Modelos de Grafos

Joseph Malkevitch

COMAP, 1995

Modelos de Grafos

Joseph Malkevitch

Geometria e as suas aplicações é produzido pelo Consórcio para a Matemática e suas Aplicações (COMAP) com o patrocínio da Fundação Nacional para a Ciência, contrato número MDR-9154090 para COMAP,Inc.

Impresso nos Estados Unidos da América

Todas as questões e pedidos devem ser enviados para:
COMAP, Inc
Suite 210
57 Bedford Street
Lexington, MA 02173

ISSN 1071-6874

Tradução/adaptação portuguesa autorizada para o
Departamento do Ensino Secundário

A.M.

Secção 1

Modelos de Grafos

Algumas situações problemáticas

Apresentamos a seguir situações que acontecem na vida de todos os dias.

Problema 1 Foi recentemente contratado para distribuir folhetos de um supermercado local que lhe pagará 60 euros. Os folhetos ser-lhe-ão entregues em casa assinalada por um $\boxed{\text{X}}$ no mapa da **Figura 1** . O teu trabalho consiste em distribuir os folhetos de propaganda nas caixas de correio das ruas na vizinhança. Os sinais (- - - - -) no diagrama da Figura 1 assinalam as secções das ruas em que há caixas de correio. O empregador não te paga à hora. Quanto mais depressa distribuires os papéis, mais depressa poderás fazer outras coisas.

Qual é o melhor caminho para fazer a distribuição?

Se cada quarteirão tem $50m$ e consegue fazer uma média de 3 km por hora na distribuição, o que será melhor: fazer esta distribuição ou trabalhar num restaurante a 4, 75 euros por hora?

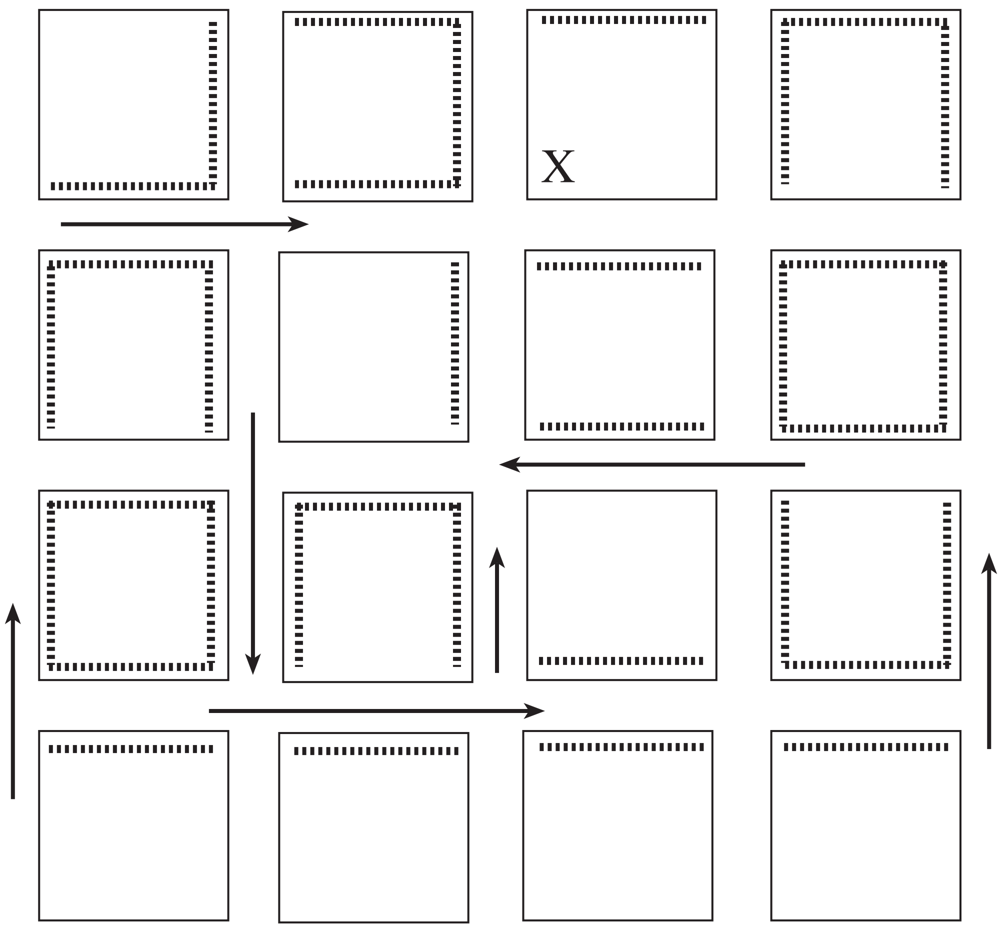


Figura 1

Problema 2 Vai ter de sair, mas cheia de pressa para chegar a casa localizada no diagrama da **Figura 2**, porque tem de dar umas quantas voltas que incluem passagens pelos correio, padaria, loja de video, lavandaria, talho e biblioteca. Qual é o melhor caminho para dar essas voltas?

