

Proposição 554 A equação geral do hiperplano em \mathbb{E}^n é $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$, com $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$ e $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$, com algum $a_i \neq 0$.

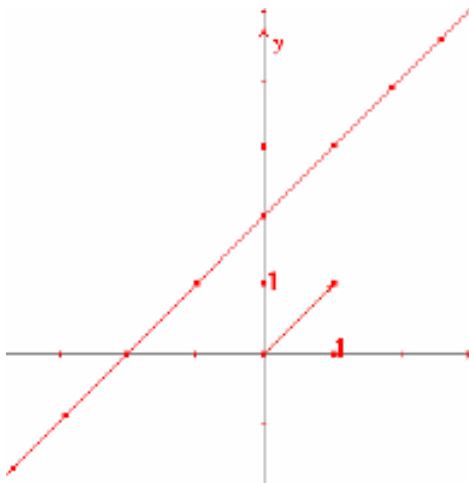
Prova. A equação $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ é equivalente a $a_1 (x_1 - \beta_1) + a_2 (x_2 - \beta_2) + \dots + a_n (x_n - \beta_n) = 0$, fazendo $b = a_1 \beta_1 + \dots + a_n \beta_n$. ■

Observação 555 Quando trabalhamos em \mathbb{E}^n , os "pontos" são vectores e os planos são conjuntos de "pontos", logo, os planos são conjuntos de vectores. Convém chamar a atenção para o caso de \mathbb{E}^2 , por ser aquele em que é mais fácil obter imagens geométricas. Assim, a recta que passa por $u = (1, 3)$ e tem a direcção do vector $v = (1, 1)$

é um conjunto de vectores, alguns dos quais estão representados na figura seguinte:



Se estivermos a trabalhar com pontos habituais, dizemos que estamos a trabalhar em \mathbb{A}^2 . E a imagem da recta que passa pelo ponto $A = (1, 3)$ e tem a direcção do vector $v = (1, 1)$ é:



Definição 556 Seja V um espaço euclídeo (com produto interno positivo definido). Sejam $u, v \in V \setminus \{0_V\}$. O ângulo entre u e v , $(\widehat{u, v})$, é dado por $(\widehat{u, v}) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \times \|v\|}$.

Definição 557 Seja V um espaço euclídeo. Sejam $v \in V \setminus \{0_V\}$ e L um subespaço de V , tal que $V \neq \{0_V\}$. O ângulo entre v e L , $(\widehat{v, L})$, é o menor ângulo entre v e os elementos de $L \setminus \{0_V\}$.

Proposição 558 Seja V um espaço euclídeo. Sejam $v \in V \setminus \{0_V\}$ e L um subespaço de V , tal que $V \neq \{0_V\}$. Então, $(\widehat{v, L}) = \arccos \frac{\|\text{proj}_L v\|}{\|v\|}$.

Exercício 559 Sejam $V = \mathbb{E}^5$, $u_1 = (1, 2, 1, 0, -1)$, $u_2 = (2, 3, 1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0, 2, -1)$ e $L = [u_1, u_2]$. Determine o ângulo entre v e L .

Resolução

Como os vectores u_1 e u_2 são linearmente independentes, formam uma base de L . Determinemos uma base ortogonal de L :

$$\begin{aligned} u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 &= (2, 3, 1, 0, 0) - \frac{\langle (2, 3, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0, -1) \rangle}{\langle (1, 2, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 0, -1) \rangle} (1, 2, 1, 0, -1) \\ &= (2, 3, 1, 0, 0) - \frac{2+6+1}{1+4+1+1} (1, 2, 1, 0, -1) \\ &= (2, 3, 1, 0, 0) - \frac{9}{7} (1, 2, 1, 0, -1) = \left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, 0, \frac{9}{7} \right) \end{aligned}$$

Então, $\{(1, 2, 1, 0, -1), (5, 3, -2, 0, 9)\}$ é uma base ortogonal de L .

Então,

$$\begin{aligned} \text{proj}_L v &= \text{proj}_{(1,2,1,0,-1)} v + \text{proj}_{(5,3,-2,0,9)} v \\ &= \frac{\langle (1, 1, 0, 2, -1), (1, 2, 1, 0, -1) \rangle}{\langle (1, 2, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 0, -1) \rangle} (1, 2, 1, 0, -1) + \frac{\langle (1, 1, 0, 2, -1), (5, 3, -2, 0, 9) \rangle}{\langle (5, 3, -2, 0, 9), (5, 3, -2, 0, 9) \rangle} (5, 3, -2, 0, 9) \\ &= \frac{1+2+1}{1+4+1+1} (1, 2, 1, 0, -1) + \frac{5+3-9}{25+9+4+81} (5, 3, -2, 0, 9) \\ &= \frac{4}{7} (1, 2, 1, 0, -1) - \frac{1}{119} (5, 3, -2, 0, 9) = \frac{68}{119} (1, 2, 1, 0, -1) - \frac{1}{119} (5, 3, -2, 0, 9) \\ &= \left(\frac{63}{119}, \frac{133}{119}, \frac{70}{119}, 0, -\frac{77}{119} \right) = \frac{1}{17} (9, 19, 10, 0, -11) \end{aligned}$$

Então,

$$\left(\widehat{v, L} \right) = \arccos \frac{\|\text{proj}_L v\|}{\|v\|} = \arccos \frac{\sqrt{81+361+100+121}}{17\sqrt{7}} = \arccos \frac{\sqrt{663 \times 7}}{119} = \arccos \frac{\sqrt{4641}}{119}$$

Exercício 560 Seja V um espaço euclideo (com produto interno positivo definido). Sejam $u_1, \dots, u_n \in V$ n vectores mutuamente ortogonais. Seja $L = [u_1, \dots, u_n]$. Prove que $\dim L = n$ se e só se u_1, \dots, u_n são todos não nulos.

Resolução

Se $\dim L = n$, então u_1, \dots, u_n são todos não nulos.

Suponhamos que u_1, \dots, u_n são todos não nulos e que $u_i \perp u_j$, com $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$. Pretendemos mostrar que os vectores u_1, \dots, u_n são linearmente independentes.

Suponhamos que $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \dots + \alpha_n u_n = 0_V$. Então,

$$\begin{cases} (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \dots + \alpha_n u_n) \cdot u_1 = 0_V \cdot u_1 \\ \vdots \\ (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \dots + \alpha_n u_n) \cdot u_k = 0_V \cdot u_k \\ \vdots \\ (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \dots + \alpha_n u_n) \cdot u_n = 0_V \cdot u_n \end{cases}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} \alpha_1 \|u_1\|^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_k \|u_k\|^2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n \|u_n\|^2 = 0 \end{cases} \quad \text{Mas, os vectores } u_1, \dots, u_n \text{ são todos não nulos, pelo que obtemos } \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_k = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}.$$

Então, os vectores u_1, \dots, u_n são linearmente independentes, pelo que $\dim L = n$.

Capítulo 18

Geometria Analítica em \mathbb{A}^4

Exercício 561 Consideremos, num referencial ortonormado, $A = (3, 1, 5, 2)$, $B = (4, 2, 3, 0)$, $C = (7, 4, 1, 2)$ e $D = (6, 5, 4, 3)$. Determine:

- a) Um sistema de equações cartesianas do plano definido pelos pontos A , B e C .
- b) Um sistema de equações cartesianas do plano definido pelos pontos A , B e D .
- c) Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , B , C e D .
- d) A distância entre o ponto D e o plano ABC .
- e) A distância da origem ao plano definido pelos pontos A , B , C e D .
- f) A distância entre o ponto C e a recta AB .

Resolução

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3, 0) - (3, 1, 5, 2) = (1, 1, -2, -2)$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1, 2) - (3, 1, 5, 2) = (4, 3, -4, 0)$$

Então, uma equação vectorial do plano definido pelos pontos A , C e D é

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 2, 3, 0) + \alpha(1, 1, -2, -2) + \beta(4, 3, -4, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Então,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4 + \alpha + 4\beta, 2 + \alpha + 3\beta, 3 - 2\alpha - 4\beta, -2\alpha)$$

Logo, $\begin{cases} \alpha = -\frac{x_4}{2} \\ 3 - 2\alpha - 4\beta = x_3 \end{cases}$, donde vem $3 + x_4 - 4\beta = x_3$, pelo que $\beta = \frac{3 + x_4 - x_3}{4}$.

Então,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (4 + \alpha + 4\beta, 2 + \alpha + 3\beta, 3 - 2\alpha - 4\beta, -2\alpha) \\ &= \left(4 - \frac{x_4}{2} + 3 + x_4 - x_3, 2 - \frac{x_4}{2} + \frac{9 + 3x_4 - 3x_3}{4}, x_3, x_4 \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \frac{x_4}{2} + 3 + x_4 - x_3 = 7 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 2 - \frac{x_4}{2} + \frac{9 + 3x_4 - 3x_3}{4} = \frac{17}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3, 0) - (3, 1, 5, 2) = (1, 1, -2, -2)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (6, 5, 4, 3) - (3, 1, 5, 2) = (3, 4, -1, 1)$$

Então, uma equação vectorial do plano definido pelos pontos A , B e D é

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 2, 3, 0) + \alpha(1, 1, -2, -2) + \beta(3, 4, -1, 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Então,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4 + \alpha + 3\beta, 2 + \alpha + 4\beta, 3 - 2\alpha - \beta, -2\alpha + \beta)$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} \beta = x_4 + 2\alpha \\ 3 - 2\alpha - x_4 - 2\alpha = x_3 \end{cases}, \text{ donde vem } 3 - x_3 - x_4 = 4\alpha, \text{ pelo que } \alpha = \frac{3 - x_3 - x_4}{4}.$$

$$\text{Logo, } \beta = x_4 + \frac{3 - x_3 - x_4}{2} = \frac{3 - x_3 + x_4}{2}.$$

Então,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (4 + \alpha + 3\beta, 2 + \alpha + 4\beta, 3 - 2\alpha - \beta, -2\alpha + \beta) \\ &= \left(4 + \frac{3 - x_3 - x_4}{4} + \frac{9 - 3x_3 + 3x_4}{2}, 2 + \frac{3 - x_3 - x_4}{4} + 6 - 2x_3 + 2x_4, 3 - 2\alpha - \beta, -2\alpha + \beta \right) \\ &= \left(\frac{19 - x_3 - x_4 + 18 - 6x_3 + 6x_4}{4}, \frac{11 - x_3 - x_4 + 24 - 8x_3 + 8x_4}{4}, 3 - 2\alpha - \beta, -2\alpha + \beta \right) \\ &= \left(\frac{37 - 7x_3 + 5x_4}{4}, \frac{35 - 9x_3 + 7x_4}{4}, 3 - 2\alpha - \beta, -2\alpha + \beta \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{37 - 7x_3 + 5x_4}{4} \\ x_2 = \frac{35 - 9x_3 + 7x_4}{4} \end{cases}$$

$$\text{c) } \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3, 0) - (3, 1, 5, 2) = (1, 1, -2, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1, 2) - (3, 1, 5, 2) = (4, 3, -4, 0)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (6, 5, 4, 3) - (3, 1, 5, 2) = (3, 4, -1, 1)$$

$$(1, 1, -2, -2) \cdot (a, b, c, d) = a + b - 2c - 2d$$

$$(4, 3, -4, 0) \cdot (a, b, c, d) = 4a + 3b - 4c$$

$$(3, 4, -1, 1) \cdot (a, b, c, d) = 3a + 4b - c + d$$

$$\begin{cases} a + b - 2c - 2d = 0 \\ 4a + 3b - 4c = 0 \\ 3a + 4b - c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - 2c + 6a + 8b - 2c = 0 \\ 4a + 3b - 4c = 0 \\ d = -3a - 4b + c \end{cases} \iff \begin{cases} 7a + 9b - 4c = 0 \\ 4a + 3b - 4c = 0 \\ d = -3a - 4b + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3a + 6b = 0 \\ 4a + 3b - 4c = 0 \\ d = -3a - 4b + c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b \\ -8b + 3b - 4c = 0 \\ d = 6b - 4b + c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b \\ b = -\frac{4}{5}c \\ d = -\frac{8}{5}c + c \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{8}{5}c \\ b = -\frac{4}{5}c \\ d = -\frac{3}{5}c \end{cases}$$

Para $c = 5$, temos $(a, b, c, d) = (8, -4, 5, -3)$. O vector $(8, -4, 5, -3)$ é perpendicular aos vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} .

Uma equação cartesiana do plano $ABCD$ é $8(x_1 - 3) - 4(x_2 - 1) + 5(x_3 - 5) - 3(x_4 - 2) = 0$, ou seja,

$$8x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 39 = 0$$

Muito haveria a dizer sobre a resolução apresentada, mas diremos, apenas, que os vectores perpendiculares aos vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} são colineares com o vector $(8, -4, 5, -3)$ e podem ser determinados por meio

do determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -24\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 - 15\vec{e}_3 + 9\vec{e}_4 = -3(8\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 - 3\vec{e}_4)$$

Note-se que o valor do determinante não pode ser calculado por uma regra semelhante ao caso de \mathbb{A}^3 .

d) $\overrightarrow{AD} = D - A = (6, 5, 4, 3) - (3, 1, 5, 2) = (3, 4, -1, 1)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3, 0) - (3, 1, 5, 2) = (1, 1, -2, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1, 2) - (3, 1, 5, 2) = (4, 3, -4, 0)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} - \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC} &= (4, 3, -4, 0) - \frac{(4, 3, -4, 0) \cdot (1, 1, -2, -2)}{(1, 1, -2, -2) \cdot (1, 1, -2, -2)} (1, 1, -2, -2) \\ &= (4, 3, -4, 0) - \frac{4 + 3 + 8}{1 + 1 + 4 + 4} (1, 1, -2, -2) \\ &= (4, 3, -4, 0) - \frac{15}{10} (1, 1, -2, -2) = (4, 3, -4, 0) - \frac{3}{2} (1, 1, -2, -2) \\ &= \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -1, 3 \right) \parallel (5, 3, -2, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} &= \frac{(3, 4, -1, 1) \cdot (1, 1, -2, -2)}{(1, 1, -2, -2) \cdot (1, 1, -2, -2)} (1, 1, -2, -2) = \frac{3 + 4 + 2 - 2}{1 + 1 + 4 + 4} (1, 1, -2, -2) \\ &= \frac{7}{10} (1, 1, -2, -2) = \left(\frac{7}{10}, \frac{7}{10}, -\frac{14}{10}, -\frac{14}{10} \right) \\ \text{proj}_{(5, 3, -2, 6)} \overrightarrow{AD} &= \frac{(3, 4, -1, 1) \cdot (5, 3, -2, 6)}{(5, 3, -2, 6) \cdot (5, 3, -2, 6)} (5, 3, -2, 6) = \frac{15 + 12 + 2 + 6}{25 + 9 + 4 + 36} (5, 3, -2, 6) \\ &= \frac{35}{74} (5, 3, -2, 6) = \left(\frac{175}{74}, \frac{105}{74}, -\frac{35}{37}, \frac{105}{37} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} - \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} - \text{proj}_{(5, 3, -2, 6)} \overrightarrow{AD} &= (3, 4, -1, 1) - \left(\frac{7}{10}, \frac{7}{10}, -\frac{14}{10}, -\frac{14}{10} \right) - \left(\frac{175}{74}, \frac{105}{74}, -\frac{35}{37}, \frac{105}{37} \right) \\ &= \left(-\frac{12}{185}, \frac{348}{185}, \frac{249}{185}, -\frac{81}{185} \right) \end{aligned}$$

A distância d , do ponto D ao plano ABC , é a norma do vector $\left(-\frac{12}{185}, \frac{348}{185}, \frac{249}{185}, -\frac{81}{185} \right)$.

$$\text{Então, } d = \frac{1}{185} \sqrt{12^2 + 348^2 + 249^2 + 81^2} = \frac{3}{185} \sqrt{21090}.$$

e) $\overrightarrow{OA} = (3, 1, 5, 2) - (0, 0, 0, 0) = (3, 1, 5, 2)$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{(8, -4, 5, -3)} \overrightarrow{OA} &= \frac{(3, 1, 5, 2) \cdot (8, -4, 5, -3)}{(8, -4, 5, -3) \cdot (8, -4, 5, -3)} (8, -4, 5, -3) = \frac{24 - 4 + 25 - 6}{64 + 16 + 25 + 9} (8, -4, 5, -3) \\ &= \frac{39}{114} (8, -4, 5, -3) \end{aligned}$$

A norma do vector anterior é $\frac{13}{38} \sqrt{114}$ que é o valor da distância pedida.

Recordamos que uma equação do plano $ABCD$ é $8x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 39 = 0$, pelo que a distância da origem ao plano é dada por $\frac{39}{\sqrt{64 + 16 + 25 + 9}}$, ou seja, $\frac{39\sqrt{114}}{114}$, ou $\frac{13\sqrt{114}}{38}$.

f) Distância entre o ponto C e a recta AB :

$$A = (3, 1, 5, 2), B = (4, 2, 3, 0), C = (7, 4, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, -2, -2); \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1, 2) - (3, 1, 5, 2) = (4, 3, -4, 0)$$

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC} = \frac{(4, 3, -4, 0) \cdot (1, 1, -2, -2)}{(1, 1, -2, -2) \cdot (1, 1, -2, -2)} (1, 1, -2, -2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -3, -3\right)$$

$$\overrightarrow{AC} - \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC} = (4, 3, -4, 0) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -3, -3\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -1, 3\right) = \frac{1}{2}(5, 3, -2, 6)$$

A distância entre o ponto C e a recta AB é a norma do vector $\frac{1}{2}(5, 3, -2, 6)$, ou seja, $\frac{1}{2}\sqrt{25 + 9 + 4 + 36}$.

$$\text{Logo, } d(C, AB) = \frac{1}{2}\sqrt{74}.$$

Exercício 562 Considere os pontos $A = (1, 3, -1, 2)$, $B = (1, 1, -1, -1)$, $C = (1, 0, -1, 0)$ e $D = (-1, 0, 1, 2)$. Determine a distância entre a recta AB e a recta CD .

Resolução

$$u = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, -1, -1) - (1, 3, -1, 2) = (0, -2, 0, -3)$$

$$v = \overrightarrow{CD} = D - C = (-1, 0, 1, 2) - (1, 0, -1, 0) = (-2, 0, 2, 2)$$

$$\text{proj}_u v = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \frac{-6}{4+9} (0, -2, 0, -3) = \left(0, \frac{12}{13}, 0, \frac{18}{13}\right)$$

$$v - \text{proj}_u v = (-2, 0, 2, 2) - \left(0, \frac{12}{13}, 0, \frac{18}{13}\right) = \left(-2, -\frac{12}{13}, 2, \frac{8}{13}\right) \parallel (-13, -6, 13, 4) = w$$

Seja $L = [u, v]$. Então, a distância entre as rectas AB e CD pode ser dada por $\|\text{proj}_{L^\perp} \overrightarrow{AC}\|$.

Ora, $\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 0, -1, 0) - (1, 3, -1, 2) = (0, -3, 0, -2)$, pelo que

$$\begin{aligned} \text{proj}_L \overrightarrow{AC} &= \text{proj}_u \overrightarrow{AC} + \text{proj}_w \overrightarrow{AC} = \frac{\langle \overrightarrow{AC}, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u + \frac{\langle \overrightarrow{AC}, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w \\ &= \frac{\langle (0, -3, 0, -2), (0, -2, 0, -3) \rangle}{\langle (0, -2, 0, -3), (0, -2, 0, -3) \rangle} u + \frac{\langle (0, -3, 0, -2), (-13, -6, 13, 4) \rangle}{\langle (-13, -6, 13, 4), (-13, -6, 13, 4) \rangle} w \\ &= \frac{6+6}{4+9} (0, -2, 0, -3) + \frac{18-8}{169+36+169+16} (-13, -6, 13, 4) \\ &= \frac{12}{13} (0, -2, 0, -3) + \frac{1}{39} (-13, -6, 13, 4) \\ &= \left(-\frac{13}{39}, -\frac{24}{13}, -\frac{2}{13}, \frac{1}{3}, -\frac{36}{13} + \frac{4}{39}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -2, \frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right) \end{aligned}$$

E, agora, temos que

$$\text{proj}_{L^\perp} \overrightarrow{AC} = (0, -3, 0, -2) - \left(-\frac{1}{3}, -2, \frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(1, -3, -1, 2)$$

$$\text{Logo, } \|\text{proj}_{L^\perp} \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+9+1+4} = \frac{1}{3}\sqrt{15}.$$

Como nota final, registre-se que o Teorema de Pitágoras pode ser aplicado aos vectores \overrightarrow{AC} , $\text{proj}_{L^\perp} \overrightarrow{AC}$ e $\text{proj}_L \overrightarrow{AC}$:

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|(0, -3, 0, -2)\|^2 = \left\|\left(-\frac{1}{3}, -2, \frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right)\right\|^2 + \left\|\frac{1}{3}(1, -3, -1, 2)\right\|^2$$

Exercício 563 Considere o ponto $A = (4, 1, 4, 1)$ e os vectores $\vec{u} = (2, 1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 3, 0)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0, 0)$. Seja $L = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

1. Mostre que os vectores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são linearmente independentes.

2. Determine uma equação cartesiana do hiperplano $A + L$.
3. Determine a distância da origem ao hiperplano $A + L$.

Resolução

1. Esta questão pode ser resolvida de várias maneiras. Em face da questão seguinte, vamos caracterizar o subespaço ortogonal de L :

$$\begin{cases} (a, b, c, d) \cdot (2, 1, 2, 1) = 0 \\ (a, b, c, d) \cdot (1, 2, 3, 0) = 0 \\ (a, b, c, d) \cdot (2, 1, 0, 0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b + 2c + d = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2c + d = 0 \\ a - 4a + 3c = 0 \\ b = -2a \end{cases} \iff \begin{cases} d = -2a \\ c = a \\ b = -2a \end{cases}$$

Então, $L^\perp = \{(a, -2a, a, -2a) : a \in \mathbb{R}\}$, pelo que $\dim L^\perp = 1$. Então, $A + L$ é um hiperplano, uma vez que $\dim L = 3 = 4 - 1$.

Note-se que, em vez da justificação anterior, podemos afirmar que $A + L$ é um hiperplano, porque a codimensão de L é 1.

2. $1(x_1 - 4) - 2(x_2 - 1) + 1(x_3 - 4) - 2(x_4 - 1) = 0 \iff x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 4 = 0$
3. $\overrightarrow{OA} = (4, 1, 4, 1)$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{(1, -2, 1, -2)}(4, 1, 4, 1) &= \frac{(4, 1, 4, 1) \cdot (1, -2, 1, -2)}{(1, -2, 1, -2) \cdot (1, -2, 1, -2)} (1, -2, 1, -2) \\ &= \frac{4 - 2 + 4 - 2}{1 + 4 + 1 + 4} (1, -2, 1, -2) = \frac{2}{5} (1, -2, 1, -2) \end{aligned}$$

Então, a distância pretendida é $\frac{2}{5}\sqrt{1 + 4 + 1 + 4}$, ou seja, $\frac{2}{5}\sqrt{10}$.

Exercício 564 Considere o ponto $A = (1, 2, 3, 4)$ e os vectores $\vec{u} = (1, 1, 2, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0, -1)$. Seja $L = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

1. Caracterize o subespaço L^\perp .
2. Mostre que $A + L$ é um hiperplano.
3. Determine uma equação cartesiana do hiperplano $A + L$, com $L = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
4. Determine a distância da origem ao hiperplano $A + L$.

Resolução

- 1.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c, d) \cdot (1, 1, 2, 2) = 0 \\ (a, b, c, d) \cdot (1, 1, 1, 0) = 0 \\ (a, b, c, d) \cdot (2, 1, 0, -1) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + b + 2c + 2d = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 2a + b - d = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -a - b + 4a + 2b = 0 \\ c = -a - b \\ d = 2a + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = -3a \\ c = 2a \\ d = -a \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $L^\perp = \{(a, -3a, 2a, -a) : a \in \mathbb{R}\}$, pelo que $\dim L^\perp = 1$.

2. Então, $A + L$ é um hiperplano, uma vez que $\dim L = 3 = 4 - 1$, ou a codimensão de L é 1.

$$3. \ 1(x_1 - 1) - 3(x_2 - 2) + 2(x_3 - 3) - 1(x_4 - 4) = 0 \iff x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3 = 0$$

$$4. \ \overrightarrow{OA} = (1, 2, 3, 4)$$

$$\begin{aligned} \text{proj}_{(1, -3, 2, -1)}(1, 2, 3, 4) &= \frac{(1, 2, 3, 4) \cdot (1, -3, 2, -1)}{(1, -3, 2, -1) \cdot (1, -3, 2, -1)} (1, -3, 2, -1) \\ &= \frac{1 - 6 + 6 - 4}{1 + 9 + 4 + 1} (1, -3, 2, -1) \\ &= -\frac{3}{15} (1, -3, 2, -1) \\ &= -\frac{1}{5} (1, -3, 2, -1) \end{aligned}$$

Então, a distância pretendida é $\frac{1}{5}\sqrt{1 + 9 + 4 + 1}$, ou seja, $\frac{1}{5}\sqrt{15}$.

Capítulo 19

Geometria Analítica no Plano

Começamos por referir que, salvo referência expressa em contrário, utilizamos *sempre* um referencial ortonormado.

Exercício 565 Considere o ponto $A = (2, 3)$ e o vector $\vec{u} = (4, 5)$. Seja r , a recta que passa pelo ponto A e tem a direcção do vector \vec{u} . Determine:

- a) Uma equação vectorial da recta r .
- b) Um sistema de equações paramétricas da recta r .
- c) Uma equação cartesiana da recta r .
- d) A equação reduzida da recta r .

Resolução

- a) $(x, y) = (2, 3) + \alpha (4, 5), \alpha \in \mathbb{R}$
- b) $\begin{cases} x = 2 + 4\alpha \\ y = 3 + 5\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$
- c) $\begin{cases} x = 2 + 4\alpha \\ y = 3 + 5\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-2}{4} = \alpha \\ \frac{y-3}{5} = \alpha \end{cases}$

Uma equação cartesiana da recta é, por exemplo, $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5}$.

d)

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5} \iff 4y - 12 = 5x - 10 \iff 4y = 5x + 2 \iff y = \frac{5x}{4} + \frac{1}{2}$$

Exercício 566 Considere a recta r que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (p, q)$, com $p \neq 0 \wedge q \neq 0$. Determine:

- a) Uma equação vectorial da recta r .
- b) Um sistema de equações paramétricas da recta r .
- c) Uma equação cartesiana da recta r .
- d) A equação reduzida da recta r .

Resolução

- a) $(x, y) = (x_0, y_0) + \alpha (p, q), \alpha \in \mathbb{R}$
- b) $\begin{cases} x = x_0 + p\alpha \\ y = y_0 + q\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

$$c) \begin{cases} x = x_0 + p\alpha \\ y = y_0 + q\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-x_0}{p} = \alpha \\ \frac{y-y_0}{q} = \alpha \end{cases}$$

Uma equação cartesiana da recta é, por exemplo, $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}$.

d) Obtenção da equação reduzida da recta :

$$py - py_0 = qx - qx_0 \iff py = qx + py_0 - qx_0 \iff y = \frac{q}{p}x + y_0 - \frac{q}{p}x_0$$

Registe-se que a equação anterior costuma ser substituída por $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $m = \frac{q}{p}$.

Observação

Os vectores (p, q) e $(q, -p)$ são perpendiculares, porque o seu produto interno é zero. Este facto é bastante importante e é explorado constantemente, para escrever uma equação cartesiana duma recta.

Habitualmente, aplicamos a seguinte regra:

Se o vector $\vec{n} = (a, b)$ é um vector não nulo e perpendicular a uma recta que passa pelo ponto (x_0, y_0) , então uma equação cartesiana da recta é

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

E, para obter um vector director da recta, basta-nos trocar a ordem e um dos sinais das coordenadas do vector \vec{n} , obtendo-se, por exemplo, $\vec{u} = (b, -a)$.

Então, uma equação vectorial da recta é

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \alpha(b, -a), \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercício 567 Considere a recta r definida pelos pontos $A = (1, 3)$ e $B = (5, 5)$. Determine:

- Uma equação vectorial da recta r .
- Um sistema de equações paramétricas da recta r .
- Uma equação cartesiana da recta r .
- A equação reduzida da recta r .

Resolução

$$a) \overrightarrow{AB} = B - A = (5, 5) - (1, 3) = (4, 2) \parallel (2, 1)$$

Então, $(x, y) = (1, 3) + \alpha(2, 1), \alpha \in \mathbb{R}$

$$b) \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 + \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$c) \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1}$$

$$d) 2y - 6 = x - 1 \iff 2y = x + 5 \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Exercício 568 Considere os pontos $A = (1, 3)$ e $B = (5, 5)$. Determine a equação reduzida da mediatriz de $[AB]$.

Resolução

O ponto médio de $[AB]$ é dado por $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (3, 4)$.

$\overrightarrow{AM} = M - A = (3, 4) - (1, 3) = (2, 1)$ é um vector perpendicular à mediatriz de . Então:

$$2(x - 3) + 1(y - 4) = 0 \iff 2x - 6 + y - 4 = 0 \iff y = -2x + 10$$

Exercício 569 Considere os pontos $A = (1, 2)$, $B = (5, 6)$ e $C = (7, 0)$. Determine o baricentro, o ortocentro, o circuncentro e o incentro do triângulo $[ABC]$.

Resolução

a) Determinação do baricentro ou centro de gravidade:

O baricentro dum triângulo é o ponto de intersecção das três medianas do triângulo, tendo-se que mediana é o segmento de recta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

O ponto médio de $[AB]$ é $M_1 = (3, 4)$.

$$\overrightarrow{CM_1} = M_1 - C = (3, 4) - (7, 0) = (-4, 4) \perp (1, 1)$$

Uma equação cartesiana da recta que contém a mediana anterior é:

$$x - 7 + y = 0$$

O ponto médio de $[BC]$ é $M_2 = (6, 3)$.

$$\overrightarrow{AM_2} = M_2 - A = (6, 3) - (1, 2) = (5, 1) \perp (1, -5)$$

Uma equação cartesiana da recta que contém a mediana anterior é:

$$x - 1 - 5(y - 2) = 0$$

Já não é necessário obter a terceira equação, a menos que queiramos verificar que, de facto, as três medianas têm um ponto comum.

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ 7 - y - 1 - 5y + 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 - y \\ -6y = -16 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Logo, o baricentro do triângulo é o ponto $G = (\frac{13}{3}, \frac{8}{3})$.

Como curiosidade, calculemos \overrightarrow{AG} e $\overrightarrow{GM_2}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AG} = G - A = (\frac{13}{3}, \frac{8}{3}) - (1, 2) = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3}) \\ \overrightarrow{GM_2} = M_2 - G = (6, 3) - (\frac{13}{3}, \frac{8}{3}) = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3}) \end{cases}$$

A conclusão é que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GM_2}$, que é uma propriedade que se verifica em qualquer triângulo e relativamente a qualquer das medianas. Esta propriedade costuma enunciar-se do seguinte modo: as medianas dum triângulo trissectam-se.

Uma última curiosidade: $G = (\frac{1+5+7}{3}, \frac{2+6+0}{3}) = (\frac{13}{3}, \frac{8}{3})$.

b) Determinação do ortocentro:

O ortocentro dum triângulo é o ponto de intersecção das rectas que contém as alturas do triângulo.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 6) - (1, 2) = (4, 4) \parallel (1, 1)$$

Uma equação cartesiana da recta que passa por C e é perpendicular a $[AB]$ é $x - 7 + y = 0$.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 0) - (1, 2) = (6, -2) \parallel (3, -1)$$

Uma equação cartesiana da recta que passa por B e é perpendicular a $[AC]$ é $3(x - 5) - (y - 6) = 0$, ou seja, $3x - y - 9 = 0$.

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ 21 - 3y - y - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 - y \\ -4y = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Logo, o ortocentro do triângulo $[ABC]$ é o ponto $H = (4, 3)$.

c) Determinação do circuncentro:

O ponto médio de $[AB]$ é $M_1 = (3, 4)$; o ponto médio de $[AC]$ é $M_2 = (4, 1)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4, 4) \parallel (1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (6, -2) \parallel (3, -1) \\ M_1 = (3, 4); M_2 = (4, 1) \end{cases}$$

Equações cartesianas das mediatrizes de $[AB]$ e $[AC]$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1(x - 3) + 1(y - 4) = 0 \\ 3(x - 4) - 1(y - 1) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - 12 - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 7 - x \\ 3x - 12 - 7 + x + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 7 - x \\ 4x = 18 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{5}{2} \\ x = \frac{9}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, o circuncentro do triângulo é o ponto $D = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Verificação:

$$\overrightarrow{AD} = D - A = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) - (1, 2) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \implies \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) - (5, 6) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right) \implies \|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) - (7, 0) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \implies \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente, observe-se que uma equação da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ é:

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

d) Determinação do incentro:

O incentro dum triângulo é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo, ou seja é o ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo.

Para encontrar um vector director da bissetriz do ângulo interno A (por exemplo), encontramos os dois vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} e depois temos de obter dois outros vectores com a mesma norma e que tenham a direcção e o sentido dos vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} . A soma dos dois vectores encontrados é um vector director da bissetriz.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 4) = 4(1, 1); \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (6, -2) = 3(3, -1);$$

$$\text{Sejam } \vec{u} = (1, 1) \text{ e } \vec{v} = (3, -1). \text{ Então, } \|\vec{u}\| = \sqrt{2} \text{ e } \|\vec{v}\| = \sqrt{10} = \sqrt{5}\|\vec{u}\|.$$

$$\text{Seja } \vec{w} = \sqrt{5}\vec{u} + \vec{v} = (\sqrt{5}, \sqrt{5}) + (3, -1) = (\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 1).$$

Então, \vec{w} é um vector director da bissetriz do ângulo A , pelo que uma equação cartesiana da (recta) bissetriz é:

$$\frac{x - 1}{\sqrt{5} + 3} = \frac{y - 2}{\sqrt{5} - 1}$$

Analogamente, temos:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -6) = 2(1, -3); \quad \|(1, -3)\| = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-4, -4) = 4(-1, -1); \quad \|(-1, -1)\| = \sqrt{2}$$

$$\text{Seja } \vec{t} = (1, -3) + \sqrt{5}(-1, -1) = (1 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}).$$

Equação cartesiana da (recta) bissetriz do ângulo B :

$$\frac{x - 5}{\sqrt{5} - 1} = \frac{y - 6}{\sqrt{5} + 3}$$

O incentro do triângulo obtém-se resolvendo o sistema formado pelas equações das duas bissetrizes:

$$\begin{cases} (x - 1)(\sqrt{5} - 1) = (y - 2)(\sqrt{5} + 3) \\ (x - 5)(\sqrt{5} + 3) = (y - 6)(\sqrt{5} - 1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ y = 5 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Apenas apresentámos a solução do sistema, sem a resolução do mesmo, por não haver interesse na sua apresentação.

E, agora, podemos afirmar que o incentro é $(2 + \sqrt{5}, 5 - \sqrt{5})$.

Uma equação da circunferência inscrita ao triângulo é:

$$\left(x - 2 - \sqrt{5}\right)^2 + \left(y - 5 + \sqrt{5}\right)^2 = r^2$$

Na expressão anterior, r é a distância do ponto $E = (2 + \sqrt{5}, 5 - \sqrt{5})$ à recta que contém um dos lados do triângulo, tendo-se $r = \sqrt{10} - \sqrt{2}$:

Cálculo da distância do ponto à recta AB :

$$\overrightarrow{AB} = (4, 4) = 4(1, 1) \implies m = 1; \quad A = (1, 2)$$

Então, a recta AB é definida por $y = x + 1$, equação que é equivalente a $x - y + 1 = 0$;

A distância do ponto E à recta AB é dada por:

$$r = \frac{|2 + \sqrt{5} - 5 + \sqrt{5} + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \left(\frac{2\sqrt{5} - 2}{2}\right) \sqrt{2} = (\sqrt{5} - 1) \sqrt{2} = \sqrt{10} - \sqrt{2}$$

Então, uma equação da circunferência inscrita no triângulo é:

$$(x - 2 - \sqrt{5})^2 + (y - 5 + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$$

Exercício 570 Considere os pontos $A = (1, 3)$, $B = (5, 1)$ e $C = (4, 5)$. Sem usar o produto interno, determine uma equação cartesiana e uma equação vectorial da recta que passa por C e é perpendicular à recta AB .

Resolução

O que se pretende neste exercício é obter uma equação duma recta perpendicular a outra, utilizando, apenas, o conhecimento de que rectas paralelas têm o mesmo declive e a fórmula da distância entre dois pontos, para definir a mediatriz dum segmento de recta.

Seja $P = (x, y)$, um ponto equidistante de A e B . Então:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 1)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1$$

A equação anterior é equivalente a $8x - 4y = 16$, donde se conclui que $y = 2x - 4$.

Então, a equação reduzida da recta pretendida é $y = 2x + b$, com b a determinar de modo que o ponto $C = (4, 5)$ satisfaça a equação.

Então, $5 = 2 \times 4 + b$, donde se conclui que $b = -3$, pelo que a equação reduzida da recta é $y = 2x - 3$.

Como o declive da recta é 2, então $\vec{u} = (1, 2)$ é um vector director da recta, pelo que uma equação vectorial da recta é:

$$(x, y) = (4, 5) + \alpha (1, 2), (\alpha \in \mathbb{R})$$

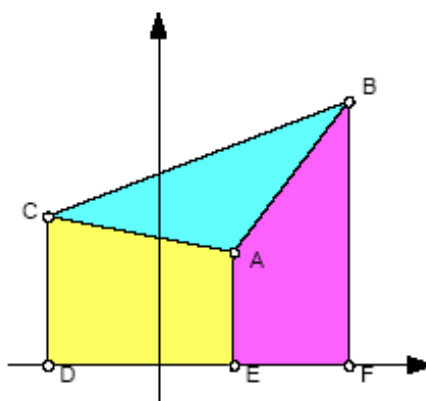
Exercício 571 Considere os pontos $A = (2, 3)$, $B = (5, 7)$ e $C = (-3, 4)$. Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Resolução

a) Começamos por referir que estamos sempre a supor que utilizamos um referencial ortonormado.

Determinação da área do triângulo $[ABC]$, usando trapézios:

É fácil verificar, na figura abaixo, que a área do triângulo $[ABC]$ é a diferença entre a área do trapézio $[BCDF]$ e a soma das áreas dos trapézios $[ACDE]$ e $[ABFE]$.



$$\text{Área do trapézio } [BCDF]: \frac{4 + 7}{2} \times 8 = 44.$$

$$\text{Área do trapézio } [ACDE]: \frac{4 + 3}{2} \times 5 = \frac{35}{2}.$$

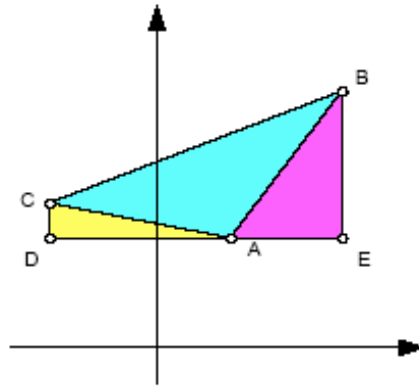
Área do trapézio $[ABFE]$: $\frac{7+3}{2} \times 3 = 15$.

Área do triângulo $[ABC]$: $44 - \frac{35}{2} - 15 = \frac{23}{2}$.

Então, a área do triângulo é $\frac{23}{2}$ unidades de área.

É claro que a unidade de área depende da unidade de comprimento.

b) Determinação da área do triângulo $[ABC]$, usando triângulos e um trapézio:



Área do trapézio $[BCDE]$: $\frac{1+4}{2} \times 8 = 20$.

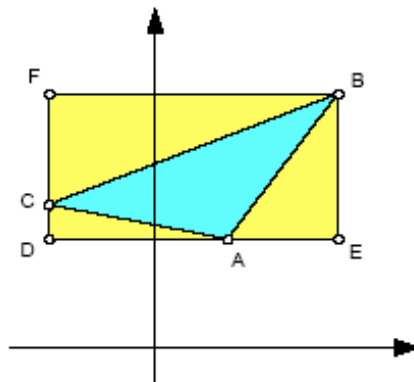
Área do triângulo $[ACD]$: $\frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$.

Área do triângulo $[ABE]$: $\frac{3 \times 4}{2} = 6$

Área do triângulo $[ABC]$: $20 - 6 - \frac{5}{2} = \frac{23}{2}$.

Então, a área do triângulo é $\frac{23}{2}$ unidades de área.

c) Determinação da área do triângulo, usando triângulos e um retângulo:



Área do retângulo $[BEDF]$: $8 \times 4 = 32$.

Área do triângulo $[ABE]$: $\frac{3 \times 4}{2} = 6$.

Área do triângulo $[ACD]$: $\frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$.

Área do triângulo $[BCF]$: $\frac{8 \times 3}{2} = 12$.

Área do triângulo $[ABC]$: $32 - 6 - 12 - \frac{5}{2} = \frac{23}{2}$.

Então, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{23}{2}$ unidades de área.

Exercício 572 Considere os pontos $A = (2, 1)$ e $B = (4, 5)$. Determine o(s) ponto(s) C , de modo que o triângulo $[ABC]$ seja equilátero.

1ª Resolução

Os três lados do triângulo devem ter o mesmo comprimento.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 5) - (2, 1) = (2, 4)$. Então, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

Seja $C = (x, y)$. Então, $\overrightarrow{AC} = C - A = (x, y) - (2, 1) = (x - 2, y - 1)$.

Logo, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$. Então, devemos ter $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{20}$.

E procede-se de modo análogo para o ponto B .

$\overrightarrow{BC} = C - B = (x, y) - (4, 5) = (x - 4, y - 5)$.

Logo, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2}$. Então, $\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 5)^2} = \sqrt{20}$.

Então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20 \\ (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 20 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 20 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 20 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x + 2y + 15 \\ 4x + 2y + 15 - 8x - 10y = -21 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20 \\ -4x - 8y = -36 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (9 - 2y - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20 \\ x = 9 - 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (7 - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 20 \\ x = 9 - 2y \end{cases} \end{aligned}$$

Então: $(7 - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 50 - 30y + 5y^2$

$$\begin{aligned} (7 - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 20 &\iff 49 - 28y + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 20 \\ &\iff 5y^2 - 30y + 30 = 0 \iff y^2 - 6y + 6 = 0 \\ &\iff y = 3 \pm \sqrt{9 - 6} \iff y = 3 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, $x = 9 - 2(3 \pm \sqrt{3}) = 3 \pm 2\sqrt{3}$, pelo que

$$C = (3 + 2\sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}) \vee C = (3 - 2\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$$

Esta resolução consiste em considerar a intersecção da circunferência de centro A e que passa por B , com a circunferência de centro B e que passa por A e mostra que a intersecção de duas circunferências é transformada na intersecção duma recta com uma circunferência. Este problema de determinar um ponto de forma a definir com outros dois, um triângulo equilátero tem sempre duas soluções.

