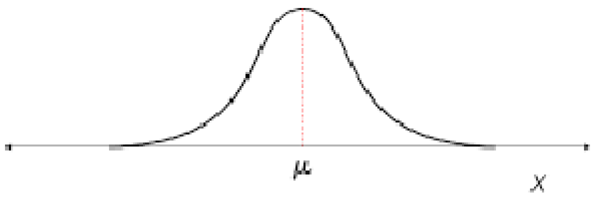
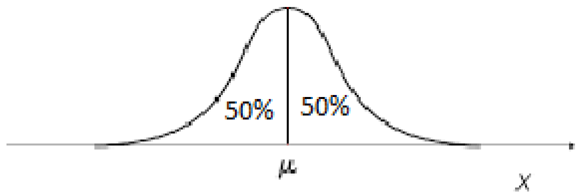
1.9- Modelo Normal(189) *[Vídeo 38]*

Exemplo: As alturas das pessoas.

Nota: Neste modelo, a curva tem a forma de sino e é simétrica em relação à media, a que corresponde o valor máximo da curva.





Se X é uma variável aleatória **normal** com média μ e desvio padrão σ, representamos por**:** **X~N(μ, σ)**

Questão: como calcular valores de probabilidades neste modelo?

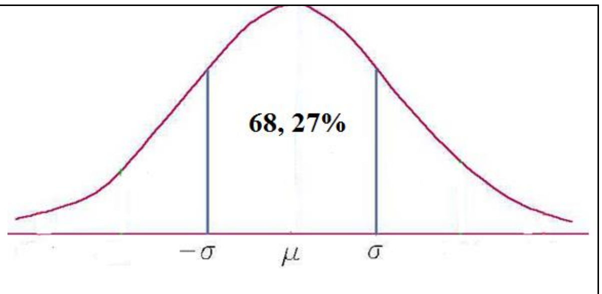
Resposta: Primeiro utilizaremos uma regra designada "68, 95, 99.7", depois usaremos uma tabela(página 93 do livro) e, para confirmar, usaremos a calculadora gráfica.

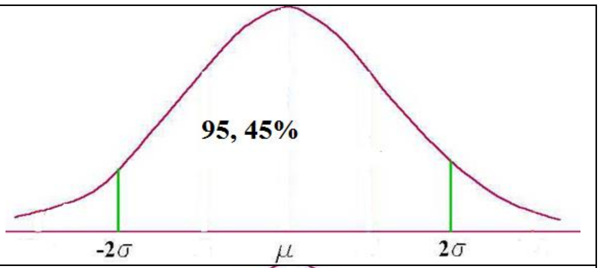
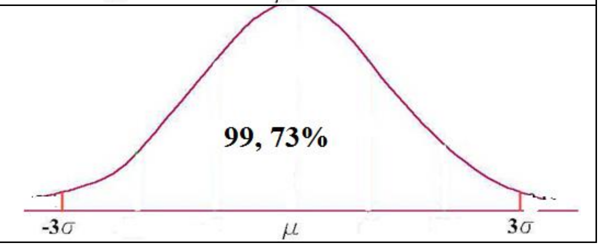
Regra dos 68, 95, 99.7

A percentagem de valores contidos no intervalo [μ-σ, μ+σ] é de, aproximadamente 68.27%.

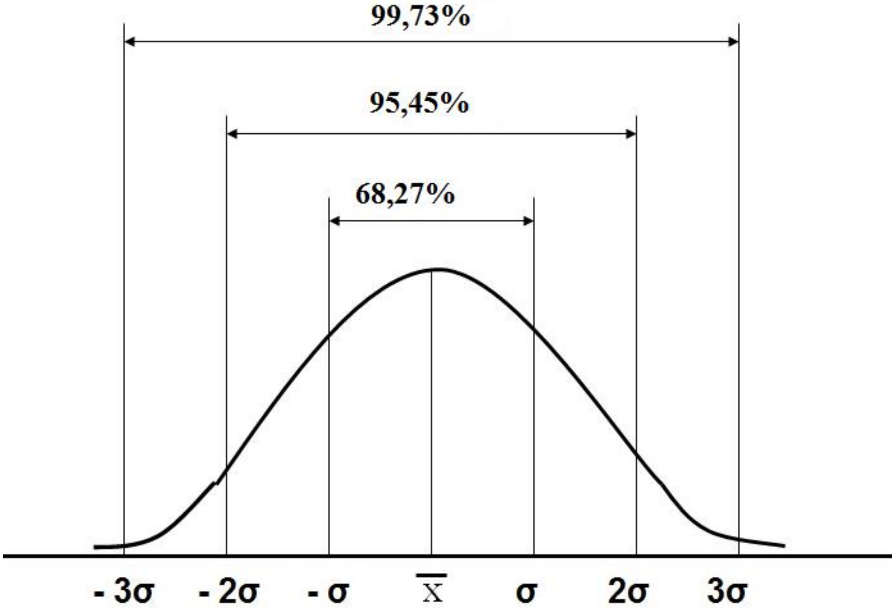
Do mesmo modo, temos valores associados aos intervalos: [μ-2σ, μ+2σ] e [μ-3σ, μ+3σ]