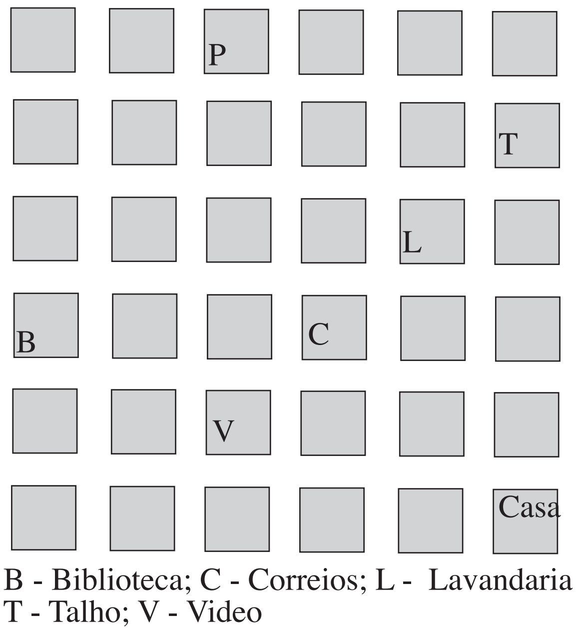


Figura 2

Problema 3 Eis um problema para o treinador da equipa local de futebol.

Depois da temporada dos desafios internos, as seis equipas obtiveram os resultados que a figura 3 mostra:

Equipa	Nº de Vitórias	Nº de Derrotas	Ganhou a:
A	4	1	B, C, D, E
B	3	2	F, E, D
C	4	1	B, D, E, F
D	1	4	F
E	1	4	D
F	1	4	A

Figura 3

A Associação Comercial local tinha prometido prémios para as quatro primeiras equipas.

Que equipas merecem os prémios?

Problema 4 Foi contratado para trabalhar numa loja de animais de estimação aberta recentemente num novo centro comercial. A loja vende peixes, que não podem ser guardados num tanque único, porque algumas das espécies atacam outras. Vai receber oito espécies que conflituam entre elas nos termos apresentados na **Figura 4**, em que $\boxed{\text{X}}$ indica pares de espécies incompatíveis.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X			X		X	X	X
D	X		X		X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

Figura 4

Qual é o menor número de tanques necessários para guardar os peixes, sem que fiquem no mesmo tanque espécies incompatíveis?

Problema 5 O gestor de operações de terra de uma companhia de aviação fez uma lista das operações e das respectivas durações que têm de ser efectuadas entre a aterragem e nova descolagem. A lista é a da **Figura 5** que também identifica para cada operação as operações que lhe são prévias.

Operação	Duração em mins.	Operações prévias
Descarga de bagagem (DB)	2	nenhuma
Carregamento de bagagens(CB)	16	CB
Desembarque de passageiros(DP)	14	nenhuma
Embarque de passageiros (EP)	20	DP, DB
Limpeza da cabine (LC)	12	DP
Reabastecimento alimentar (RA)	4	LC
Reabastecimento de combustível (RC)	18	nenhuma

Figura 5

Nestas condições qual é a duração mínima das operações de terra entre a aterragem e a descolagem de um avião da companhia?

Grafos e resultados

Embora as situações apresentadas antes pareçam completamente diferentes, é uma mesma caixa de ferramentas matemáticas que ajuda a ver ou perceber qualquer uma delas e a resolver qualquer dos problemas propostos. A mais simples destas ferramentas consiste num tipo de diagramas geométricos a que chamamos **grafo**.
(As restantes ferramentas que podem ser precisas são simples generalizações ou extensões do conceito de grafo).
A **Figura 6** apresenta exemplos de grafos.