2ª Resolução

O ponto $C = (x, y)$ tem de ser equidistante de A e de B , pelo que tem de pertencer à mediatriz de $[AB]$. Além disso, a distância de C ao ponto A deve ser igual à distância entre A e B . Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Então, $M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (3, 3)$. Ora, $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 5) - (2, 1) = (2, 4) \parallel (1, 2)$.

Então, uma equação cartesiana da mediatriz de $[AB]$ é

$$x - 3 + 2(y - 3) = 0$$

Então, $x = 2y - 9$ e $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

Por outro lado, $\overrightarrow{AC} = C - A = (x, y) - (2, 1) = (x - 2, y - 1) = (9 - 2y - 2, y - 1) = (7 - 2y, y - 1)$.

Então:

$$\begin{aligned} (7 - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 20 &\iff 4y^2 - 28y + 49 + y^2 - 2y + 1 - 20 = 0 \\ &\iff 5y^2 - 30y + 30 = 0 \iff y = 3 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, há duas soluções $\begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ y = 3 - \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 - 2\sqrt{3} \\ y = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

3ª Resolução

Consideremos um triângulo equilátero de lado l . Seja h , uma altura do triângulo. Então, usando Trigonometria ou o Teorema de Pitágoras, temos $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Seja M o ponto médio de $[AB]$. Então, $M = (3, 3)$.

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 5) - (2, 1) = (2, 4)$, temos $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

O vector $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}(4, -2)$ é perpendicular a \overrightarrow{AB} e tem norma igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$, pelo que temos:

$$C = M \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(4, -2) = (3, 3) \pm (2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

Logo, $C = (3, 3) + (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (3 + 2\sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$ ou $C = (3, 3) - (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (3 - 2\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

Capítulo 20

Geometria Analítica no Espaço

Exercício 573 Consideremos, num referencial ortonormado, os pontos $A = (3, 1, 5)$, $B = (4, 2, 3)$, $C = (7, 4, 1)$ e $D = (6, 5, 4)$. Determine:

- Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , B e C .
- Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , B e D .
- Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , C e D .
- Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos B , C e D .
- Uma equação cartesiana da superfície esférica de diâmetro $[AB]$
- O ponto T pertencente ao segmento de recta $[AB]$, de modo que a distância de A a T seja o dobro da distância de B a T . Determine, ainda, uma equação cartesiana de cada uma das superfícies esféricas que passam pelo ponto T e têm centro em A e em B , respectivamente.
- Uma equação cartesiana da superfície esférica que contém as duas superfícies anteriores e é tangente a ambas.
- A distância entre o ponto D e o plano ABC .
- A distância entre o ponto C e a recta AB .

Resolução

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1) - (3, 1, 5) = (4, 3, -4)$$

Pretendemos obter um vector $\vec{n} = (a, b, c)$, não nulo e que seja perpendicular aos dois vectores anteriores, o que pode ser feito recorrendo ao produto interno: $(a, b, c) \cdot (4, 3, -4) = 4a + 3b - 4c$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (4, 3, -4) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ 4a + 3b - 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2c - b \\ 8c - 4b + 3b - 4c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 2c - b \\ b = 4c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = 4c \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo $c = 1$, obtemos $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$. Então, o vector $(-2, 4, 1)$ é perpendicular aos dois vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

Equação cartesiana do plano ABC :

$$-2(x - 4) + 4(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

b) $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (6, 5, 4) - (3, 1, 5) = (3, 4, -1)$

Pretendemos obter um vector $\vec{n} = (a, b, c)$, não nulo e que seja perpendicular aos dois vectores anteriores, o que pode ser feito recorrendo ao produto interno. No entanto, há um processo de calcular um vector perpendicular a outros dois, o qual não é do programa, mas é bastante rápido, depois de algum treino. Trata-se do produto externo de dois vectores:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (-1 + 8) \vec{e}_1 - (-1 + 6) \vec{e}_2 + (4 - 3) \vec{e}_3 = 7\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Observe-se que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é um determinante duma matriz de tipo 2×2 e é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

O cálculo do determinante duma matriz 3×3 ou superior é mais complicado, podendo aplicar-se a seguinte regra:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

O cálculo do determinante duma matriz 3×3 pode ser simplificado:

Começamos por repetir as duas primeiras colunas:

| \vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \vec{e}_3 | \vec{e}_1 | \vec{e}_2 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 1 | -2 | 1 | 1 |
| 3 | 4 | -1 | 3 | 4 |

Depois, calculamos os dois produtos nas diagonais:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \times 1 \times (-1) + \vec{e}_2 \times (-2) \times 3 + \vec{e}_3 \times 1 \times 4 = -\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \times 1 \times 3 + \vec{e}_1 \times (-2) \times 4 + \vec{e}_2 \times 1 \times (-1) = -8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases}$$

E, finalmente, temos a diferença entre os dois produtos anteriores:

$$(-\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) - (-8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = 7\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Então o vector $(7, -5, 1)$ é perpendicular aos dois vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD} . Uma equação cartesiana do plano ABD :

$$7(x - 4) - 5(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

c) $\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1) - (3, 1, 5) = (4, 3, -4)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (6, 5, 4) - (3, 1, 5) = (3, 4, -1)$

Vector perpendicular aos dois anteriores:

| \vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \vec{e}_3 | \vec{e}_1 | \vec{e}_2 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 4 | 3 | -4 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | -1 | 3 | 4 |

$$\vec{n} = (-3\vec{e}_1 - 12\vec{e}_2 + 16\vec{e}_3) - (-16\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3) = 13\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 = (13, -8, 7)$$

Equação cartesiana do plano ACD :

$$13(x - 3) - 8(y - 1) + 7(z - 5) = 0$$

d) $\overrightarrow{BC} = C - B = (7, 4, 1) - (4, 2, 3) = (3, 2, -2)$

$\overrightarrow{CD} = D - C = (6, 5, 4) - (7, 4, 1) = (-1, 1, 3)$

Vector perpendicular aos dois anteriores:

| \vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \vec{e}_3 | \vec{e}_1 | \vec{e}_2 |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 3 | 2 | -2 | 3 | 2 |
| -1 | 1 | 3 | -1 | 1 |

$\vec{n} = (6\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) - (-2\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3) = 8\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 = (8, -7, 5)$

Equação cartesiana do plano BCD :

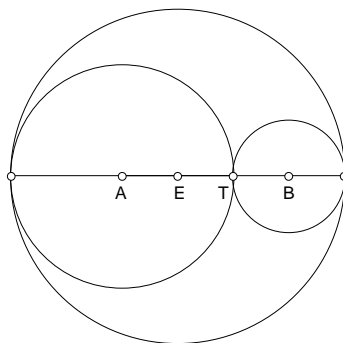
$$8(x - 4) - 7(y - 2) + 5(z - 3) = 0$$

e) O ponto médio do segmento $[AB]$, é dado por $M = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 4)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$. Então, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$, pelo que o raio da superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é $\frac{\sqrt{6}}{2}$, pelo que uma equação da superfície esférica referida é:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 4)^2 = \frac{6}{4}$$

f) Seja $T = (x, y, z)$.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AT} = 2 \times \overrightarrow{TB} &\iff T - A = 2(B - T) \iff (x - 3, y - 1, z - 5) = 2(4 - x, 2 - y, 3 - z) \\ &\iff \begin{cases} x - 3 = 8 - 2x \\ y - 1 = 4 - 2y \\ z - 5 = 6 - 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = \frac{11}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}$, temos $\|\overrightarrow{TB}\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ e $\|\overrightarrow{AT}\| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Equação cartesiana da superfície esférica de centro em A e que passa pelo ponto T :

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = \frac{24}{9}$$

Equação cartesiana da superfície esférica de centro em B e que passa pelo ponto T :

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{6}{9}$$

g) A soma dos raios das duas superfícies esféricas é o raio da superfície esférica pretendida. É claro que a soma dos dois raios é $\sqrt{6}$, pelo que, apenas, nos falta obter o centro E . Conforme podemos verificar na figura anterior, E é o ponto médio do segmento $[AT]$, ou seja, $E = (\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{2})$. Equação pretendida:

$$\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = 6$$

- h) O plano ABC é definido pela equação $2x - 4y - z + 3 = 0$ e $D = (6, 5, 4)$. Pretendemos determinar o ponto I de intersecção do plano ABC com a recta que passa por D e é perpendicular ao plano. Então, $I = (6, 5, 4) + \alpha(2, -4, -1) = (6 + 2\alpha, 5 - 4\alpha, 4 - \alpha)$.

Para que o ponto I pertença ao plano ABC , devemos ter

$$2(6 + 2\alpha) - 4(5 - 4\alpha) - (4 - \alpha) + 3 = 0$$

Então,

$$12 + 4\alpha - 20 + 16\alpha - 4 + \alpha + 3 = 0 \iff 21\alpha = 9 \iff \alpha = \frac{3}{7}$$

1. Logo, $\overrightarrow{DI} = \frac{3}{7}(2, -4, -1)$, pelo que $\|\overrightarrow{DI}\| = \frac{3}{7}\sqrt{4 + 16 + 1} = \frac{3}{7}\sqrt{21}$.

Observe-se que, como pode verificar no exercício seguinte, existe uma fórmula que resolve esta questão. Aplicando essa fórmula, temos:

$$d = \frac{|-2 \times 6 + 4 \times 5 + 4 - 3|}{\sqrt{4 + 16 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{21} = \frac{3}{7}\sqrt{21}$$

- i) A distância entre o ponto C e a recta AB :

$$C = (7, 4, 1); \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$$

Uma equação do plano que passa por C e é perpendicular a \overrightarrow{AB} é:

$$x - 7 + y - 4 - 2(z - 1) = 0 \iff x + y - 2z = 9$$

O ponto $I = (x, y, z)$, de intersecção da recta AB com o plano anterior, é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) = (4, 2, 3) + \alpha(1, 1, -2) \\ x + y - 2z = 9 \end{cases} &\implies \begin{cases} (x, y, z) = (4 + \alpha, 2 + \alpha, 3 - 2\alpha) \\ x + y - 2z = 9 \end{cases} \\ &\implies 4 + \alpha + 2 + \alpha - 2(3 - 2\alpha) = 9 \implies 6\alpha = 9 \implies \alpha = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Então, $I = (4 + \alpha, 2 + \alpha, 3 - 2\alpha) = (\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, 0)$, pelo que

$$\overrightarrow{IC} = C - I = (7, 4, 1) - \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(3, 1, 2)$$

A distância do ponto à recta é $d = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 1 + 4} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Outro processo

$$A = (3, 1, 5), B = (4, 2, 3), C = (7, 4, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1) - (3, 1, 5) = (4, 3, -4)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2) \cdot (4, 3, -4) = 4 + 3 + 8 = 15$$

$$\text{Então, a projecção de } \overrightarrow{AC} \text{ sobre } \overrightarrow{AB} \text{ é } \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{15}{1 + 1 + 4} (1, 1, -2) = \frac{5}{2} (1, 1, -2).$$

Logo, a distância pretendida é a norma do vector $\overrightarrow{AC} - \frac{5}{2}(1, 1, -2)$.

$$\overrightarrow{AC} - \frac{5}{2}(1, 1, -2) = (4, 3, -4) - \frac{5}{2}(1, 1, -2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(3, 1, 2).$$

Exercício 574 Determine, num referencial ortonormado, a distância entre o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e o plano de equação $Ax + By + Cz + D = 0$.

Resolução

Se a equação $Ax + By + Cz + D = 0$ define um plano, então, pelo menos, um dos números A, B, C é diferente de zero, isto é, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Seja $I = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(A, B, C) = (x_0 + \alpha A, y_0 + \alpha B, z_0 + \alpha C)$. A equação anterior define uma recta que passa por A e é perpendicular ao plano de equação $Ax + By + Cz + D = 0$.

Para que o ponto pertença à recta e ao plano temos:

$$A(x_0 + \alpha A) + B(y_0 + \alpha B) + C(z_0 + \alpha C) + D = 0 \iff Ax_0 + \alpha A^2 + By_0 + \alpha B^2 + Cz_0 + \alpha C^2 + D = 0$$

Então:

$$\alpha = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Logo, $\overrightarrow{PI} = \alpha(A, B, C)$, pelo que

$$\begin{aligned} d &= \|\overrightarrow{PI}\| = |\alpha| \times \|(A, B, C)\| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2} \times \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Exercício 575 Determine, num referencial ortonormado, a distância d , entre o ponto $P = (a, b, c)$ e a recta de equação $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(p, q, r)$.

Resolução

É claro que $p^2 + q^2 + r^2 \neq 0$, pois no caso contrário não temos uma recta.

Pretendemos encontrar o ponto $I = (x, y, z)$, da recta dada, tal que a recta definida pelos pontos I e P seja perpendicular à recta.

$$\overrightarrow{PI} = I - P = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(p, q, r) - (a, b, c) = (x_0 + \alpha p - a, y_0 + \alpha q - b, z_0 + \alpha r - c)$$

$$\text{Então, } (p, q, r) \cdot (x_0 + \alpha p - a, y_0 + \alpha q - b, z_0 + \alpha r - c) = 0$$

$$\text{Logo, } p(a - x_0) + q(b - y_0) + r(c - z_0) = \alpha(p^2 + q^2 + r^2)$$

Logo,

$$\alpha = \frac{p(a - x_0) + q(b - y_0) + r(c - z_0)}{p^2 + q^2 + r^2}$$

Então, $I = (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(p, q, r)$, com α já determinado, pelo que d , a distância pretendida, é a norma do vector $\overrightarrow{PI} = I - P = (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) - \frac{p(x_0 - a) + q(y_0 - b) + r(z_0 - c)}{p^2 + q^2 + r^2}(p, q, r)$.

A fórmula para a distância dum ponto a uma recta, que se obtém através da norma de \overrightarrow{PI} , é muito pouco interessante, pelo que não a escrevemos.

No entanto, aproveitemos este processo para retomar um exercício já resolvido:

Determinar a distância entre o ponto C e a recta AB , com $A = (3, 1, 5)$, $B = (4, 2, 3)$ e $C = (7, 4, 1)$. Então:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2) = (p, q, r)$$

$$C = (7, 4, 1) = (a, b, c); \quad A = (3, 1, 5) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{Então, } (-4, -3, 4) + \frac{5}{2}(1, 1, -2) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PI} &= (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) - \frac{p(x_0 - a) + q(y_0 - b) + r(z_0 - c)}{p^2 + q^2 + r^2}(p, q, r) \\ &= (3 - 7, 1 - 4, 5 - 1) - \frac{1(3 - 7) + 1(1 - 4) - 2(5 - 1)}{1 + 1 + 4}(1, 1, -2) = (-4, -3, 4) - \frac{-4 - 3 - 8}{6}(1, 1, -2) \\ &= (-4, -3, 4) + \frac{15}{6}(1, 1, -2) = (-4, -3, 4) + \frac{5}{2}(1, 1, -2) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{1}{2}(3, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } d = \|\overrightarrow{PI}\| = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 1 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

Exercício 576 Consideremos, num referencial ortonormado, $A = (2, -1, 1)$, $B = (4, 3, 3)$, $C = (6, 1, -1)$ e $D = (3, 2, 1)$. Determine:

- a) Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , B e C .
 b) A distância do ponto D ao plano ABC .
 c) A distância do ponto D à recta AB .

Resolução

$$a) \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (6, 1, -1) - (4, 3, 3) = (2, -2, -4) \parallel (-1, 1, 2)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (-1, 1, 2) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (-1, 1, 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2y - z \\ 2y + z + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y - z \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2z - z \\ y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo $z = 1$, temos $x = 1$ e $y = -1$, pelo que um dos vectores perpendiculares ao plano é $(1, -1, 1)$. Então, uma equação do plano ABC é $(x - 4) - (y - 3) + (z - 3) = 0$, equação esta que é equivalente à equação $x - y + z - 4 = 0$

$$1. A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), C = (6, 1, -1), D = (3, 2, 1)$$

$$b) \text{ Aplicando a fórmula da distância dum ponto a um plano, vem } d = \frac{|3 - 2 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Se não aplicarmos essa fórmula, podemos determinar o ponto de intersecção do plano com a recta que passa por D e é perpendicular ao plano, tendo-se $I = (3, 2, 1) + \alpha(1, -1, 1) = (3 + \alpha, 2 - \alpha, 1 + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para que o ponto I pertença ao plano, tem de ser

$$3 + \alpha - 2 + \alpha + 1 + \alpha - 4 = 0 \iff 3\alpha = 2 \iff \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\text{Logo, } d = \frac{2}{3} \|(1, -1, 1)\| = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$c) \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

$$\text{Uma equação vectorial da recta } AB \text{ é: } (4, 3, 3) + \alpha(1, 2, 1) = (4 + \alpha, 3 + 2\alpha, 3 + \alpha)$$

$$(x, y, z) = (4, 3, 3) + \alpha(1, 2, 1) = (4 + \alpha, 3 + 2\alpha, 3 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Uma equação do plano que passa por D e é perpendicular à recta AB :

$$(x - 3) + 2(y - 2) + (z - 1) = 0 \iff x + 2y + z - 8 = 0$$

Intersecção da recta com o plano:

$$4 + \alpha + 2(3 + 2\alpha) + 3 + \alpha - 8 = 0 \iff 5 + 6\alpha = 0 \iff \alpha = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Logo, } I = (4, 3, 3) - \frac{5}{6}(1, 2, 1) = \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right).$$

$$\text{Então, } \overrightarrow{DI} = I - D = \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) - (3, 2, 1) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right) = \frac{1}{6}(1, -4, 7).$$

$$\text{Logo, } \|\overrightarrow{DI}\| = \frac{1}{6} \|(1, -4, 7)\| = \frac{1}{6}\sqrt{66}$$

A distância do ponto D à recta AB é $\frac{1}{6}\sqrt{66}$.

Outro processo

$$A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), D = (3, 2, 1)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= D - A = (3, 2, 1) - (2, -1, 1) = (1, 3, 0) \\ \overrightarrow{AB} &= B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2)\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB} = \frac{(1, 3, 0) \cdot (2, 4, 2)}{(2, 4, 2) \cdot (2, 4, 2)} (2, 4, 2) = \frac{2 + 12}{4 + 16 + 4} (2, 4, 2) = \frac{7}{12} (2, 4, 2) = \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{AD} - \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = (1, 3, 0) - \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right) = -\frac{1}{6} (1, -4, 7)$$

$$\left\| -\frac{1}{6} (1, -4, 7) \right\| = \frac{1}{6} \|(1, -4, 7)\| = \frac{1}{6} \sqrt{66}$$

Observe-se que $\overrightarrow{AD} = (1, 3, 0) = \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right)$, tendo-se que $\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right)$ tem a direcção de \overrightarrow{AB} e $\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right)$ é perpendicular a \overrightarrow{AB} , conforme podemos verificar: $(2, 4, 2) \cdot \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right) = 0$

Ainda outro processo

$$A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), D = (3, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

Uma equação da recta AB :

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + \alpha (1, 2, 1) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Distância do ponto D a um ponto genérico da recta AB :

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(2 + \alpha - 3)^2 + (-1 + 2\alpha - 2)^2 + (1 + \alpha - 1)^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 3)^2 + \alpha^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 + \alpha^2} = \sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}\end{aligned}$$

Pretendemos achar a menor distância entre D e os pontos da recta AB , ou seja, pretendemos minimizar a função $f(\alpha) = \sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}$.

Consideremos a função quadrática $g(\alpha) = 6\alpha^2 - 14\alpha + 10$. O binómio discriminante desta função quadrática é $\Delta = 196 - 4 \times 6 \times 10 = -44 < 0$

Então, o domínio de f é \mathbb{R} , pelo que minimizar a função f é equivalente a minimizar a função g . De qualquer modo iremos minimizar as duas funções:

Como $g'(\alpha) = 12\alpha - 14$, temos:

| | | | |
|-----------------|------------|---------------|------------|
| α | $-\infty$ | $\frac{7}{6}$ | $+\infty$ |
| $12\alpha - 14$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(\alpha)$ | \searrow | mín | \nearrow |

Mas, $g\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{11}{6} = \frac{66}{36}$, pelo que $f(\alpha) = \sqrt{\frac{66}{36}} = \frac{\sqrt{66}}{6}$. Este é o valor da distância do ponto D à recta AB .

Se considerarmos a função $f(\alpha) = \sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}$, temos

$$f'(\alpha) = \frac{12\alpha - 14}{2\sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}} = \frac{6\alpha - 7}{\sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}}$$

Estudo do sinal da derivada e monotonia da função:

| | | | |
|------------------------------------|------------|---------------|------------|
| α | $-\infty$ | $\frac{7}{6}$ | $+\infty$ |
| $6\alpha - 7$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(\alpha)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(\alpha)$ | \searrow | mín | \nearrow |

O mínimo da função $f(\alpha)$ é dado por $f\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{\sqrt{66}}{6}$.

Ainda mais um processo

$$A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), D = (3, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

Uma equação da recta AB é:

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + \alpha(1, 2, 1) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3, 2, 1) - (2, -1, 1) = (1, 3, 0), \text{ pelo que } \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{10}.$$

Pretendemos obter na recta AB , um ponto I tal que os pontos A , I e D definam um triângulo rectângulo em I . Convém verificar se $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$, pois, no caso disso acontecer, a distância procurada é $\|\overrightarrow{AD}\|$. Neste caso, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = (1, 3, 0) \cdot (1, 2, 1) = 7$, pelo que os dois vectores não são perpendiculares.

Pelo Teorema de Pitágoras, será $\|\overrightarrow{AI}\|^2 + \|\overrightarrow{DI}\|^2 = \|\overrightarrow{AD}\|^2$. Mas:

$$\overrightarrow{AI} = I - A = (2, -1, 1) + \alpha(1, 2, 1) - (2, -1, 1) = \alpha(1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{DI} = I - D = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) - (3, 2, 1) = (\alpha - 1, 2\alpha - 3, \alpha)$$

$$\text{Então, } \alpha^2(1 + 4 + 1) + \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 + \alpha^2 = 10.$$

Logo:

$$12\alpha^2 - 14\alpha = 0 \iff 2\alpha(6\alpha - 7) = 0 \iff \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{7}{6}$$

A solução que nos interessa é $\alpha = \frac{7}{6}$, pelo que:

$$\overrightarrow{DI} = (\alpha - 1, 2\alpha - 3, \alpha) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right) = \frac{1}{6}(1, -4, 7)$$

$$\text{Então, } \|\overrightarrow{DI}\| = \frac{1}{6}\sqrt{1 + 16 + 49} = \frac{1}{6}\sqrt{66}.$$

Observemos que, no caso do ponto pertencer à recta, a distância do ponto à recta é zero e o ponto, nas condições anteriores, definir com o ponto escolhido na recta um vector que é perpendicular à recta, então a equação de segundo grau terá uma raiz dupla nula. Confirmemos esta observação, supondo que $A = \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right)$.

$$\overrightarrow{AI} = I - A = \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) + \alpha(1, 2, 1) - \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) = \alpha(1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{DI} = I - D = \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) + \alpha(1, 2, 1) - (3, 2, 1) = \frac{1}{6}(1 + 6\alpha, -4 + 12\alpha, 7 + 6\alpha)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3, 2, 1) - \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{6}(-1, 4, -7)$$

Então:

$$\alpha^2(1 + 4 + 1) + \frac{1}{6}(36\alpha^2 + 12\alpha + 1 + 144\alpha^2 - 96\alpha + 16 + 36\alpha^2 + 84\alpha + 49) = \frac{1}{6}(1 + 16 + 49)$$

$$\text{Logo, } 6\alpha^2 + \frac{1}{6}(216\alpha^2 + 66) = \frac{1}{6} \times 66, \text{ donde vem } 42\alpha^2 = 0.$$

O último processo

$$A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), D = (3, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

Uma equação da recta AB é:

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + \alpha(1, 2, 1) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Consideremos a superfície esférica de centro D e raio $\rho > 0$. Pretendemos determinar ρ , de modo que a recta seja tangente à superfície esférica, isto é, que a recta e a superfície esférica tenham um único ponto de intersecção.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \rho^2 \\ (x, y, z) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \end{cases} &\iff \begin{cases} (\alpha-1)^2 + (2\alpha-3)^2 + \alpha^2 = \rho^2 \\ (x, y, z) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 + \alpha^2 = \rho^2 \\ (x, y, z) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 6\alpha^2 - 14\alpha + 10 - \rho^2 = 0 \\ (x, y, z) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

Uma equação de segundo grau tem uma raiz dupla se e só se o binómio discriminante é zero.

Como $\Delta = 196 - 24(10 - \rho^2) = 24\rho^2 - 44$, então $24\rho^2 - 44 = 0$, donde vem $\rho^2 = \frac{11}{6} = \frac{66}{36}$. Então, $\rho = \frac{\sqrt{66}}{6}$ que é a distância pretendida.

Exercício 577 Determine a distância entre as rectas r e s definidas por:

$$\begin{cases} r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, 3, -1), \alpha \in \mathbb{R} \\ s : (x, y, z) = (4, 3, 1) + \beta(2, -3, 2), \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resolução

Pretendemos determinar um ponto R , na recta r e um ponto S , na recta s , de modo que a distância entre os dois pontos seja mínima.

Primeiro processo

Começamos por obter uma equação do plano definido pela recta r e por uma recta paralela a s e que seja concorrente com r . Tal plano pode ser definido pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e pelos vectores $(2, 3, -1)$ e $(2, -3, 2)$.

O próximo passo consiste em encontrar um vector não nulo perpendicular aos dois vectores anteriores:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, -3, 2) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2a + 3b \\ 2a - 3b + 4a + 6b = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 2a + 3b \\ 6a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -4a \\ b = -2a \end{cases} \end{aligned}$$

Então, o vector $(1, -2, -4)$ é perpendicular ao plano acima referido.

Então, uma equação do plano é $(x - 1) - 2(y - 2) - 4(z - 3) = 0$, equação equivalente a $x - 2y - 4z + 15 = 0$

A distância entre as duas rectas é a distância dum ponto qualquer de s ao plano anterior.

Para ser mais rápido, aplicamos a fórmula respectiva, obtendo-se:

$$d = \frac{|4 - 2 \times 3 - 4 \times 1 + 15|}{\sqrt{1 + 4 + 16}} = \frac{3}{7}\sqrt{21}$$

Segundo processo

Começamos por obter um vector perpendicular aos dois vectores directores das rectas r e s , o que se faz da mesma maneira que no processo anterior. Um tal vector é $(1, -2, -4)$.

Consideremos dois pontos R e S , um na recta r e outro na recta s , por exemplo, $R = (1, 2, 3)$ e $S = (4, 3, 1)$. Então, $\overrightarrow{RS} = S - R = (4, 3, 1) - (1, 2, 3) = (3, 1, -2)$.

E, agora, calculamos a projecção do vector \overrightarrow{RS} sobre $(1, -2, -4)$:

$$\text{proj}_{(1, -2, -4)}(3, 1, -2) = \frac{(3, 1, -2) \cdot (1, -2, -4)}{(1, -2, -4) \cdot (1, -2, -4)}(1, -2, -4) = \frac{9}{21}(1, -2, -4) = \frac{3}{7}(1, -2, -4)$$

A distância procurada é a norma de $\frac{3}{7}(1, -2, -4)$, ou seja, $\frac{3}{7}\sqrt{21}$.

Terceiro processo

Consideremos R e S , dois pontos genéricos das rectas r e s , respectivamente:

$$R = (1, 2, 3) + \alpha(2, 3, -1), S = (4, 3, 1) + \beta(2, -3, 2), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Então:

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (3 + 2\beta - 2\alpha, 1 - 3\beta - 3\alpha, -2 + 2\beta + \alpha)$$

Logo,

$$\|\overrightarrow{RS}\|^2 = (3 + 2\beta - 2\alpha)^2 + (1 - 3\beta - 3\alpha)^2 + (-2 + 2\beta + \alpha)^2$$

Pretendemos minimizar a função anterior, o que é complicado, pois temos uma função de duas variáveis. Consideremos, então, a função de duas variáveis

$$f(x, y) = (3 - 2x + 2y)^2 + (1 - 3x - 3y)^2 + (-2 + x + 2y)^2$$

Suponhamos que y é constante, digamos que $y = k$.

Então, $f(x, k) = (3 - 2x + 2k)^2 + (1 - 3x - 3k)^2 + (-2 + x + 2k)^2$.

Logo, para cada valor de k , temos uma função duma só variável $g(x) = f(x, k)$, da qual podemos achar a derivada:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -4(3 - 2x + 2k) - 6(1 - 3x - 3k) + 2(-2 + x + 2k) \\ &= -12 + 8x - 8k - 6 + 18x + 18k - 4 + 2x + 4k = 28x + 14k - 22 \end{aligned}$$

A derivada anula-se, quando $14x + 7k - 11 = 0$.

Suponhamos que x é constante, digamos $x = c$. Então, $f(c, y) = (3 - 2c + 2y)^2 + (1 - 3c - 3y)^2 + (-2 + c + 2y)^2$. Seja $h(y) = (3 - 2c + 2y)^2 + (1 - 3c - 3y)^2 + (-2 + c + 2y)^2$. Então:

$$\begin{aligned} h'(y) &= 4(3 - 2c + 2y) - 6(1 - 3c - 3y) + 4(-2 + c + 2y) \\ &= 12 - 8c + 8y - 6 + 18c + 18y - 8 + 4c + 8y = 14c + 34y - 2 \end{aligned}$$

Ao fim e ao cabo, o que pretendemos é que $28x + 14y - 22 = 0 = 14x + 34y - 2$.

$$\begin{cases} 14x + 7y = 11 \\ 14x + 34y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 14x + 7y = 11 \\ 27y = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} 14x = 11 + \frac{7}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{40}{42} = \frac{20}{21} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

E, agora, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{f\left(\frac{20}{21}, -\frac{1}{3}\right)} &= \sqrt{\left(3 - 2 \times \frac{20}{21} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - 3 \times \frac{20}{21} + 1\right)^2 + \left(-2 + \frac{20}{21} - \frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{63 - 40 - 14}{21}\right)^2 + \left(\frac{42 - 60}{21}\right)^2 + \left(\frac{20 - 14 - 42}{21}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{9}{21}\right)^2 + \left(\frac{-18}{21}\right)^2 + \left(\frac{-36}{21}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2 + \left(\frac{-12}{7}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{144}{49}} = \sqrt{\frac{189}{49}} = \frac{3}{7}\sqrt{21} \end{aligned}$$

Quarto processo

Vamos refazer a resolução anterior, utilizando a noção de derivada parcial.

Consideremos R e S , dois pontos genéricos das rectas r e s , respectivamente:

$$R = (1, 2, 3) + \alpha(2, 3, -1), S = (4, 3, 1) + \beta(2, -3, 2), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Então:

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (3 + 2\beta - 2\alpha, 1 - 3\beta - 3\alpha, -2 + 2\beta + \alpha)$$

Logo,

$$\left\| \overrightarrow{RS} \right\|^2 = (3 + 2\beta - 2\alpha)^2 + (1 - 3\beta - 3\alpha)^2 + (-2 + 2\beta + \alpha)^2$$

O nosso objectivo é minimizar a função $f(x, y) = (3 - 2x + 2y)^2 + (1 - 3x - 3y)^2 + (-2 + x + 2y)^2$.

Calculemos as derivadas parciais da função:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -4(3 - 2x + 2y) - 6(1 - 3x - 3y) + 2(-2 + x + 2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4(3 - 2x + 2y) - 6(1 - 3x - 3y) + 4(-2 + x + 2y) \end{cases}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -12 + 8x - 8y - 6 + 18x + 18y - 4 + 2x + 4y = 28x + 14y - 22 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 12 - 8x + 8y - 6 + 18x + 18y - 8 + 4x + 8y = 14x + 34y - 2 \end{cases}$$

Uma condição necessária para que a função tenha um mínimo é que as duas derivadas parciais anteriores sejam nulas:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 28x + 14y - 22 = 0 \\ 14x + 34y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 14x + 7y = 11 \\ 14x + 34y = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 27y = -9 \\ 7x + 17y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ 7x = 1 + \frac{17}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{20}{21} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{20}{21}, -\frac{1}{3}\right) &= \left(3 - \frac{40}{21} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{20}{7} + 1\right)^2 + \left(-2 + \frac{20}{21} - \frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{63 - 40 - 14}{21}\right)^2 + \left(\frac{14 - 20}{7}\right)^2 + \left(\frac{20 - 42 - 14}{21}\right)^2 \\ &= \left(\frac{9}{21}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2 + \left(\frac{-36}{21}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2 \\ &= \frac{9 + 36 + 144}{49} = \frac{189}{49} = \frac{3^2 \times 21}{7^2} \end{aligned}$$

Logo, $\sqrt{f\left(\frac{20}{21}, -\frac{1}{3}\right)} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$.

Não vamos abordar a questão geral da existência ou não de extremo, mas é claro que, neste problema, há sempre um mínimo, que é a distância entre as duas rectas.

Exercício 578 Considere, num referencial ortonormado, os pontos $A = (2, 4, 3)$ e $B = (1, 5, 6)$. Identifique o lugar geométrico dos pontos P tais que a distância de P ao ponto A é o dobro da distância de P ao ponto B .

Resolução

Seja $P = (x, y, z)$. Então:

$$\begin{cases} d(P, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 6z + 9} \\ 2d(P, B) = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 12z + 36} \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} d(P, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z + 29} \\ 2d(P, B) = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y - 12z + 62} \end{cases}$$

Elevando ao quadrado, temos

$$4(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y - 12z + 62) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z + 29$$

A equação anterior é equivalente a

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x - 40y - 48z + 248 - x^2 - y^2 - z^2 + 4x + 8y + 6z - 29 = 0$$

Simplificando, obtemos $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4x - 32y - 42z + 219 = 0$.

Multiplicando por 3, ambos os membros da equação anterior, obtemos a equação

$$9x^2 - 12x + 9y^2 - 96y + 9z^2 - 126z + 657 = 0$$

Então:

$$9x^2 - 12x + 4 + 9y^2 - 96y + 256 + 9z^2 - 126z + 441 = 4 + 256 + 441 - 657$$

Logo:

$$(3x - 2)^2 + (3y - 16)^2 + (3z - 21)^2 = 44$$

E, finalmente, obtemos

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{3}\right)^2 + (z - 7)^2 = \frac{44}{9}$$

O lugar geométrico pretendido é a superfície esférica de centro $\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{3}, 7\right)$ e raio $\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Observe-se que este problema é análogo ao correspondente em \mathbb{R}^2 , cuja solução é uma circunferência.

Exercício 579 Considere, num referencial ortonormado, os pontos $A = (1, 4, 2)$, $B = (3, 5, 1)$, $C = (2, 3, 0)$ e $D = (7, 3, 1)$. Determine a distância do ponto D ao plano ABC .

Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 5, 1) - (1, 4, 2) = (2, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3, 0) - (1, 4, 2) = (1, -1, -2)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) \cdot (2, 1, -1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (1, -1, -2) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x + y \\ x - y - 4x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 2x + y \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases} \end{aligned}$$

Então, o vector $(1, -1, 1)$ é perpendicular ao plano ABC , pelo que uma equação do plano é:

$$x - 2 - y + 3 + z = 0$$

Simplificando, vem $x - y + z + 1 = 0$.

1. Aplicando a fórmula da distância de um ponto a um plano, vem:

$$d = \frac{|7 - 3 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

2. Se não quisermos aplicar a fórmula anterior, determinamos intersecção do plano com a recta que passa por D e é perpendicular ao plano ABC :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) = (7, 3, 1) + \alpha(1, -1, 1) \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) = (7 + \alpha, 3 - \alpha, 1 + \alpha) \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) = (7 + \alpha, 3 - \alpha, 1 + \alpha) \\ 7 + \alpha - 3 + \alpha + 1 + \alpha + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) = (7 + \alpha, 3 - \alpha, 1 + \alpha) \\ 3\alpha = -6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) = (5, 5, -1) \\ \alpha = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $I = (5, 5, -1)$, pelo que $\overrightarrow{DI} = I - D = (5, 5, -1) - (7, 3, 1) = (-2, 2, -2)$.

Logo, $\|\overrightarrow{DI}\| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$.

3. Superfície esférica de centro D e tangente ao plano ABC :

$$\begin{cases} (x - 7)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = r^2 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x - 7)^2 + (y - 3)^2 + (y - x - 2)^2 = r^2 \\ z = y - x - 1 \end{cases}$$

Substituindo z , vem

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 + y^2 + x^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x - r^2 = 0$$

Logo,

$$2x^2 - 2xy - 10x + 2y^2 - 10y + 62 - r^2 = 0$$

A equação anterior é equivalente a

$$2x^2 - (2y + 10)x + 2y^2 - 10y + 62 - r^2 = 0$$

Então,

$$\begin{aligned}\Delta_x &= (2y + 10)^2 - 8(2y^2 - 10y + 62 - r^2) = 4y^2 + 40y + 100 - 16y^2 + 80y - 496 + 8r^2 \\ &= -12y^2 + 120y + 8r^2 - 396\end{aligned}$$

Então, $\Delta_x = 0$ é equivalente a $3y^2 - 30y - 2r^2 + 99 = 0$.

Para que haja uma solução única para y , deve ser nulo o discriminante $\Delta_y = 900 - 12(99 - 2r^2)$.

$$900 - 12(99 - 2r^2) = 0 \iff 225 - 297 + 6r^2 = 0 \iff 6r^2 = 72 \iff r^2 = 12 \iff r = \pm\sqrt{12}$$

Logo, a distância do ponto ao plano é $\sqrt{12}$, ou seja, $2\sqrt{3}$.

4. Como vimos no início, o plano ABC é definido pela equação $x - y + z + 1 = 0$. Então, $z = y - x - 1$, pelo que o ponto genérico do plano é $P = (x, y, y - x - 1)$.

Então, $\overrightarrow{DP} = P - D = (x, y, y - x - 1) - (7, 3, 1) = (x - 7, y - 3, y - x - 2)$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{DP}\|^2 &= (x - 7)^2 + (y - 3)^2 + (y - x - 2)^2 \\ &= x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 + y^2 + x^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x \\ &= 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 10x - 10y + 62\end{aligned}$$

O nosso objectivo é minimizar a função anterior. Então, as derivadas parciais devem ser nulas:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - 2xy + 2y^2 - 10x - 10y + 62) = 4x - 2y - 10 \\ \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - 2xy + 2y^2 - 10x - 10y + 62) = -2x + 4y - 10 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = y + 5 \\ 3y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

Logo, $\|\overrightarrow{DP}\|^2 = (5 - 7)^2 + (5 - 3)^2 + (5 - 5 - 2)^2 = 4 + 4 + 4 = 12$.

Então, $\|\overrightarrow{DP}\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

5. O vector $(1, -1, 1)$ é perpendicular ao plano ABC . Ora, $\overrightarrow{AD} = D - A = (7, 3, 1) - (1, 4, 2) = (6, -1, -1)$.
Ora,

$$\text{proj}_{(1, -1, 1)}(6, -1, -1) = \frac{(6, -1, -1) \cdot (1, -1, 1)}{(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1)}(1, -1, 1) = \frac{6 + 1 - 1}{1 + 1 + 1}(1, -1, 1) = 2(1, -1, 1)$$

Então, $d = \|\text{proj}_{(1, -1, 1)}(6, -1, -1)\| = 2\sqrt{1 + 1 + 1} = 2\sqrt{3}$.

6. O ponto genérico do plano ABC é $P = (x, y, y - x - 1)$.

Então, $\overrightarrow{DP} = P - D = (x, y, y - x - 1) - (7, 3, 1) = (x - 7, y - 3, y - x - 2)$.

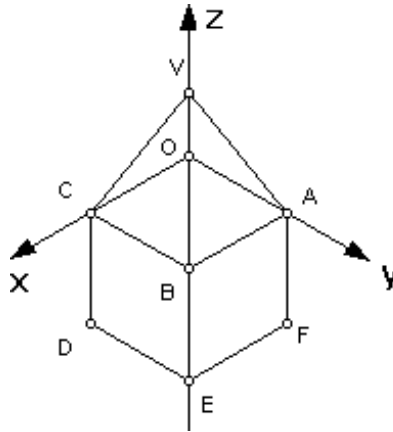
Este vector tem norma mínima se e só se for perpendicular ao plano ABC , ou seja, se for colinear com $(1, -1, 1)$.

Então, $(x - 7, y - 3, y - x - 2) = \alpha(1, -1, 1)$.

$$\begin{cases} x - 7 = \alpha \\ y - 3 = -\alpha \\ y - x - 2 = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 + \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ 3 - \alpha - 7 - \alpha - 2 = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 + \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ -3\alpha = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

Logo, $\overrightarrow{DP} = \alpha(1, -1, 1) = -2(1, -1, 1)$, pelo que $\|\overrightarrow{DP}\| = 2\sqrt{1 + 1 + 1} = 2\sqrt{3}$.

Exercício 580 Observe a figura seguinte, com atenção:



O sólido apresentado resulta da colocação duma pirâmide quadrangular regular sobre um cubo. A base da pirâmide é uma das faces do cubo e está assente no plano de equação $z = 0$. O volume do cubo é o triplo do volume da pirâmide. Suponha que a aresta do cubo mede 2 cm. Tomando 1 cm para unidade, determine:

- As coordenadas dos vértices do sólido.
- Uma equação cartesiana do plano DVE .
- Uma equação vectorial do plano DVF .
- Uma equação cartesiana do plano AVB .
- A área total do sólido
- Uma equação da maior superfície esférica contida na pirâmide.
- O baricentro do triângulo $[VBC]$.
- O circuncentro do triângulo $[VEF]$.
- O ortocentro do triângulo $[VAB]$.

Resolução

- a) $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 2, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (2, 0, 0)$
 $D = (2, 0, -2)$, $E = (2, 2, -2)$, $F = (0, 0, -2)$, $G = (0, 0, -2)$

Falta-nos determinar as coordenadas do vértice V . Ora, $V = (1, 1, h)$, onde h é a altura da pirâmide. É imediato concluir que $h = 2$, pois o cubo e a pirâmide têm a mesma base e o volume do cubo é triplo do volume da pirâmide. Então, $V = (1, 1, 2)$.

- b) $\overrightarrow{DV} = V - D = (1, 1, 2) - (2, 0, -2) = (-1, 1, 4)$
 $\overrightarrow{DE} = E - D = (2, 2, -2) - (2, 0, -2) = (0, 2, 0)$

Pretendemos encontrar um vector não nulo perpendicular aos dois vectores anteriores:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 1, 4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 2, 0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b + 4c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4c \\ b = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c = 1$, temos $a = 4$. Então, $(a, b, c) = (4, 0, 1)$, pelo que uma das equações do plano DVE é $4(x - 1) + z - 2 = 0$.