Em termos de probabilidade, temos:

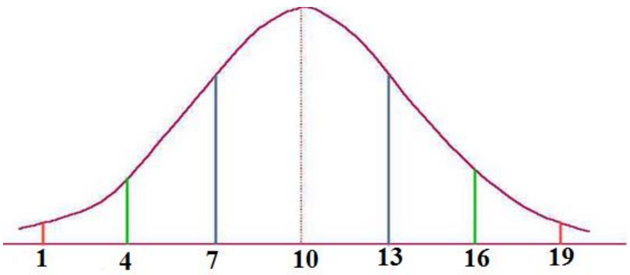
$\boldsymbol{P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68.27\%}$	

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.45\%$	
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.73\%$	

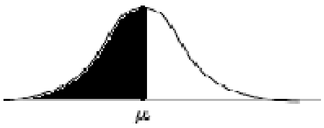
<u>Em síntese, temos:</u>

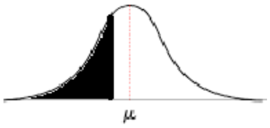


Exemplo- a variável aleatória X tem distribuição Normal com valor médio 10 e desvio-padrão 3, isto é, X~N(10,3).



Usando a regra dos 68, 95, 99.7, calculemos as seguintes probabilidades:

.1) P(X<10) =P(X<μ)= 50% 



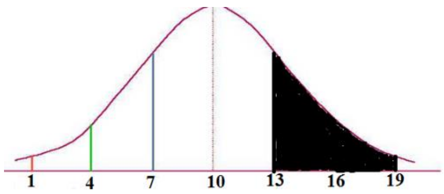
.2) P(X<7)= P(X < μ – σ)= $\frac{100\%-68,27\%}{2}$ =15,865%

.3) P(7<X<13)= P(μ-σ<X<μ+σ) = 68,27%

.4) P(4<X<16)= P(μ-2σ<X<μ+2σ)=95,45 %

.5) P(1<X<19)= P(μ-3σ<X<μ+3σ)=99,73%

.6)) P(13<X<19)= P(μ+σ<X<μ+3σ)= $\frac{99,73\%}{2} - \frac{68,27\%}{2} = 49,865\%$-34,135= 15,73%



.7) P(7<X<16)= P(μ-σ<X<μ+2σ)= $\frac{68,27\%}{2} + \frac{95,45\%}{2} = 81,86\%$

.8) P(X<13)= 50% + $\frac{68,27\%}{2}$ = 84,135%

.9) P(X>4) **.10)** P(X<1) **.11)** P(13<X<16) **.12)** P(4<X<13)

Exemplo 1(191)

Exercício(211): 56.1

Nota: De seguida, vamos ver um segundo processo para calcular probabilidades no modelo normal, mesmo que os valores pretendidos nada tenham a ver com μ, μ±σ, μ±2σ ou μ±3σ.

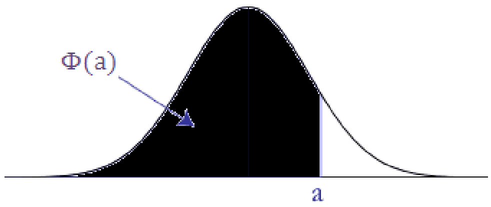
Tabela da Normal Standard (193)

Na normal **standard** ou (normal **reduzida**) a média é zero e o desvio padrão é 1.

U ~ N(0, 1)

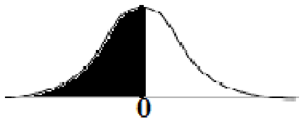
No caso da normal standard, existe uma tabela que nos permite calcular os valores das probabilidades- página 193 do livro.