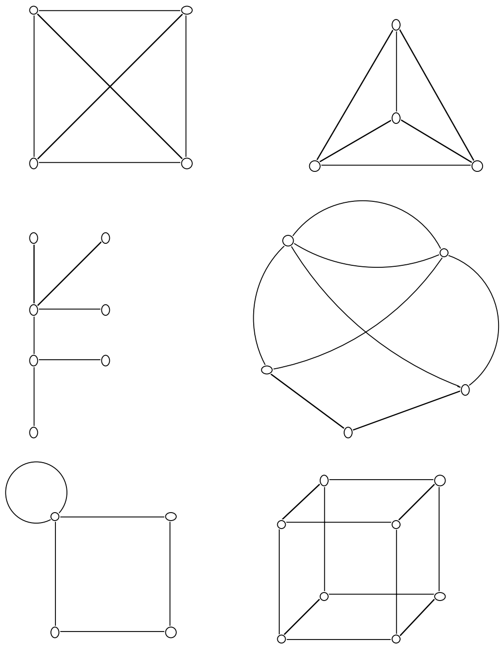


Figura 6

Como se vê, um grafo consiste num conjunto finito de pontos, ligados por linhas que podem ser curvas ou rectilíneas. Aos pontos chamamos **vértices** e às linhas chamamos **arestas**. Os pontos de intersecção das arestas que não estejam realçados como pontos negros não são vértices do grafo. Um ponto pode estar ligado a si próprio por uma linha (chamamos-–lhe **lacete**), e um par de pontos podem estar ligados por duas ou mais linhas (**arestas múltiplas**).

(Alguns livros ou autores definem grafo de modo diferente, a ideia essencial a reter como conceito de grafo é de um conjunto de pontos em que todos ou alguns deles são extremidades de linhas que os ligam)

A **Figura 7** ilustra extensões do conceito de grafo que podem ser úteis.

Como deve ter reparado, uma das extensões do conceito consiste em atribuir um número (chamado **peso**) a cada uma das arestas do grafo. Esse peso pode ser interpretado, conforme as circunstâncias, como tempo, custo, distância, ou qualquer outra coisa útil para um caso em estudo. Por exemplo, um

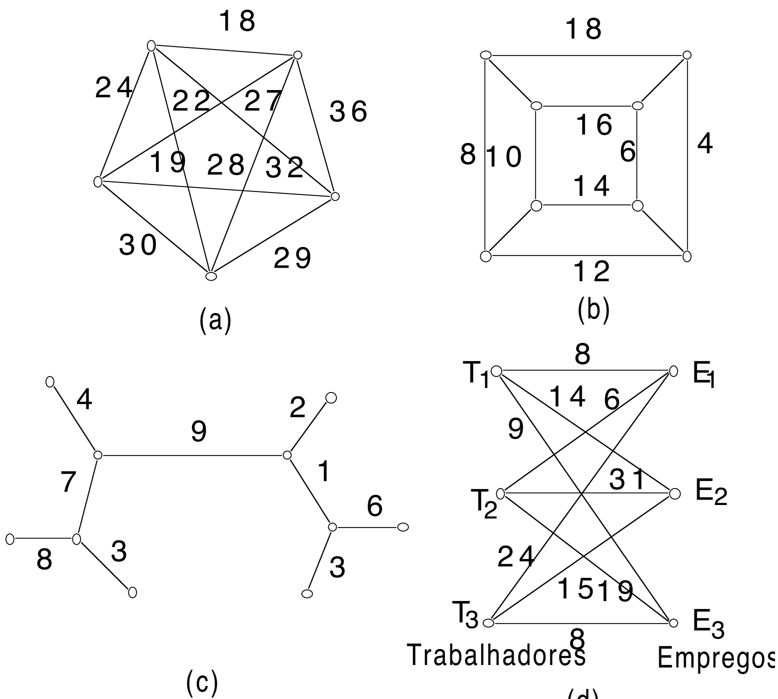


Figura 7

grafo pode representar trabalhadores e as tarefas para as quais têm qualificações. O peso de uma aresta que ligue um vértice trabalhador com um vértice tarefa pode representar o tempo que esse trabalhador demora a executar a tarefa (**Figura 7**(d)). Em alternativa, também pode representar uma medida da eficácia ou da eficiência com que cada trabalhador executa a tarefa. Um grafo com pesos atribuídos às suas arestas pode designar-se por **grafo pesado**.

É também possível, em vez de atribuir pesos a cada aresta de um grafo, atribuir peso a cada vértice (como na **Figura 8**). Por exemplo, numa rede de comunicações, o peso de um vértice pode representar o custo ou o tempo da comutação de uma chamada de uma linha telefónica representada por uma aresta incidente no vértice, para uma outra linha telefónica representada por outra aresta incidente no mesmo vértice. Em alguns grafos pode acontecer que estejam atribuídos pesos simultaneamente a arestas e a vértices (**Figura 8**(d)).