- c) $\overrightarrow{DV} = V - D = (1, 1, 2) - (2, 0, -2) = (-1, 1, 4)$
 $\overrightarrow{DF} = F - D = (0, 0, -2) - (2, 0, -2) = (-2, 0, 0) \parallel (1, 0, 0)$

Uma equação vectorial do plano VDF é $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \alpha(-1, 1, 4) + \beta(1, 0, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \overrightarrow{AV} &= V - A = (1, 1, 2) - (0, 2, 0) = (1, -1, 2) \\ \overrightarrow{AB} &= B - A = (2, 2, 0) - (0, 2, 0) = (2, 0, 0) \end{aligned}$$

Pretendemos encontrar um vector não nulo perpendicular aos dois vectores anteriores:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 0, 0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2c \\ a = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c = 1$, temos $b = 2$.

Logo, o vector pretendido pode ser $(0, 2, 1)$ e uma das equações cartesianas do plano VAB é $2(y - 2) + z = 0$.

e) O sólido é formado por cinco faces quadradas (faces do cubo) e quatro faces triangulares (faces da pirâmide).

A área de cada quadrado é 4 cm^2 .

Seja M , o ponto médio de $[AB]$. Então $M = (1, 2, 0)$, pelo que $\overrightarrow{MV} = V - M = (1, 1, 2) - (1, 2, 0) = (0, -1, 2)$.

Logo, $\|\overrightarrow{MV}\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. A área de cada triângulo é $\frac{2 \times \sqrt{5}}{2} \text{ cm}^2 = \sqrt{5} \text{ cm}^2$.

A área total do sólido é $(5 \times 4 + 4\sqrt{5}) \text{ cm}^2 = (20 + 4\sqrt{5}) \text{ cm}^2$.

f) A maior superfície esférica contida na pirâmide é tangente à base e às quatro faces laterais da pirâmide. O centro da superfície esférica é o ponto $H = (1, 1, k)$, com $k > 0$ e tal que a distância de H às quatro faces laterais da pirâmide seja k .

Já vimos que uma equação do plano VAB é $2y + z - 4 = 0$. Se quisermos encontrar a intersecção do plano anterior com a recta que lhe é perpendicular e que passa por H , temos:

$$I = H + \alpha(0, 2, 1) = (1, 1, k) + \alpha(0, 2, 1) = (1, 1 + 2\alpha, k + \alpha)$$

Então, $2 + 4\alpha + k + \alpha - 4 = 0$, donde vem $k = 2 - 5\alpha$.

$$\|\overrightarrow{HI}\| = \|\alpha(0, 2, 1)\| = |\alpha|\sqrt{5} = k.$$

Então, $|\alpha|\sqrt{5} = 2 - 5\alpha$. Elevando ao quadrado, temos $5\alpha^2 = 4 - 20\alpha + 25\alpha^2$.

$$20\alpha^2 - 20\alpha + 4 = 0 \iff 5\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \iff \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{10} \iff \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

Apenas interessa a solução $\alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$, porque $k = 2 - 5\alpha > 0$. Então, $k = 2 - 5\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, pelo que $H = (1, 1, k) = \left(1, 1, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$.

A equação pretendida é:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + \left(z - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2$$

g) $V = (1, 1, 2), B = (2, 2, 0), C = (2, 0, 0)$. O ponto médio do lado $[BC]$ é $M = (2, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (1, 1, 2) - (2, 1, 0) = (-1, 0, 2)$$

Seja J , o baricentro do triângulo. Então, $J = M + \frac{1}{3}\overrightarrow{MV} = (2, 1, 0) + \frac{1}{3}(-1, 0, 2) = \left(\frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$.

Uma maneira rápida de encontrar o baricentro dum triângulo é calcular a média aritmética das coordenadas homólogas dos vértices do triângulo:

$$J = \left(\frac{1 + 2 + 2}{3}, \frac{1 + 2 + 0}{3}, \frac{2 + 0 + 0}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

h) $E = (2, 2, -2), F = (0, 2, -2), V = (1, 1, 2)$

O circuncentro dum triângulo é o ponto de intersecção de dois planos mediadores dos lados do triângulo com o plano que contém o triângulo. Sejam $M_1 = (1, 2, -2)$ e $M_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ os pontos médios de $[EF]$ e $[VE]$, respectivamente.

$$\overrightarrow{EV} = V - E = (1, 1, 2) - (2, 2, -2) = (-1, -1, 4) \parallel (1, 1, -4).$$

Uma equação do plano mediador de $[VE]$ é:

$$x - \frac{3}{2} + y - \frac{3}{2} - 4z = 0$$

$$\overrightarrow{EF} = F - E = (0, 2, -2) - (2, 2, -2) = (-2, 0, 0) \parallel (1, 0, 0).$$

Uma equação do plano mediador de $[EF]$ é:

$$x - 1 = 0$$

Para encontrar o circuncentro, falta-nos uma equação do plano VEF :

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, -4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - 4c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 4c \end{cases}$$

Então, $(0, 4, 1)$ é um vector perpendicular ao plano VEF .

Logo, uma equação do plano é $4(y - 1) + z - 2 = 0$, ou seja, $4y + z = 6$.

$$\begin{cases} x + y - 4z = 3 \\ x = 1 \\ z = 6 - 4y \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + y - 24 + 16y = 3 \\ x = 1 \\ z = 6 - 4y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{26}{17} \\ x = 1 \\ z = 6 - \frac{104}{17} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{26}{17} \\ x = 1 \\ z = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

Logo, o circuncentro de $[VEF]$ é $K = (1, \frac{26}{17}, -\frac{2}{17})$.

Verificação:

$$\overrightarrow{KV} = (1, 1, 2) - (1, \frac{26}{17}, -\frac{2}{17}) = (0, -\frac{9}{17}, \frac{36}{17}) \implies \|\overrightarrow{KV}\| = \frac{9}{17}\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{KE} = (1, \frac{26}{17}, -\frac{2}{17}) - (2, 2, -2) = (-1, -\frac{8}{17}, \frac{32}{17}) \implies \|\overrightarrow{KE}\| = \frac{9}{17}\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{KF} = (1, \frac{26}{17}, -\frac{2}{17}) - (0, 2, -2) = (1, -\frac{8}{17}, \frac{32}{17}) \implies \|\overrightarrow{KF}\| = \frac{9}{17}\sqrt{17}$$

Condição que define a circunferência circunscrita ao triângulo $[VEF]$:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - \frac{26}{17})^2 + (6 - 4y + \frac{2}{17})^2 = \frac{81}{17} \\ z = 6 - 4y \end{cases}$$

i) $A = (0, 2, 0), B = (2, 2, 0), V = (1, 1, 2).$

O ortocentro do triângulo $[VAB]$ é o ponto de intersecção das rectas que contêm as alturas do triângulo.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2, 0) - (0, 2, 0) = (2, 0, 0) \parallel (1, 0, 0)$$

Plano perpendicular a \overrightarrow{AB} e que passa por V :

$$x = 1$$

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (1, 1, 2) - (0, 2, 0) = (1, -1, 2)$$

Plano perpendicular a \overrightarrow{AV} e que passa por B :

$$x - 2 - (y - 2) + 2z = 0$$

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -1, 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ a - b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 2c \end{cases}$$

Equação do plano $[ABV]$:

$$2(y - 2) + z = 0$$

Resolução do sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2y + z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2z \\ 2 + 4z + z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{9}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Então, o ortocentro do triângulo é o ponto $(1, \frac{9}{5}, \frac{2}{5})$.

Exercício 581 Determine o baricentro do triângulo $[ABC]$, em que temos $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$.

Resolução

Seja M_1 o ponto médio de $[AB]$. Então, $M_1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Logo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM_1} &= M_1 - C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) - (x_3, y_3, z_3) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{2}, \frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{2}, \frac{z_1 + z_2 - 2z_3}{2}\right) \end{aligned}$$

Seja G , o baricentro do triângulo. Então:

$$\begin{aligned} G &= M_1 - \frac{1}{3}\overrightarrow{CM_1} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) - \left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{6}, \frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{6}, \frac{z_1 + z_2 - 2z_3}{6}\right) \\ &= \left(\frac{3x_1 + 3x_2 - x_1 - x_2 + 2x_3}{6}, \frac{3y_1 + 3y_2 - y_1 - y_2 + 2y_3}{6}, \frac{3z_1 + 3z_2 - z_1 - z_2 + 2z_3}{6}\right) \\ &= \left(\frac{2x_1 + 2x_2 + 2x_3}{6}, \frac{2y_1 + 2y_2 + 2y_3}{6}, \frac{2z_1 + 2z_2 + 2z_3}{6}\right) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right) \end{aligned}$$

Exercício 582 Determine o baricentro do triângulo $[ABC]$, em que $A = (3, 1, 2)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (1, 1, 2)$.

Resolução

Seja M o ponto médio de $[AC]$. Então, $M = (2, 1, 2)$ e $\overrightarrow{MB} = B - M = (4, 3, 0) - (2, 1, 2) = (2, 2, -2)$.

Então, $G = M + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} = (2, 1, 2) + \frac{1}{3}(2, 2, -2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Mas, é muito mais fácil aplicar a propriedade anterior:

$$G = \left(\frac{3 + 4 + 1}{3}, \frac{1 + 3 + 1}{3}, \frac{2 + 0 + 2}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Exercício 583 Determine a área do triângulo $[ABC]$, no caso em que $A = (3, 4, 2)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (1, 1, 3)$.

Resolução

1. Calculando a área dum paralelogramo:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 0) - (3, 4, 2) = (1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 1, 3) - (3, 4, 2) = (-2, -3, 1) \end{cases}$$

Cálculo do produto externo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} &= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-1 - 6)\vec{e}_1 - (1 - 4)\vec{e}_2 + (-3 - 2)\vec{e}_3 = -7\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 = (-7, 3, -5) \end{aligned}$$

A norma do vector anterior é $\sqrt{49 + 9 + 25}$, pelo que a área do triângulo é metade daquele valor, ou seja, $\frac{\sqrt{83}}{2}$ unidades de área.

2. Aplicando a lei dos cossenos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 0) - (3, 4, 2) = (1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 1, 3) - (3, 4, 2) = (-2, -3, 1) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (1, 1, 3) - (4, 3, 0) = (-3, -2, 3) \end{cases}$$

Então:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}, \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

Pela lei dos cossenos:

$$(\sqrt{22})^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \times \sqrt{14} \times \sqrt{6} \cos A$$

Logo, $2\sqrt{84} \cos A = -2$, donde vem $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{84}}$. Então, $\sin A = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{84}}$.

E a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{1}{2}\sqrt{14} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{84}} = \frac{\sqrt{83}}{2}$ unidades de área.

3. Aplicando a fórmula de Heron:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}, \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{14}, \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

Então,

$$\begin{cases} s = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{22}}{2}, s-a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}-\sqrt{22}}{2} \\ s-b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{22}}{2}, s-c = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{22}}{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} s(s-a) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{22}}{2} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}-\sqrt{22}}{2} = \frac{6+14+2\sqrt{84}-22}{4} = \frac{\sqrt{84}-1}{2} \\ (s-b)(s-c) = \frac{\sqrt{22}+(\sqrt{6}-\sqrt{14})}{2} \times \frac{\sqrt{22}-(\sqrt{6}-\sqrt{14})}{2} = \frac{22-6-14+2\sqrt{84}}{4} = \frac{\sqrt{84}+1}{2} \\ s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{\sqrt{84}-1}{2} \times \frac{\sqrt{84}+1}{2} = \frac{83}{4} \end{cases}$$

Logo, a área do triângulo é $\frac{\sqrt{83}}{2}$ unidades de área.

Exercício 584 Considere os pontos $A = (4, 2, 4)$, $B = (10, 2, -2)$.

1. Determine os pontos C pertencentes ao plano de equação $x - 5y + z = -2$, de modo que o triângulo $[ABC]$ seja equilátero.
2. Escolha um dos pontos obtidos na alínea anterior e determine um quarto ponto V , que defina com os outros três um tetraedro regular.
3. Determine a área total do tetraedro.
4. Determine o volume do tetraedro.

Resolução

$$1. \overrightarrow{AB} = B - A = (10, 2, -2) - (4, 2, 4) = (6, 0, -6) \parallel (1, 0, -1)$$

O ponto médio de $[AB]$ é $(7, 2, 1)$, pelo que o plano mediador de $[AB]$ pode ser definido por $x - 7 - (z - 1) = 0$, ou ainda, por $x - z = 6$.

Intersecção dos dois planos:

$$\begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x - z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} z + 6 - 5y + z = -2 \\ x = z + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y = 2z + 8 \\ x = z + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2z+8}{5} \\ x = z + 6 \end{cases}$$

Logo, $C = (z + 6, \frac{2z+8}{5}, z)$. Então:

$$\overrightarrow{AC} = \left(z + 6, \frac{2z+8}{5}, z\right) - (4, 2, 4) = \left(z + 2, \frac{2z-2}{5}, z - 4\right)$$

Mas, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$, pelo que tem se ser $\|\overrightarrow{AC}\| = 6\sqrt{2}$.

Então, $\sqrt{(z+2)^2 + \left(\frac{2z-2}{5}\right)^2 + (z-4)^2} = 6\sqrt{2}$.

Logo, devemos ter

$$\begin{aligned}(z+2)^2 + \left(\frac{2z-2}{5}\right)^2 + (z-4)^2 = 72 &\iff z^2 + 4z + 4 + \frac{4z^2 - 8z + 4}{25} + z^2 - 8z + 16 = 72 \\ &\iff 2z^2 - 4z + \frac{4z^2 - 8z + 4}{25} = 52 \\ &\iff 50z^2 - 100z + 4z^2 - 8z + 4 = 1300 \\ &\iff 54z^2 - 108z - 1296 = 0 \iff z^2 - 2z - 24 = 0 \\ &\iff z = 1 \pm \sqrt{1+24} \iff z = -4 \vee z = 6\end{aligned}$$

Se $z = -4$, temos $C = (z + 6, \frac{2z+8}{5}, z) = (2, 0, -4)$.

Se $z = 6$, temos $C = (z + 6, \frac{2z+8}{5}, z) = (12, 4, 6)$.

Outra resolução:

Começamos por observar que a altura dum triângulo equilátero de lado l é $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Em segundo lugar, refira-se que a altura dum triângulo equilátero (segmento de recta) é perpendicular à base no seu ponto médio. Em terceiro lugar, refira-se que os pontos A, B, C pertencem ao plano de equação $x - 5y + z = -2$, como se pode verificar facilmente. Se tal não acontecesse, podíamos encontrar uma equação do plano ABC , ou encontrar um vector perpendicular a este plano.

Então, a recta que contém a altura relativa ao vértice C é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB} = (6, 0, -6)$ e ao vector $\overrightarrow{u} = (1, -5, 1)$, que é perpendicular a todas as rectas do plano de equação $x - 5y + z = -2$.

Então, vamos procurar um vector $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ que seja perpendicular aos dois vectores \overrightarrow{u} e \overrightarrow{AB} :

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (6, 0, -6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -5, 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6a - 6c = 0 \\ a - 5b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = a \\ a - 5b + a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{2a}{5} \\ c = 4a \end{cases}$$

Fazendo $a = 5$, temos $b = 2$ e $c = 5$. Logo, $\overrightarrow{v} = (a, b, c) = (5, 2, 5)$.

Ora, $\|\overrightarrow{AB}\| = 6\sqrt{2}$ e $\|\overrightarrow{v}\| = \|(5, 2, 5)\| = 3\sqrt{6}$.

Mas, $\frac{l\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$, o que facilita a resolução.

Seja $M = (7, 2, 1)$, o ponto médio de $[AB]$. Então, $C = M \pm \overrightarrow{v}$.

Logo, $C = (7, 2, 1) \pm (5, 2, 5)$, donde vem $C = (12, 4, 6) \vee C = (2, 0, -4)$.

2. Sejam $A = (4, 2, 4)$, $B = (10, 2, -2)$, $C = (2, 0, -4)$. Seja $M = (7, 2, 1)$, o ponto médio de $[AB]$.

G , o baricentro do triângulo $[AB]$, é dado por $G = M + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, mas, pode ser calculado pela média aritmética das coordenadas dos vértices do triângulo:

$$G = \left(\frac{4+10+2}{3}, \frac{2+2+0}{3}, \frac{4-2-4}{3} \right) = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

O quarto vértice do tetraedro pertence à recta que passa por G e é perpendicular ao plano ABC .

Uma maneira interessante de continuar, consiste no cálculo da altura do tetraedro (altura da pirâmide).

A altura do tetraedro, um terço da mediana e a altura do triângulo (face lateral) definem um triângulo rectângulo em que a hipotenusa é a altura do triângulo.

$\frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}(-5, -2, -5)$, pelo que $\frac{1}{3}\|\overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{3}\sqrt{25+4+25} = \sqrt{6}$

Então, $w^2 + 6 = 54$, donde vem $w = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Mas, o plano ABC tem equação $x - 5y + z = -2$, pelo que $\overrightarrow{u} = (1, -5, 1)$ é perpendicular ao plano. Ora, $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Então, $\overrightarrow{VG} = \pm \frac{4}{3}\overrightarrow{u}$.

Logo, $V = G \pm \frac{4}{3}\overrightarrow{u} = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \pm \left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Uma das soluções (a mais simples) é:

$$V = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{4}{3}\right) = (4, 8, -2)$$

Façamos a verificação:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AV} &= V - A = (4, 8, -2) - (4, 2, 4) = (0, 6, -6), \quad \|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BV} &= V - B = (4, 8, -2) - (10, 2, -2) = (-6, 6, 0), \quad \|\overrightarrow{BV}\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CV} &= V - C = (4, 8, -2) - (2, 0, -4) = (2, 8, 2), \quad \|\overrightarrow{BV}\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

A outra solução é $V = (\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) + (\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{4}{3}) = (\frac{20}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{2}{3})$.

Outra maneira de encontrar o quarto vértice:

$$G = (\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}), V = (\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) + \alpha(1, -5, 1)$$

Logo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AV} &= \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) + \alpha(1, -5, 1) - (4, 2, 4) = \left(\frac{4}{3} + \alpha, -\frac{2}{3} - 5\alpha, -\frac{14}{3} + \alpha\right) \\ &= \frac{1}{3}(4 + 3\alpha, -2 - 15\alpha, -14 + 3\alpha)\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AV}\| &= \frac{1}{3}\sqrt{(4 + 3\alpha)^2 + (-2 - 15\alpha)^2 + (-14 + 3\alpha)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{16 + 24\alpha + 9\alpha^2 + 4 + 60\alpha + 225\alpha^2 + 196 - 84\alpha + 9\alpha^2} = \frac{1}{3}\sqrt{243\alpha^2 + 216}\end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{3}\sqrt{243\alpha^2 + 216} = 6\sqrt{2}$, ou seja $\sqrt{243\alpha^2 + 216} = 18\sqrt{2}$. Então:

$$\sqrt{243\alpha^2 + 216} = 18\sqrt{2} \iff 243\alpha^2 + 216 = 648 \iff \alpha^2 = \frac{432}{243} \iff \alpha = \pm \frac{4}{3}$$

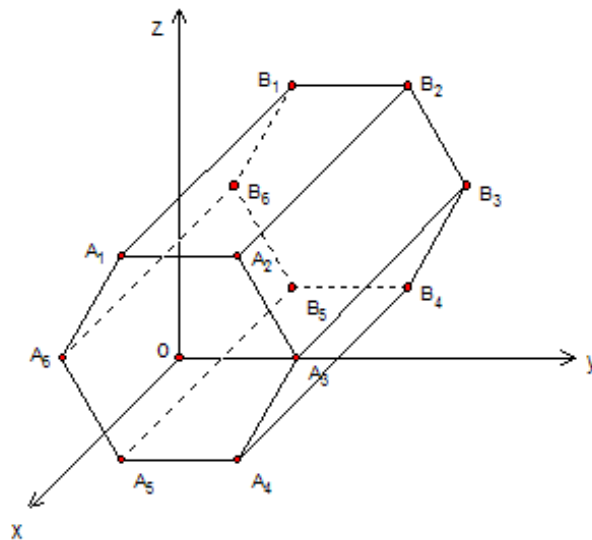
Logo, $V = (\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}) \pm \frac{4}{3}(1, -5, 1)$.

3. A área dum triângulo equilátero, de lado l , é $l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, pelo que a área total do tetraedro regular é $4 \times l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, ou seja, $l^2 \sqrt{3}$. Neste caso, temos $l^2 \sqrt{3} = 72\sqrt{3}$.
4. O tetraedro é uma pirâmide, motivo pelo qual o seu volume é um terço do produto da área da base pela altura. Neste caso, temos que o volume é $\frac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 72$.

Registe-se que o volume dum tetraedro regular, de aresta l , é dado por

$$\frac{l^3 \sqrt{2}}{12}$$

Exercício 585 Considere o prisma (recto) representado na figura:



O hexágono regular $[A_1A_2A_3A_4A_5A_6]$ tem centro $(0, 0, 0)$. As coordenadas do ponto A_3 são $(0, 2, 0)$ e a base $[B_1B_2B_3B_4B_5B_6]$ está contida no plano de equação $x = -16$.

1. Mostre que $A_2 = (0, 1, \sqrt{3})$.
2. Indique as coordenadas dos vértices do prisma.
3. Indique uma equação cartesiana do plano mediador de $[A_1B_1]$.
4. Calcule a área total do prisma.
5. Calcule o volume do prisma.
6. Calcule o volume do maior cilindro de revolução contido no prisma.
7. Calcule o volume do maior elipsóide de revolução contido no prisma.

Resolução

1. $[OA_2A_3]$ é um triângulo equilátero de lado 2. Seja h a sua altura. Então, $h^2 + 1^2 = 2^2$, donde vem $h = \sqrt{3}$. Como a base $[A_1A_2A_3A_4A_5A_6]$ está contida no plano $x = 0$, temos que $A_2 = (0, 1, \sqrt{3})$.
2. $A_2 = (0, 1, \sqrt{3})$, $A_3 = (0, 2, 0)$, $A_4 = (0, 1, -\sqrt{3})$, $A_5 = (0, -1, -\sqrt{3})$, $A_6 = (0, -2, 0)$, $A_1 = (0, -1, \sqrt{3})$
 $B_2 = (-16, 1, \sqrt{3})$, $B_3 = (-16, 2, 0)$, $B_4 = (-16, 1, -\sqrt{3})$
 $B_5 = (-16, -1, -\sqrt{3})$, $B_6 = (-16, -2, 0)$, $B_1 = (-16, -1, \sqrt{3})$
3. Uma equação cartesiana do plano mediador de $[A_1B_1]$ é $x = -8$, porque a distância entre os planos que contêm as duas bases é 16 e as arestas laterais são perpendiculares às bases, uma vez que o prisma é recto. É claro que podemos efectuar outros cálculos, para chegar à mesma conclusão:
 Seja $P = (x, y, z)$ um ponto equidistante de A_1 e de B_1 . Então,

$$\begin{aligned} \overline{PA_1} = \overline{PB_1} &\iff \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x+16)^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{3})^2} \\ &\iff x^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{3})^2 = (x+16)^2 + (y-1)^2 + (z-\sqrt{3})^2 \\ &\iff x^2 = (x+16)^2 \iff x^2 = x^2 + 32x + 256 \\ &\iff 32x = -256 \iff x = -8 \end{aligned}$$

Ou:
$$\begin{cases} \overrightarrow{A_1B_1} = B_1 - A_1 = (-16, -1, \sqrt{3}) - (0, -1, \sqrt{3}) = (-16, 0, 0) = -16(1, 0, 0) \\ M = \left(\frac{-16+0}{2}, \frac{-1-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \right) = (-8, -1, \sqrt{3}) \end{cases}$$

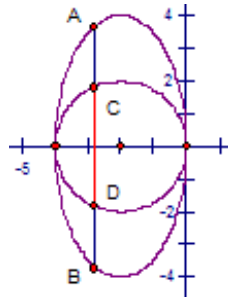
Logo, uma equação do plano mediador de $[A_1B_1]$ é $1(x+8) + 0(y+1) + 0(z-\sqrt{3}) = 0$, ou seja, $x = -8$.

4. A área de cada face lateral é 2×16 (unidades de área). A área de $[OA_2A_3]$ é $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ (unidades de área). Logo, a área das bases é $6\sqrt{3}$ (unidades de área). Então, a área total do prisma é $(6 \times 32 + 2 \times 6\sqrt{3})$ (unidades de área), ou seja, $(192 + 12\sqrt{3})$ (unidades de área).
5. O volume do prisma é $6\sqrt{3} \times 16$ (unidades de volume), ou seja, $96\sqrt{3}$ (unidades de volume).
6. O maior cilindro de revolução contido no prisma é o cilindro com a mesma altura e cujas bases são circunferências inscritas nas bases do prisma. Tais circunferências têm raio $\sqrt{3}$. Então, o volume do cilindro é $\pi \times (\sqrt{3})^2 \times 16$ (unidades de volume), ou seja, 48π (unidades de volume).
7. A maior esfera contida no prisma tem raio $\sqrt{3}$, pelo que o seu volume é $\frac{4}{3} \times \pi \times (\sqrt{3})^3$ (unidades de volume), ou seja, $4\pi\sqrt{3}$ (unidades de volume). Se dilatarmos a esfera de centro no plano $x = -8$, ao longo do eixo das abcissas, mantendo fixo o referido plano de equação $x = -8$, vamos obtendo um elipsóide de revolução. Para que o elipsóide seja tangente ao plano $x = 0$, a razão da dilatação deve ser $\frac{8}{\sqrt{3}}$, pelo que o volume do elipsóide vem multiplicado por $\frac{8}{\sqrt{3}}$. Então, o volume do elipsóide é 32π (unidades de volume).

Exercício 586 Determine a área da região plana limitada pela elipse definida pelos gráficos das duas funções $f(x) = 2\sqrt{4 - (x + 2)^2}$ e $g(x) = -2\sqrt{4 - (x + 2)^2}$.

Resolução

Consideremos a elipse dada e a circunferência definida por $y = \pm\sqrt{4 - (x + 2)^2}$, conforme se vê na figura seguinte.



Consideremos, sobre o gráfico de $f(x)$, um ponto A . Consideremos, ainda, a recta vertical que passa por A . Esta recta intersecta os gráficos das restantes três funções nos pontos B , C e D . Mas, $\overline{AB} = 2 \times \overline{CD}$, qualquer que seja a posição do ponto A (sobre o gráfico de f). Então, pelo princípio de Cavallieri, a área da região plana limitada pela elipse é o dobro da área do círculo. Então, a área da região plana limitada pela elipse é de 8π (unidades de área).

Suponhamos, agora, que a elipse e a circunferência rodam meia volta, em torno do eixo vertical da elipse, definindo um elipsóide de revolução e uma esfera. Consideremos o plano que passa por A e que é perpendicular ao eixo das abcissas (referencial a duas dimensões da figura). Este plano, intersecta o elipsóide segundo uma elipse e a esfera segundo um círculo, tendo-se que a área da região plana limitada pela elipse é o dobro da área do círculo. Então, como o ponto A é arbitrário, concluímos (pelo princípio de Cavallieri) que o volume da região limitada pelo elipsóide é o dobro do volume da esfera. Logo, o volume da região plana limitada pelo elipsóide é de $2 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3$ (unidades de volume), ou seja, $\frac{64}{3}\pi$ (unidades de volume).

Exercício 587 Determine a área da região plana limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Resolução

Suponhamos que $a > 0 \wedge b > 0$. Consideremos uma dilatação (ou contracção) ao longo da direcção do eixo das abcissas de razão $\frac{b}{a}$. Então, obtemos uma circunferência que limita um círculo de raio b . Logo, a área do círculo é πb^2 . Então, a área pretendida é $\pi b^2 \times \frac{a}{b}$ (unidades de área), ou seja, πab (unidades de área). Se $a = b = r$, a elipse transforma-se numa circunferência que limita um círculo de área πr^2 .

Observemos que a dilatação considerada pode ser interpretada do seguinte modo: Temos um referencial ortonormado desenhado numa faixa plana elástica. Depois, seguramos nas duas extremidades da faixa e afastamos uma da outra, ficando o eixo das ordenadas fixo. Fica, assim, definida uma aplicação, à qual se dá o nome de afinidade. Esta aplicação transforma segmentos de recta paralelos em segmentos de recta paralelos.

Exercício 588 Determine o volume da região limitada pelo elipsóide de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Resolução

Suponhamos que $a > 0 \wedge b > 0 \wedge c > 0$. Consideremos uma dilatação (ou contracção) ao longo da direcção do eixo das abcissas de razão $\frac{b}{a}$. Sejam V_1 o volume da região limitada pelo elipsóide dado e V_2 o volume da região limitada pelo novo elipsóide (de revolução).

Então, $V_2 = \frac{b}{a} V_1$. Mas, $V_2 = \frac{4}{3} \pi b^3 \times \frac{c}{b} = \frac{4}{3} \pi b^2 c$. Logo, $V_1 = \frac{4}{3} \pi b^2 c \times \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \pi abc$.

Se $a = b = c = r$, então o elipsóide é uma superfície esférica de raio r , tendo-se que o volume da esfera correspondente é $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Exercício 589 Considere os pontos $A = (3, 3, 3)$, $B = (6, 4, 5)$, $C = (1, 2, -1)$ e $D = (2, 6, -3)$. Determine:

1. A distância entre as rectas AB e CD .

2. Determine uma equação cartesiana do plano ABC .

Resolução

$$1. \overrightarrow{CA} = A - C = (3, 3, 3) - (1, 2, -1) = (2, 1, 4)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (6, 4, 5) - (3, 3, 3) = (3, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (2, 6, -3) - (1, 2, -1) = (1, 4, -2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 11\vec{e}_3 = (-10, 8, 11)$$

$$\text{proj}_{(-10, 8, 11)}(2, 1, 4) = \frac{(-10, 8, 11) \cdot (2, 1, 4)}{(-10, 8, 11) \cdot (-10, 8, 11)} (-10, 8, 11) = \frac{32}{285} (-10, 8, 11)$$

$$\left\| \text{proj}_{(-10, 8, 11)}(2, 1, 4) \right\| = \frac{32}{285} \sqrt{285}$$

$$2. \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (2, -8, 1)$$

Uma equação do plano ABC :

$$2(x - 3) - 8(y - 3) + z - 3 = 0$$

Exercício 590 Considere os vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, -1, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, 1)$.

1. Escreva o duplo produto externo $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ como combinação linear de \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .

2. Calcule $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}$ e $\vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$ e demonstre a propriedade que os resultados sugerem.

Resolução

$$1. (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (-2, -1, 3)$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (9, -9, 3)$$

$$(9, -9, 3) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(2, -1, 1) + \gamma(1, 1, 1) = (\alpha + 2\beta + \gamma, 2\alpha - \beta + \gamma, 3\alpha + \beta + \gamma)$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 9 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = -9 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - 3\beta = -18 \\ \alpha + 2\beta = 12 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 5\beta = 30 \\ \alpha + 2\beta = 12 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 6 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = -3 \end{cases}$$

$$\text{Então, } \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (9, -9, 3) = 6(2, -1, 1) - 3(1, 1, 1)$$

$$2. \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 = (5, 5, -5)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = (5, 5, -5) \cdot (1, 1, 1) = 5$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (-2, -1, 3)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u} = (-2, -1, 3) \cdot (1, 2, 3) = 5$$

Prove que $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3 \\
 \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \cdot (w_1, w_2, w_3) \\
 &= u_2v_3w_1 - u_3v_2w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 + u_1v_2w_3 - u_2v_1w_3 \\
 \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2w_3 - v_3w_2)\vec{e}_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)\vec{e}_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)\vec{e}_3 \\
 \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u} &= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \cdot (u_1, u_2, u_3) \\
 &= v_2w_3u_1 - v_3w_2u_1 + v_3w_1u_2 - v_1w_3u_2 + v_1w_2u_3 - v_2w_1u_3 \\
 &= u_2v_3w_1 - u_3v_2w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 + u_1v_2w_3 - u_2v_1w_3
 \end{aligned}$$

Logo, $\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{u}$.

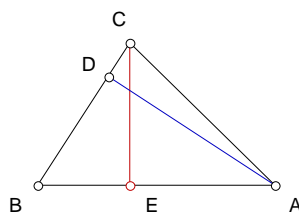
Capítulo 21

Um simples triângulo, mas muito para aprender

Exemplo 591 *Determine os senos dos ângulos internos dum triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 7 cm.*

Se conhecermos a lei dos cosenos e a lei dos senos:

Consideremos a figura seguinte:



Façamos $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{7}{\sin C} = 2R$$

Pela lei dos cosenos:

$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \cos C \iff 60 \cos C = 36 + 25 - 49 \iff \cos C = \frac{12}{60} \iff \cos C = \frac{1}{5}$$

Então, $\sin C = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$. E agora, temos:

$$\begin{cases} \sin B = \frac{6}{7} \sin C = \frac{6}{7} \times \frac{2}{5}\sqrt{6} = \frac{12}{35}\sqrt{6} \\ \sin A = \frac{5}{7} \sin C = \frac{5}{7} \times \frac{2}{5}\sqrt{6} = \frac{2}{7}\sqrt{6} \\ 2R = \frac{7}{\sin C} = 7 \times \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{35}{2\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{12} \end{cases}$$

Na última igualdade indicada, $2R$ é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Se conhecermos a lei dos cosenos, mas não conhecermos a lei dos senos:

Sejam $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Pela lei dos cosenos, temos:

$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \cos C \iff 60 \cos C = 36 + 25 - 49 \iff \cos C = \frac{12}{60} \iff \cos C = \frac{1}{5}$$

Então, $\sin C = \frac{2}{5}\sqrt{6}$.

Aplicando outra vez a lei dos cosenos:

$$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \times 7 \times 5 \cos B \iff 70 \cos B = 49 + 25 - 36 \iff \cos B = \frac{38}{70} \iff \cos C = \frac{19}{35}$$

$$\text{Então, } \sin B = \sqrt{1 - \frac{361}{1225}} = \sqrt{\frac{864}{1225}} = \frac{12}{35}\sqrt{6}.$$

E, finalmente, temos:

$$5^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \times 7 \times 6 \cos A \iff 84 \cos A = 49 + 36 - 25 \iff \cos B = \frac{60}{84} \iff \cos C = \frac{5}{7}$$

$$\text{Então, } \sin A = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{6}.$$

Se conhecermos a lei dos senos e algumas fórmulas trigonométricas, mas não a lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} \\ \frac{5}{\sin A} = \frac{7}{\sin C} \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \sin(A + B) = 7 \sin A \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \sin A \cos B + 5 \sin B \cos A = 7 \sin A \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \sin A \cos B + 6 \sin A \cos A = 7 \sin A \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \cos B + 6 \cos A = 7 \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \cos B = 7 - 6 \cos A \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} 25 \sin^2 B = 36 \sin^2 A \\ 25 \cos^2 B = 49 - 84 \cos A + 36 \cos^2 A \end{array} \right. \\ &\implies 25 = 36 + 49 - 84 \cos A \implies \cos A = \frac{60}{84} \implies \cos A = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

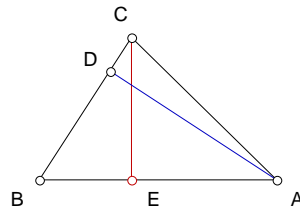
$$\text{E, agora, temos } \sin A = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{6}.$$

$$\text{Então, } \sin B = \frac{6 \sin A}{5} = \frac{12}{35}\sqrt{6}, \sin C = \frac{7 \sin A}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$$

Se não conhecermos a lei dos cossenos, nem a lei dos senos:

Vamos resolver o problema anterior, usando coordenadas cartesianas:

Sejam $B = (0, 0)$, $A = (7, 0)$ e $C = (x, y)$.



Pretendemos determinar C , de modo que as distâncias de C aos pontos A e B sejam iguais a 6 e a 5, respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \\ \sqrt{(x-7)^2 + y^2} = 6 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - 14x + 49 + y^2 = 36 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 14x + 49 = 36 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ 25 - 14x + 49 = 36 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ 14x = 38 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} y^2 = 25 - \frac{361}{49} \\ x = \frac{19}{7} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y^2 = \frac{864}{49} \\ x = \frac{19}{7} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = \pm \frac{12\sqrt{6}}{7} \\ x = \frac{19}{7} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Então, podemos fazer } C = \left(\frac{19}{7}, \frac{12\sqrt{6}}{7} \right).$$

$$\text{Logo, } \sin B = \frac{\frac{12\sqrt{6}}{7}}{5} = \frac{12}{35}\sqrt{6} \text{ e } \sin A = \frac{\frac{12\sqrt{6}}{7}}{6} = \frac{2}{7}\sqrt{6}.$$

O cálculo de $\sin C$ é ligeiramente mais complicado:

$$\text{A área do triângulo } [ABC] \text{ é } \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{12\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}.$$

Então, considerando que a base do triângulo é 5, temos $\frac{1}{2} \times 5h = 6\sqrt{6}$, donde se conclui que $h = \frac{12}{5}\sqrt{6}$, pelo que $\sin C = \frac{\frac{12}{5}\sqrt{6}}{6} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$.

Exemplo 592 Determine os comprimentos das medianas do triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm.

Resolução

Sejam M_1 o ponto médio de $[AB]$, M_2 o ponto médio de $[AC]$ e M_3 o ponto médio de $[BC]$. Consideremos o triângulo $[ACM_1]$. Ora, $\overline{AC} = 6$, $\overline{AM_1} = \frac{7}{2}$, pelo que, aplicando o Teorema de Carnot, obtemos:

$$1. \overline{CM_1}^2 = 6^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \times 6 \times \frac{7}{2} \cos A = 36 + \frac{49}{4} - 42 \times \frac{5}{7} = 36 + \frac{49}{4} - 30 = \frac{73}{4}$$

$$\text{Logo, } \overline{CM_1} = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

$$2. \overline{BM_2}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \cos C = 25 + 9 - 30 \times \frac{1}{5} = 28. \text{ Logo, } \overline{CM_2} = 2\sqrt{7}.$$

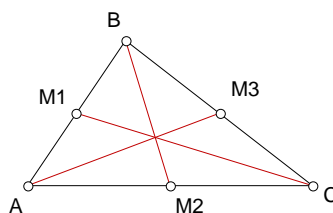
$$3. \overline{AM_3}^2 = 7^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times 7 \times \frac{5}{2} \cos B = 49 + \frac{25}{4} - 35 \times \frac{19}{35} = \frac{145}{4}. \text{ Logo, } \overline{CM_3} = \frac{\sqrt{145}}{2}.$$

Exemplo 593 Consideremos um triângulo $[ABC]$ de lados a, b, c . Sejam M_1 o ponto médio de $[AB]$, M_2 o ponto médio de $[AC]$ e M_3 o ponto médio de $[BC]$. Então:

$$\begin{cases} \overline{CM_1}^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \\ \overline{BM_2}^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \\ \overline{AM_3}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \end{cases}$$

Resolução

Consideremos o seguinte triângulo:



Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos $[BCM_1]$ e $[ABC]$, obtemos:

$$\begin{cases} \overline{CM_1}^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{ac}{2} \cos B = a^2 + \frac{c^2}{4} - ac \cos B \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \end{cases}$$

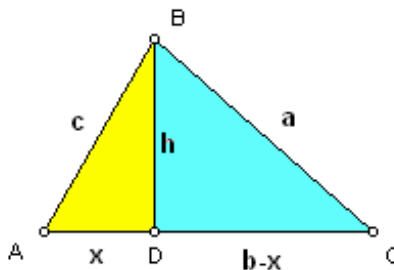
$$\text{Logo, } \overline{CM_1}^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2} = \frac{4a^2 + c^2 + 2b^2 - 2a^2 - 2c^2}{4} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Analogamente, se mostram as duas outras igualdades.

Exemplo 594 Deduza a lei dos senos, a partir da área do triângulo de lados a, b, c .

Resolução

Consideremos o seguinte triângulo:



Na figura anterior, vemos que $h = c \sin A$, pelo que a área do triângulo é $\frac{bh}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$.

Analogamente se mostrava que a área do triângulo pode ser dada por $\frac{ab \sin C}{2}$ e por $\frac{ac \sin B}{2}$.

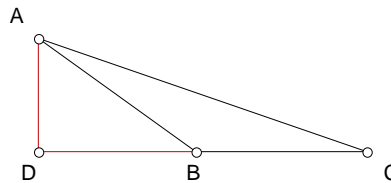
Logo, $ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A$.

Dividindo por abc , obtemos $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, ou seja, a lei dos senos.

Está, assim, demonstrada a lei dos senos (versão curta). É claro que as fracções anteriores podem ser invertidas:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Observe-se que as fórmulas acima, que dão a área do triângulo, são válidas mesmo que o triângulo não seja acutângulo, devido ao facto de ângulos suplementares terem o mesmo seno:



Sejam $h = \overline{AD}$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$. Então, $h = c \sin \widehat{ABD} = c \sin \widehat{ABC} = c \sin B$.

Então, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{ah}{2} = \frac{ac}{2} \sin B$.

E analogamente para os restantes casos.

Então, $\frac{ah}{2} = \frac{ac}{2} \sin B = \frac{ab}{2} \sin C = \frac{bc}{2} \sin A$

Logo, $ac \sin B = ab \sin C = bc \sin A$, donde vem

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Exemplo 595 Deduza a lei dos cosenos, partindo da lei dos senos.

Resolução

Consideremos, num triângulo $[ABC]$ de lados a, b, c , a lei dos senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Então, $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$. Ora, $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$. Então:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin A \cos B + \sin B \cos A} = \frac{c}{\sin A \cos B + \frac{b \sin A}{a} \cos A}$$

Da igualdade anterior vem:

$$a = \frac{c}{\cos B + \frac{b}{a} \cos A}$$

Logo, $c = a \cos B + b \cos A$.

Esta última igualdade tem uma interpretação geométrica óbvia: No caso dum triângulo acutângulo, a altura relativa ao vértice C divide a base em dois segmentos de comprimentos $a \cos B$ e $b \cos A$.

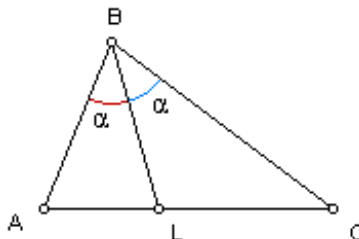
Então:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a \sin B = b \sin A \\ a \cos B = c - b \cos A \end{cases} &\implies \begin{cases} a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A \\ a^2 \cos^2 B = c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \end{cases} \\
&\implies a^2 \sin^2 B + a^2 \cos^2 B = b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\
&\implies a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) = b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\
&\implies a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A
\end{aligned}$$

Exemplo 596 Considere um triângulo $[ABC]$, com $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm e $\overline{BC} = 5$ cm. Seja L o ponto de intersecção da bissetriz do ângulo B com o lado $[AC]$. Determine \overline{AL} , \overline{LC} , $\cos B$, $\sin \frac{B}{2}$, $\sin L$ e \overline{BL} .