Os valores da tabela são representados pela função ϕ, e representam a probabilidade de X ser menor que “a”, isto é ϕ(a)=P(X≤a)



Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplos: Seja U **~** N(0, 1). Utilizando os valores da tabela da normal standard (página 160), Calculemos as seguintes probabilidades:

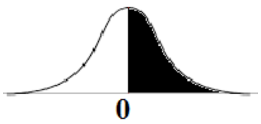
.1) $P(U<0)= \phi(0)= 0.5000$ 

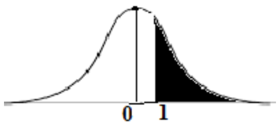
(Tabela: a= .0 Coluna: .00)

.2) $P(U< 1) = \phi(1)= 0.8413$ (Tabela: a=1.0 coluna .00)

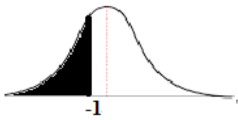
.3) $P(U<2.73)= \phi(2.73)= 0.9968$ (Tabela a= 2.7 coluna .03)

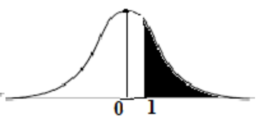
.4) $P(U<1.14) = \phi(1.14)= 0.8729$ (Tabela a= 1.1 coluna .04)

.5) $P(U>0)=1- \phi(0)=1- 0.5= 0.5$ 

.6) $P(U>1)= 1- \phi(1)= 1- 0.8413= 0.1587$ 

.7) $P(U> 1.14) = 1- \phi(1.14)= 1- 0.8729= 0.1271$

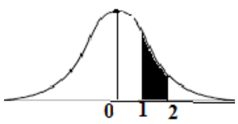
.8) $P(U< -1) =$ 



$=P(U>1)= 1- \phi(1)= 1- 0.8413= 0.1587$

.9) $P(U< - 1.72) = P(U> 1.72) = 1 - \phi(1.72)= 1- 0.9573= 0.0427$

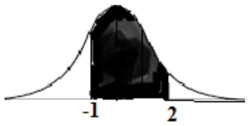
.10) $P(U<-2) =P(U<2) = 1- \phi(2)= 1- 0.9772= 0.0228$

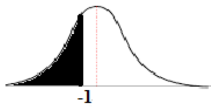
.11) $P(1<U<2) = \phi(2)- \phi(1)= 0.9772- 0.8413= 0.1359$ 

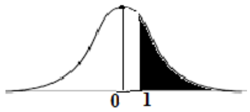
.12) $P(1.7<U<3.1)= \phi(3.1)- \phi(1.7)= 0.9990- 0.9554= 0.0436$

.13) $P(-2<U< -1) = P(1<U<2)= \phi(2)- \phi(1)= 0.9772- 0.8413= 0.1359$

.14) P(-1<U<2) = ϕ(2)- ϕ(-1)= ϕ(2) - [1-ϕ(1)]=0.9772- (1- 0.8413)= 0.8185







Nota: Para podermos usar a tabela da normal standard (página 193), é necessário garantir que a média seja zero e o desvio-padrão seja 1, Caso contrário, temos de usar a seguinte conversão:

$$\boldsymbol{U = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

Exemplo: X~N(5, 2) logo $U = \frac{X-5}{2} \sim N(0,1)$

Exemplos:

1) X~N(5, 2) Calculemos P(X<6).

P(X<6) = $P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{6-5}{2}\right) = P(U < 0.5) = 0.6915$

2) Seja X~N(8, 3) Calculemos **2.1)** P(X<11) **2.2)** P(X>14).

2.1) P(X<11) = $P\left(\frac{X-8}{3} < \frac{11-8}{3}\right) = P(U < 1) = 0.8413$

2.2) P(X>14)= $P\left(\frac{X-8}{3} > \frac{14-8}{3}\right) = P(U > 2)$ =1-ϕ(2)= 1- 0.9772= 0.0228

Calculadora Gráfica

Nota: Também podemos Calcular valores aproximados da probabilidade referente à distribuição normal utilizando a calculadora gráfica.

Casio Stat/ Dist/ Normal c.d/…

Texas Distr/ normalCdf(min, máx, media, desvio)

Sugestão: para valores menores do que…., utilize como valor mínimo: " – 1000 000"

Para valores maiores do que…, utilize como valor máximo: " 1000 000"

Ex.1) X tem distr. Normal com média 10 e desvio-padrão 2. Calcule:

1.1) p(6<X<7)=0.044 1.2) p(X>9)=0.69146 1.3) p(X<6)=0.02275