Numa outra extensão do conceito de grafo, atribuimos a cada aresta um sentido (representado por uma seta). A este tipo de extensão do conceito chamamos **grafo orientado** (**Figura 9**) ou abreviadamente **digrafo**.

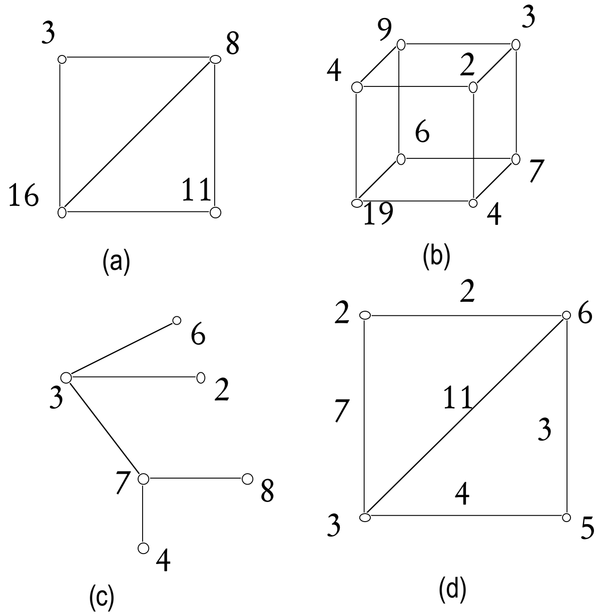


Figura 8

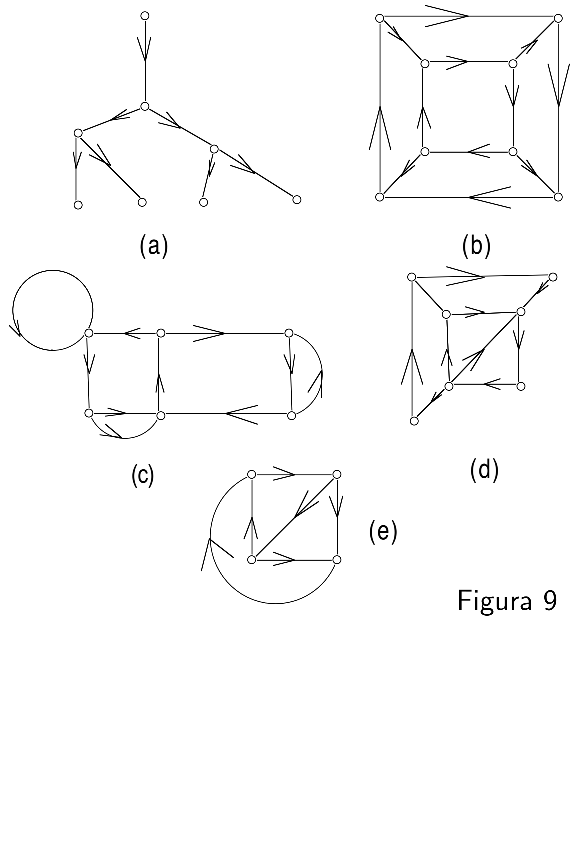


Figura 9

Claro que se pode ter um grafo orientado e com pesos atribuídos aos vértices e/ou às arestas. Por exemplo, a **Figura 10**(b) pode ser um modelo para o número de faixas de rodagem do trânsito nas auto-estradas ligando quatro cidades. Noutros modelos deste tipo, pode acontecer que algumas arestas tenham setas e outras não. Tais estruturas podem ser designadas por **grafos mistos** (**Figura 11**)