Resolução

Consideremos o seguinte triângulo:



Seja $\alpha = \frac{B}{2}$.

Aplicando a lei dos senos, aos triângulos $[ABL]$ e $[BCL]$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin L} = \frac{\overline{BL}}{\sin A} \\ \frac{\overline{LC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\sin L} = \frac{\overline{BL}}{\sin C} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \alpha}{\sin L} \\ \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \alpha}{\sin L} \end{cases} \implies \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}}$$

Então, fazendo $\overline{AL} = x$, temos:

$$\frac{x}{7} = \frac{6-x}{5} \iff 5x = 42 - 7x \iff 12x = 42 \iff x = \frac{7}{2}. \text{ Logo, } 6 - x = \frac{7}{2}.$$

Então, $\overline{AL} = \frac{7}{2}$ cm e $\overline{LC} = \frac{5}{2}$ cm.

Apliquemos a lei dos cosenos, ao triângulo $[ABC]$:

$$6^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos B \iff \cos B = \frac{25 + 79 - 36}{70} \iff \cos B = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}$$

Logo, $\cos(2\alpha) = \frac{19}{35}$.

$$\text{Então, } \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{19}{35}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{54}{35}}{2}} = \sqrt{\frac{54}{70}} = \sqrt{\frac{27}{35}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$$

Aplicando a lei dos senos, ao triângulo $[ABC]$, temos:

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{6}{\sin(2\alpha)} \iff \frac{5}{\sin A} = \frac{6}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \iff \sin A = \frac{5}{3} \sin \alpha \cos \alpha$$

Substituindo em $\frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BL}}{\sin A}$, obtemos:

$$\frac{\frac{7}{2}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BL}}{\frac{5}{3} \sin \alpha \cos \alpha} \iff \frac{7}{2} = \frac{\overline{BL}}{\frac{5}{3} \cos \alpha}$$

Logo, $\overline{BL} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{3} \cos \alpha = \frac{35}{6} \times \frac{3\sqrt{105}}{35} = \frac{\sqrt{105}}{2}$.

Calculemos $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{19}{35}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{70}} = \frac{4}{\sqrt{70}} = \frac{2\sqrt{70}}{35}$$

De $\frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin L}$, vem

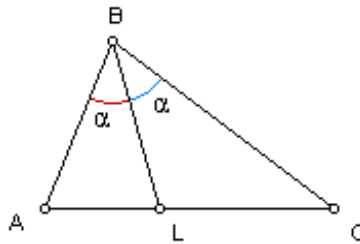
$$\sin L = \frac{7 \sin \alpha}{\overline{AL}} = \frac{7 \times \frac{2\sqrt{70}}{35}}{\frac{7}{2}} = 7 \times \frac{2}{7} \times \frac{2\sqrt{70}}{35} = \frac{4\sqrt{70}}{35}$$

Exemplo 597 Consideremos um triângulo $[ABC]$ de lados a, b, c . Seja L o ponto de intersecção da bissetriz do ângulo B com o lado $[AC]$. Então:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}} \wedge \overline{AL} = \frac{bc}{a+c}, \overline{LC} = \frac{ab}{a+c} \wedge \overline{BL} = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)}}{a+c}$$

Resolução

Consideremos o seguinte triângulo:



Aplicando a lei dos senos, aos triângulos $[ABL]$ e $[BCL]$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin L} = \frac{\overline{BL}}{\sin A} \\ \frac{\overline{LC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\sin L} = \frac{\overline{BL}}{\sin C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \alpha}{\sin L} \\ \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \alpha}{\sin L} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}}$$

Então, fazendo $\overline{AL} = x$, temos:

$$\frac{x}{c} = \frac{b-x}{a} \iff ax = bc - cx \iff (a+c)x = bc \iff x = \frac{bc}{a+c}$$

Logo:

$$x = \frac{bc}{a+c} \wedge b-x = b - \frac{bc}{a+c} = \frac{ab}{a+c}$$

Aplicamos a lei dos cosenos, ao triângulo $[ABC]$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \iff \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Logo, $\cos(2\alpha) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Então:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{2}} = \sqrt{\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{4ac}} = \sqrt{\frac{(a+c)^2 - b^2}{4ac}}$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo $[ABC]$, temos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin(2\alpha)} \iff \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \iff \sin A = \frac{2a}{b} \sin \alpha \cos \alpha$$

Substituindo em $\frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BL}}{\sin A}$, obtemos:

$$\frac{\frac{bc}{a+c}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BL}}{\frac{2a}{b} \sin \alpha \cos \alpha} \iff \frac{bc}{a+c} = \frac{\overline{BL}}{\frac{2a}{b} \cos \alpha}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{BL} &= \frac{2a}{b} \times \frac{bc}{a+c} \cos \alpha = \frac{2ac}{a+c} \sqrt{\frac{(a+c)^2 - b^2}{4ac}} = \frac{2}{2(a+c)} \sqrt{\frac{a^2 c^2 (a+c+b)(a+c-b)}{ac}} \\ &= \frac{\sqrt{ac(a+c+b)(a-b+c)}}{a+c} \end{aligned}$$

Se quisermos, podemos calcular $\sin \alpha$ e $\sin L$:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{2}} = \sqrt{\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{4ac}} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 - (a-c)^2}{4ac}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{4ac}} \end{aligned}$$

De $\frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin L}$, vem:

$$\sin L = \frac{c \sin \alpha}{\frac{bc}{a+c}} = \frac{(a+c) \sin \alpha}{b} = \frac{a+c}{2b} \sqrt{\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{4ac}}$$

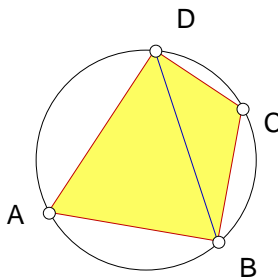
Proposição 598 *Teorema de Brahmagupta*

Consideremos, numa circunferência, quatro pontos A, B, C, D , por esta ordem. Sejam $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Então, a área de $[ABCD]$ é $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

Demonstração

Consideremos a seguinte figura, onde estão representados os quatro pontos A, B, C, D , pertencentes a uma circunferência:



Sejam $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$, $s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{P}{2}$.

Os ângulos A e C são suplementares.

Então, $\sin A = \sin C$, $\cos A = -\cos C$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $[BCD]$, temos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CD} \cos C = b^2 + c^2 - 2bc \cos C = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $[ABD]$, temos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{DA} \cos A = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$

Logo, $b^2 + c^2 + 2bc \cos A = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$, donde se conclui que:

$$2(bc + ad) \cos A = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$$

Seja K , a área do quadrilátero $[ABCD]$. Então, K é a soma das áreas dos dois triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, ou seja,

$$K = \frac{ad \sin A}{2} + \frac{bc \sin C}{2} = \frac{ad \sin A + bc \sin A}{2} = \frac{(ad + bc) \sin A}{2}$$

Então, $4K = 2(ad + bc) \sin A$.

Logo,

$$\begin{cases} 4(ad + bc)^2 \cos^2 A = (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ 4(ad + bc)^2 \sin^2 A = 16K^2 \end{cases}$$

Somando, membro a membro, as duas igualdades anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} 16K^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= 4(ad + bc)^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= 4(ad + bc)^2 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} 16K^2 &= 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) \\ &= [(a + d)^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - (a - d)^2] \\ &= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d) \\ &= (a + b + c + d - 2a)(a + b + c + d - 2b)(a + b + c + d - 2c)(a + b + c + d - 2d) \\ &= (P - 2a)(P - 2b)(P - 2c)(P - 2d) \end{aligned}$$

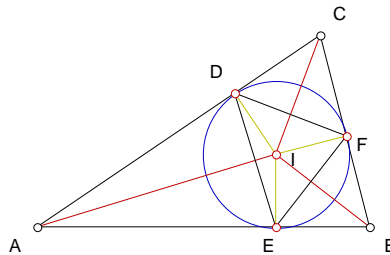
Logo,

$$K^2 = \left(\frac{P - 2a}{2}\right) \left(\frac{P - 2b}{2}\right) \left(\frac{P - 2c}{2}\right) \left(\frac{P - 2d}{2}\right) = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

Logo,

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Exemplo 599 O raio da circunferência inscrita num triângulo



Sejam $P = a + b + c$ e $s = \frac{P}{2}$. Seja I o incentro do triângulo $[ABC]$.

A área do triângulo $[ABC]$ é a soma das áreas dos triângulos $[ACI]$, $[BCI]$ e $[ABI]$, os quais têm a mesma altura r , que é o raio da circunferência inscrita no triângulo.

Logo, K , a área do triângulo $[ABC]$, é dada por $K = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r = sr$.

Mas, pela fórmula de Heron, a área do triângulo é $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Logo, r , o raio da circunferência inscrita num triângulo de lados a, b, c , é

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Proposição 600 *A fórmula de Heron, ela mesma...*

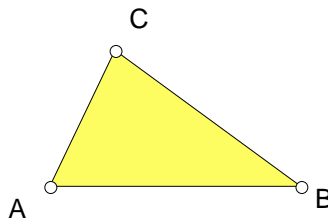
Consideremos um triângulo $[ABC]$, com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$. Seja $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Então, a área do triângulo é $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Demonstração

Para obtermos a fórmula de Heron, basta-nos partir do teorema de Brahmagupta e fazer $d = 0$, obtendo-se para a área dum triângulo de lados a, b, c , o valor $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Outra demonstração



Aplicando a lei dos cossenos, ao triângulo $[ABC]$, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ donde se conclui que } 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2.$$

A área do triângulo $[ABC]$ é $K = \frac{ab}{2} \sin C = \frac{bc}{2} \sin A$. Então:

$$\begin{cases} 4b^2c^2 \sin^2 A = 16K^2 \\ 4b^2c^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \end{cases} \implies 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + 16K^2$$

Então:

$$\begin{aligned} 16K^2 &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\ &= (b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(a-b+c) \\ &= (a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c) \\ &= P(P-2a)(P-2b)(P-2c)(P-2d) \end{aligned}$$

com $P = a + b + c$.

Então, fazendo $s = \frac{P}{2}$, temos:

$$K^2 = \frac{P(P-2a)(P-2b)(P-2c)(P-2d)}{16} = \frac{P}{2} \times \frac{P-2a}{2} \times \frac{P-2b}{2} \times \frac{P-2c}{2} = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

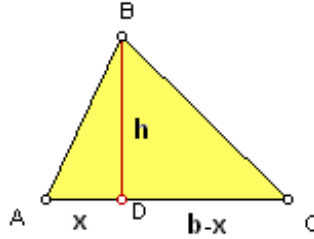
E, finalmente, vem:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Mais uma demonstração da fórmula de Heron

Recordamos a demonstração apresentada no segundo capítulo:

Consideremos o triângulo da figura seguinte:



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = (b-x)^2 + h^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c^2 - x^2 = h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + c^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h = \pm \sqrt{(c+x)(c-x)} \\ x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $h > 0$, temos $h = \sqrt{(c+x)(c-x)}$, com $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

Logo,

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(c+x)(c-x)} = \sqrt{\left(c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \left(c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2b} \times \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{2b} \times \frac{a^2 - (b-c)^2}{2b}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b}} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2b} \end{aligned}$$

Então, a área do triângulo é

$$\begin{aligned} \frac{bh}{2} &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \left(\frac{b+c-a}{2}\right) \left(\frac{a+b-c}{2}\right) \left(\frac{a-b+c}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)} \end{aligned}$$

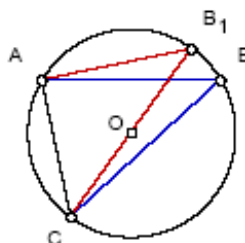
Se representarmos o semiperímetro por s , então a área do triângulo de lados a, b, c é dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

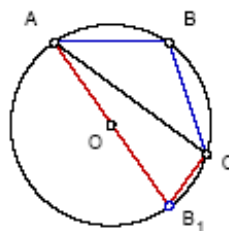
Geometria no Plano

Num triângulo $[ABC]$ verifica-se $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Consideremos a circunferência circunscrita a $[ABC]$, de raio R , e diâmetro $[CB_1]$.


$$\sin B = \sin B_1 = \frac{\overline{AC}}{2R} = \frac{b}{2R}.$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

O caso é diferente, se o ângulo B for obtuso; em tal caso, considera-se o ângulo suplementar AB_1C , o qual tem o mesmo seno que o ângulo ABC :



Então, também neste caso, temos $\sin B = \sin B_1 = \frac{\overline{AC}}{2R} = \frac{b}{2R}$.

Definição 602 *Ceviana é qualquer segmento de recta definido por um vértice dum triângulo e por um ponto do lado oposto (distinto dos extremos).*

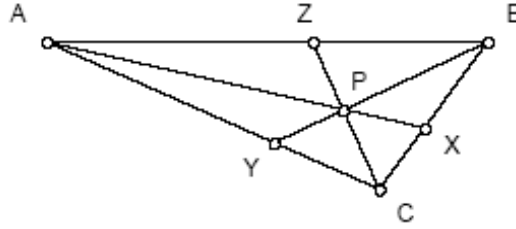
Proposição 603 *(Teorema de Ceva)*

Num triângulo as cevianas $[AX]$, $[BY]$, $[CZ]$ são concorrentes se e só se $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1$.

Demonstração

Começemos por observar que $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}$ representa o único número real λ , tal que $\overrightarrow{BX} = \lambda \overrightarrow{XC}$, pelo que λ pode representar um número positivo ou negativo (ou seja, para cada direcção, podemos definir um sentido, de modo a considerarmos "distâncias" positivas ou negativas).

Suponhamos que as três cevianas são concorrentes num ponto P .



$$\text{Então, } \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} = \frac{\text{ar}[ABX]}{\text{ar}[ACX]} = \frac{\text{ar}[PBX]}{\text{ar}[PCX]} = \frac{\text{ar}[ABX] - \text{ar}[PBX]}{\text{ar}[ACX] - \text{ar}[PCX]} = \frac{\text{ar}[APB]}{\text{ar}[APC]}.$$

$$\text{Analogamente, temos } \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = \frac{\text{ar}[CPB]}{\text{ar}[APB]} \text{ e } \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\text{ar}[CPA]}{\text{ar}[CPB]}.$$

Então:

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\text{ar}[APB]}{\text{ar}[APC]} \times \frac{\text{ar}[CPB]}{\text{ar}[APB]} \times \frac{\text{ar}[CPA]}{\text{ar}[CPB]} = 1$$

Reciprocamente, suponhamos que $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1$. Seja P , o ponto de intersecção das cevianas $[AX]$ e $[BY]$. Seja $[CZ']$, a terceira ceviana que passa por P .

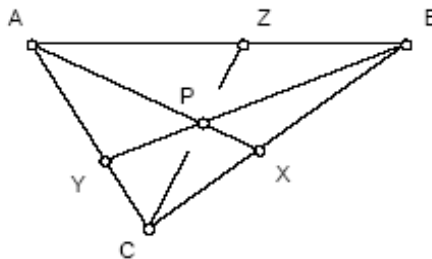
$$\text{Então, } \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ'}}{\overrightarrow{Z'B}} = 1.$$

Logo, $\frac{\overrightarrow{AZ'}}{\overrightarrow{Z'B}} = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}$, donde se conclui que $Z' = Z$ e que as três cevianas $[AX]$, $[BY]$ e $[CZ]$ são concorrentes em P .

Proposição 604 *As medianas dum triângulo dividem-no em seis triângulos com áreas iguais.*

Demonstração

Sejam X, Y, Z os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$, da figura seguinte:



Então, $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{ZB}$, $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{YC}$, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{XB}$. Logo, $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1 \times 1 \times 1 = 1$, pelo que as três medianas se intersectam num ponto P .

Os triângulos $[APY]$ e $[CPY]$ têm a mesma área, porque têm a mesma altura e bases iguais ($\overline{AY} = \overline{YC}$). Analogamente para os triângulos $[CPX]$ e $[BPX]$ e para $[APZ]$ e $[BPZ]$. E o mesmo acontece com os triângulos $[ABY]$ e $[BCY]$, com $[ABX]$ e $[ACX]$ e, ainda, com $[ACZ]$ e $[BCZ]$.

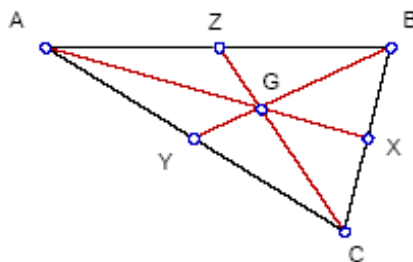
Sejam r , a área comum dos triângulos $[APY]$ e $[CPY]$, s , a área comum de $[CPX]$ e $[BPX]$ e t , a área comum de $[APZ]$ e $[BPZ]$.

Então, $t + 2r = t + 2s$, pelo que $r = s$. Analogamente, $s = t$, pelo que está terminada a demonstração.

Proposição 605 *As medianas dum triângulo trissectam-se.*

Demonstração

Consideremos as medianas $[AX]$, $[BY]$ e $[CZ]$ dum triângulo $[ABC]$.

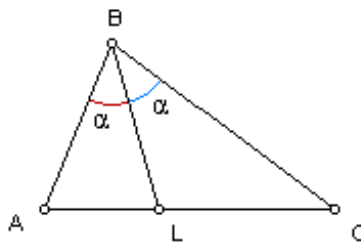


Seja G , o ponto de intersecção das três medianas e consideremos os triângulos $[CGY]$ e $[CGB]$. Estes triângulos têm a mesma altura (referente ao vértice C) e, pela proposição anterior, a área do segundo triângulo é o dobro da área do primeiro. Então, $\overline{GB} = 2 \times \overline{GY}$, acontecendo o mesmo com as duas outras medianas, como se pretendia demonstrar.

Proposição 606 *A bissetriz dum ângulo interno dum triângulo divide o lado oposto em dois segmentos directamente proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração

Consideremos, num triângulo $[ABC]$, a bissetriz do ângulo B .



Aplicando a lei dos senos aos triângulos $[ABL]$ e $[BCL]$ da figura anterior, obtemos:

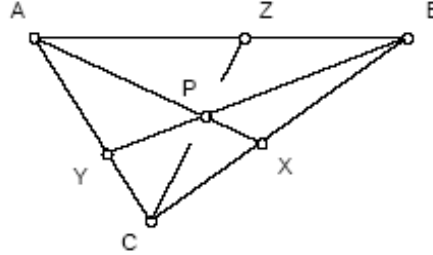
$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{ALB}} = \frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} \wedge \frac{\overline{BC}}{\sin \widehat{BLC}} = \frac{\overline{LC}}{\sin \alpha}$$

Como $\sin \widehat{ALB} = \sin \widehat{BLC}$, então $\frac{\sin \alpha}{\sin \widehat{ALB}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}}$, como se pretendia.

Proposição 607 *As bissetrizes dos ângulos internos dum triângulo intersectam-se num ponto.*

Demonstração

Consideremos as bissetrizes do triângulo $[ABC]$, da figura seguinte.



Seja P , o ponto de intersecção das bissetrizes AX e BY .

Pretendemos mostrar que a bissetriz CZ passa por P .

Como as bissetrizes são cevianas, basta-nos provar que $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1$.

Pela proposição anterior, temos $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \\ \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \\ \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \end{array} \right.$. Então:

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \times \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = 1.$$

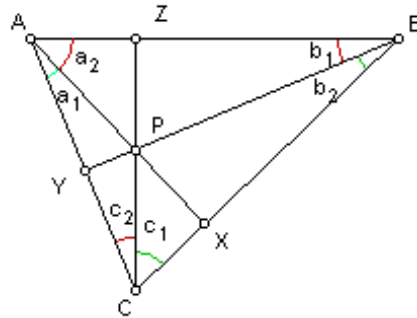
Logo, as bissetrizes intersectam-se num ponto (P).

Uma demonstração mais fácil consiste na interpretação geométrica da bissetriz dum ângulo: conjunto de pontos do plano que estão equidistantes dos lados do ângulo.

Proposição 608 *As rectas que contêm as três alturas dum triângulo intersectam-se num ponto (ortocentro).*

Demonstração

Consideremos o seguinte triângulo acutângulo $[ABC]$:



Então:

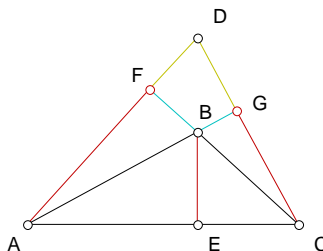
$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + c_2 + c_1 = \frac{\pi}{2} \\ c_2 + c_1 + b_2 = \frac{\pi}{2} \\ a_1 + a_2 + b_1 = \frac{\pi}{2} \\ a_1 + a_2 + c_2 = \frac{\pi}{2} \\ b_1 + b_2 + c_1 = \frac{\pi}{2} \\ a_2 + b_1 + b_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = b_2 \\ b_1 = c_2 \\ a_2 = c_1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \sin a_1 = \frac{\overline{CX}}{\overline{AC}} \\ \sin a_2 = \frac{\overline{BX}}{\overline{AB}} \\ \sin b_1 = \frac{\overline{AY}}{\overline{AB}} \\ \sin b_2 = \frac{\overline{YC}}{\overline{BC}} \\ \sin c_1 = \frac{\overline{BZ}}{\overline{BC}} \\ \sin c_2 = \frac{\overline{AZ}}{\overline{AC}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{CX} = \overline{AC} \sin a_1 \\ \overline{BX} = \overline{AB} \sin a_2 \\ \overline{AY} = \overline{AB} \sin b_1 \\ \overline{YC} = \overline{BC} \sin b_2 \\ \overline{BZ} = \overline{BC} \sin c_1 \\ \overline{AZ} = \overline{AC} \sin c_2 \end{array} \right.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} &= \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \times \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AB} \sin a_2}{\overline{AC} \sin a_1} \times \frac{\overline{BC} \sin b_2}{\overline{AB} \sin b_1} \times \frac{\overline{AC} \sin c_2}{\overline{BC} \sin c_1} \\ &= \frac{\sin a_2}{\sin a_1} \times \frac{\sin b_2}{\sin b_1} \times \frac{\sin c_2}{\sin c_1} = \frac{\sin a_2}{\sin b_2} \times \frac{\sin b_2}{\sin c_2} \times \frac{\sin c_2}{\sin a_2} = 1 \end{aligned}$$

Logo, as três alturas intersectam-se num ponto (chamado ortocentro).

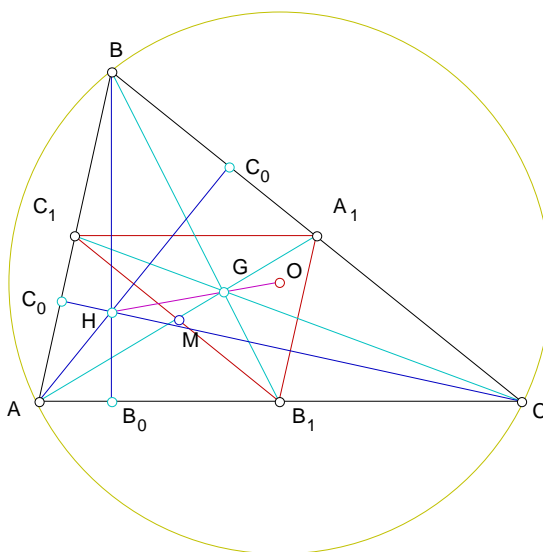
No caso do triângulo ser rectângulo, as três alturas intersectam-se no vértice do ângulo recto. Se o triângulo for obtusângulo, as rectas que contêm as alturas intersectam-se num ponto, sendo a demonstração imediata, uma vez que se considera um triângulo com todos os ângulos agudos e cujas alturas contêm as alturas do primeiro triângulo (observe a figura seguinte, com atenção).



Proposição 609 O baricentro, o ortocentro e o circuncentro dum triângulo são pontos colineares.

Demonstração

Consideremos a figura seguinte:



Sejam A_1, B_1, C_1 , os pontos médios de $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$.

Sejam H, G, O , o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de $[ABC]$.

Note-se que O também é o ortocentro de $[A_1B_1C_1]$.

Começemos por observar que o quadrilátero $[AC_1A_1B_1]$ é um paralelogramo, pelo que as suas diagonais se bissectam. Seja M o seu ponto de intersecção.

Então, $\overline{AM} = \overline{MA_1}$, $\overline{C_1M} = \overline{MB_1}$ e a recta AA_1 contém $[AA_1]$ e $[MA_1]$ que são medianas dos triângulos $[ABC]$ e $[A_1B_1C_1]$.

Analogamente, para as rectas BB_1 e CC_1 . Logo, G é o baricentro dos triângulos $[ABC]$ e $[A_1B_1C_1]$.

Consideremos os triângulos $[AHG]$ e $[A_1OG]$. As rectas AH e OA_1 são perpendiculares a BC , pelo que são paralelas.

Logo $\angle HAG = \angle OA_1G$, porque são ângulos alternos internos.

$\overline{AG} = 2 \times \overline{GA_1}$, porque as medianas se trissectam.

$\overline{AH} = 2 \times \overline{OA_1}$, porque os dois triângulos $[ABC]$ e $[A_1B_1C_1]$ são semelhantes, sendo 2 a razão de semelhança.

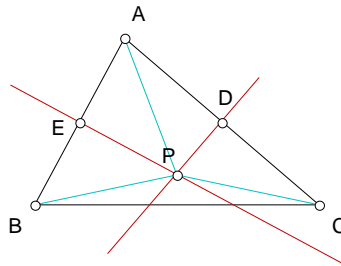
Então, os triângulos $[AHG]$ e $[A_1OG]$ são semelhantes, pelo que $\angle AGH = \angle A_1GO$ e os pontos H, G, O são colineares.

A recta que contém os pontos H, G, O é conhecida por recta de Euler.

Proposição 610 *As mediatrizes dos lados dum triângulo intersectam-se num ponto.*

Demonstração

Consideremos o triângulo $[ABC]$ da figura seguinte:



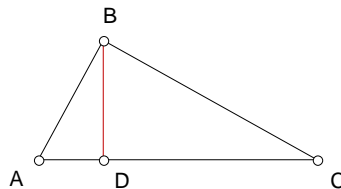
Seja P , o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados $[AB]$ e $[AC]$.

Então, $\overline{AP} = \overline{PB}$ e $\overline{AP} = \overline{PC}$, donde vem $\overline{PB} = \overline{PC}$, pelo que o ponto P pertence à mediatriz do lado $[AC]$. Então, as três mediatrizes intersectam-se num ponto (o ponto P).

Lema 611 *Num triângulo rectângulo, a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional, entre os segmentos que determina (na hipotenusa).*

Demonstração

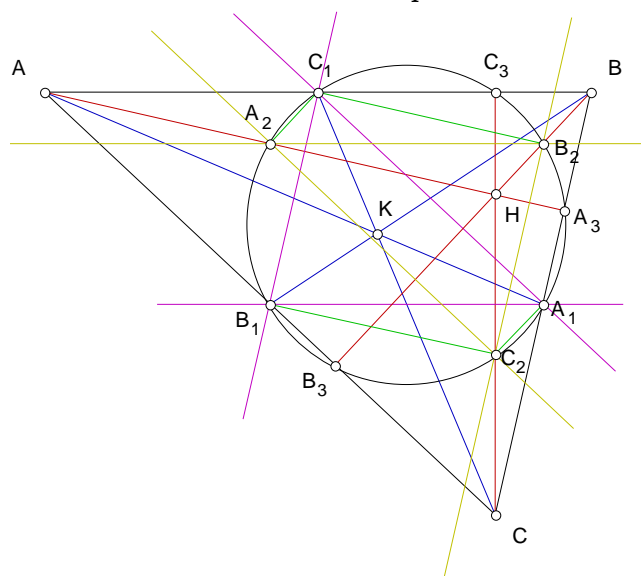
Consideremos o triângulo $[ABC]$, rectângulo em B e de altura $[BD]$:



Então, $\tan A = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, $\tan \widehat{B}C = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}}$. Mas, $\tan A = \tan \widehat{B}C$.

Logo, $\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, isto é, $\overline{DC} \times \overline{AD} = \overline{BD}^2$, como se pretendia.

A circunferência dos 9 pontos



Condições da figura anterior:

A_1, B_1, C_1 são os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$.

A_2, B_2, C_2 são os pés das alturas do triângulo $[ABC]$.

H é o ortocentro do triângulo $[ABC]$.

A_2 é o ponto médio de $[AH]$, B_2 é o ponto médio de $[BH]$ e C_2 é o ponto médio de $[CH]$.

Proposição 612 Nas condições da figura anterior, há uma circunferência que passa pelos nove pontos $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$.

Demonstração

1. A recta B_1C_1 é paralela à recta BC (Thales).
2. A recta B_2C_2 é paralela à recta BC (Thales). Logo, as rectas B_1C_1 e B_2C_2 são paralelas.
3. A recta B_2C_1 é paralela à recta AH (Thales).
4. A recta B_1C_2 é paralela à recta AH (Thales). Logo, as rectas B_2C_1 e B_1C_2 são paralelas.
5. Das condições anteriores vem que $[B_1C_1B_2C_2]$ é um paralelogramo.
6. Analogamente, se conclui que $[A_2C_1A_1C_2]$ é um paralelogramo.
7. $BC \perp AA_3$ (altura, base).
8. $B_2C_2 \perp AA_3$, porque as rectas B_2C_2 e BC são paralelas.
9. Como B_2 é o ponto médio de $[BH]$ e C_1 é o ponto médio de $[AB]$, então $AH \parallel C_1B_2$. Mas, AH e AA_3 são a mesma recta. Logo, $AA_3 \parallel C_1B_2$.
10. Então, o paralelogramo $[B_1C_1B_2C_2]$ é um rectângulo, o qual pode ser inscrito na circunferência de diâmetro $[C_1C_2]$.
11. E o paralelogramo $[A_2C_1A_1C_2]$ é um rectângulo que pode ser inscrito na circunferência de diâmetro $[C_1C_2]$.
12. Então os seis pontos $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pertencem a uma mesma circunferência. Falta ver que os pontos A_3, B_3, C_3 também pertencem a essa circunferência.

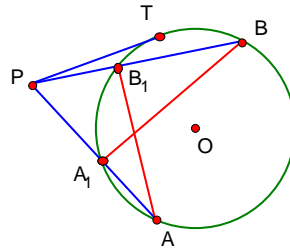
13. Como $[A_2A_1]$ também é um diâmetro da circunferência anterior e o ângulo $A_2A_3A_1$ é recto, temos que A_3 pertence à circunferência anterior. E o mesmo acontece com os pontos A_2 e A_1 , pelo que está terminada a demonstração.

Observação:

A circunferência dos nove pontos é a circunferência circunscrita ao triângulo $[A_1B_1C_1]$, cujos lados são metade dos lados do triângulo $[ABC]$. Então, o raio da circunferência dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.

Proposição 613 *Nas condições da figura seguinte, temos que se verificam as seguintes igualdades:*

$$\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PB} \times \overline{PB_1} = \overline{PT}^2$$



Estamos a supor que a recta PT é tangente à circunferência em T .

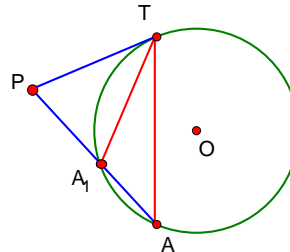
Demonstração

$\angle PAB_1 = \angle PBA_1$, porque são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência.

$\angle BPA_1$ é comum aos dois triângulos $[A_1BP]$ e $[AB_1P]$.

Logo, os dois triângulos $[A_1BP]$ e $[AB_1P]$ são semelhantes.

Então, $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ e daqui se conclui que $\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PB} \times \overline{PB_1}$.



No caso da tangente em T , temos que $\angle PAT = \angle A_1TP$ e que $\angle P$ é comum aos dois triângulos $[ATP]$ e $[A_1TP]$, que, por isso, são triângulos semelhantes.

Então, $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}$ e daqui se conclui que $\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PT}^2$.

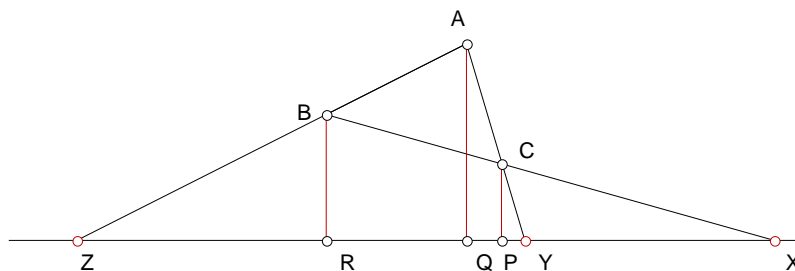
Proposição 614 *(Teorema de Menelau)*

Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam X, Y, Z três pontos pertencentes às rectas BC, CA e AB , respectivamente.

Os pontos X, Y, Z são colineares se e só se tivermos $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -1$.

Demonstração

Consideremos a figura seguinte:



Suponhamos que X, Y, Z são pontos colineares. Sejam h_1, h_2, h_3 os comprimentos das perpendiculares à recta XZ , passando pelos pontos A, B e C , respectivamente (distâncias dos pontos A, B e C à recta XZ). Então:

$$\left| \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \right| = \frac{h_2}{h_3}, \text{ porque os triângulos } [CPX] \text{ e } [BRX] \text{ são semelhantes.}$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \right| = \frac{h_3}{h_1}, \text{ porque os triângulos } [CPX] \text{ e } [AQX] \text{ são semelhantes.}$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} \right| = \frac{h_1}{h_2}, \text{ porque os triângulos } [BRX] \text{ e } [AQX] \text{ são semelhantes.}$$

Então,

$$\left| \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \right| \times \left| \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \right| \times \left| \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} \right| = \frac{h_2}{h_3} \times \frac{h_3}{h_1} \times \frac{h_1}{h_2} = 1$$

Como $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} < 0, \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} > 0, \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} > 0$, vem $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} < 0$

Logo, $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -1$

O recíproco demonstra-se do mesmo modo que o recíproco do Teorema de Ceva.

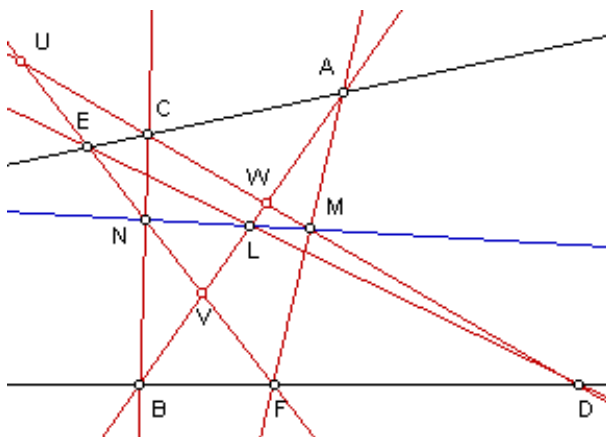
Proposição 615 (Teorema de Pappus)

Sejam A, B, C, D, E, F seis pontos tais que A, C, E pertencem a uma recta l e B, D, F pertencem a uma outra recta m . Sejam L, M, N tais que $\{L\} = AB \cap DE, \{M\} = CD \cap AF, \{N\} = EF \cap BC$. Então, L, M, N são colineares.

Demonstração

Sejam $\{U\} = EF \cap CD, \{V\} = AB \cap EF, \{W\} = AB \cap CD$.

Consideremos a figura seguinte:



Consideremos o triângulo $[UVW]$ e os triplos de pontos colineares $(L, D, E), (A, M, F), (B, C, N), (A, C, E), (B, D, F)$.

1. Apliquemos o Teorema de Menelau ao triângulo $[UVW]$ e aos pontos colineares L, D, E , com $L \in VW$, $D \in WU$, $E \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} = -1$$

2. Apliquemos o Teorema de Menelau ao triângulo $[UVW]$ e aos pontos colineares A, M, F , com $A \in VW$, $M \in WU$, $F \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} = -1$$

3. Apliquemos o Teorema de Menelau ao triângulo $[UVW]$ e aos pontos colineares B, C, N , com $B \in VW$, $C \in WU$, $N \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = -1$$

4. Aplicando o Teorema de Menelau ao triângulo e aos pontos colineares A, C, E , com $A \in VW$, $C \in WU$, $E \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} = -1$$

5. Aplicando o Teorema de Menelau ao triângulo $[UVW]$ e aos pontos colineares, B, D, F , com $B \in VW$, $D \in WU$, $F \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} = -1$$

:

Multiplicando, membro a membro, as primeiras três igualdades, vem:

$$\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} \times \frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} \times \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = -1$$

Multiplicando, membro a membro, as duas últimas igualdades, vem:

$$\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} \times \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} = 1$$

Dividindo, membro a membro, as duas igualdades anteriores, vem:

$$\frac{\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} \times \frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} \times \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}}}{\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} \times \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}}} = -1$$

Simplificando a expressão anterior, obtemos $\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \times \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \times \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = -1$.

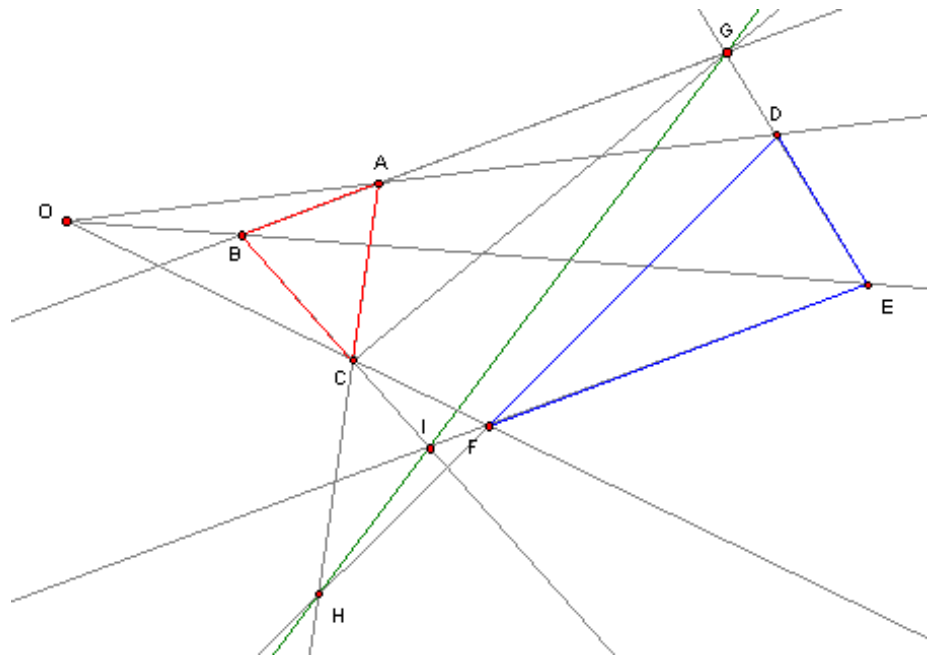
Então, pelo Teorema de Menelau, os pontos L, M, N são colineares.

Proposição 616 (*Teorema de Desargues*)

Dois triângulos são perspectivos a respeito dum ponto se e só se são perspectivos a respeito duma recta.

Demonstração

Consideremos a figura seguinte:



Suponhamos que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são perspectivos a respeito do ponto O , isto é, as rectas AD , BE e CF intersectam-se no ponto O . Sejam G, H, I , os pontos de intersecção dos três pares de rectas AB e DE , AC e DF , BC e EF , isto é, $\{G\} = AB \cap DE$, $\{H\} = AC \cap DF$, $\{I\} = BC \cap EF$.

Pretendemos mostrar que os pontos G, H, I são colineares, ou seja, que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são perspectivos a respeito da recta GH .

1. Consideremos o triângulo $[BCO]$ e os pontos colineares E, F, I . Ora, $E \in OB$, $F \in OC$, $I \in BC$.

Então, pelo Teorema de Menelau, temos

$$\frac{\overrightarrow{BI}}{\overrightarrow{IC}} \times \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FO}} \times \frac{\overrightarrow{OE}}{\overrightarrow{EB}} = -1$$

2. Consideremos o triângulo $[ACO]$ e os pontos colineares D, F, H . Então, pelo Teorema de Menelau, temos

$$\frac{\overrightarrow{CH}}{\overrightarrow{HA}} \times \frac{\overrightarrow{OF}}{\overrightarrow{FC}} \times \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DO}} = -1$$

3. Consideremos o triângulo $[ABO]$ e os pontos colineares D, E, G . Então, pelo Teorema de Menelau, temos

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} \times \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EO}} \times \frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{DA}} = -1$$

4. Multiplicando, membro a membro, as três igualdades anteriores, obtemos

$$\frac{\overrightarrow{BI}}{\overrightarrow{IC}} \times \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FO}} \times \frac{\overrightarrow{OE}}{\overrightarrow{EB}} \times \frac{\overrightarrow{CH}}{\overrightarrow{HA}} \times \frac{\overrightarrow{OF}}{\overrightarrow{FC}} \times \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DO}} \times \frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} \times \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EO}} \times \frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{DA}} = -1$$

5. Simplificando, obtemos

$$\frac{\overrightarrow{BI}}{\overrightarrow{IC}} \times \frac{\overrightarrow{CH}}{\overrightarrow{HA}} \times \frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} = -1$$

Da igualdade anterior e, como $I \in BC$, $H \in CA$ e $G \in AB$, concluímos (pelo Teorema de Menelau) que os pontos G, H, I são colineares.

Reciprocamente, suponhamos que os pontos são colineares. Pretendemos mostrar que as rectas são concorrentes. Seja O tal que $\{O\} = AD \cap CF$. Basta-nos provar que o ponto O pertence à recta BE .

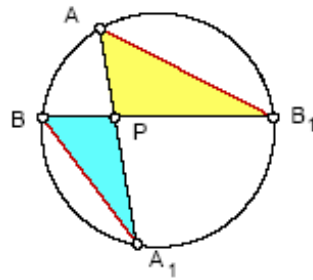
Consideremos os triângulos $[ADG]$ e $[CFI]$. Estes dois triângulos são perspectivos a respeito do ponto H . Logo, pela parte já demonstrada deste Teorema, temos que os triângulos $[ADG]$ e $[CFI]$ são perspectivos a respeito duma recta. Como C corresponde a A , I corresponde a G e F corresponde a D , temos que a recta CI corresponde a AG , a recta CF corresponde a AD e a recta IF corresponde a GD .

Mas, $\{B\} = CI \cap AG$, $\{O\} = CF \cap AD$, $\{E\} = FI \cap GD$.

Logo, os triângulos $[ADG]$ e $[CFI]$ são perspectivos a respeito da recta que contém os pontos B , O , E , pelo que o ponto O pertence à recta BE .

Em rigor, não está terminada a demonstração do Teorema de Desargues, pois pode acontecer que alguns pares de rectas consideradas sejam estritamente paralelas ou coincidentes.