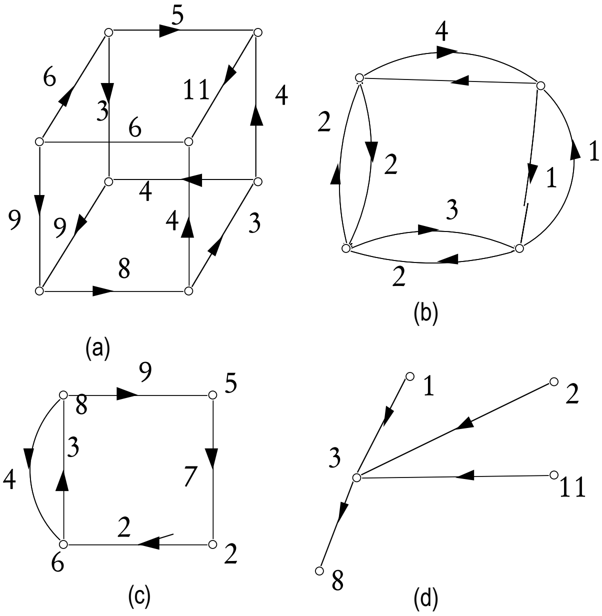


Figura 10

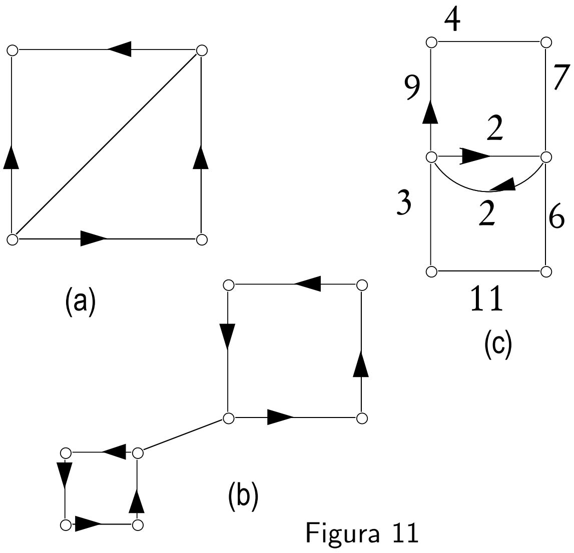


Figura 11

Secção 2

Modelos Matemáticos

Como é que se podem usar diagramas do tipo das figuras da secção 1 para resolver problemas? A análise de situações com recurso a ideias matemáticas chama-se **modelação matemática**. A ideia chave na modelação matemática consiste em tomar a situação original e simplificá-la de tal modo que fiquemos com uma nova visão sobre o problema original. Estamos todos familiarizados com este processo, embora muitas vezes nem nos apercebamos disso. Se estivermos a planear uma viagem de casa para uma localidade a 500 km de distância, usamos um mapa antes de nos meter no carro e partir. Um mapa representa, de um modo simplificado, as actuais ruas e estradas. De facto, para a viagem podem ser precisos três mapas - um mapa das ruas da nossa localidade de residência, outro mostrando as estradas entre a nossa cidade e a cidade para onde queremos ir, e ainda um terceiro que mostre as ruas da cidade onde queremos ir.
Um mapa é um exemplo de um modelo matemático, sendo ao mesmo tempo um modelo físico. Os números no mapa podem ser usados para representar as distâncias aproximadas entre cidades; códigos no mapa distinguem os diversos tipos de estradas. Ninguém toma um mapa de papel pelas verdadeiras estradas, rios, montanhas e outra informação geográfica, mas os mapas constituem uma representação muito útil. Lá porque alguma coisa foi radicalmente alterada ou simplificada ao ser representada não quer dizer que não possamos reconhecê-la.
Se simplificarmos demais a situação original, o que podemos ficar a saber e concluir com o estudo do modelo pode ser de pouco valor. Se alguma informação importante for desprezada, não é possível obter resultados válidos. Por outro lado, se não simplificarmos a situação original suficientemente, ficamos incapazes de a trabalhar a partir do modelo que se toma em vez da situação original, porque a matemática exigida pode ser muito complicada.
O que é mais comum no que respeita à modelação de problemas matemáticamente é o uso de *funções* e *equações*. Na prática, o que é necessário é usar combinações de modelos (equações, grafos, etc) do mesmo modo que o carpinteiro usa combinações de ferramentas como sejam serras, brocas, etc quando trabalha em qualquer projecto de construção. Os modelos de grafos são uma intuitiva e apelativa maneira de ganhar alguma prática em processos de modelação matemática, sendo ao mesmo tempo interessantes como classe de estruturas geométricas.

Modelos de Grafos

Após termos abordado a ideia essencial da modelação matemática – *simplificação* – vejamos como é que os diagramas do tipo dos apresentados na seccção 1 podem ajudar-nos a ver e a resolver os problemas originalmente propostos.