Proposição 617 *Sejam $[AA_1]$ e $[BB_1]$ duas cordas duma circunferência, que se intersectam num ponto P . Então, $\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PB} \times \overline{PB_1}$.*



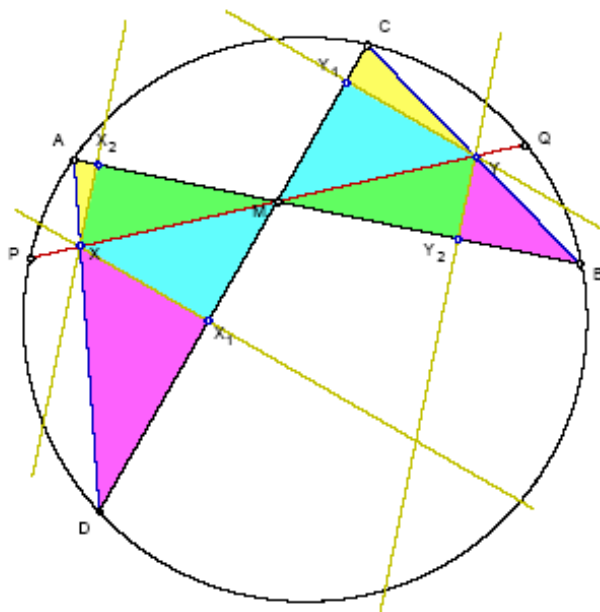
Demonstração

1. Os ângulos A_1 e B_1 são iguais, porque estão inscritos no mesmo arco de circunferência.
2. Os ângulos BPA_1 e APB_1 são iguais, porque são verticalmente opostos.
3. Logo, os triângulos $[BPA_1]$ e $[APA_1]$ são semelhantes. Logo, $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}}$. Logo, $\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PB} \times \overline{PB_1}$.

Proposição 618 *(O Teorema da Borboleta)* Consideremos, numa circunferência, uma corda $[PQ]$, cujo ponto médio é M . Sejam $[AB]$ e $[CD]$ duas cordas concorrentes em M . Então, se as cordas $[AD]$ e $[BC]$ intersectarem a corda inicial $[PQ]$, nos pontos X e Y , tais pontos são equidistantes de M .

Demonstração

Consideremos a figura seguinte, onde, por X , se traçaram duas rectas perpendiculares às cordas $[AB]$ e $[CD]$; por Y , também se traçaram duas rectas perpendiculares às cordas $[AB]$ e $[CD]$. Os pontos X_1, X_2, Y_1, Y_2 resultam da intersecção das quatro rectas anteriores com as cordas $[AB]$ e $[CD]$. Nesta figura, temos que os triângulos da mesma cor são semelhantes:



1. Consideremos os triângulos $[AX_2X]$ e $[CY_1Y]$.
 - (a) $\angle DAB = \angle DCB$, porque estão inscritos no mesmo arco de circunferência.
 - (b) $\angle ADC = \angle ABC$, porque estão inscritos no mesmo arco de circunferência.
 - (c) Então, os dois triângulos $[AX_2X]$ e $[CY_1Y]$ são semelhantes.
 - (d) Logo, $\frac{\overline{AX}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{X_2X}}{\overline{Y_1Y}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{CY}}$.
2. Consideremos os triângulos $[MX_1X]$ e $[MY_1Y]$.
 - (a) Os dois triângulos são rectângulos, por construção.
 - (b) $\angle XMX_1 = \angle YMY_1$, porque são verticalmente opostos.
 - (c) Então, os dois triângulos $[XMX_1]$ e $[YMY_1]$ são semelhantes.
 - (d) Logo, $\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} = \frac{\overline{X_1X}}{\overline{Y_1Y}} = \frac{\overline{X_1M}}{\overline{MY_1}}$.
3. Consideremos os triângulos $[XMX_2]$ e $[YMY_2]$.
 - (a) Os dois triângulos são rectângulos, por construção.
 - (b) $\angle XMX_2 = \angle Y_2MY$, porque são verticalmente opostos.
 - (c) Então, os dois triângulos $[XMX_2]$ e $[YMY_2]$ são semelhantes.
 - (d) Logo, $\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} = \frac{\overline{X_2X}}{\overline{Y_2Y}} = \frac{\overline{X_2M}}{\overline{MY_2}}$.
4. Consideremos os triângulos $[XDX_1]$ e $[YBY_2]$.
 - (a) Os dois triângulos são rectângulos, por construção.
 - (b) $\angle D = \angle B$, porque estão inscritos no mesmo arco de circunferência.

(c) Então, os dois triângulos $[XDX_1]$ e $[YBY_2]$ são semelhantes.

(d) Logo, $\frac{\overline{DX}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{X_1X}}{\overline{Y_2Y}} = \frac{\overline{DX_1}}{\overline{BY_2}}$.

$$5. \text{ Então, } \left(\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}}\right)^2 = \frac{\overline{X_1X}}{\overline{Y_1Y}} \times \frac{\overline{X_2X}}{\overline{Y_2Y}} = \frac{\overline{X_2X}}{\overline{Y_1Y}} \times \frac{\overline{X_1X}}{\overline{Y_2Y}} = \frac{\overline{AX} \times \overline{XD}}{\overline{CY} \times \overline{YB}} = \frac{\overline{PX} \times \overline{XQ}}{\overline{PY} \times \overline{YQ}}$$

6. Faça-se $\overline{PM} = \overline{MQ} = a$, $\overline{XM} = x$, $\overline{MY} = y$. Então:

$$\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}}\right)^2 = \frac{\overline{PX} \times \overline{XQ}}{\overline{PY} \times \overline{YQ}} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

$$7. \text{ Então, } \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + a^2 - x^2}{y^2 + a^2 - y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

8. Logo, $x = y$, como pretendido.

Observação:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies ad = bc \implies ad + ab = bc + ab \implies a(b+d) = b(a+c) \implies \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

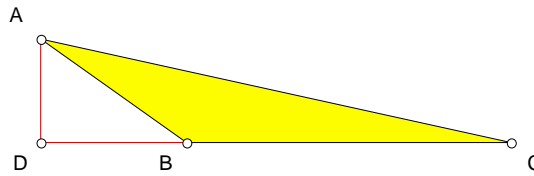
É claro que estamos a supor que os denominadores envolvidos são diferentes de zero. Isso acontece se, por exemplo, os números reais a, b, c, d são positivos.

Proposição 619 Teorema de Carnot (ou lei dos cosenos)

Num triângulo $[ABC]$, verifica-se que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$, com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\beta = \widehat{ABC}$.

Demonstração

Caso do ângulo obtuso:



Consideremos a figura anterior, onde o ponto D é a intersecção da recta BC com recta que lhe é perpendicular e que passa por A :

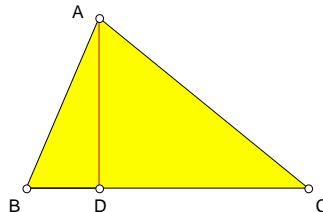
Então:

$$\begin{cases} \sin \beta = \sin(\pi - \beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \\ \cos \beta = -\cos(\pi - \beta) = -\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \sin \beta = c \sin \beta \\ \overline{BD} = -\overline{AB} \cos \beta = -c \cos \beta \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} b^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + (\overline{DB} + \overline{BC})^2 \\ &= c^2 \sin^2 \beta + (a - c \cos \beta)^2 = c^2 \sin^2 \beta + a^2 - 2ac \cos \beta + c^2 \cos^2 \beta \\ &= c^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + a^2 - 2ac \cos \beta = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta \end{aligned}$$

Caso do ângulo agudo:



Suponhamos que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\widehat{ABC} = \beta$ e que $[AD]$ é uma altura do triângulo $[ABC]$. Então:

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \\ \cos \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \sin \beta = c \sin \beta \\ \overline{BD} = \overline{AB} \cos \beta = c \cos \beta \end{cases}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + (\overline{BC} - \overline{BD})^2 \\ &= c^2 \sin^2 \beta + (a - c \cos \beta)^2 = c^2 \sin^2 \beta + a^2 - 2ac \cos \beta + c^2 \cos^2 \beta \\ &= c^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + a^2 - 2ac \cos \beta = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta \end{aligned}$$

Logo, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta$

Outra demonstração

Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\pi - \widehat{B}) = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \end{aligned}$$

Logo, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta$

Outra demonstração

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$. Então:

$$\begin{aligned} b^2 &= \overline{AC}^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \overline{BC}^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overline{AB}^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \end{aligned}$$

Ainda outra demonstração

Consideremos, num triângulo $[ABC]$ de lados a , b , c , a lei dos senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Então, $a \sin B = b \sin A$, ou seja, $\sin A = \frac{a}{b} \sin B$.

Ora, $\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

Logo, $\sin C = \frac{a}{b} \sin B \cos B + \sin B \cos A$

De $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, vem:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\frac{a}{b} \sin B \cos B + \sin B \cos A}$$

Logo,

$$b = \frac{c}{\frac{a}{b} \cos B + \cos A}$$

E daqui se conclui que $c = a \cos B + b \cos A$, ou seja, que $b \cos A = c - a \cos B$. Então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} b \sin A = a \sin B \\ b \cos A = c - a \cos B \end{cases} &\implies \begin{cases} b^2 \sin^2 A = a^2 \sin^2 B \\ b^2 \cos^2 A = c^2 - 2ac \cos B + a^2 \cos^2 B \end{cases} \\ &\implies b^2 \sin^2 A + b^2 \cos^2 A = a^2 \sin^2 B + c^2 - 2ac \cos B + a^2 \cos^2 B \\ &\implies b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) = a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2ac \cos B \\ &\implies b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \end{aligned}$$

Exercício 620 Determine os cossenos dos ângulos internos dum triângulo $[ABC]$, em que $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 9$ cm e $\overline{AC} = 10$ cm.

Resolução

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} &\implies \begin{cases} 9^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 10 \cos A \\ 10^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \times 9 \times 8 \cos B \\ 8^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \times 10 \times 9 \cos C \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 160 \cos A = 164 - 81 \\ 144 \cos B = 81 + 64 - 100 \\ 180 \cos C = 181 - 64 \end{cases} \implies \begin{cases} \cos A = \frac{83}{160} \\ \cos B = \frac{45}{144} = \frac{5}{16} \\ \cos C = \frac{117}{180} = \frac{13}{20} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 621 Determine os cossenos dos ângulos internos dum triângulo $[ABC]$, em que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

Resolução

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} \implies \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Então, se fizermos $a = 9, b = 10, c = 8$, obtemos

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{83}{160} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{117}{180} = \frac{13}{20} \end{cases}, \text{ como no exercício}$$

anterior.

Exercício 622 Determine as tangentes dos ângulos internos dum triângulo $[ABC]$, não rectângulo, em que temos $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

Resolução

Já vimos que

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}.$$

Da primeira igualdade, vem

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} = \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}}{2bc} = \frac{\sqrt{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}}{2bc} \\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \end{aligned}$$

Também sabemos, pela lei dos senos, que $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Então,

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{b}{a} \sin A = \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ac} \\ \sin C &= \frac{c}{a} \sin A = \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ab} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\tan A &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \times \frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} \\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{b^2+c^2-a^2}\end{aligned}$$

Analogamente, vem

$$\begin{aligned}\tan B &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ac} \times \frac{2ac}{a^2+c^2-b^2} \\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{a^2+c^2-b^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tan C &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ab} \times \frac{2ac}{a^2+b^2-c^2} \\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{a^2+b^2-c^2}\end{aligned}$$

Exercício 623 Determine a soma e o produto das tangentes dos ângulos internos dum triângulo $[ABC]$, não rectângulo, em que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

Resolução

Do exercício anterior, vem

$$\begin{aligned}\tan A \tan B \tan C &= \frac{\left[\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \right]^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \\ &= \frac{\left[\sqrt{(b^2+2bc+c^2-a^2)(a^2-b^2-c^2+2bc)} \right]^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \\ &= \frac{\left[\sqrt{(4b^2c^2-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2)} \right]^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \\ &= \frac{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4) \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

E, também

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}} = \left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right)$$

Seja $X = \frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$. Então,

$$\begin{aligned}X &= \frac{(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) + (b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) + (b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \\ &= \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tan A + \tan B + \tan C &= \frac{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4) \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \\ &= \tan A \tan B \tan C\end{aligned}$$

Então, num triângulo não rectângulo, a soma das tangentes dos ângulos internos é igual ao produto das mesmas tangentes.

Assim, num triângulo equilátero, temos

$$\begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Proposição 624 *Num triângulo não rectângulo, a soma das tangentes dos ângulos internos é igual ao seu produto.*

(Outra) Demonstração

Como, $A + B + C = \pi$, temos

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A + \tan B + \tan(\pi - A - B) = \tan A + \tan B - \tan(A + B) \\ &= \tan A + \tan B - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= \frac{\tan A - \tan^2 A \tan B + \tan B - \tan A \tan^2 B - \tan A - \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= \frac{-\tan^2 A \tan B - \tan A \tan^2 B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan A \tan B \times \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= -\tan A \tan B \times \tan(A + B) = \tan A \tan B \tan(\pi - A - B) = \tan A \tan B \tan C \end{aligned}$$

Se convencionarmos que $\tan \frac{\pi}{2} = \infty$ e que, para $x \neq 0$, $x \times \infty = \infty$, então a propriedade anterior é válida em qualquer triângulo.

Oberve-se que $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$, pelo que existe um triângulo (na realidade, há infinitos triângulos, todos semelhantes entre si) tal que as tangentes dos ângulos internos são 1, 2 e 3.

Haverá outro triângulo cujos ângulos internos tenham tangentes que sejam números naturais?

Sejam $a, b, x \in \mathbb{N}$. De $a + b + x = abx$, vem $x = \frac{a+b}{ab-1}$, desde que $ab \neq 1$. Suponhamos que $1 < a \leq b$. Então, $a + b \leq 2b$, donde se conclui que $x = \frac{a+b}{ab-1} \leq \frac{2b}{ab-1} \leq \frac{2b}{ab-b} \leq \frac{2}{a-1}$.

Para que $x \in \mathbb{N}$, devemos ter $a = 2$ ou $a = 3$.

Se $a = 2$, então $x = \frac{b+2}{2b-1}$, pelo que $0 < 2b - 1 \leq b + 2$. Logo, $b \leq 3$.

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \implies x = \frac{3}{1} = 3; \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \implies x = \frac{4}{3}; \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \implies x = \frac{5}{5} = 1$$

Se $a = 3$, então $x = \frac{b+3}{3b-1}$, pelo que $0 < 3b - 1 \leq b + 3$. Logo, $b \leq 2$.

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \implies x = \frac{4}{2} = 2; \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \implies x = \frac{5}{5} = 1$$

Se $a = 1$, temos $x = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1}$. Então, $1 \leq b - 1 \leq 2$. Logo, $2 \leq b \leq 3$.

Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 3$. Se $a = 1$ e $b = 3$, então $x = 2$.

Logo, 1, 2 e 3 são os únicos três números naturais cuja soma é igual ao seu produto.

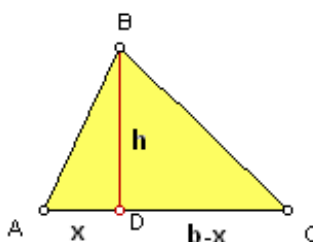
Capítulo 23

O Teorema de Napoleão Bonaparte

O Teorema central deste Capítulo é atribuído a Napoleão Bonaparte, embora não haja a certeza que o teorema tenha sido descoberto pelo imperador.

Vamos começar por enunciar e demonstrar um Lema que será usado numa das demonstrações do Teorema de Napoleão. Este Lema já foi demonstrado, quando provámos a fórmula de Heron. No entanto, vamos repetir a sua demonstração.

Lema 625 *Consideremos o triângulo da figura seguinte, onde estamos a supor que os ângulos BAC e BCA são agudos:*



Então, $\sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc}$, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$.

Demonstração

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = (b-x)^2 + h^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} c^2 - x^2 = h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + c^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h = \pm \sqrt{(c+x)(c-x)} \\ x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $h > 0$, temos $h = \sqrt{(c+x)(c-x)}$, com $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 h &= \sqrt{(c+x)(c-x)} = \sqrt{\left(c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \left(c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)} \\
 &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2b} \times \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{2b} \times \frac{a^2 - (b-c)^2}{2b}} \\
 &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b}} \\
 &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2b}
 \end{aligned}$$

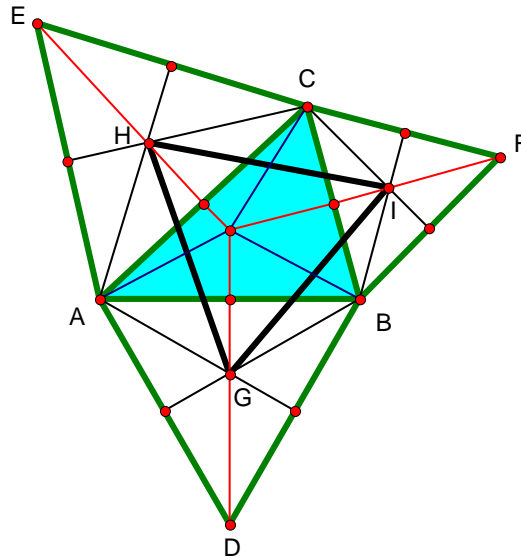
Então,

$$\begin{cases} \sin A = \frac{h}{c} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \\ \cos A = \frac{x}{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{cases}$$

Analogamente, temos

$$\begin{cases} \sin C = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ab} \\ \cos C = \frac{b-x}{a} = \frac{1}{a} \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Proposição 626 (Teorema de Napoleão, versão 1) *Consideremos, num plano, um triângulo arbitrário $[ABC]$. Consideremos (no plano) um ponto D , de modo que $[ABD]$ seja um triângulo equilátero e o ponto D não pertença ao semi-plano de fronteira AB e que contém o ponto C . De modo análogo, obtemos os pontos E e F , como se pode ver na figura seguinte. Sejam G , H e I os centros dos triângulos equiláteros construídos (sobre os lados do triângulo inicial). Então, $[GHI]$ é um triângulo equilátero.*

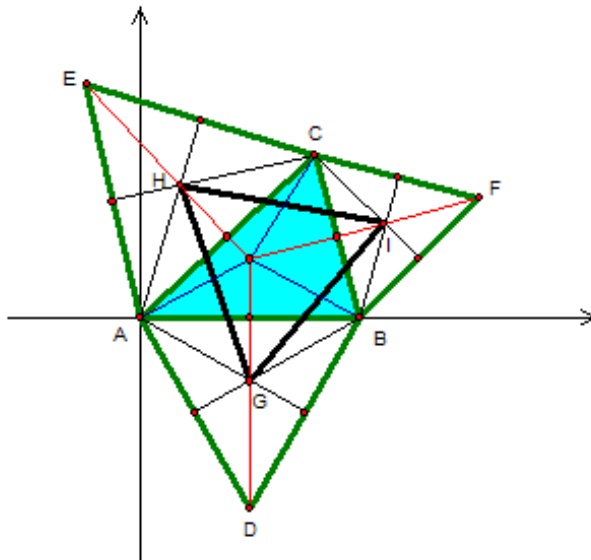


Observação

Ao triângulo $[GHI]$, construído pelo processo acima descrito, chamaremos triângulo externo de Napoleão.

Demonstração 1

O facto dum triângulo ser equilátero, isósceles ou escaleno, não depende da unidade de comprimento escolhida para medir os lados do triângulo. Então, sem perda de generalidade podemos supor que $\overline{AB} = 1$. Escolhendo convenientemente o referencial, podemos supor que $A = (0, 0)$ e que $B = (1, 0)$. Ainda sem perda de generalidade, podemos supor que $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{1}{2}$ e $y > 0$.



Seja M_1 o ponto médio de $[AB]$. Então, $M_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, tendo-se $D = (\frac{1}{2}, 0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(0, -1)$. No entanto, não precisamos do ponto D , para obter G , o centro do triângulo $[ABD]$, uma vez que as medianas dum triângulo se trissectam. Então,

$$G = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Consideremos, agora, o lado $[AC]$, cujo ponto médio é $M_2 = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Ora, $\overrightarrow{AC} = (x, y)$, pelo que nos interessa considerar o vector perpendicular $(-y, x)$. Este vector tem de ser multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e, depois, soma-se o vector obtido ao ponto M_2 .

Convém notar que o produto do vector $(-y, x)$ por $\frac{\sqrt{3}}{2}$ origina um vector cuja norma é a altura do triângulo $[ACE]$.

Então, o baricentro de $[ACE]$ é dado por

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(-y, x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x\right) \\ &= \left(\frac{3x - y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y + x\sqrt{3}}{6}\right) \end{aligned}$$

Consideremos, agora, o lado $[BC]$, cujo ponto médio é $M_3 = (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2})$. Ora, $\overrightarrow{BC} = (x, y) - (1, 0) = (x-1, y)$, pelo que nos interessa considerar o vector perpendicular $(y, 1-x)$. Este vector tem de ser multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e, depois, soma-se o vector obtido ao ponto M_3 .

Então, o baricentro de $[BCF]$ é dado por

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}(y, 1-x) = \left(\frac{3x+3}{6}, \frac{3y}{6}\right) + \left(\frac{y\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{x\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= \left(\frac{3x+3+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6}\right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GH} = H - G = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}-3}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{GI} = I - G = \left(\frac{3x+3+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{HI} = I - H = \left(\frac{3x+3+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3+2y\sqrt{3}}{6}, \frac{-2x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) \end{array} \right.$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{(3x-y\sqrt{3}-3)^2 + (3y+x\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{(3x+y\sqrt{3})^2 + (3y-x\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{(3+2y\sqrt{3})^2 + (-2x\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}}{6} \end{array} \right.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 3y^2 + 9 - 6xy\sqrt{3} - 18x + 6y\sqrt{3} + 9y^2 + 3x^2 + 3 + 6xy\sqrt{3} + 6y\sqrt{3} + 6x}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 3y^2 + 6xy\sqrt{3} + 9y^2 + 3x^2 + 12 - 6xy\sqrt{3} + 12y\sqrt{3} - 12x}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{9 + 12y^2 + 12y\sqrt{3} + 12x^2 + 3 - 12x}}{6} \end{array} \right.$$

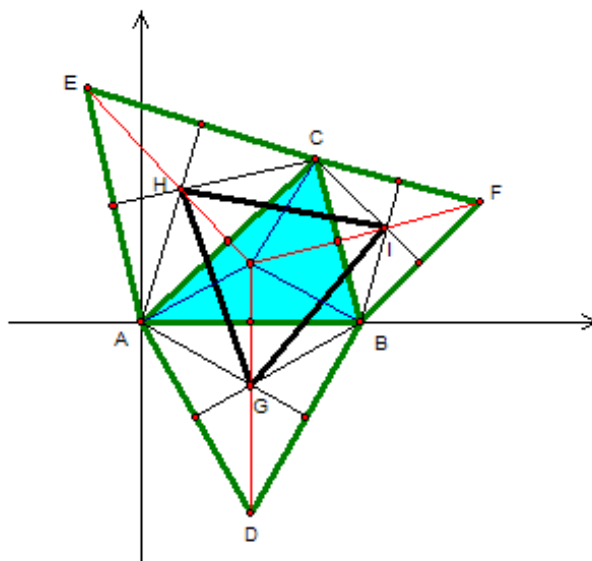
E, por fim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x + 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x + 3y\sqrt{3}}}{3} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x + 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x + 3y\sqrt{3}}}{3} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x + 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x + 3y\sqrt{3}}}{3} \end{array} \right.$$

Logo, $\|\overrightarrow{GH}\| = \|\overrightarrow{GI}\| = \|\overrightarrow{HI}\|$, pelo que $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Demonstração 2 (para quem prefira a demonstração mais geral)

Escolhendo convenientemente o referencial, podemos supor que $A = (0, 0)$ e que $B = (c, 0)$, com $c > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{c}{2}$ e $y > 0$.



Seja M_1 o ponto médio de $[AB]$. Então, $M_1 = (\frac{c}{2}, 0)$, tendo-se $D = (\frac{c}{2}, 0) + \frac{c\sqrt{3}}{2}(0, -1)$. No entanto, não precisamos do ponto D , para obter G , o centro do triângulo $[ABD]$, uma vez que as medianas dum triângulo se trissectam. Então,

$$G = \left(\frac{c}{2}, 0\right) + \frac{1}{3} \times \frac{c\sqrt{3}}{2}(0, -1) = \left(\frac{c}{2}, 0\right) + \left(0, -\frac{c\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6}\right)$$

Consideremos, agora, o lado $[AC]$, cujo ponto médio é $M_2 = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Ora, $\overrightarrow{AC} = (x, y)$, pelo que nos interessa considerar o vector perpendicular $(-y, x)$. Este vector tem de ser multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e, depois, soma-se o vector obtido ao ponto M_2 .

Convém notar que o produto do vector $(-y, x)$ por $\frac{\sqrt{3}}{2}$ origina um vector cuja norma é a altura do triângulo $[ACE]$.

Então, o baricentro de $[ACE]$ é dado por

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(-y, x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x\right) \\ &= \left(\frac{3x - y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y + x\sqrt{3}}{6}\right) \end{aligned}$$

Consideremos, por fim, o lado $[BC]$, cujo ponto médio é $M_3 = (\frac{x+c}{2}, \frac{y}{2})$. Ora, $\overrightarrow{BC} = (x, y) - (c, 0) = (x - c, y)$, pelo que nos interessa considerar o vector perpendicular $(y, c - x)$. Este vector tem de ser multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e, depois, soma-se o vector obtido ao ponto M_3 .

Então, o baricentro de $[BCF]$ é dado por

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{x+c}{2}, \frac{y}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}(y, c-x) = \left(\frac{3x+3c}{6}, \frac{3y}{6}\right) + \left(\frac{y\sqrt{3}}{6}, \frac{c\sqrt{3}}{6} - \frac{x\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= \left(\frac{3x+3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6}\right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \overrightarrow{GH} = H - G = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x-3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}+c\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{GI} = I - G = \left(\frac{3x+3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+2c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{HI} = I - H = \left(\frac{3x+3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3c+2y\sqrt{3}}{6}, \frac{c\sqrt{3}-2x\sqrt{3}}{6} \right) \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{(3x-3c-y\sqrt{3})^2 + (3y+x\sqrt{3}+c\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{(3x+y\sqrt{3})^2 + (3y+2c\sqrt{3}-x\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{(3c+2y\sqrt{3})^2 + (c\sqrt{3}-2x\sqrt{3})^2}}{6} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{9x^2 - 18cx - 6xy\sqrt{3} + 9c^2 + 6cy\sqrt{3} + 3y^2 + 9y^2 + 6xy\sqrt{3} + 6cy\sqrt{3} + 3x^2 + 6cx + 3c^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 6xy\sqrt{3} + 3y^2 + 9y^2 + 12cy\sqrt{3} - 6xy\sqrt{3} + 12c^2 - 12cx + 3x^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{9c^2 + 12cy\sqrt{3} + 12y^2 + 3c^2 - 12cx + 12x^2}}{6} \end{cases}$$

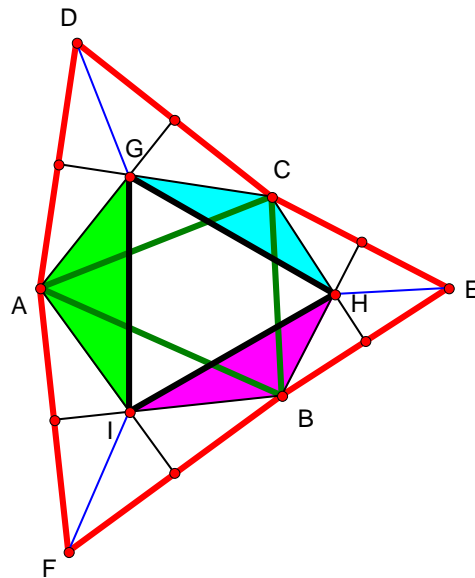
E, por fim,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{2\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12c^2 - 12cx + 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 - 12cx + 12c^2 + 12cy\sqrt{3} + 12y^2}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \end{cases}$$

Logo, $\|\overrightarrow{GH}\| = \|\overrightarrow{GI}\| = \|\overrightarrow{HI}\|$, pelo que $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Demonstração 3

Consideremos, na figura seguinte, os triângulos $[AGI]$ e $[GCH]$. Sejam α, β, γ as amplitudes (em graus) dos ângulos BAC , ABC e ACB .



Aplicando a esses dois triângulos a lei dos cosenos, vem

$$\begin{cases} \overline{GI}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AG} \times \overline{AI} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ \overline{GH}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2 - 2\overline{GC} \times \overline{CH} \cos(\gamma + 60^\circ) \end{cases}$$

É fácil mostrar que $\begin{cases} \overline{AG} = \overline{GC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{AC} = \frac{b\sqrt{3}}{3} \\ \overline{CH} = \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$. Então,

$$\begin{aligned} \overline{GI}^2 &= \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AG} \times \overline{AI} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{b\sqrt{3}}{3} \times \frac{c\sqrt{3}}{3} \times \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(\alpha + 60^\circ) \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \overline{GH}^2 &= \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2 - 2\overline{GC} \times \overline{CH} \cos(\gamma + 60^\circ) \\ &= \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{b\sqrt{3}}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \cos(\gamma + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(\gamma + 60^\circ) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} 3\overline{GI}^2 - 3\overline{GH}^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) - b^2 - a^2 + 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) \\ &= c^2 - a^2 + 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) \end{aligned}$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo $[ABC]$, temos

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Então, $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ e $b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{c \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}$. Seja $E_1 = c^2 - a^2$.

Então, $E_1 = c^2 - a^2 = c^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) = c^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma}\right)$.

Seja $E_2 = 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)$. Então,

$$\begin{aligned} E_2 &= b \left(\frac{2c \sin \alpha}{\sin \gamma} \cos(\gamma + 60^\circ) - 2c \cos(\alpha + 60^\circ) \right) \\ &= \frac{bc}{\sin \gamma} (2 \sin \alpha \cos(\gamma + 60^\circ) - 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 60^\circ)) \\ &= \frac{c^2 \sin \beta}{\sin^2 \gamma} (2 \sin \alpha \cos(\gamma + 60^\circ) - 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 60^\circ)) \end{aligned}$$

Ora, $\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha$. Além disso, temos

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cos(\gamma + 60^\circ) &= 2 \sin \alpha (\cos \gamma \cos 60^\circ - \sin \gamma \sin 60^\circ) \\ &= 2 \sin \alpha \left(\frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma \right) \\ &= \sin \alpha \cos \gamma - \sqrt{3} \sin \alpha \sin \gamma \\ 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 60^\circ) &= \sin \gamma \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \gamma \sin \alpha \end{aligned}$$

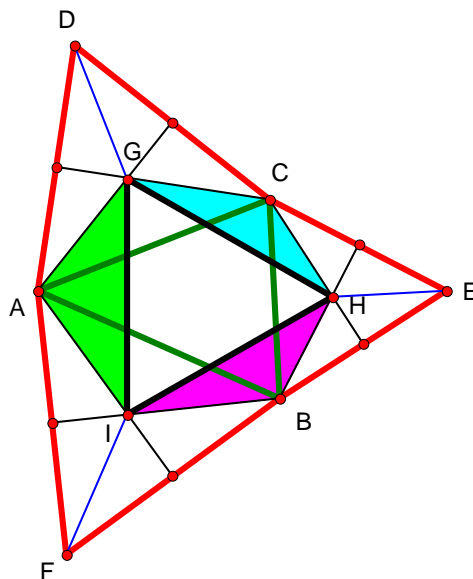
Então,

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= c^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma}\right) + \frac{c^2 \sin \beta}{\sin^2 \gamma} (2 \sin \alpha \cos(\gamma + 60^\circ) - 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 60^\circ)) \\ &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} [\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + \sin \beta (2 \sin \alpha \cos(\gamma + 60^\circ) - 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 60^\circ))] \\ &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} \left[\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + \sin \beta \left(\sin \alpha \cos \gamma - \sqrt{3} \sin \alpha \sin \gamma - \sin \gamma \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \gamma \sin \alpha \right) \right] \\ &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} [\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + \sin \beta (\sin \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cos \alpha)] \\ &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} [\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + (\sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha) (\sin \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cos \alpha)] \\ &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} (\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} (\sin^2 \gamma (1 - \cos^2 \alpha) - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \gamma)) \\ &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} (\sin^2 \gamma \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma) = 0 \end{aligned}$$

Então, $3\overline{GI}^2 - 3\overline{GH}^2 = 0$, donde se conclui que $\overline{GI}^2 - \overline{GH}^2 = 0$. Logo, $\overline{GI} = \overline{GH}$.

Analogamente se mostra que $\overline{GH} = \overline{HI}$, pelo que $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Demonstração 4



Aplicando a lei dos cossenos, obtemos

$$\begin{cases} \overline{GI}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AG} \times \overline{AI} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ \overline{GH}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2 - 2\overline{GC} \times \overline{CH} \cos(\gamma + 60^\circ) \\ \overline{HI}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{BH}^2 - 2\overline{BI} \times \overline{BH} \cos(\beta + 60^\circ) \end{cases}$$

Então, no caso dos ângulos BAC e ACB serem agudos, vem

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + 60^\circ) &= \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} - \frac{\sqrt{3} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4bc} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \overline{GI}^2 &= \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AG} \times \overline{AI} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} + \frac{2bc}{3} \times \frac{\sqrt{3} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4bc} \\ &= \frac{2b^2}{6} + \frac{2c^2}{6} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{6} + \frac{\sqrt{3} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} \\ &= \frac{b^2 + c^2 + a^2}{6} + \frac{\sqrt{3} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} \end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{GH}^2 = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{6} + \frac{\sqrt{3} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} = \overline{GI}^2$$

Se o ângulo ABC for agudo, teremos $\overline{HI}^2 = \overline{GI}^2 = \overline{GH}^2$, pelo que o triângulo $[GHI]$ é equilátero.

No caso do ângulo ABC ser obtuso, temos duas alternativas: deduzimos as expressões que dão $\sin \beta$ e $\cos \beta$ ou aplicamos as fórmulas $\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha$ e $\cos \beta = -\cos(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma$.

Então,

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \gamma &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= \frac{(a^2+b^2-c^2) \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ab^2c}\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}\sin \gamma \cos \alpha &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ab} \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b^2+c^2-a^2) \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ab^2c}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \\ &= \frac{(a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2) \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ab^2c} \\ &= \frac{2b^2 \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ab^2c} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ac}\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \gamma &= \frac{\left(\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \right)^2}{2bc \times 2ab} \\ &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4ab^2c}\end{aligned}$$

E

$$\cos \alpha \cos \gamma = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{4ab^2c}$$

$$\begin{aligned}\cos \beta &= -\cos(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \\ &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4ab^2c} - \frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{4ab^2c} \\ &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) - (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{4ab^2c} \\ &= \frac{2a^2b^2+2b^2c^2-2b^4}{4ab^2c} = \frac{2a^2+2c^2-2b^2}{4ac} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\cos(\beta + 60^\circ) &= \cos \beta \cos 60^\circ - \sin \beta \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ac} \\ &= \frac{a^2+c^2-b^2}{4ac} - \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ac}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \overline{HI}^2 &= \overline{BI}^2 + \overline{BH}^2 - 2\overline{BI} \times \overline{BH} \cos(\beta + 60^\circ) \\
 &= \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{c\sqrt{3}}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \cos(\beta + 60^\circ) \\
 &= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ac}{3} \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{4ac} - \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ac} \right) \\
 &= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{6} + \frac{2ac\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ac} \\
 &= \frac{2c^2}{6} + \frac{2a^2}{6} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} \\
 &= \overline{GI}^2 = \overline{GH}^2
 \end{aligned}$$

Logo, $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Corolário 627 *Consideremos, num plano, um triângulo arbitrário $[ABC]$ de lados a, b, c . Então, a área do triângulo externo de Napoleão é dada por*

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c) &= \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} \right) \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}}{24} + \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{8}
 \end{aligned}$$

Demonstração

Consequência imediata da demonstração 4 do teorema anterior, uma vez que

$$\overline{HI}^2 = \overline{GI}^2 = \overline{GH}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6}$$

Recordamos que a área dum triângulo equilátero de lado l é $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Proposição 628 *(Teorema de Napoleão, versão 2)* Consideremos, num plano, um triângulo arbitrário $[ABC]$. Consideremos (no plano) um ponto D , de modo que $[ABD]$ seja um triângulo equilátero e o ponto D pertença ao semi-plano de fronteira AB e que contém o ponto C . De modo análogo, obtemos os pontos E e F . Sejam G , H e I os centros dos triângulos equiláteros construídos (sobre os lados do triângulo inicial). Então, $[GHI]$ é um triângulo equilátero, a menos que o triângulo $[ABC]$ seja equilátero, caso em que os pontos G , H e I coincidem.

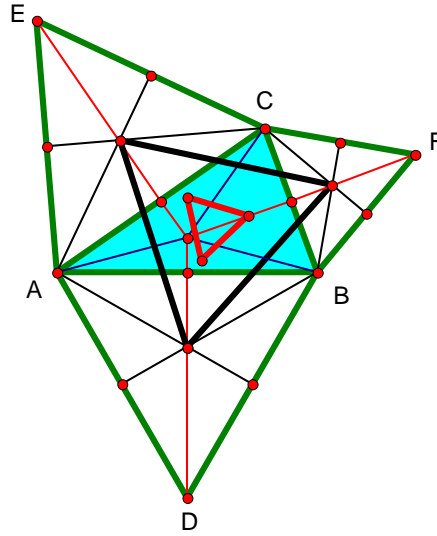
Observação

Ao triângulo $[GHI]$, construído pelo processo acima descrito, chamaremos triângulo interno de Napoleão.

Demonstração 1

Esta demonstração é análoga à primeira demonstração do teorema anterior.

Na figura seguinte, não estão construídos os triângulos equiláteros referidos na hipótese deste teorema, para não sobrecarregar o desenho. O triângulo de lados a vermelho é aquele que se pretende mostrar que é equilátero.



Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \left(\frac{1}{2}, 0\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}(0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ H = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}(-y, x) = \left(\frac{3x}{6}, \frac{3y}{6}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}y, -\frac{\sqrt{3}}{6}x\right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) \\ I = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}(y, 1-x) = \left(\frac{3x+3}{6}, \frac{3y}{6}\right) - \left(\frac{y\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{x\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x+3-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) \end{array} \right.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GH} = H - G = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{3}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}-3}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) \\ \overrightarrow{GI} = I - G = \left(\frac{3x+3-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{3}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}\right) \\ \overrightarrow{HI} = I - H = \left(\frac{3x+3-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3-2y\sqrt{3}}{6}, \frac{2x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) \end{array} \right.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 3y^2 + 9 + 6xy\sqrt{3} - 18x - 6y\sqrt{3} + 9y^2 + 3x^2 + 3 - 6xy\sqrt{3} - 6y\sqrt{3} + 6x}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 3y^2 - 6xy\sqrt{3} + 9y^2 + 3x^2 + 12 + 6xy\sqrt{3} - 12y\sqrt{3} - 12x}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{9 + 12y^2 - 12y\sqrt{3} + 12x^2 + 3 - 12x}}{6} \end{array} \right.$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x - 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x - 3y\sqrt{3}}}{3} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x - 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x - 3y\sqrt{3}}}{3} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x - 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x - 3y\sqrt{3}}}{3} \end{array} \right.$$

Note-se que a expressão $\frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x - 3y\sqrt{3}}}{3}$ está definida para quaisquer valores de x e y , porque

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 - x - y\sqrt{3} &= x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{4} + y^2 - 2 \times y \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que os pontos G , H e I coincidem. Então, $x^2 + y^2 + 1 - x - y\sqrt{3} = 0$. Mas,

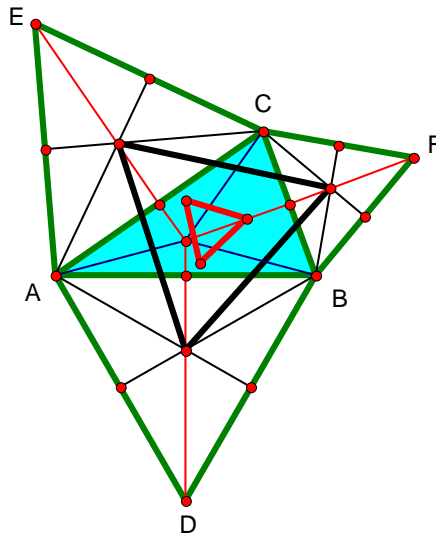
$$x^2 + y^2 + 1 - x - y\sqrt{3} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ora, $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ define, com os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$, um triângulo equilátero.

Reciprocamente, se $[ABC]$ é um triângulo equilátero, então os pontos G , H e I coincidem (uma vez que os triângulos equiláteros construídos coincidem com o triângulo inicial).

Demonstração 2

Escolhendo convenientemente o referencial, podemos supor que $A = (0, 0)$ e que $B = (c, 0)$, com $c > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{c}{2}$ e $y > 0$.



Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \left(\frac{c}{2}, 0\right) - \frac{1}{3} \times \frac{c\sqrt{3}}{2} (0, -1) = \left(\frac{c}{2}, 0\right) - \left(0, -\frac{c\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6}\right) \\ H = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} (-y, x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x\right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) \\ I = \left(\frac{x+c}{2}, \frac{y}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6} (y, c-x) = \left(\frac{3x+3c}{6}, \frac{3y}{6}\right) - \left(\frac{y\sqrt{3}}{6}, \frac{c\sqrt{3}}{6} - \frac{x\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x+3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6}\right) \end{array} \right.$$

Logo,

$$\begin{cases} \overrightarrow{GH} = H - G = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x-3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}-c\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{GI} = I - G = \left(\frac{3x+3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-2c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{HI} = I - H = \left(\frac{3x+3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3c-2y\sqrt{3}}{6}, \frac{2x\sqrt{3}-c\sqrt{3}}{6} \right) \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{(3x-3c+y\sqrt{3})^2 + (3y-x\sqrt{3}-c\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{(3x-y\sqrt{3})^2 + (3y-2c\sqrt{3}+x\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{(3c-2y\sqrt{3})^2 + (2x\sqrt{3}-c\sqrt{3})^2}}{6} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{9x^2 - 18cx + 6xy\sqrt{3} + 9c^2 - 6cy\sqrt{3} + 3y^2 + 9y^2 - 6xy\sqrt{3} - 6cy\sqrt{3} + 3x^2 + 6cx + 3c^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{9x^2 - 6xy\sqrt{3} + 3y^2 + 9y^2 - 12cy\sqrt{3} + 6xy\sqrt{3} + 12c^2 - 12cx + 3x^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{9c^2 - 12cy\sqrt{3} + 12y^2 + 12x^2 - 12cx + 3c^2}}{6} \end{cases}$$

E, por fim,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{2\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12c^2 - 12cx - 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 - 12cx + 12c^2 - 12cy\sqrt{3} + 12y^2}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \end{cases}$$

Logo, $\|\overrightarrow{GH}\| = \|\overrightarrow{GI}\| = \|\overrightarrow{HI}\|$, pelo que $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Corolário 629 Dado um triângulo $[ABC]$, este triângulo, o triângulo externo e o triângulo interno de Napoleão (relativos ao triângulo dado) têm o mesmo baricentro.

Demonstração

É conhecido o facto de as coordenadas do baricentro dum triângulo serem a média aritmética das coordenadas dos vértices desse triângulo. Suponhamos que $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ e $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{c}{2}$ e $y > 0$.

Então, o baricentro do triângulo $[ABC]$ é $\left(\frac{c+x}{3}, \frac{y}{3}\right)$.

As coordenadas dos vértices do triângulo externo de Napoleão são dadas por:

$$G_1 = \left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6} \right), H_1 = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) \text{ e } I_1 = \left(\frac{3x+3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6} \right)$$

Então, o baricentro do triângulo $[G_1H_1I_1]$ é

$$\left(\frac{\frac{c}{2} + \frac{3x-y\sqrt{3}}{6} + \frac{3x+3c+y\sqrt{3}}{6}}{3}, \frac{-\frac{c\sqrt{3}}{6} + \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} + \frac{3y+c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6}}{3} \right) = \left(\frac{c+x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

As coordenadas dos vértices do triângulo interno de Napoleão são dadas por:

$$G_2 = \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6} \right), H_2 = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6} \right) \text{ e } I_2 = \left(\frac{3x+3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6} \right)$$

Então, o baricentro do triângulo $[G_1H_1I_1]$ é

$$\left(\frac{\frac{c}{2} + \frac{3x+y\sqrt{3}}{6} + \frac{3x+3c-y\sqrt{3}}{6}}{3}, \frac{\frac{c\sqrt{3}}{6} + \frac{3y-x\sqrt{3}}{6} + \frac{3y-c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6}}{3} \right) = \left(\frac{c+x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

Está, assim, demonstrado o Corolário.

Corolário 630 Dado um triângulo $[ABC]$, a diferença entre as áreas do triângulo externo e do triângulo interno de Napoleão é igual à área do triângulo inicial.

Demonstração

Suponhamos que $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ e $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{c}{2}$ e $y > 0$. Então, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{cy}{2}$.

Vimos que o lado do triângulo externo de Napoleão é dado por $\frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3}$, pelo que a sua área é dada por

$$\begin{aligned} A_{\text{ext}} &= \left(\frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{(x^2 - cx + c^2 + cy\sqrt{3} + y^2) \sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

O lado do triângulo interno de Napoleão é dado por $\frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3}$, pelo que a sua área é

$$\begin{aligned} A_{\text{int}} &= \left(\frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{(x^2 - cx + c^2 - cy\sqrt{3} + y^2) \sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

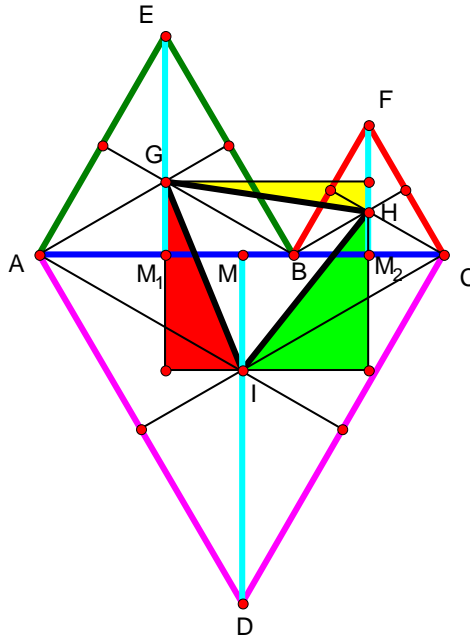
Então,

$$\begin{aligned} A_{\text{ext}} - A_{\text{int}} &= \frac{(x^2 - cx + c^2 + cy\sqrt{3} + y^2) \sqrt{3}}{12} - \frac{(x^2 - cx + c^2 - cy\sqrt{3} + y^2) \sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{2cy\sqrt{3}\sqrt{3}}{12} = \frac{cy}{2} \end{aligned}$$

Está, assim, demonstrado o Corolário.

Note-se que o Corolário é válido, no caso do triângulo inicial ser equilátero.

Proposição 631 (Teorema de Napoleão, versão 3) *Consideremos três pontos colineares (distintos) A , B e C e construa-se três triângulos equiláteros, como na figura seguinte (os dois triângulos menores, acima da recta AC e o triângulo maior, abaixo dessa recta):*



Teorema 632 *Sejam G , H e I os centros desses triângulos equiláteros. Então, $[GHI]$ é um novo triângulo equilátero.*

Demonstração

Sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Sejam M_1 , M_2 e M os pontos médios de $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respectivamente.

Então, $\overline{GM_1} = \frac{c\sqrt{3}}{6}$, $\overline{HM_2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ e $\overline{IM} = \frac{b\sqrt{3}}{6} = \frac{(a+c)\sqrt{3}}{6}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos vermelho, verde e amarelo, vem

$$\begin{cases} \overline{GI}^2 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{6} + \frac{(a+c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} - \frac{c}{2} \right)^2 = \left(\frac{(a+2c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \\ \overline{HI}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{(a+c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 = \left(\frac{(2a+c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \\ \overline{GH}^2 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 = \left(\frac{(c-a)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 \end{cases}$$

Logo,

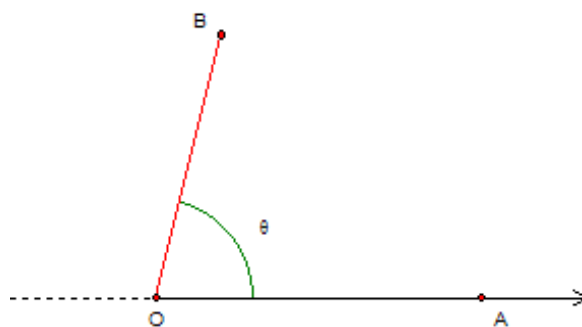
$$\begin{cases} \overline{GI}^2 = \left(\frac{(a+2c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2+4ac+4c^2}{12} + \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2+4ac+4c^2}{12} = \frac{a^2+ac+c^2}{3} \\ \overline{HI}^2 = \left(\frac{(2a+c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 = \frac{4a^2+4ac+c^2}{12} + \frac{c^2}{4} = \frac{4a^2+4ac+4c^2}{12} = \frac{a^2+ac+c^2}{3} \\ \overline{GH}^2 = \left(\frac{(c-a)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 = \frac{a^2-2ac+c^2}{12} + \frac{a^2+2ac+c^2}{4} = \frac{4a^2+4ac+4c^2}{12} = \frac{a^2+ac+c^2}{3} \end{cases}$$

Então, $\overline{GI} = \overline{HI} = \overline{GH}$ e $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Capítulo 24

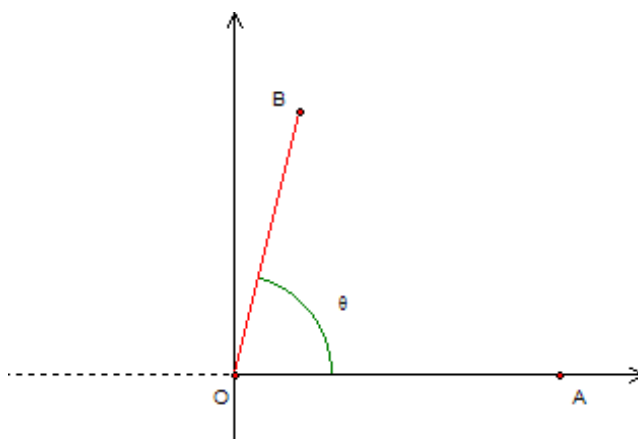
Coordenadas polares

Em Geometria Analítica no plano, costumamos utilizar um referencial ortogonal e monométrico, sendo que cada ponto é identificado com um par ordenado de números reais (a abscissa e a ordenada). Quem conhece os números complexos sabe que cada número complexo fica definido por dois números: o módulo (número real positivo ou nulo) e o argumento (número real que pode ser escolhido no intervalo $[0, 2\pi[$).



Um sistema de coordenadas polares consiste numa recta orientada (eixo polar) com um ponto fixo O (polo). Cada ponto B do plano fica determinado pela sua distância ao ponto O (r) e pelo ângulo θ , formado pelas semi-rectas OA e OB .

É claro que existe uma relação entre coordenadas polares e coordenadas rectangulares (cartesianas). Consideremos o seguinte referencial cartesiano ortonormado (ortogonal e monométrico):



Coordenadas polares de B : (r, θ) , com $r = \overline{OB}$.

Coordenadas cartesianas de B : (x, y) , com $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Logo, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan \theta = \frac{y}{x}$, para

$x \neq 0$.

Observação

Do mesmo modo que $-\rho \operatorname{cis} \alpha = \rho \operatorname{cis}(\alpha \pm \pi)$, com $\rho > 0$, a expressão $(-r, \theta)$, com $r > 0$, significa $(r, \theta \pm \pi)$.

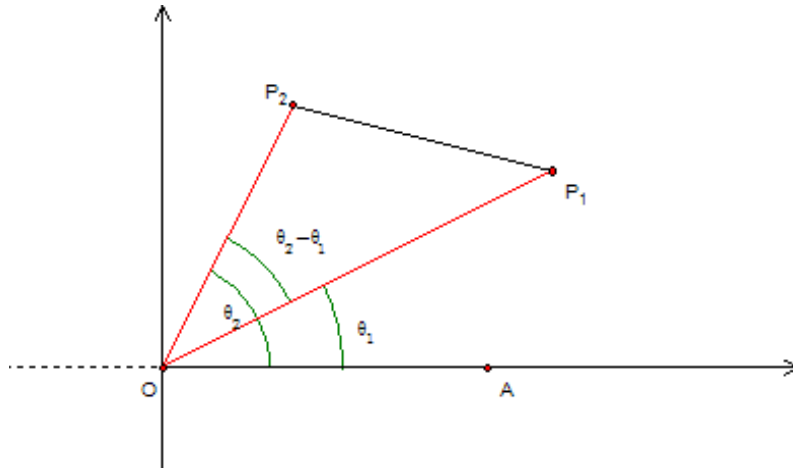
Exemplo 633 Determine a distância entre os pontos $P_1 = (r_1, \theta_1)$ e $P_2 = (r_2, \theta_2)$ (expressos em coordenadas polares).

Resolução

Se mudarmos para coordenadas cartesianas temos $P_1 = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1)$ e $P_2 = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2)$. Então,

$$\begin{aligned} \overline{P_1 P_2} &= \sqrt{(r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1)^2 + (r_2 \sin \theta_2 - r_1 \sin \theta_1)^2} \\ &= \sqrt{r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 - 2r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2} \\ &= \sqrt{r_2^2 \cos^2 \theta_2 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 + r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 - 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)} \\ &= \sqrt{r_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) + r_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

A fórmula anterior não é mais nem menos que a chamada lei dos cossenos (ou Teorema de Carnot), aplicada ao triângulo $[OP_1 P_2]$.



Então a distância d , entre os pontos $P_1 = (2, \frac{\pi}{12})$ e $P_2 = (3, \frac{5\pi}{12})$, é dada por

$$d = \overline{P_1 P_2} = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{13 - 12 \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{13 - 12 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

Observação

Uma vez que é costume aceitar coordenadas polares com o primeiro elemento negativo, convém verificar se a fórmula da distância é válida nessas situações.

Começemos por referir que a fórmula da distância apresentada implica $\overline{P_1 P_2} = \overline{P_2 P_1}$, uma vez que a função cosseno é par.

Suponhamos que temos $P_1 = (r_1, \theta_1)$ e $P_2 = (r_2, \theta_2)$, com $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$.

Então, $P_1 = (r_1, \theta_1)$ e $P_2 = (-r_2, \pi + \theta_2)$, pelo que

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{r_1^2 + (-r_2)^2 - 2r_1(-r_2) \cos(\theta_1 - \pi - \theta_2)} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Então, a fórmula é válida, se $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$.

Analogamente se mostra que a fórmula é válida, se $r_1 < 0$ e $r_2 > 0$.

Suponhamos, agora, que temos $P_1 = (r_1, \theta_1)$ e $P_2 = (r_2, \theta_2)$, com $r_1 < 0$ e $r_2 < 0$.

Então, $P_1 = (-r_1, \pi + \theta_1)$ e $P_2 = (-r_2, \pi + \theta_2)$, pelo que

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(-r_1)^2 + (-r_2)^2 - 2(-r_1)(-r_2) \cos(\pi + \theta_1 - \pi - \theta_2)} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Então, a fórmula é válida, se $r_1 < 0$ e $r_2 < 0$, pelo que a fórmula é válida para quaisquer valores reais de r_1 e r_2 , uma vez que $\overline{OP_2} = \sqrt{0^2 + r_2^2 - 2 \times 0 \times r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{r_2^2} = |r_2|$, ou seja, é válida para $r_1 = 0$.

Exemplo 634 Determine, em coordenadas polares, uma equação da circunferência de centro $P_1 = (r_1, \theta_1)$ e raio a .

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, um ponto (genérico) da circunferência. A distância entre P_1 e P é dada por

$$a = \overline{P_1 P_2} = \sqrt{R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos(\theta - \theta_1)}$$

Então,

$$R^2 - 2Rr_1 \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 = a^2$$

Exemplo 635 Determine, em coordenadas polares, uma equação da circunferência de centro $P_1 = (2, \frac{\pi}{4})$ e raio 3.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, um ponto (genérico) da circunferência. A distância entre P_1 e P é dada por

$$3 = \overline{P_1 P_2} = \sqrt{R^2 + 2^2 - 2 \times 2R \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$

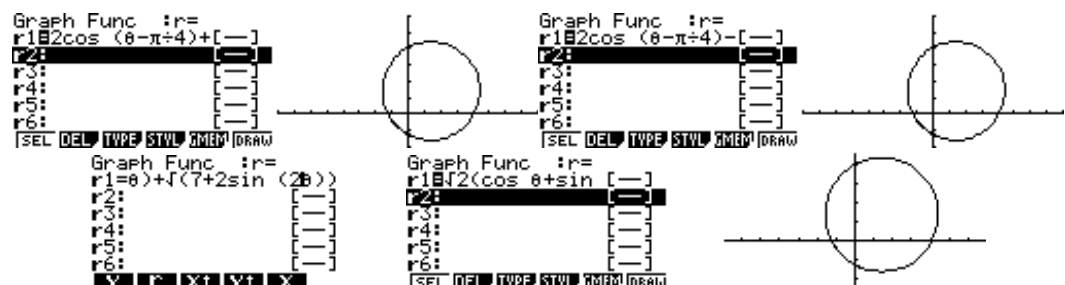
Então,

$$R^2 - 4R \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - 5 = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} R = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm \sqrt{4 \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 5} &\iff R = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm \sqrt{2 \left(1 + \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 5} \\ &\iff R = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm \sqrt{2(1 + \sin(2\theta)) + 5} \\ &\iff R = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \pm \sqrt{7 + 4 \sin(2\theta)} \end{aligned}$$

Na Calculadora gráfica:



Exemplo 636 Determine, em coordenadas polares, uma equação da circunferência de centro $P_1 = (3, 0)$ e raio 3.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, um ponto (genérico) da circunferência. A distância entre P_1 e P é dada por

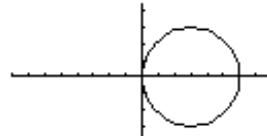
$$3 = \overline{P_1 P_2} = \sqrt{R^2 + 3^2 - 6R \cos(\theta - 0)}$$

Então,

$$R^2 + 9 - 6R \cos \theta = 9 \iff R^2 - 6R \cos \theta = 0 \iff R = 0 \vee R = 6 \cos \theta$$

A condição $R = 0$ define um ponto (polo), ponto esse que pertence ao conjunto definido pela condição $R = 6 \cos \theta$.

Logo, uma equação da circunferência é $R = 6 \cos \theta$.



Exemplo 637 Determine, em coordenadas polares, uma equação da circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio 3.

Resolução

$$R = 3$$

Exemplo 638 Determine, em coordenadas polares, uma equação da semi-recta que tem por origem $O = (0, 0)$ e passa por $P_1 = (2, \frac{\pi}{3})$.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, um ponto (genérico) da semi-recta. Então,

$$P = (0, 0) + \left(R, \frac{\pi}{3}\right), \text{ com } R \geq 0$$

Logo,

$$P = (R, \theta), \text{ com } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ e } R \geq 0$$

Exemplo 639 Determine, em coordenadas polares, uma equação da recta que passa por $O = (0, 0)$ e por $P_1 = (2, \frac{\pi}{3})$.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, um ponto (genérico) da recta. Então,

$$P = (0, 0) + \left(R, \frac{\pi}{3}\right), \text{ com } R \in \mathbb{R}$$

Logo,

$$P = (R, \theta), \text{ com } R > 0 \wedge \left(\theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{4\pi}{3}\right)$$

Outra condição:

$$P = \left(R, \frac{\pi}{3}\right), \text{ com } R \in \mathbb{R}$$

Note-se que $O = (0, 0) = (0, \theta)$, para qualquer número real θ .

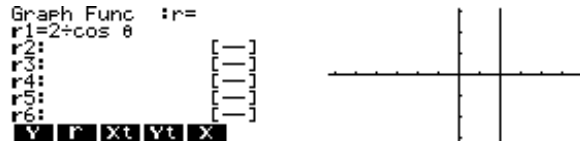
A recta anterior pode ser definida por $\theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{4\pi}{3}$.

Exemplo 640 Determine, em coordenadas polares, uma equação da recta vertical que passa por $P_1 = (2, 0)$.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, um ponto (genérico) da recta.

Então, $R \cos \theta = 2$, pelo que $R = \frac{2}{\cos \theta} = 2 \sec \theta$.



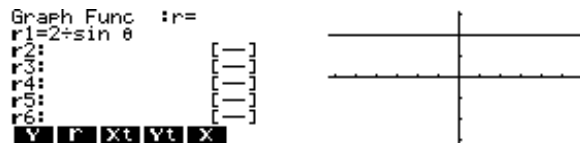
Note-se que a equação $R = \frac{2}{\cos \theta}$ define a mesma recta, com $0 \leq \theta < 2\pi$, desde que $\cos \theta \neq 0$.

Exemplo 641 Determine, em coordenadas polares, uma equação da recta horizontal que passa por $P_1 = (2, \frac{\pi}{2})$.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, um ponto (genérico) da recta.

Então, $R \sin \theta = 2$, pelo que $R = \frac{2}{\sin \theta} = 2 \csc \theta$.



Exemplo 642 Determine, em coordenadas polares, uma equação da recta vertical que passa por $P_1 = (R_1, 0)$, com $R_1 > 0$.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, um ponto (genérico) da recta.

Então, $R \cos \theta = R_1$, pelo que $R = \frac{R_1}{\cos \theta} = R_1 \sec \theta$.

Exemplo 643 Determine, em coordenadas polares, uma equação da recta horizontal que passa por $P_1 = (R_1, \frac{\pi}{2})$, com $R_1 > 0$.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, um ponto (genérico) da recta.

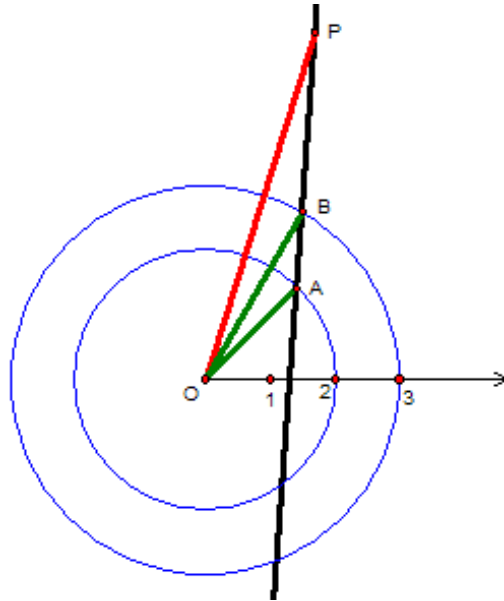
Então, $R \sin \theta = R_1$, pelo que $R = \frac{R_1}{\sin \theta} = R_1 \csc \theta$.

Exemplo 644 Determine, em coordenadas polares, uma equação da recta que passa por $P_1 = (3, \frac{\pi}{3})$ e por $P_2 = (2, \frac{\pi}{4})$.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, um ponto (genérico) da recta. Então, mudando para coordenadas cartesianas temos

$$\begin{cases} P = (R \cos \theta, R \sin \theta) \\ P_1 = (3 \cos \frac{\pi}{3}, 3 \sin \frac{\pi}{3}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}) \\ P_2 = (2 \cos \frac{\pi}{4}, 2 \sin \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$



Para que os pontos P , P_1 e P_2 sejam colineares devemos ter $\frac{R \cos \theta - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - \sqrt{2}} = \frac{R \sin \theta - \frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, isto é, $\frac{2R \cos \theta - 3}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{2R \sin \theta - 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.

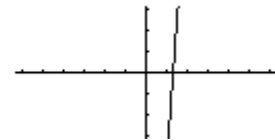
Então, $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(-3 + 2R \cos \theta) = (3 - 2\sqrt{2})(-3\sqrt{3} + 2R \sin \theta)$.

Logo, $-9\sqrt{3} + 6\sqrt{3}R \cos \theta + 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}R \cos \theta = -9\sqrt{3} + 6R \sin \theta + 6\sqrt{2}\sqrt{3} - 4\sqrt{2}R \sin \theta$.

Então, $6R\sqrt{3} \cos \theta - 4R\sqrt{2} \cos \theta - 6R \sin \theta + 4R\sqrt{2} \sin \theta = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$.

Logo, $(6\sqrt{3} - 4\sqrt{2})R \cos \theta - (6 - 4\sqrt{2})R \sin \theta = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$.

$$R = \frac{3(-\sqrt{6} + \sqrt{2})}{-3\sqrt{3} \cos \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta + 3 \sin \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta}$$



Exemplo 645 Determine, em coordenadas polares, uma equação da recta que passa por $P_1 = (R_1, \theta_1)$ e por $P_2 = (R_2, \theta_2)$, com P_1 e P_2 dois pontos distintos.

Resolução

Seja $P = (R, \theta)$, com $0 \leq \theta < 2\pi$, um ponto (genérico) da recta. Então, mudando para coordenadas cartesianas temos

$$\begin{cases} P = (R \cos \theta, R \sin \theta) \\ P_1 = (R_1 \cos \theta_1, R_1 \sin \theta_1) \\ P_2 = (R_2 \cos \theta_2, R_2 \sin \theta_2) \end{cases}$$

Para que os pontos P , P_1 e P_2 sejam colineares devemos ter $\frac{R \sin \theta - R_1 \sin \theta_1}{R \cos \theta - R_1 \cos \theta_1} = \frac{R_1 \sin \theta_1 - R_2 \sin \theta_2}{R_1 \cos \theta_1 - R_2 \cos \theta_2}$.
Então,

$$(R \sin \theta - R_1 \sin \theta_1)(R_1 \cos \theta_1 - R_2 \cos \theta_2) = (R \cos \theta - R_1 \cos \theta_1)(R_1 \sin \theta_1 - R_2 \sin \theta_2)$$

Representando o primeiro membro da igualdade anterior por M_1 e o segundo membro por M_2 , vem

$$\begin{cases} M_1 = RR_1 \sin \theta \cos \theta_1 - RR_2 \sin \theta \cos \theta_2 - R_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + R_1 R_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ M_2 = RR_1 \cos \theta \sin \theta_1 - RR_2 \cos \theta \sin \theta_2 - R_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + R_1 R_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \end{cases}$$

Então,

$$M_1 - M_2 = RR_1 \sin(\theta - \theta_1) - RR_2 \sin(\theta - \theta_2) + R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Mas, de $M_1 = M_2$, vem

$$RR_1 \sin(\theta - \theta_1) - RR_2 \sin(\theta - \theta_2) + R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Logo,

$$R = -\frac{R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{R_1 \sin(\theta - \theta_1) - R_2 \sin(\theta - \theta_2)}$$

No exemplo anterior, tínhamos $R_1 = 3, \theta_1 = \frac{\pi}{3}, R_2 = 2, \theta_2 = \frac{\pi}{4}$.

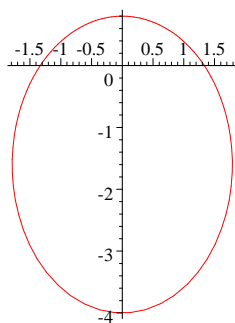
Logo, pela fórmula que acabámos de obter, vem

$$\begin{aligned} R &= -\frac{6 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{3 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{\frac{3}{2}\sqrt{6} - \frac{3}{2}\sqrt{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{3}{2} \sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta - \sqrt{2} \sin \theta} \\ &= \frac{3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{-3\sqrt{3} \cos \theta + 3 \sin \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta} \end{aligned}$$

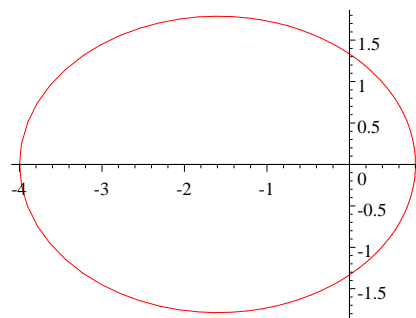
Obtivemos, assim, a condição do exercício anterior.

Exercício 646 Representação gráfica de condições (em coordenadas polares):

1.

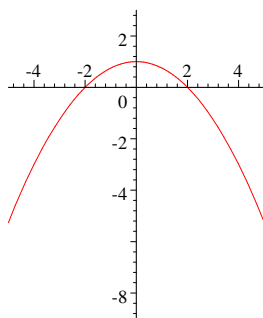


$$R = \frac{4}{3+2 \sin \theta}$$

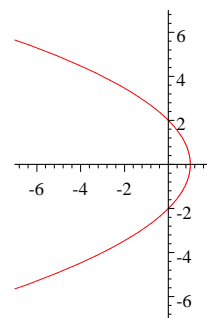


$$R = \frac{4}{3+2 \cos \theta}$$

2.

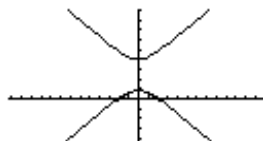
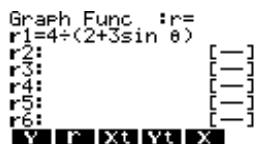


$$R = \frac{4}{2+2 \sin \theta}$$



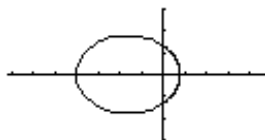
$$R = \frac{4}{2+2 \cos \theta}$$

3. $R = \frac{4}{2+3 \sin \theta}$



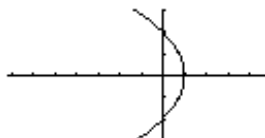
$$4. R = \frac{4}{3+2\cos\theta}$$

```
Graph Func :r=
r1=4/(3+2cos θ)
r2:
r3:
r4:
r5:
r6:
Y r Xt Yt X
```



$$5. R = \frac{4}{2+2\cos\theta}$$

```
Graph Func :r=
r1=4/(2+2cos θ)
r2:
r3:
r4:
r5:
r6:
Y r Xt Yt X
```



$$6. R = \frac{4}{2+3\cos\theta}$$

```
Graph Func :r=
r1=4/(2+3cos θ)
r2:
r3:
r4:
r5:
r6:
Y r Xt Yt X
```

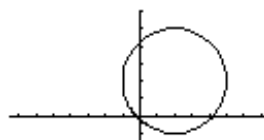


$$7. R^2 - 4R(\cos\theta + \sin\theta) - 1 = 0, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

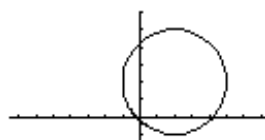
$$R = 2\cos\theta + 2\sin\theta + \sqrt{5 + 8\cos\theta\sin\theta} \vee R = 2\cos\theta + 2\sin\theta - \sqrt{5 + 8\cos\theta\sin\theta}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

```
Graph Func :r=
r1=2cos θ+2sin θ+√(5+
r2:
r3:
r4:
r5:
r6:
Y r Xt Yt X
```

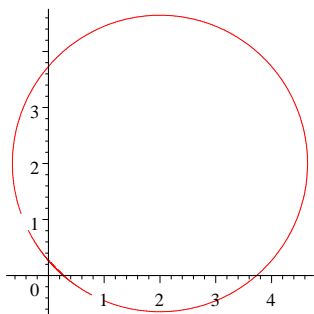
```
Graph Func :r=
r1=2cos θ+2sin θ-√(5+
r2:
r3:
r4:
r5:
r6:
Y r Xt Yt X
```



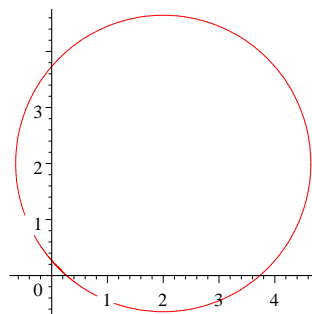
```
Graph Func :r=
r1=2cos θ+2sin θ-√(5+
r2:
r3:
r4:
r5:
r6:
Y r Xt Yt X
```



$$8. R^2 - 4R(\cos\theta + \sin\theta) + 1 = 0$$

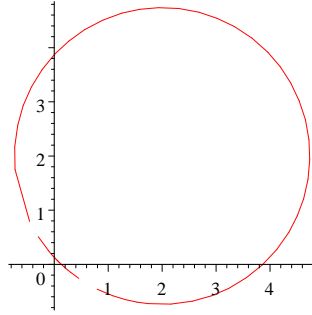


$$R = 2\cos\theta + 2\sin\theta + \sqrt{3 + 4\sin(2\theta)}$$

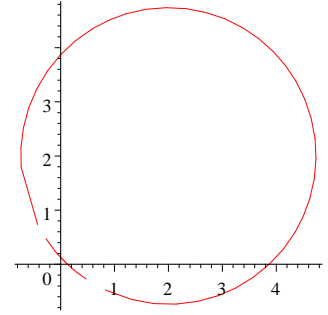


$$R = 2\cos\theta + 2\sin\theta - \sqrt{3 + 4\sin(2\theta)}$$

9. $2R^2 - 8R(\cos \theta + \sin \theta) + 1 = 0$

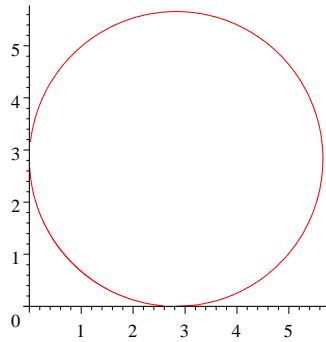


$$R = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \sqrt{14 + 16 \sin (2 \theta)}$$

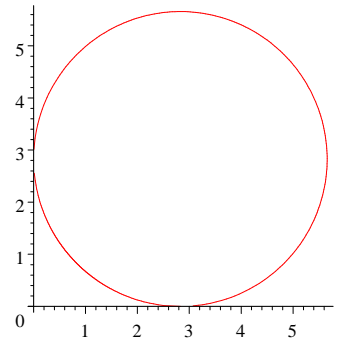


$$R = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta - \frac{1}{2} \sqrt{14 + 16 \sin (2 \theta)}$$

10. $R^2 - 4\sqrt{2}R(\cos \theta + \sin \theta) + 8 = 0$

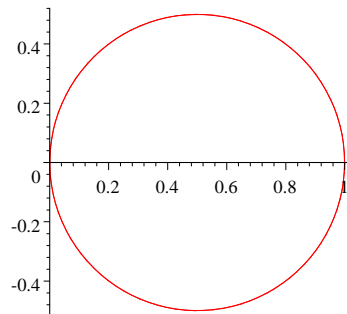


$$R = 2\sqrt{2} \left(\cos \theta + \sin \theta + \sqrt{\sin (2 \theta)} \right)$$

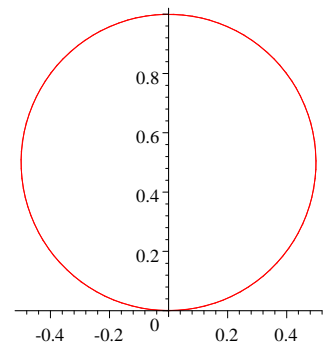


$$R = 2\sqrt{2} \left(\cos \theta + \sin \theta - \sqrt{\sin (2 \theta)} \right)$$

11.

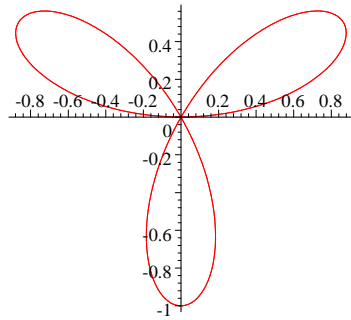


$$R = \cos \theta$$

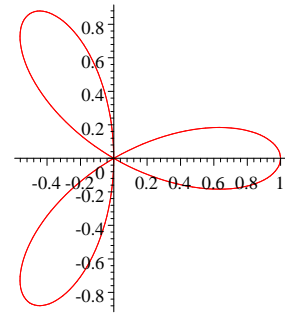


$$R = \sin \theta$$

12.

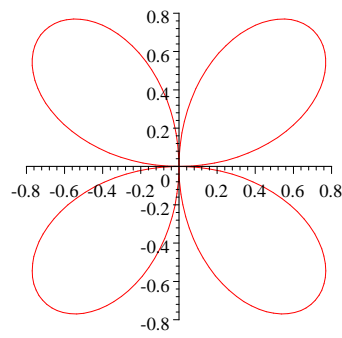


$$R = \sin(3\theta)$$

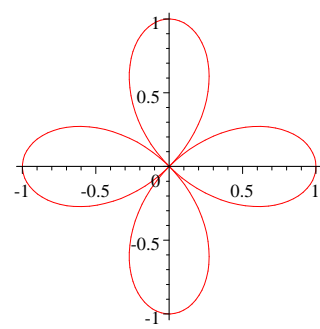


$$R = \cos(3\theta)$$

13.

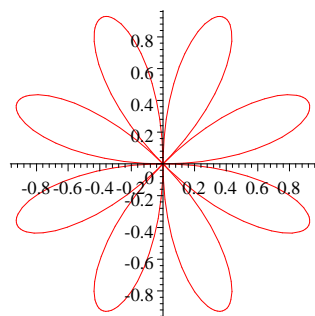


$$R = \sin(2\theta)$$

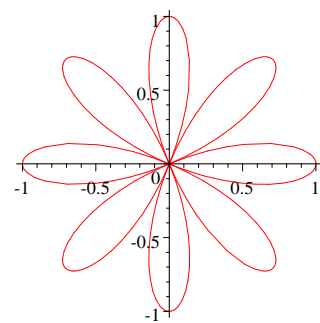


$$R = \cos(2\theta)$$

14.

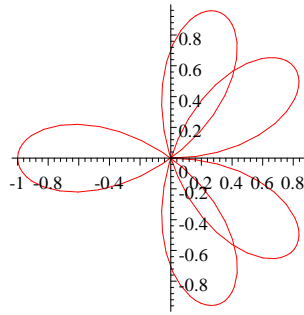


$$R = \sin(4\theta)$$

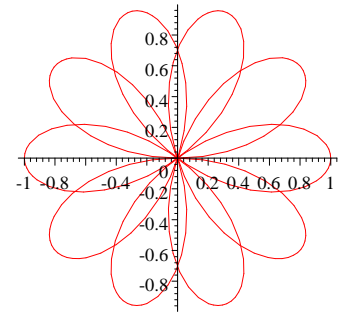


$$R = \cos(4\theta)$$

15.

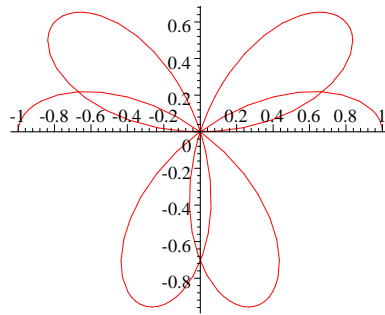


$$R = \sin\left(\frac{5}{2}\theta\right), \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

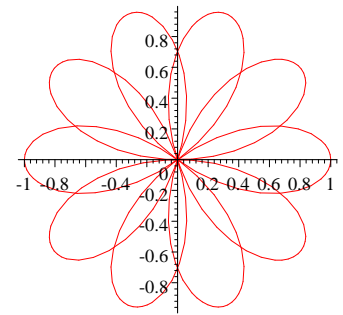


$$R = \sin\left(\frac{5}{2}\theta\right), \text{ com } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

16.

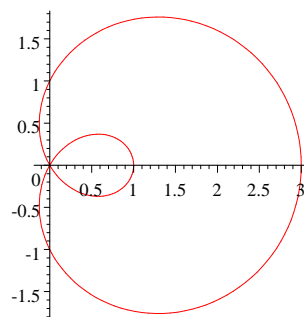


$$R = \cos\left(\frac{5}{2}\theta\right), \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

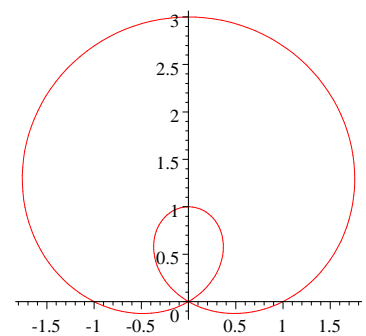


$$R = \cos\left(\frac{5}{2}\theta\right), \text{ com } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

17.

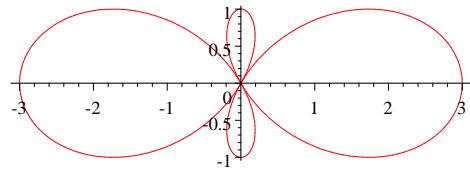


$$R = 1 + 2 \cos \theta$$

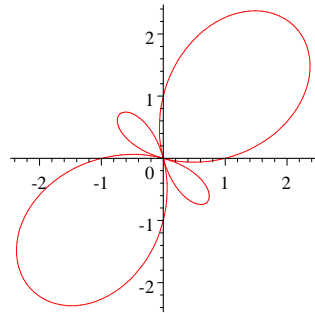


$$R = 1 + 2 \sin \theta$$

18.

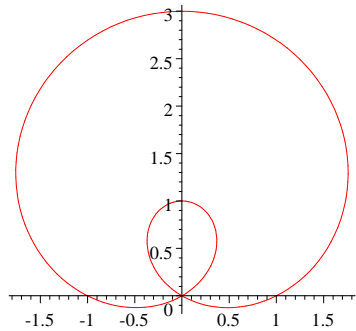


$R = 1 + 2 \cos (2\theta)$

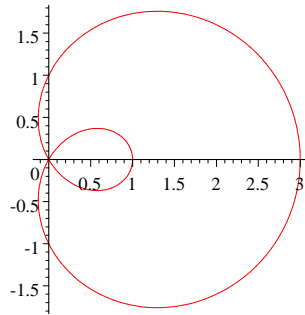


$R = 1 + 2 \sin (2\theta)$

19.

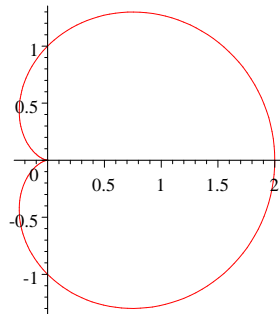


$R = 1 + 2 \sin \theta$

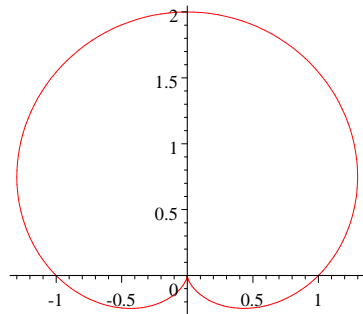


$R = 1 + 2 \cos \theta$

20.

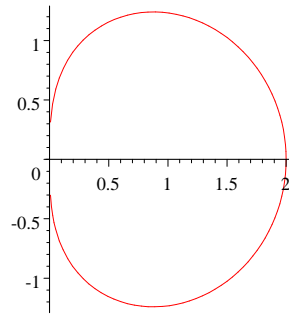


$R = 1 + \cos \theta$

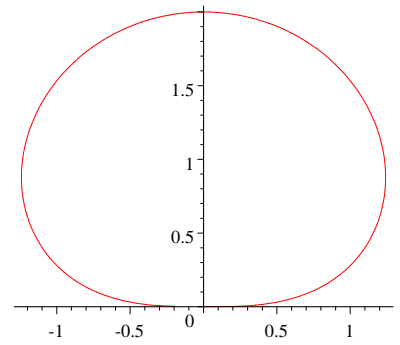


$R = 1 + \sin \theta$

21.

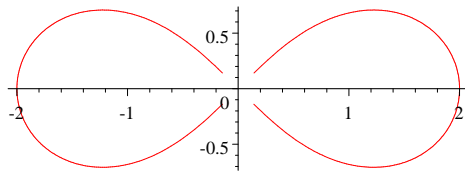


$$R = 2\sqrt{\cos \theta}$$

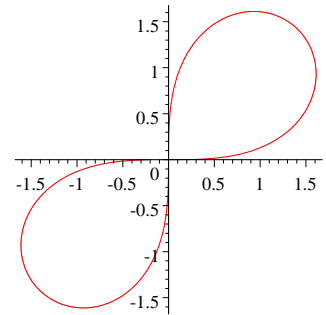


$$R = 2\sqrt{\sin \theta}$$

22.

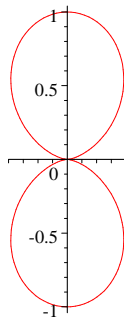


$$R = 2\sqrt{\cos (2\theta)}$$

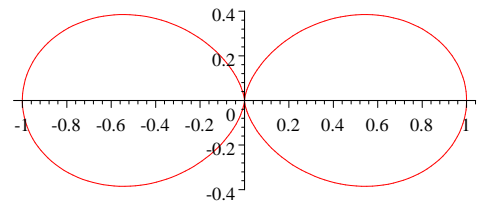


$$R = 2\sqrt{\sin (2\theta)}$$

23.

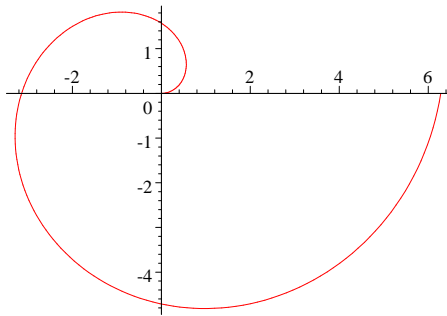


$$R = \sin^2 \theta$$

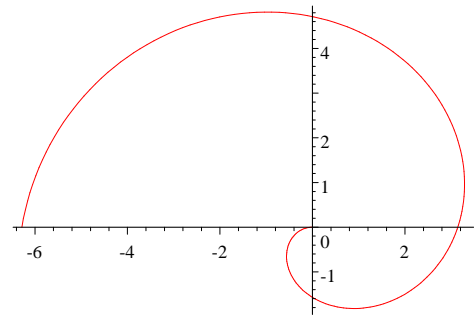


$$R = \cos^2 \theta$$

24.

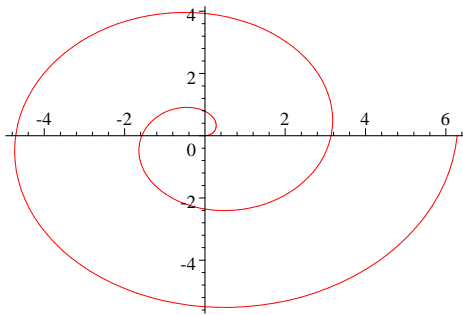


$$R = \theta$$

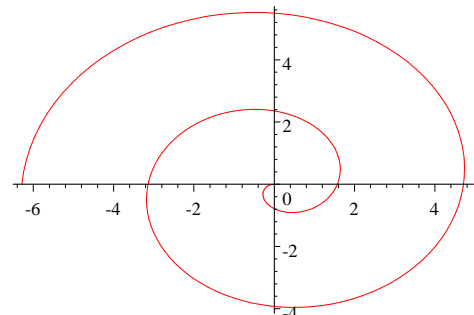


$$R = -\theta$$

25.

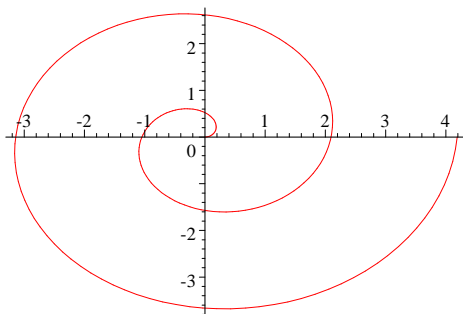


$$R = \frac{\theta}{2}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

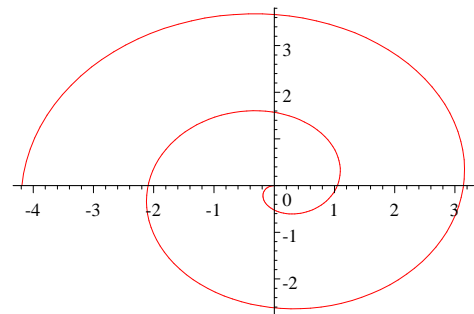


$$R = -\frac{\theta}{2}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

26.

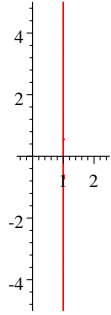


$$R = \frac{\theta}{3}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

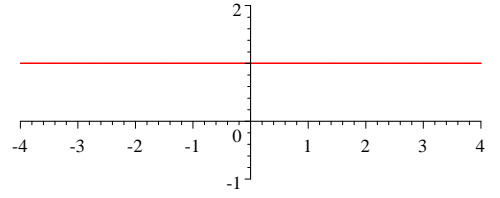


$$R = -\frac{\theta}{3}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

27.

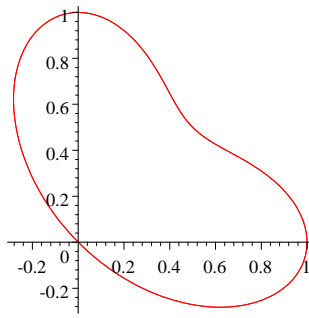


$$R = \frac{1}{\cos \theta}$$

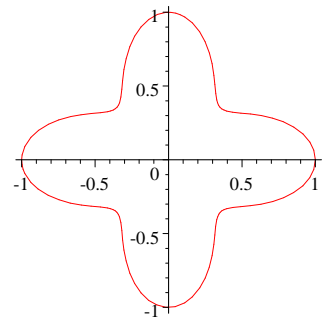


$$R = \frac{1}{\sin \theta}$$

28.

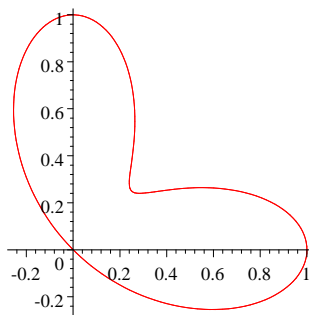


$$R = \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

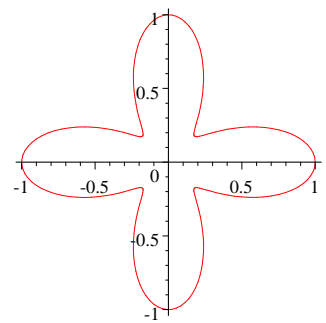


$$R = \sin^4 \theta + \cos^4 \theta$$

29.

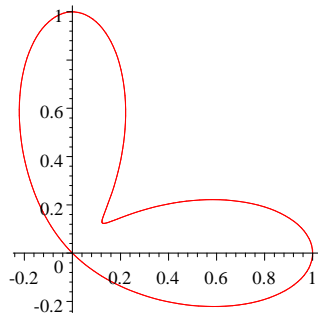


$$R = \sin^5 \theta + \cos^5 \theta$$

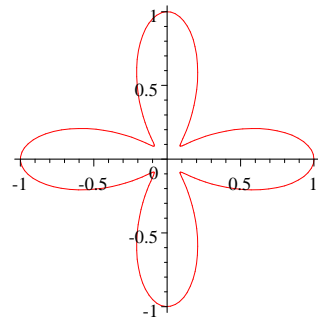


$$R = \sin^6 \theta + \cos^6 \theta$$

30.

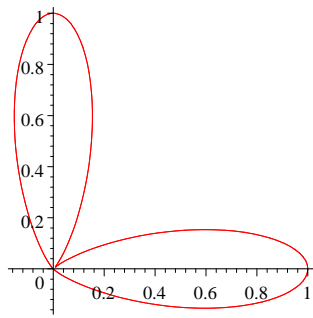


$$R = \sin^7 \theta + \cos^7 \theta$$

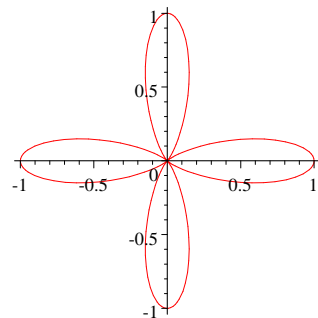


$$R = \sin^8 \theta + \cos^8 \theta$$

31.

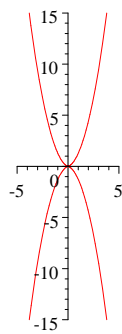


$$R = \sin^{15} \theta + \cos^{15} \theta$$

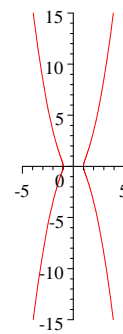


$$R = \sin^{16} \theta + \cos^{16} \theta$$

32.

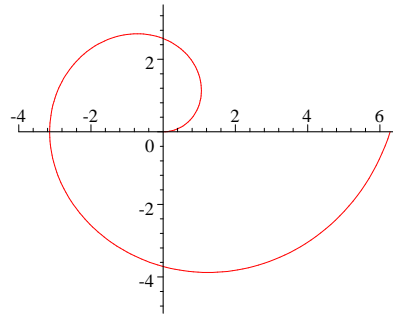


$$R = \tan^2 \theta$$

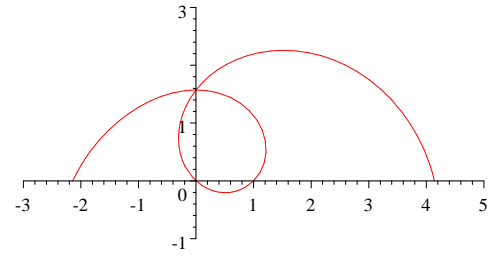


$$R = \sec^2 \theta$$

33.

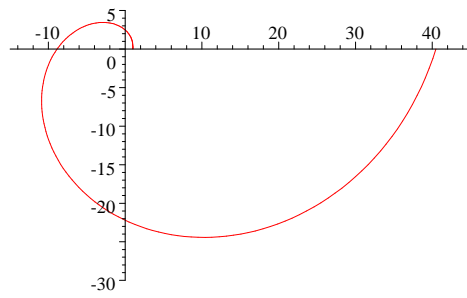


$$R = \theta + \sin \theta$$

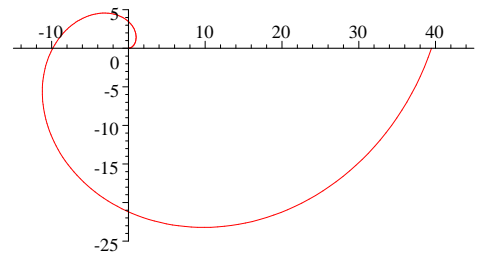


$$R = \theta + \cos \theta$$

34.

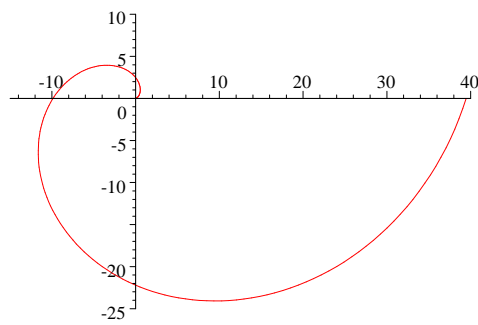


$$R = \theta^2 + \cos \theta$$

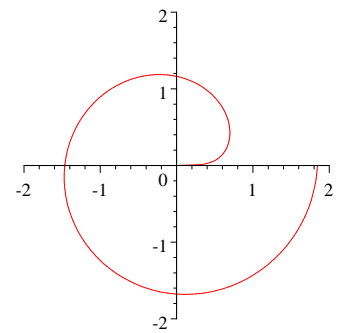


$$R = \theta^2 + \sin \theta$$

35.

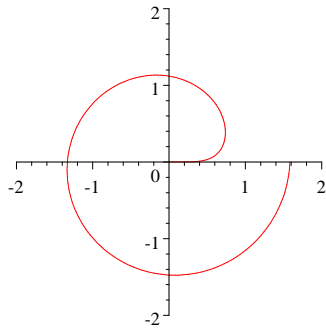


$$R = \theta^2$$

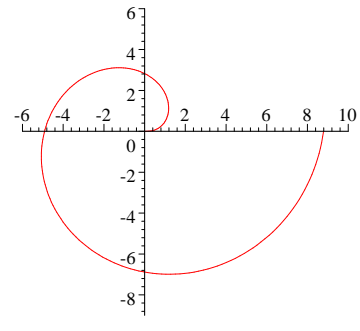


$$R = \sqrt[3]{\theta}$$

36.

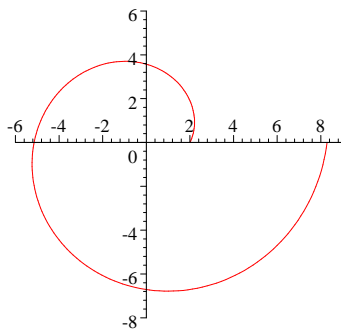


$$R = \sqrt[4]{\theta}$$

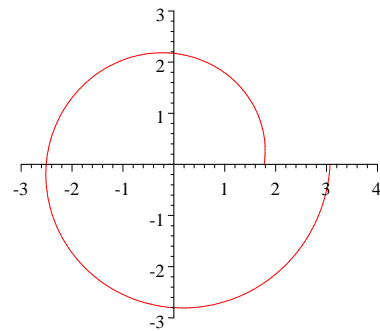


$$R = \theta + \sqrt{\theta}$$

37.

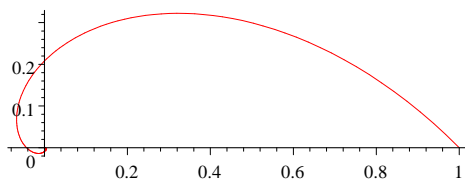


$$R = 2 + \theta$$

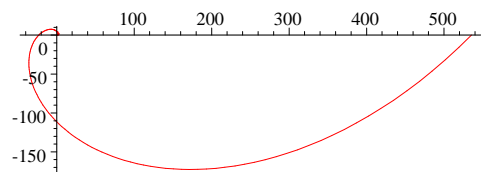


$$R = \sqrt{\pi + \theta}$$

38.

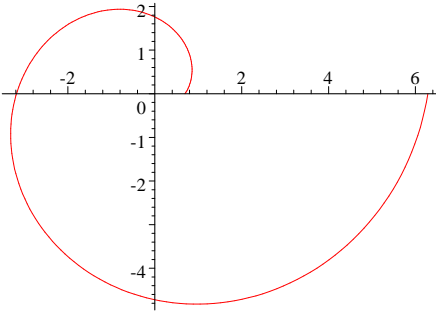


$$R = e^{-\theta}$$

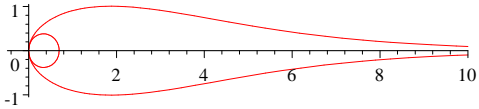


$$R = e^{\theta}$$

39.

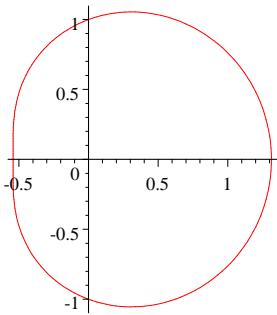


$$R = \ln (1 + e^{\theta})$$

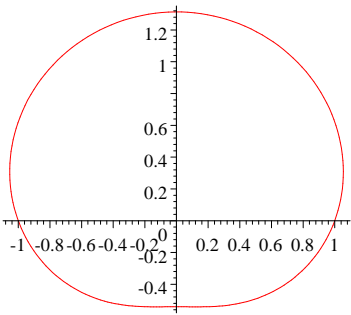


$$R = \ln (1 + \cos \theta)$$

40.

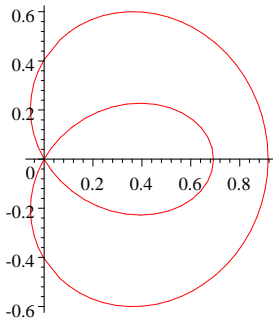


$$R = \ln (e + \cos \theta)$$

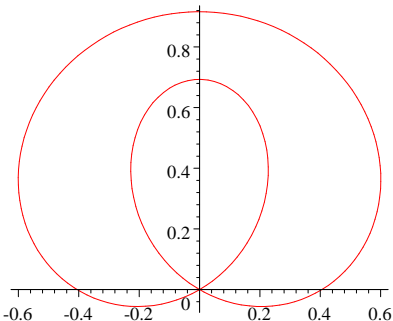


$$R = \ln (e + \sin \theta)$$

41.

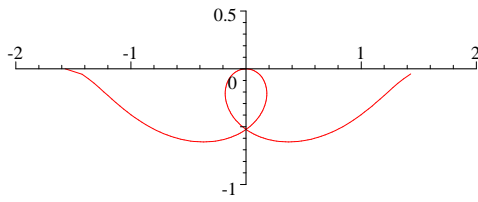


$$R = \ln \left(\frac{3}{2} + \cos \theta \right)$$

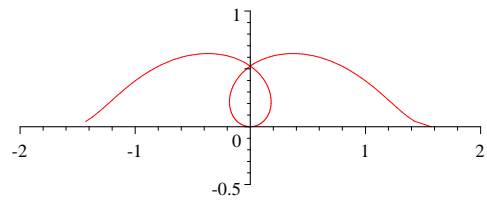


$$R = \ln \left(\frac{3}{2} + \sin \theta \right)$$

42.

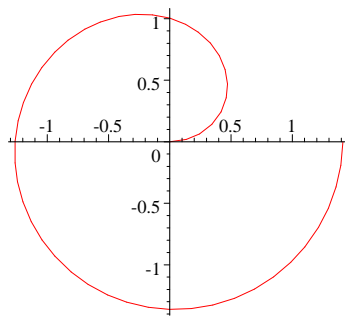


$$R = \arcsin \frac{\theta - \pi}{\pi}$$

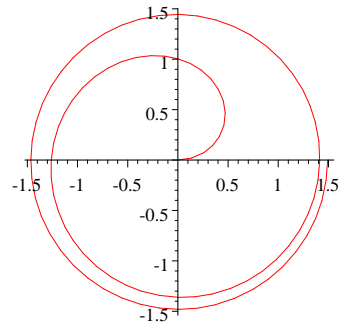


$$R = -\arcsin \frac{\theta - \pi}{\pi}$$

43.

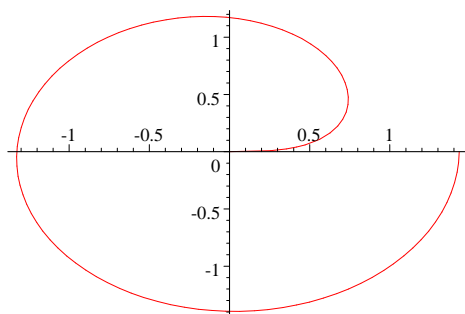


$$R = \arctan \theta, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

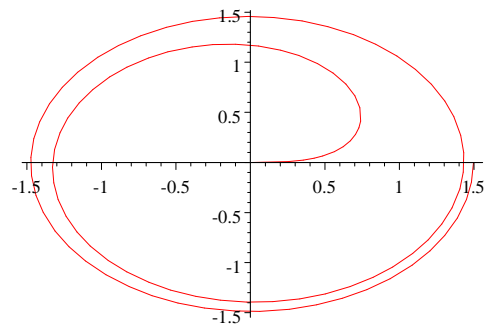


$$R = \arctan \theta, \text{ com } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

44.

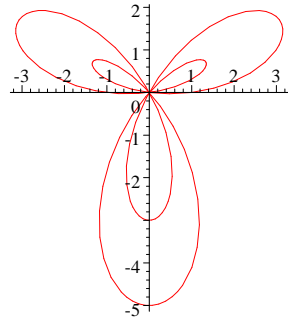


$$R = \operatorname{arcsec}(\theta + 1), \text{ com } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

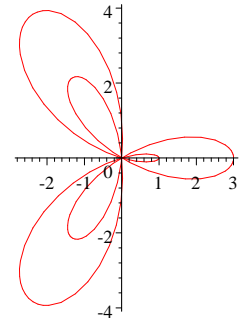


$$R = \operatorname{arcsec}(\theta + 1), \text{ com } 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

45.

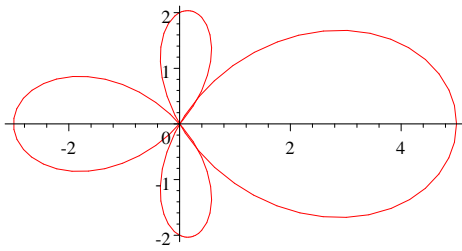


$$R = 1 - \sin \theta + 3 \sin (3\theta)$$

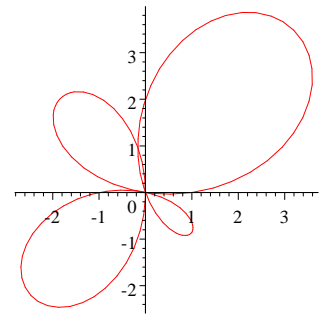


$$R = 1 - \cos \theta + 3 \cos (3\theta)$$

46.

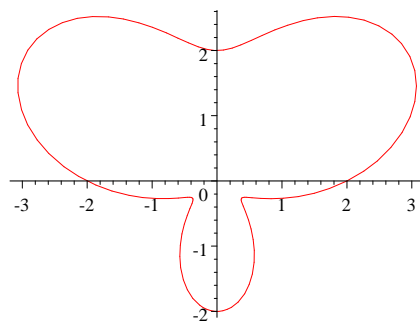


$$R = 1 + \cos \theta + 3 \cos (2\theta)$$

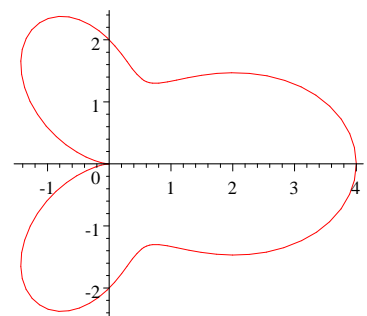


$$R = 1 + \sin \theta + 3 \sin (2\theta)$$

47.

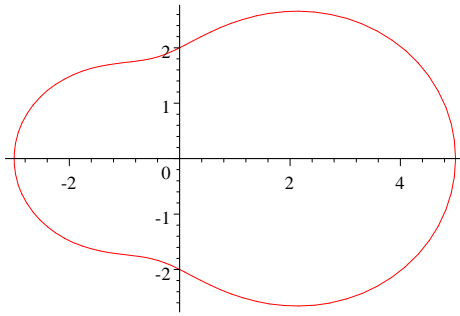


$$R = 2 + \sin \theta + \sin (3\theta)$$

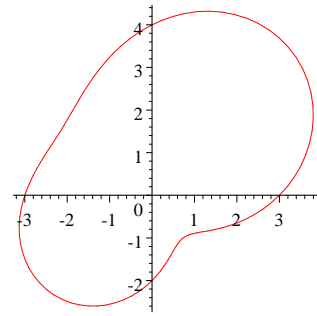


$$R = 2 + \cos \theta + \cos (3\theta)$$

48.

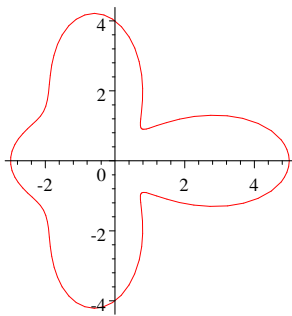


$$R = 3 + \cos \theta + \cos(2\theta)$$

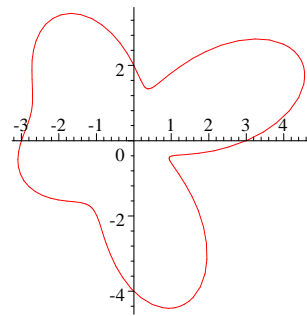


$$R = 3 + \sin \theta + \sin(2\theta)$$

49.

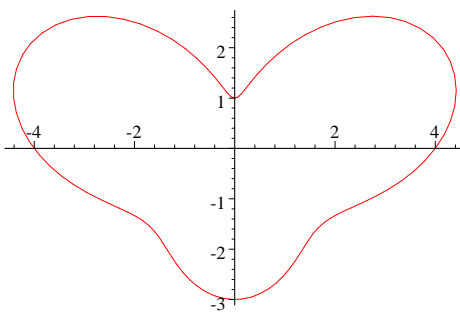


$$R = 3 + \cos(3\theta) + \cos(4\theta)$$

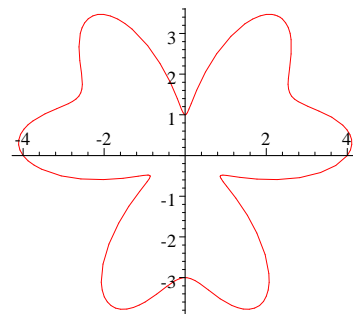


$$R = 3 + \sin(3\theta) + \sin(4\theta)$$

50.

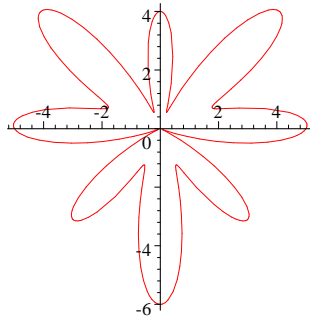


$$R = 3 + \sin(3\theta) + \cos(2\theta)$$

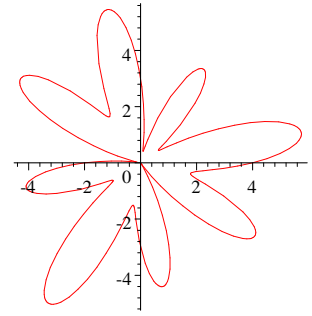


$$R = 3 + \sin(3\theta) + \cos(6\theta)$$

51.

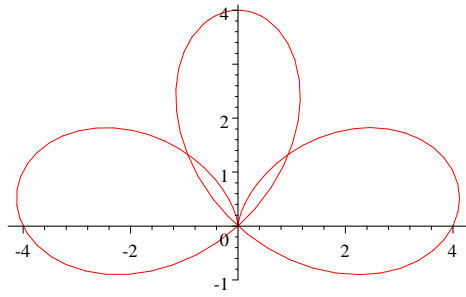


$$R = 3 + \sin(3\theta) + 2 \cos(8\theta)$$

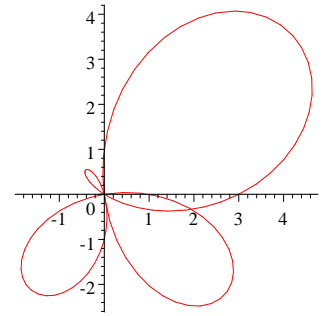


$$R = 3 + \cos(3\theta) + 2 \sin(8\theta)$$

52.

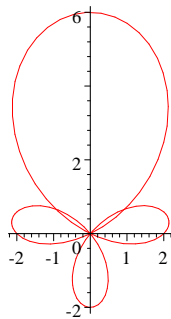


$$R = 1 + 2 \sin \theta + 3 \cos(2\theta)$$

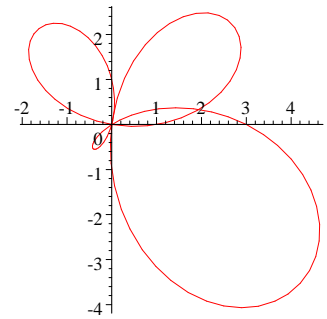


$$R = 1 + 2 \cos \theta + 3 \sin(2\theta)$$

53.

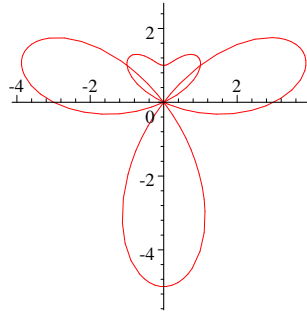


$$R = 1 + 2 \sin \theta - 3 \cos(2\theta)$$

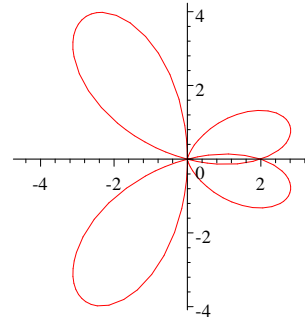


$$R = 1 + 2 \cos \theta - 3 \sin(2\theta)$$

54.

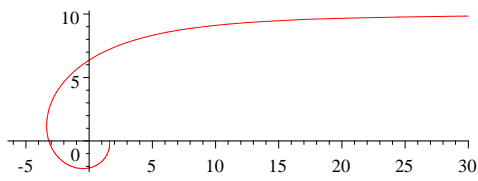


$$R = 2 \sin(3\theta) - 3 \cos(2\theta)$$

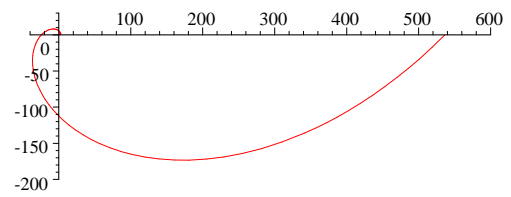


$$R = 2 \cos(3\theta) - 3 \sin(2\theta)$$

55.

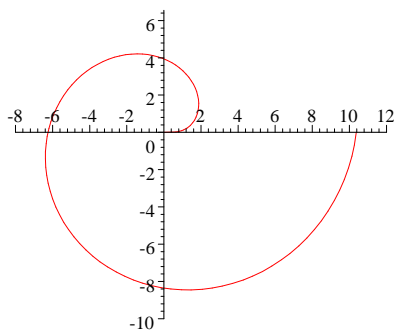


$$R = \frac{10}{\theta}$$

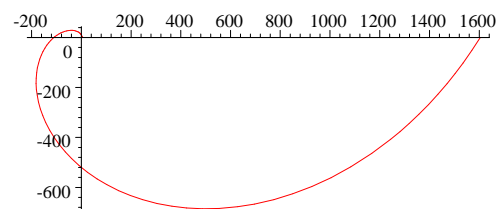


$$R = 1 + e^{\theta} - e^{-\theta}$$

56.

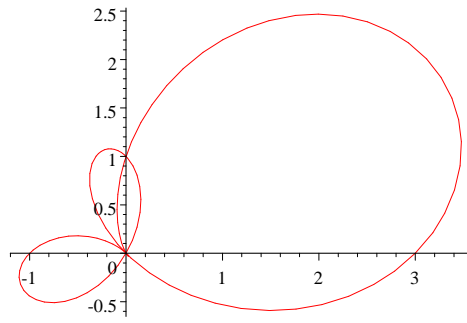


$$R = \theta + \sqrt{\theta} + \sqrt[4]{\theta}$$

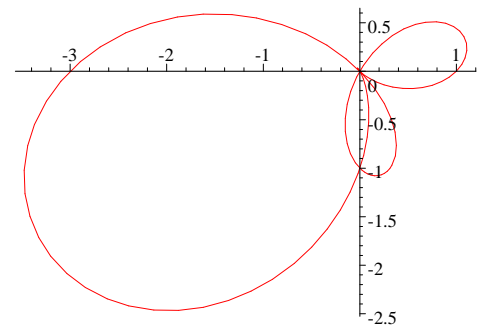


$$R = \theta + \theta^2 + \theta^4$$

57.

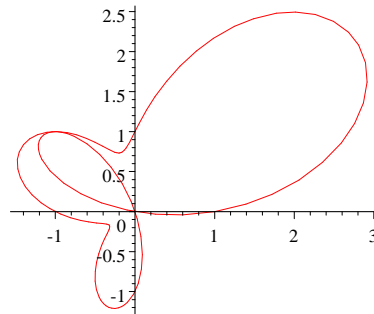


$$R = 1 + \sin \theta + \sin (2\theta) + \cos \theta + \cos (2\theta)$$

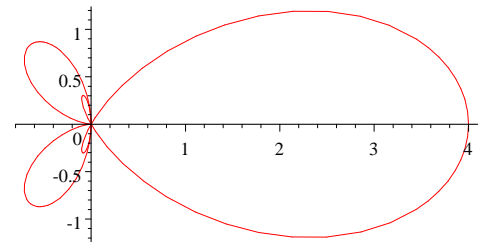


$$R = 1 - \sin \theta + \sin (2\theta) - \cos \theta + \cos (2\theta)$$

58.



$$R = 1 + \sin \theta + \sin (2\theta) + \sin (3\theta)$$



$$R = 1 + \cos \theta + \cos (2\theta) + \cos (3\theta)$$

Capítulo 25

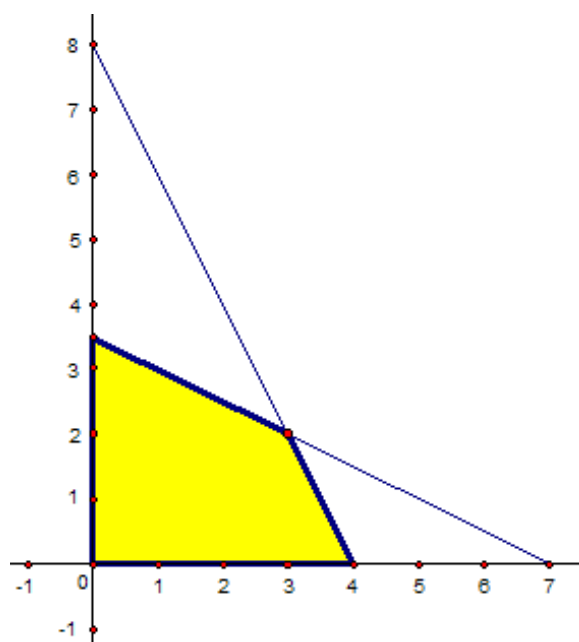
Programação Linear

25.1 O método gráfico

Exemplo 647 Determine o valor máximo da função $f(x, y) = 2x + 3y$, com as variáveis x e y sujeitas às seguintes restrições:

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 8, x + 2y = 7.$$

Resolução



Começemos por referir que todas as funções envolvidas nesta questão são funções polinomiais de grau (menor ou igual a) 1.

As restrições dadas definem um polígono convexo contido no primeiro quadrante, quando se considera o plano \mathbb{R}^2 . O interessante é que o valor máximo da função $f(x, y) = 2x + 3y$ é atingido num dos vértices do polígono. Note-se ainda que as restrições, neste caso, são da forma $a_i x + b_i y \leq c_i$, com $a_i \geq 0, b_i \geq 0, c_i \geq 0$, o que faz com que todas rectas tenham declive negativo e que seja definido um polígono contido no primeiro quadrante.

Note-se que é costume utilizar as variáveis x_1, x_2 em vez de x, y e os coeficientes $a_{i,j}$ e b_j , em vez de a_i e b_i .

Pode acontecer que as restrições não definam um polígono, por não darem origem a uma região limitada. Nesse caso, falaremos em pontos extremos em vez de vértices. É claro que os vértices dos polígonos também são pontos extremos.

Consideremos as rectas definidas por $x = 0, y = 0, 2x + y = 8$ e $x + 2y = 7$:

Determinemos o ponto de intersecção das duas rectas anteriores:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ x + 16 - 4x = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ -3x = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

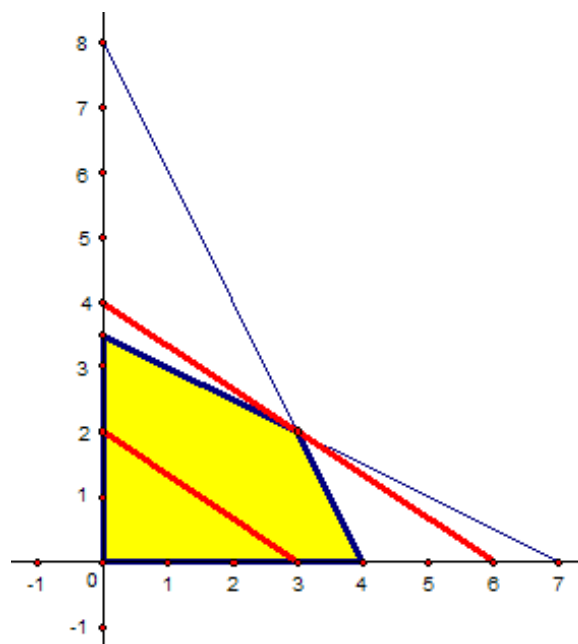
Os pontos $(0, 0)$, $(0, \frac{7}{2})$, $(3, 2)$ e $(4, 0)$ definem um quadrilátero convexo. Calculando o valor de f em cada um desses pontos obtemos:

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 + 0 = 0 \\ f(0, \frac{7}{2}) = 0 + \frac{21}{2} = 10,5 \\ f(4, 0) = 8 \\ f(3, 2) = 6 + 6 = 12 \end{cases}$$

Então, o valor máximo da função objectivo é 12, valor este que é atingido no vértice $(3, 2)$.

Se não pretendermos calcular o valor da função em todos os vértices, podemos proceder do seguinte modo:

Traçamos a recta de equação $2x + 3y = 6$. Seguidamente, deslocamos a recta de modo a manter-se paralela à recta anterior, a intersectar o quadrilátero e a ficar o mais para cima possível. É fácil de verificar que tal recta tem de passar pelo vértice $(3, 2)$.



E, agora, basta-nos encontrar $f(3, 2)$.

Observe-se que pode acontecer que a recta a deslocar seja paralela a um dos lados do polígono, pelo que o máximo pode ser atingido em dois vértices. Nesse caso, embora o valor do máximo seja único, ele pode ser atingido em qualquer ponto do lado definido pelos dois vértices em questão.

Se em vez de duas variáveis tivermos três, a situação é análoga e, caso a região admissível seja limitada, teremos um poliedro contido no primeiro octante, tendo-se que o máximo da função objectivo (desde que seja uma função polinomial de grau 1) é atingido num dos vértices do poliedro. Mas, agora, é mais complicada uma resolução gráfica, bem como a obtenção dos vértices do polígono.

Se tivermos mais de 3 variáveis, já não conseguimos visualizar a região admissível (ou conjunto de oportunidades).

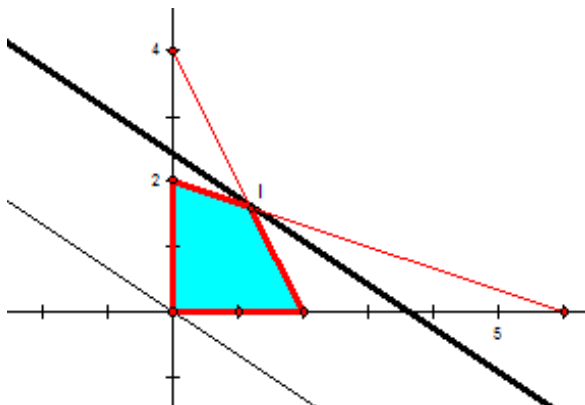
Exemplo 648 Determine o valor máximo da função $f(x, y) = 20x + 30y$, com as variáveis x e y sujeitas às seguintes restrições:

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6, 2x + y \leq 4.$$

Resolução

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 12 - 6x = 6 \\ y = 4 - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} -5x = -6 \\ y = 4 - 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases}$$

A região admissível (conjunto de oportunidades) é o polígono convexo de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ e $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$.



A função objectivo é $z(x, y) = 20x + 30y$. Então, nos quatro vértices, temos

$$\begin{cases} z(0, 0) = 0 \\ z(0, 2) = 60 \\ z(2, 0) = 40 \\ z(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}) = 24 + 48 = 72 \end{cases}$$

Logo, $z_{\max} = 72$.

Observação

Num problema de Programação Linear, temos

1. Uma função objectivo do tipo $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, com $n \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, função esta que pretendemos maximizar ou minimizar.
2. As variáveis independentes verificam as restrições:

$$(a) \quad x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

$$(b) \quad a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \triangle_k b_k, b_k > 0, (k = 1, \dots, m, m \in \mathbb{N}), a_{kj} \in \mathbb{R}.$$

Na expressão anterior, \triangle_k é um dos sinais \leq ou \geq . É claro que o problema só tem sentido se as restrições impostas não forem uma condição impossível.

Exemplo 649 Determine o valor máximo da função $z = 8x_1 + 9x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

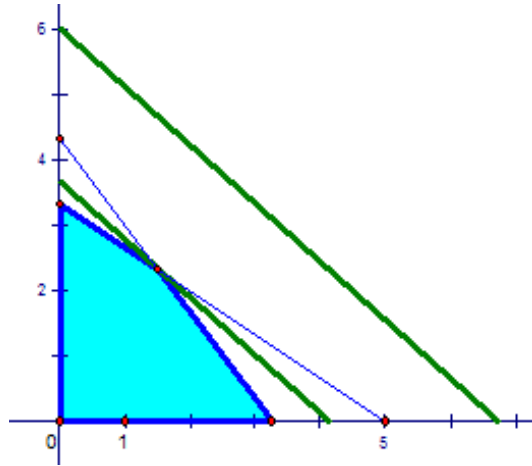
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + 3x_2 \leq 13.$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = 3 \\ 6 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vértices do quadrilátero: $(0, 0)$, $(0, \frac{10}{3})$, $(\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$ e $(\frac{13}{4}, 0)$.

Consideremos a recta de equação $8x_1 + 9x_2 = 72$ e a recta paralela à anterior que passa por $(\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$:



Então, $z_{\max} = 8 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{7}{3} = 12 + 21 = 33$.

Observação

No problema anterior, pretende-se maximizar a função $z = 8x_1 + 9x_2$, com $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + 3x_2 \leq 13$, podendo-se utilizar matrizes:

$$z = [8 \quad 9] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \wedge X \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na expressão anterior, $X \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ significa $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja, $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0$.

O problema dual do problema dado consiste em minimizar a função

$$z = [10 \quad 13] \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Logo, $z = 10w_1 + 13w_2$, com $2w_1 + 4w_2 \geq 8 \wedge 3w_1 + 3w_2 \geq 9$.

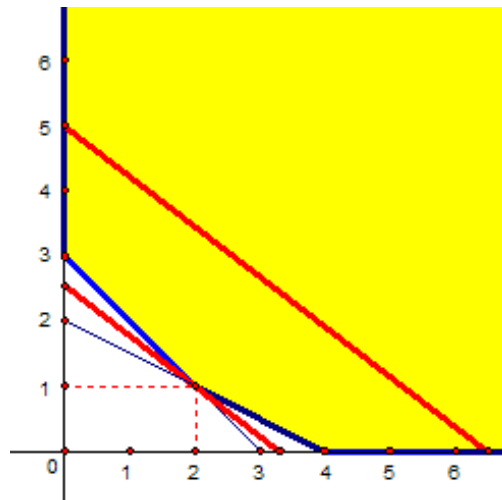
Neste exemplo, o problema dual continua a ter, como função objectivo, uma função de duas variáveis, pelo que pode ser resolvido graficamente.

Exemplo 650 Resolva, graficamente, o problema dual do exemplo anterior.

Resolução

Queremos minimizar a função $z = 10w_1 + 13w_2$, com $w_1 \geq 0 \wedge w_2 \geq 0 \wedge 2w_1 + 4w_2 \geq 8 \wedge 3w_1 + 3w_2 \geq 9$.

Logo, $w_1 + 2w_2 \geq 4 \wedge w_1 + w_2 \geq 3$.



O ponto de intersecção da recta $w_1 + 2w_2 = 4$ com a recta $w_1 + w_2 = 3$ é $(2, 1)$.

Os pontos extremos são $(2, 1)$, $(0, 3)$ e $(4, 0)$. Ora, $z(2, 1) = 33$, $z(0, 3) = 39$ e $z(4, 0) = 40$, pelo que o valor mínimo de z é 33, tendo-se obtido o mesmo resultado que no problema inicial (o qual é conhecido por problema primal).

Note-se que o conjunto de oportunidades (ou região admissível) não é limitado.

Exemplo 651 Determine o valor máximo da função $z = 8x_1 + 15x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

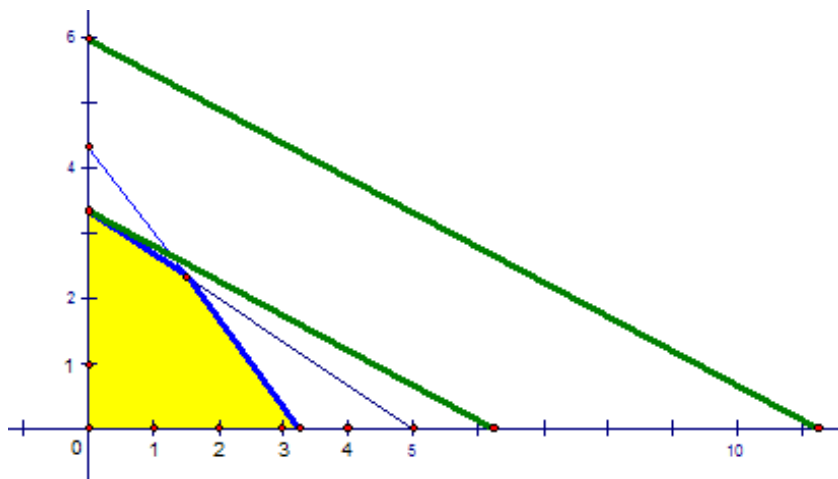
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + 3x_2 \leq 13.$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = 3 \\ 6 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vértices do quadrilátero: $(0, 0)$, $(0, \frac{10}{3})$, $(\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$ e $(\frac{13}{4}, 0)$.

Consideremos a recta de equação $8x_1 + 15x_2 = 120$.



Neste caso, a paralela é traçada pelo ponto $(0, \frac{10}{3})$. Então, $z_{\max} = 8 \times 0 + 15 \times \frac{10}{3} = 50$.

Note-se que $8 \times \frac{3}{2} + 15 \times \frac{7}{3} = 47 < 50$ e $8 \times 0 + 15 \times \frac{13}{4} = \frac{195}{4} < 50$.

Exemplo 652 Resolva o problema dual do exemplo anterior.

Resolução

No problema primal, pretendíamos maximizar a função

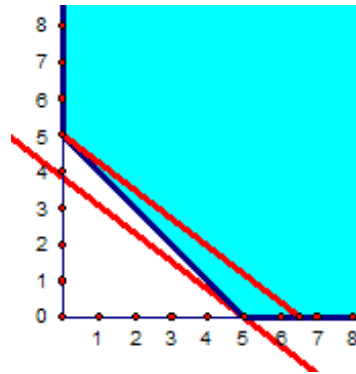
$$z = [8 \quad 15] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, no problema dual, pretendemos minimizar a função

$$z = [10 \quad 13] \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $z = 10w_1 + 13w_2$, com $w_1 \geq 0 \wedge w_2 \geq 0 \wedge 2w_1 + 4w_2 \geq 8 \wedge 3w_1 + 3w_2 \geq 15$.

Logo, $w_1 + 2w_2 \geq 4 \wedge w_1 + w_2 \geq 5$. Então, $w_1 + w_2 \geq 5$.



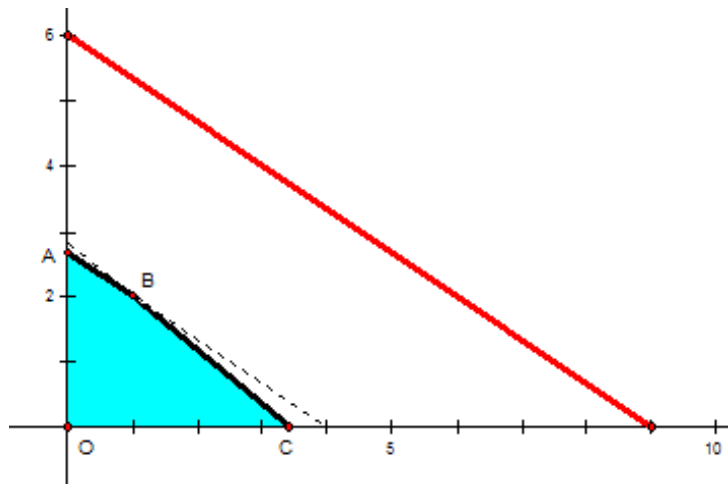
Logo, $z_{\min} = z(5, 0) = 10 \times 5 = 50$. Note-se que os pontos extremos são $(5, 0)$ e $(0, 5)$ e que $z(0, 5) = 13 \times 5 = 65$.

Exemplo 653 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 15x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 8, 4x_1 + 5x_2 \leq 13.$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x_1 + 15x_2 = 40 \\ -10x_1 - 8x_2 = -26 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Vértices do quadrilátero: $(0, 0)$, $(0, \frac{8}{3})$, $(1, 2)$ e $(\frac{13}{5}, 0)$.

Neste caso, temos que um dos lados do polígono é paralelo à recta de equação $10x_1 + 15x_2 = 90$.

Calculando o valor da função nos vários vértices, temos:

$$\begin{cases} z(0, 0) = 0 \\ z(0, \frac{8}{3}) = 40 \\ z(1, 2) = 10 + 30 = 40 \\ z(\frac{13}{5}, 0) = 26 \end{cases}$$

A função atinge o valor máximo nos vértices $(0, \frac{8}{3})$ e $(1, 2)$, pelo que acontecerá o mesmo em qualquer ponto do lado definido por esses dois vértices. Por exemplo, se considerarmos o ponto médio $M = (\frac{1}{2}, \frac{7}{3})$, temos $z(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}) = 10 \times \frac{1}{2} + 15 \times \frac{7}{3} = 40$. Tal não é de espantar, porque $10x_1 + 15x_2 = 40$ é uma equação da recta definida por $(0, \frac{8}{3})$ e $(1, 2)$.

Exemplo 654 Resolva o problema dual do exemplo anterior.

Resolução

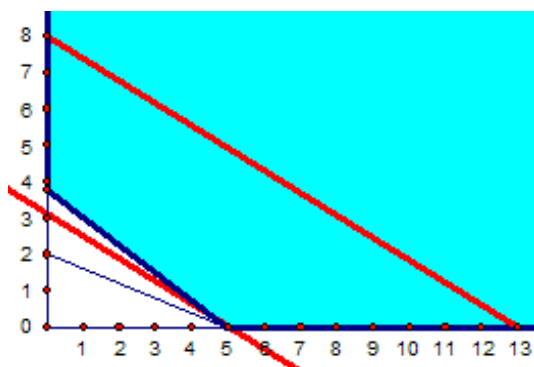
No problema primal, pretendíamos maximizar a função seguinte:

$$z = [10 \quad 15] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No problema dual, pretendemos minimizar a função

$$z = [8 \quad 13] \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $z = 8w_1 + 13w_2$, com $w_1 \geq 0 \wedge w_2 \geq 0 \wedge 2w_1 + 5w_2 \geq 10 \wedge 3w_1 + 4w_2 \geq 15$.



$$z(5, 0) = 8 \times 5 = 40; \quad z\left(0, \frac{15}{4}\right) = 13 \times \frac{15}{4}$$

Então, $z_{\min} = z(5, 0) = 40$.

Exemplo 655 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 15x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \leq 8, 2x_1 + x_2 \leq 7, 5x_1 + 5x_2 \leq 22.$$

Resolução

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ -2x_1 - x_2 = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ 5x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} -10x_1 - 5x_2 = -35 \\ 5x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{13}{5} \\ x_2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

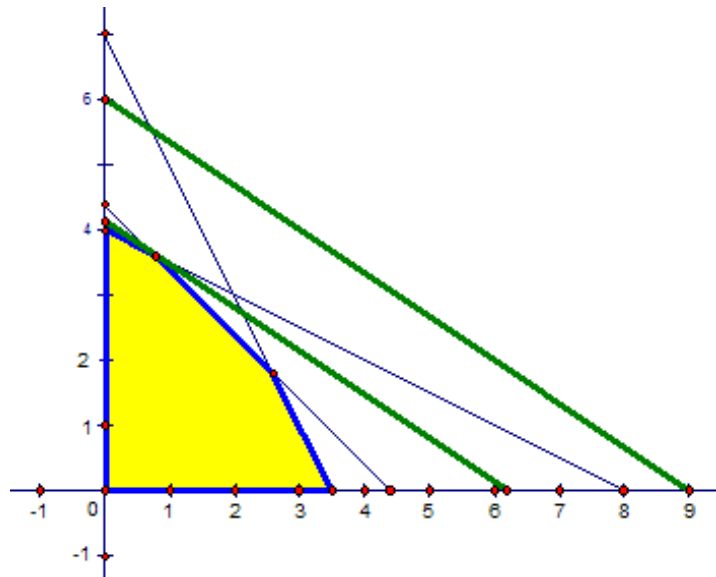
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 5x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x_1 - 10x_2 = -40 \\ 5x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \frac{18}{5} \\ x_1 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ora, } z(0, 4) = 60, \quad z\left(\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right) = 53, \quad z\left(\frac{4}{5}, \frac{18}{5}\right) = 62, \quad z\left(\frac{7}{2}, 0\right) = 35$$

Então, o valor máximo da função é 62.

Repare-se que, neste caso, a região admissível é um pentágono em vez dum quadrilátero.

A representação gráfica é a seguinte:



Exemplo 656 Determine os valores máximo e mínimo da função $z = 10x_1 + 12x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 8, 2x_1 + x_2 \leq 12, 3x_1 + 4x_2 \leq 42.$$

Resolução

Consideremos as rectas r, s, t definidas por $\begin{cases} r : x_1 + x_2 = 8 \\ s : 2x_1 + x_2 = 12 \\ t : 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases}$ e determinemos os pontos de intersecção das rectas duas a duas:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases} &\iff \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases} &\iff \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = -24 \\ 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = 18 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases} &\iff \begin{cases} -8x_1 - 42x_2 = -48 \\ 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x_1 = -6 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{6}{5} \\ x_2 = \frac{48}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Os vértices do quadrilátero são $(0, 8)$, $(4, 4)$, $(\frac{6}{5}, \frac{48}{5})$ e $(0, \frac{21}{2})$.

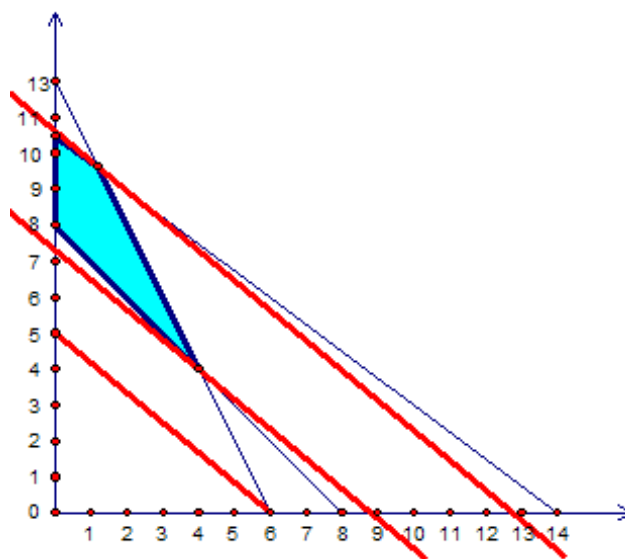
A função objectivo é $z(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2$.

Calculemos o valor de z , em cada um dos vértices do quadrilátero anterior:

$$z(0, 8) = 96; \quad z(4, 4) = 88; \quad z\left(\frac{6}{5}, \frac{48}{5}\right) = \frac{636}{5} = 127,2; \quad z\left(0, \frac{21}{2}\right) = 126$$

Então, $z_{\max} = \frac{636}{5}$ e $z_{\min} = 88$.

Resolução gráfica:



Exemplo 657 Determine o valor máximo da função $z = 6x_1 + 5x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + x_2 \geq 9.$$

Resolução

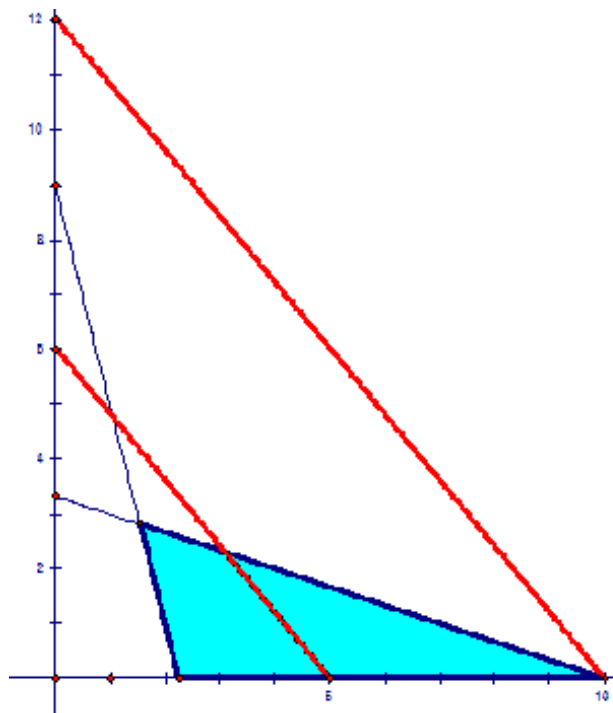
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 10 \\ 4x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 27 - 12x_1 = 10 \\ x_2 = 9 - 4x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{17}{11} \\ x_2 = \frac{31}{11} \end{cases}$$

As restrições dadas definem um triângulo de vértices $(10, 0)$, $(\frac{17}{11}, \frac{31}{11})$ e $(\frac{9}{4}, 0)$.

Ora, $z(10, 0) = 60$, $z(\frac{17}{11}, \frac{31}{11}) = 6 \times \frac{17}{11} + 5 \times \frac{31}{11} = \frac{257}{11}$ e $z(\frac{9}{4}, 0) = 6 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{2}$.

Logo, $z_{\max} = 60$.

Resolução gráfica



25.2 O método do Simplex

Exemplo 658 Determine o valor máximo da função $z = 8x_1 + 15x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + 3x_2 \leq 13.$$

Resolução

A função objectivo (aquela que pretendemos maximizar) assume o valor zero para $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$. O método do Simplex consiste em procurar outro vértice onde a função assuma um valor superior e verificar se esse valor já é o máximo da função. Se não for, o processo continua.

Começamos por substituir $z = 8x_1 + 15x_2$ por $z - 8x_1 - 15x_2 = 0$. Começamos por notar que um aumento de uma unidade na variável x_1 provoca um aumento de oito unidades na função objectivo, enquanto que um aumento de uma unidade na variável x_2 provoca um aumento de quinze unidades na mesma função. À primeira vista, parece preferível aumentar x_2 o mais possível, mas tal pode não acontecer. Tudo depende dos aumentos que as variáveis podem sofrer.

Vejamos como se resolve a questão colocada:

Começamos por introduzir as chamadas variáveis de folga, fazendo $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$ e $4x_1 + 3x_2 + x_4 = 13$, com todas as variáveis maiores ou iguais a zero, ou seja, $x_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Depois construímos um quadro (matriz) como se segue:

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 10 |
| x_4 | 4 | 3 | 0 | 1 | 13 |
| z | -8 | -15 | 0 | 0 | 0 |

Na situação inicial, temos $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 10$ e $x_4 = 13$.

Note-se a existência, no quadro, da matriz identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Depois, dividimos 10 por 3 e 13 por 3, se quisermos aumentar a variável x_2 , escolhendo o menor dos quocientes (positivos). Neste caso, o menor dos quocientes é $\frac{10}{3}$ que é obtido na linha onde está x_3 . Então, nessa linha, escrevemos x_2 (na primeira coluna):

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 10 |
| x_4 | 4 | 3 | 0 | 1 | 13 |
| z | -8 | -15 | 0 | 0 | 0 |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|---------------|-------|---------------|-------|----------------|
| x_2 | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{10}{3}$ |
| x_4 | 2 | 0 | -1 | 1 | 3 |
| z | 2 | 0 | 5 | 0 | 50 |

Como se passa duma matriz para outra? E quando terminamos?

1. Na linha de x_2 , dividimos todos os elementos por 3 (coeficiente de x_2).
2. Nas restantes linhas, eliminamos x_2 .
3. Como todos os coeficientes na linha de z são positivos, já encontramos o valor máximo de z (40). Este valor corresponde a $x_2 = \frac{10}{3}$, $x_4 = 3$ e $x_1 = x_3 = 0$.

E se tivéssemos começado por aumentar a variável x_1 ? Nesse caso, teríamos:

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 0 | 10 |
| x_4 | 4 | 3 | 0 | 1 | 13 |
| z | -8 | -15 | 0 | 0 | 0 |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|-------|---------------|-------|----------------|----------------|
| x_3 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{2}$ |
| x_1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{13}{4}$ |
| z | 0 | -9 | 0 | 2 | 26 |

Neste caso, ainda não atingimos o máximo de z , devido à existência do valor negativo -9, na linha de z . Então o processo continua:

$$\frac{7}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{7}{3}, \frac{13}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{13}{3}, \text{ tendo-se que o menor dos dois valores é } \frac{7}{3}.$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|-------|---------------|-------|----------------|----------------|
| x_3 | 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{2}$ |
| x_1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{13}{4}$ |
| z | 0 | -9 | 0 | 2 | 26 |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|-------|---------------|---------------|----------------|----------------|
| x_2 | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{3}$ |
| x_1 | 1 | $\frac{3}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{13}{4}$ |
| z | 0 | -9 | 0 | 2 | 26 |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|-------|-------|----------------|----------------|----------------|
| x_2 | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{3}$ |
| x_1 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{13}{2}$ |
| z | 0 | 0 | 6 | -1 | 47 |

E temos de continuar, tendo em atenção que escolhemos o menor dos quocientes positivos (neste caso apenas há um):

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|-------|-------|----------------|----------------|----------------|
| x_2 | 0 | 1 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{3}$ |
| x_1 | 1 | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{13}{2}$ |
| z | 0 | 0 | 6 | -1 | 47 |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|-------|---------------|-------|---------------|-------|----------------|
| x_2 | $\frac{2}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{10}{3}$ |
| x_4 | 2 | 0 | -1 | 1 | 3 |
| z | 2 | 0 | 5 | 0 | 50 |

Comparando esta resolução com a resolução gráfica, vemos que, no primeiro processo, passámos do vértice $(0,0)$ para o vértice $(0, \frac{10}{3})$, enquanto que, no segundo processo, passámos por todos os vértices. Este exemplo mostra que, antes de escolhermos um vértice, devemos analisar a situação com cuidado, se quisermos resolver o problema com o menor número de passos. E, na função objectivo, não basta escolher o coeficiente de maior valor absoluto!

Exemplo 659 Determine o valor máximo da função $z = 8x_1 + 10x_2 + 15x_3$, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6, 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \text{ e } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8.$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 8 \\ z - 8x_1 - 10x_2 - 15x_3 = 0 \end{cases}, \text{ com } x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

| | x_1 | x_2 | (x_3) | x_4 | x_5 | x_6 | |
|----------------------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|-----|
| x_4 | 2 | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| x_5 | 4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| $x_3 \leftarrow x_6$ | 1 | 2 | (3) | 0 | 0 | 1 | (8) |
| z | -8 | -10 | (-15) | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\min\left(\frac{6}{1}, \frac{10}{2}, \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$z = \frac{8}{3} \times 15 = 40$$

| | (x_1) | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|----------------------|------------------|----------------|-------|-------|-------|----------------|------------------|
| x_4 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{7}{3}$ | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{10}{3}$ |
| $x_1 \leftarrow x_5$ | $(\frac{10}{3})$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{2}{3}$ | $(\frac{14}{3})$ |
| x_3 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{3}$ |
| z | (-3) | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 | 40 |

$$\min\left(2, \frac{7}{5}, 8\right) = \frac{7}{5}$$

$$z = 40 + 3 \times \frac{7}{5} = \frac{221}{5}$$

| | x_1 | (x_2) | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|----------------------|-------|-------------------|-------|-------|----------------|----------------|-----------------|
| $x_2 \leftarrow x_4$ | 0 | $(\frac{5}{2})$ | 0 | 1 | 0 | 0 | (1) |
| x_1 | 1 | $-\frac{1}{10}$ | 0 | 0 | 1 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{7}{5}$ |
| x_3 | 0 | $\frac{7}{10}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{11}{5}$ |
| z | 0 | $(-\frac{3}{10})$ | 0 | 0 | 3 | $\frac{22}{5}$ | $\frac{221}{5}$ |

$$\min\left(\frac{2}{5}, \frac{22}{7}\right) = \frac{2}{5}$$

$$z = \frac{221}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{1108}{25}$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|-------|-------|-------|-------|-----------------|----------------|----------------|-------------------|
| x_2 | 0 | 1 | 0 | $\frac{2}{5}$ | 0 | 0 | $\frac{2}{5}$ |
| x_1 | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{25}$ | 1 | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{36}{25}$ |
| x_3 | 0 | 0 | 1 | $-\frac{7}{25}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{48}{25}$ |
| z | 0 | 0 | 0 | $\frac{3}{25}$ | 3 | $\frac{22}{5}$ | $\frac{1108}{25}$ |

$$\min\left(\frac{2}{5}, \frac{22}{7}\right) = \frac{2}{5}$$

$$z = \frac{221}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{1108}{25}$$

Então, o valor máximo de z é $\frac{1108}{25}$, correspondente a $x_1 = \frac{36}{25}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{48}{25}$.
Se calcularmos $z\left(\frac{36}{25}, \frac{2}{5}, \frac{48}{25}\right)$, obtemos $8 \times \frac{36}{25} + 10 \times \frac{2}{5} + 15 \times \frac{48}{25} = \frac{1108}{25}$.

Exemplo 660 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 12x_2 + 20x_3$, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 16, 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \text{ e } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 21.$$

Resolução

Neste exemplo, temos a desigualdade $4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$, que tem o sinal \geq , em vez de \leq .

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 21 \\ z - 10x_1 - 12x_2 - 20x_3 = 0 \end{cases}, \text{ com } x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0.$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| | 3 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| | 4 | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 10 |
| | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 21 |
| z | -10 | -12 | -20 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | x_1 | x_2 | (x_3) | x_4 | x_5 | x_6 | |
|----------------------|-------|---------------|------------------|-------|----------------|-------|------------------|
| x_4 | 0 | $\frac{7}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ | 0 | $\frac{17}{2}$ |
| x_1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ |
| $x_3 \leftarrow x_6$ | 0 | $\frac{3}{2}$ | $(\frac{11}{4})$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $(\frac{37}{2})$ |
| z | 0 | -7 | $-\frac{35}{2}$ | 0 | $-\frac{5}{2}$ | 0 | 25 |

$$\begin{aligned} \frac{17}{2} \div \frac{1}{4} &= 34 \\ \frac{5}{2} \div \frac{1}{4} &= 10 \\ \frac{37}{2} \div \frac{11}{4} &= \frac{74}{11} \approx 6,7273 \end{aligned}$$

E conseguimos chegar a uma situação familiar!

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | (x_5) | x_6 | |
|----------------------|-------|-----------------|-------|-------|--------------------|-----------------|-------------------|
| $x_5 \leftarrow x_4$ | 0 | $\frac{37}{11}$ | 0 | 1 | $(\frac{8}{11})$ | $-\frac{1}{11}$ | $(\frac{75}{11})$ |
| x_1 | 1 | $\frac{4}{11}$ | 0 | 0 | $-\frac{3}{11}$ | $-\frac{1}{11}$ | $\frac{9}{11}$ |
| x_3 | 0 | $\frac{1}{11}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{11}$ | $\frac{4}{11}$ | $\frac{74}{11}$ |
| z | 0 | $\frac{28}{11}$ | 0 | 0 | $(-\frac{10}{11})$ | $\frac{70}{11}$ | $\frac{1570}{11}$ |

$$\frac{75}{11} \div \frac{8}{11} = \frac{75}{8}$$

$$\frac{74}{11} \div \frac{1}{11} = 74$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|-------|-------|----------------|-------|----------------|-------|----------------|-----------------|
| x_5 | 0 | $\frac{37}{8}$ | 0 | $\frac{11}{8}$ | 1 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{75}{8}$ |
| x_1 | 1 | $\frac{13}{8}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | 0 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{27}{8}$ |
| x_3 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | $-\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{47}{8}$ |
| z | 0 | $\frac{27}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ | 0 | $\frac{25}{4}$ | $\frac{605}{4}$ |

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{75}{8} \\ x_1 &= \frac{27}{8} \\ x_3 &= \frac{47}{8} \\ z_{\max} &= \frac{605}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 661 Determine o valor máximo da função $z = 20x_1 + 50x_2 + 100x_3$, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 20, 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12 \text{ e } x_1 + x_2 + x_3 \leq 10.$$

Resolução

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 10 \\ z - 20x_1 - 50x_2 - 100x_3 = 0 \end{cases}, \text{ com } x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0.$$

Então,

| | x_1 | x_2 | (x_3) | x_4 | x_5 | x_6 | |
|----------------------|---------------|---------------|---------|----------------|-------|-------|-----|
| x_4 | 1 | 3 | (4) | 1 | 0 | 0 | 20 |
| x_5 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| x_6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| z | -20 | -50 | (-100) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3 \leftarrow x_4$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 5 |
| x_5 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 2 |
| x_6 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 1 | 5 |
| z | 5 | 25 | 0 | 25 | 0 | 0 | 500 |

$$\begin{aligned} 20 \div 4 &= 5 \\ 12 \div 2 &= 6 \\ 10 \div 1 &= 10 \\ \min(5, 6, 10) &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 5 \\ x_5 &= 2 \\ x_6 &= 5 \\ z_{\max} &= 500 \end{aligned}$$

Logo, $z_{\max} = 500$. Este valor corresponde a $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$ e $x_6 = 5$, pelo que $z = 20 \times 0 + 50 \times 0 + 100 \times 5 = 500$.

Exemplo 662 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 12x_2 + 20x_3$, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 1408, 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 880 \text{ e } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1848.$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1408 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 880 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 1848 \\ z - 10x_1 - 12x_2 - 20x_3 = 0 \end{cases}, \text{ com } x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 3 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1408 |
| | (4) | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | (880) |
| | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1848 |
| z | -10 | -12 | -20 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\begin{aligned} 1408 \div 3 &\approx 469.33 \\ 880 \div 4 &= 220 \\ 1848 \div 1 &= 1848 \\ \min\left(\frac{1408}{3}, 220, 1848\right) &= 220 \end{aligned}$$

| | x_1 | x_2 | (x_3) | x_4 | x_5 | x_6 | |
|----------------------|-------|---------------|------------------|-------|----------------|-------|--------|
| x_4 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ | 0 | 748 |
| x_1 | 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 220 |
| $x_3 \leftarrow x_6$ | 0 | $\frac{3}{2}$ | $(\frac{11}{4})$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | (1628) |
| z | 0 | -7 | $-\frac{35}{2}$ | 0 | $-\frac{5}{2}$ | 0 | 2200 |

$$\begin{aligned} 748 \div \frac{1}{4} &= 2992 \\ 220 \div \frac{1}{4} &= 880 \\ 1628 \div \frac{11}{4} &= 592 \\ \min(2992, 880, 592) &= 592 \end{aligned}$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | (x_5) | x_6 | |
|----------------------|-------|-----------------|-------|-------|--------------------|-----------------|-------|
| $x_5 \leftarrow x_4$ | 0 | $\frac{37}{11}$ | 0 | 1 | $(\frac{8}{11})$ | $-\frac{1}{11}$ | 600 |
| x_1 | 1 | $\frac{4}{11}$ | 0 | 0 | $-\frac{3}{11}$ | $-\frac{1}{11}$ | 72 |
| x_3 | 0 | $\frac{6}{11}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{11}$ | $\frac{4}{11}$ | 592 |
| z | 0 | $\frac{28}{11}$ | 0 | 0 | $(-\frac{10}{11})$ | $\frac{70}{11}$ | 12560 |

$$\begin{aligned} 600 \div \frac{8}{11} &= 825 \\ 592 \div \frac{1}{11} &= 6512 \\ \min(825, 6512) &= 825 \end{aligned}$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|-------|-------|----------------|-------|----------------|-------|----------------|-------|
| x_5 | 0 | $\frac{37}{8}$ | 0 | $\frac{11}{8}$ | 1 | $-\frac{1}{8}$ | 825 |
| x_1 | 1 | $\frac{13}{8}$ | 0 | $\frac{13}{8}$ | 0 | $-\frac{1}{8}$ | 297 |
| x_3 | 0 | $\frac{1}{8}$ | 1 | $-\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | 517 |
| z | 0 | $\frac{27}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ | 0 | $\frac{25}{4}$ | 13310 |

$$\begin{aligned} x_5 &= 825 \\ x_1 &= 297 \\ x_3 &= 517 \\ z_{\max} &= 13310 \end{aligned}$$

Exemplo 663 Determine o valor máximo da função $z = x_1 - x_2 + 2x_3 + 0x_4$, com as variáveis x_1 , x_2 , x_3 e x_4 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5, x_1 + x_3 - 4x_4 \leq 2.$$

Resolução

| | x_1 | x_2 | (x_3) | x_4 | x_5 | x_6 | |
|----------------------|------------------|-----------------------------|---------|------------------------------|-----------------------------|----------------|------------------------------|
| $x_3 \leftarrow x_5$ | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| x_6 | 1 | 0 | (1) | -4 | 0 | 1 | 2 |
| z | -1 | 1 | (-2) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | (x_1) | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
| x_3 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{5}{3}$ |
| $x_1 \leftarrow x_6$ | $(\frac{2}{3})$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{13}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}$ |
| z | $(-\frac{1}{3})$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{10}{3}$ |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
| x_3 | 0 | $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ | 1 | $\frac{1}{3} + \frac{13}{6}$ | $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{3} - \frac{1}{6}$ |
| x_1 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{13}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| z | 0 | $\frac{5}{3} - \frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{2}{3} - \frac{13}{6}$ | $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{10}{3} + \frac{1}{6}$ |

$$\begin{aligned} 5 \div 3 &= \frac{5}{3} \\ 2 \div 1 &= 2 \\ \min\left(\frac{5}{3}, 2\right) &= \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \div \frac{1}{3} &= 5 \\ \frac{1}{3} \div \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} \\ \min\left(5, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Efectuando os cálculos, temos

| | x_1 | x_2 | x_3 | (x_4) | x_5 | x_6 | |
|----------------------|-------|----------------|-------|------------------|----------------|----------------|---------------|
| $x_4 \leftarrow x_3$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $(\frac{5}{2})$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |
| x_1 | 1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{13}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| z | 0 | $\frac{3}{2}$ | 0 | $(-\frac{3}{2})$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{2}$ |

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{5}$$

Então,

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | |
|-------|-------|--|--|-------|--|---|--|
| x_4 | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ |
| x_1 | 1 | $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{13}{2} = \frac{4}{5}$ | $0 + \frac{2}{5} \times \frac{13}{2} = \frac{13}{5}$ | 0 | $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{13}{2} = \frac{4}{5}$ | $\frac{3}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{13}{2} = \frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{13}{2} = \frac{22}{5}$ |
| z | 0 | $\frac{3}{2} + \frac{3}{10} = \frac{9}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | 0 | $\frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$ | $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$ | $\frac{7}{2} + \frac{9}{5} = \frac{22}{5}$ |

Logo, $z_{\max} = \frac{22}{5}$, correspondendo a $x_1 = \frac{22}{5}$, $x_4 = \frac{3}{5}$ e $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$.

25.3 O Método do Big M

Exemplo 664 Determine o valor mínimo da função $z = 10x_1 + 5x_2$, com as variáveis x_1 , e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

Resolução 1

Seja $3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 12$, com $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$, onde x_4 é a variável de folga e x_3 é uma variável artificial que vamos fazer com que seja nula, de modo a termos $3x_1 + 4x_2 \geq 12$.

Consideremos a função auxiliar $z_M = 10x_1 + 5x_2 + Mx_3$.

Então, temos:

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | |
|--------|-----------------------------------|--------|------------------------|----------------------------|-------------------|
| x_3 | 3 | 4 | 1 | -1 | 12 |
| z_M | -10 | -5 | -M | 0 | 0 |
| Mx_3 | 3M | 4M | M | -M | 12M |
| z_M | 3M - 10 | 4M - 5 | 0 | -M | 12M |
| x_2 | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 3 |
| z_M | $3M - 10 - \frac{3}{4}(4M - 5) =$ | 0 | $-\frac{1}{4}(4M - 5)$ | $-M + \frac{1}{4}(4M - 5)$ | $12M - 3(4M - 5)$ |
| z_M | $-\frac{25}{4}$ | 0 | $-M + \frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{4}$ | 15 |

Para $M > \frac{5}{4}$, todos os coeficientes que aparecem na última linha são negativos, pelo que o valor mínimo de z_M é 15.

Logo, o valor mínimo de z é 15, correspondente a $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ e $x_2 = 3$.

Resolução 2

Seja $3x_1 + 4x_2 - x_3 = 12$, onde x_3 é a variável de folga e $x_3 \geq 0$. Então, temos:

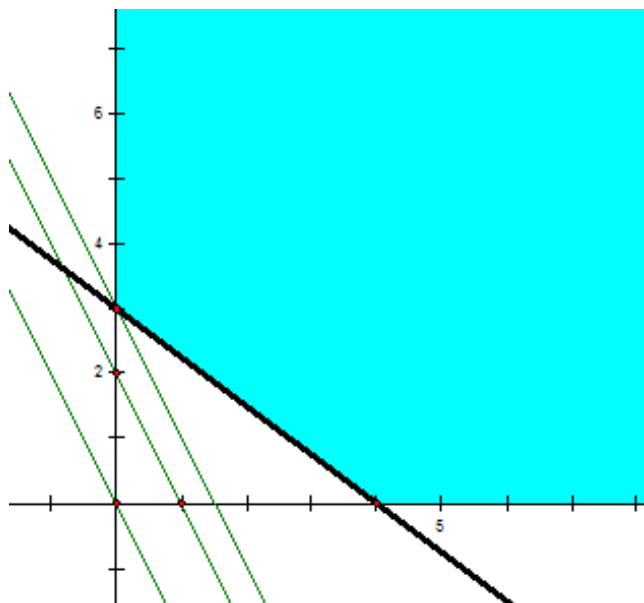
| | x_1 | x_2 | x_3 | |
|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | 3 | 4 | -1 | 12 |
| z | -10 | -5 | 0 | 0 |

Podemos escolher x_1 ou x_2 para variável básica. Tentemos x_1 (embora já saibamos que será melhor x_2):

| | x_1 | x_2 | x_3 | |
|-------|---|------------------------------------|---|-----------------------------------|
| x_1 | 1 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 4 |
| z | 0 | $-5 + \frac{40}{3} = \frac{25}{3}$ | $0 - \frac{10}{3} = -\frac{10}{3}$ | 40 |
| x_2 | $\frac{3}{4}$ | 1 | $-\frac{1}{4}$ | 3 |
| z | $0 - \frac{25}{3} \times \frac{3}{4} = -\frac{25}{4}$ | 0 | $-\frac{10}{3} - \frac{25}{3} \times (-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{4}$ | $40 - \frac{25}{3} \times 3 = 15$ |

Logo, o valor mínimo de z é 15, correspondente a $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = 3$.

Resolução 3



No eixo das abcissas, fica x_1 e, no eixo das ordenadas, fica x_2 . O valor mínimo de z , corresponde a $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.

Logo, $z_{\min} = 10 \times 0 + 5 \times 3 = 15$.

Na figura estão representadas (a verde) as rectas definidas por $10x_1 + 5x_2 = 0$, $10x_1 + 5x_2 = 10$ e $10x_1 + 5x_2 = 15$.

Exemplo 665 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 12x_2 + 20x_3$, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 1408, 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 880 \text{ e } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1848.$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1408 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 880 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_7 = 1848 \\ z - 10x_1 - 12x_2 - 20x_3 + Mx_5 = 0 \end{cases}, \text{ com } x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

A diferença, relativamente ao método anterior, é que consideramos uma variável artificial, para além da variável de folga.

Neste exemplo, a variável artificial é x_5 . Esta variável artificial vai acabar por ser zero, mas vai começar por ser uma variável básica.

O segredo consiste em considerar a função $z_1 = 10x_1 + 12x_2 + 20x_3 - Mx_5$. Se x_5 fosse positivo, podemos fazer com que M tenda para $+\infty$, tendo-se que z tenderia para $-\infty$. Como $z = 0$ é o valor que corresponde às variáveis iniciais todas nulas, temos que o máximo de z_1 corresponde ao caso $x_5 = 0$. Nesse caso, o máximo de z é o máximo de z_1 .

Vejamos como tudo funciona:

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | |
|---------|------------|------------|-----------|-------|-------|-------|-------|---------|
| x_4 | 3 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1408 |
| x_5 | 4 | 2 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 880 |
| x_7 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1848 |
| z | -10 | -12 | -20 | 0 | M | 0 | 0 | 0 |
| $-Mx_5$ | $-4M$ | $-2M$ | $-M$ | 0 | $-M$ | M | 0 | $-880M$ |
| z | $-4M - 10$ | $-2M - 12$ | $-M - 20$ | 0 | 0 | M | 0 | $-880M$ |

$$\begin{aligned}
 1408 \div 3 &= \frac{1408}{3} \approx 469,3 \\
 880 \div 4 &= 220 \\
 1848 \div 1 &= 1848 \\
 \min\left(\frac{1408}{3}, 220, 1848\right) &= 220
 \end{aligned}$$

E, agora, tudo segue como de costume...

O coeficiente negativo de maior valor absoluto é $-4M - 10$.

E $\min\left(\frac{1408}{3}, 220, 1848\right) = 220$, pelo que x_5 vai deixar de ser uma variável básica, dando lugar a x_1 .

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | |
|-------|---------|-------------------|-------------------|-------|----------------|----------------|-------|--------------|
| x_4 | $3 - 3$ | $5 - \frac{3}{2}$ | $1 - \frac{3}{4}$ | 1 | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | $1408 - 660$ |
| x_5 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 220 |
| x_7 | $1 - 1$ | $2 - \frac{1}{2}$ | $3 - \frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | $1848 - 220$ |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | |
|-------|----------------------|---------------------|-----------------------------|-------|-------------------|-----------------------|-------|----------------|
| x_4 | 0 | $\frac{7}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | 748 |
| x_1 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 220 |
| x_7 | 0 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{11}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 | 1628 |
| z | $-4M - 10 + 4M + 10$ | $-2M - 12 + 2M + 5$ | $-M - 20 + M + \frac{5}{2}$ | 0 | $M + \frac{5}{2}$ | $M - M - \frac{5}{2}$ | 0 | $-880M + 880M$ |
| z | 0 | -7 | $-\frac{35}{2}$ | 0 | $M + \frac{5}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | 0 | 2200 |

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | |
|-------|-------|-----------------|-------|----------------|---------------------|------------------|-----------------|-------------------------|
| x_4 | 0 | $\frac{37}{11}$ | 0 | 1 | $-\frac{8}{11}$ | $\frac{8}{11}$ | $-\frac{1}{11}$ | 600 |
| x_1 | 1 | $\frac{4}{11}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{11}$ | $-\frac{3}{11}$ | $-\frac{1}{11}$ | 72 |
| x_3 | 0 | $\frac{6}{11}$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{4}{11}$ | 592 |
| z | 0 | $\frac{28}{11}$ | 0 | 0 | $M + \frac{10}{11}$ | $-\frac{10}{11}$ | 0 | 12 560 |
| | | | | | | | | $\min(825, 6512) = 825$ |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | |
| x_6 | 0 | $\frac{37}{8}$ | 0 | $\frac{11}{8}$ | -1 | 1 | $-\frac{1}{8}$ | 825 |
| x_1 | 1 | $\frac{13}{8}$ | 0 | $\frac{3}{8}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{8}$ | 297 |
| x_3 | 0 | $\frac{6}{8}$ | 1 | $-\frac{1}{8}$ | 0 | 0 | $\frac{3}{8}$ | 517 |
| z | 0 | $\frac{27}{4}$ | 0 | $\frac{5}{4}$ | M | 0 | $-\frac{5}{44}$ | 13 310 |

Exemplo 666 Determine o valor máximo da função $z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4$, com as variáveis x_1, x_2, x_3 e x_4 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 50, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 20 \text{ e } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 8.$$

Resolução

Consideremos a função $z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - Mx_6 - Mx_8$, a qual pretendemos maximizar.

$$\begin{cases}
 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 50 \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 - x_7 = 20 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_8 - x_9 = 8 \\
 z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 + Mx_6 + Mx_8 = 0
 \end{cases}, \text{ com } x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 9.$$

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|-------|-------|----------|-----------|--|
| x_5 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| x_6 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 20 $-M \times$ |
| x_8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 8 $-M \times$ |
| z | -4 | -3 | -6 | -2 | 0 | M | 0 | M | 0 | 0 |
| z | $-4 - 2M$ | $-3 - 3M$ | $-6 - 2M$ | $-2 - 3M$ | 0 | 0 | M | 0 | M | $-28M \quad \min\left(\frac{50}{3}, 10\right)$ |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
| x_5 | -1 | 0 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 | -3 | 3 | 26 |
| x_6 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | -1 | -2 | 2 | 4 |
| x_2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 8 $(3 + 3M)$ |
| z | $M - 1$ | 0 | $M - 3$ | 1 | 0 | 0 | M | $3M + 3$ | $-2M - 3$ | $24 - 4M \quad \min\left(\frac{26}{3}, 2\right)$ |

Então, x_6 dá lugar a x_9 :

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
|-------|----------------|-------|----------------|-------|-------|-------------------|----------------|-------|-------|-------------------------------|
| x_5 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | 0 | 0 | 20 |
| x_9 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | -1 | 1 | 2 $(2M + 3) \times \dots$ |
| x_2 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 10 |
| z | $-\frac{5}{2}$ | 0 | $-\frac{9}{2}$ | 1 | 0 | $M + \frac{3}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | M | 0 | 30 |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
| x_5 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 30 |
| x_9 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | 12 $(2M + 3) \times \dots$ |
| x_3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 20 $\frac{9}{2} \times \dots$ |
| z | 2 | 9 | 0 | 10 | 0 | $M + 6$ | -6 | M | 0 | 120 |
| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
| x_7 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 30 |
| x_9 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 42 |
| x_3 | 2 | 3 | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 .. |
| z | 8 | 16 | 0 | 22 | 6 | M | 0 | M | 0 | 300 |

Apêndice A

The First Appendix

The appendix fragment is used only once. Subsequent appendices can be created using the Chapter Section/Body Tag.

Bibliografia

- [1] BRISON, O. J., Grupos e Representações (1999), Lisboa, Faculdade de Ciências de Lisboa
- [2] BRISON, O. J., Teoria de Galois (1998), 2ª edição, Lisboa, Faculdade de Ciências de Lisboa
- [3] GROSSWALD, E., Representation of Integers as Sums of Squares (1985), New York, Springer-Verlag
- [4] LEVEQUE, W. J., Fundamentals of Number Theory (1996), New York, Dover
- [5] ANDREWS E. G., Number Theory (1994), New York, Dover
- [6] HARDY, G. H. & WRIGHT, E. M., An Introduction to the Number Theory (1960), 4th edition, London, Oxford at Clarendon Press
- [7] SWETZ, F. J., From Five Fingers to Infinity (1994), Chicago, Open Court
- [8] STARK, H. M., An Introduction to Number Theory (1978), Cambridge, The MIT Press
- [9] SILVA, J. S., Compêndio de Matemática (1975), Lisboa, Gabinete de Estudos e Planeamento, Ministério da Educação e Cultura
- [10] ??, Probabilidades, Brochuras (?), Lisboa, GAVE, Ministério da Educação