Para construir um modelo de grafo adaptado a uma situação, precisamos de usar pontos e linhas para representar informação essencial acerca da situação original. Tomemos o Problema 4 para exemplo.
Suponhamos que decidimos tomar uma represntação visual da informação que nos é dada pela tabela da **Figura 4**.
Para fazer isso, representemos cada tipo de peixe por um ponto. Dado que há oito tipos de peixes, precisamos de oito pontos **Figura 12**

A cada ponto corresponde a letra do tipo de peixe que representa. Depois precisamos de um critério para ligar um par de pontos por uma linha, *aresta*.
Um caminho possível é ligar pontos que representem dois tipos de peixe incompatíveis.
Por exemplo, já que os peixes de tipo B e G são incompatíveis, desenhamos uma aresta ligando B e G.

O diagrama completo, representando as relações de incompatibilidade entre os peixes é o da **Figura 13**

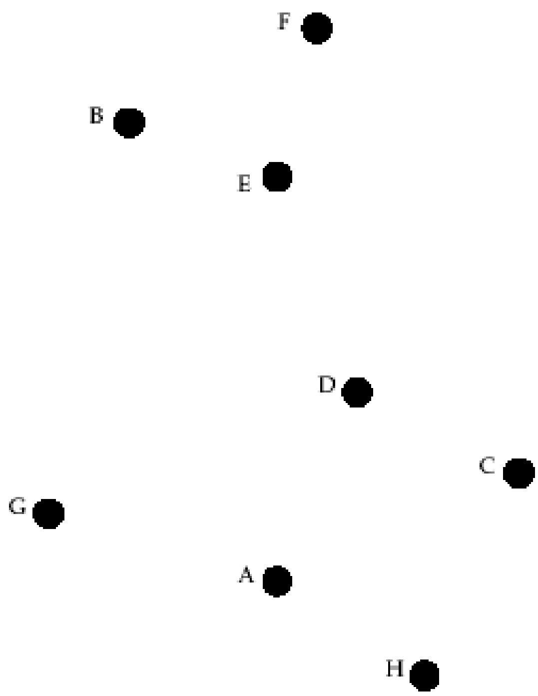


Figura 12

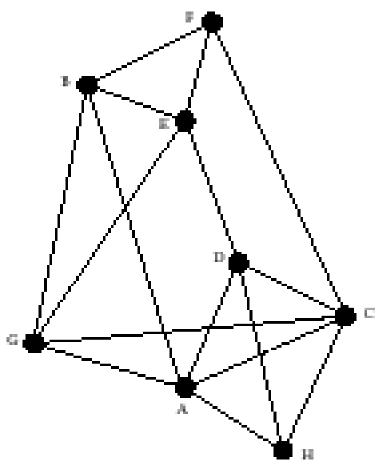


Figura 13

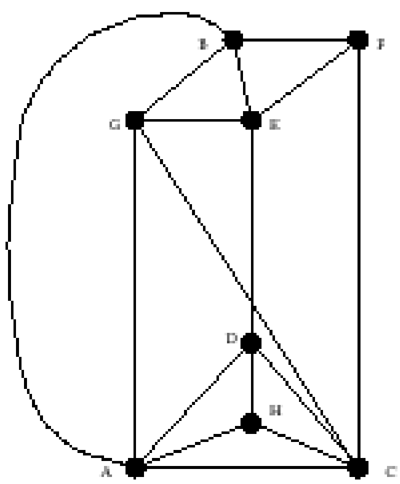


Figura 14

Depois de desenharmos este diagrama, podemos apagar a tabela da informação original, já que o diagrama representa exactamente a mesma informação. (Mais tarde, usaremos este diagrama para resolver o problema. Por agora, contudo, queremos concentrar-nos no processo de conversão das situações em diagramas, mais do que usar os diagramas para resolver os problemas).

Devemos estar abertos para o facto de que diferentes estudantes podem desenhar diagramas que pareçam completamente diferentes. Se os diagramas tiverem sido desenhados correctamente quaisquer dois diagramas dizem-se **isomorfos**, o que significa que os dois diagramas são estruturalmente o mesmo, embora sejam visualmente diferentes. Por exemplo, os grafos das **Figura 13** e da **Figura 14** são estruturalmente isomorfos.

Um grafo diferente ainda pode adequar-se bem à situação, se em vez de ligarmos dois pontos por representarem tipos de peixes *incompatíveis* ligarmos pontos que representem tipos *compatíveis*. Desenhe-se o grafo que se obtem quando se adopta este outro ponto de vista. É desejável discutir com os estudantes os prós e os contras de cada uma das duas abordagens.

Consideremos agora o Problema 1 e como é que um grafo pode ser usado para o resolver. Neste caso, o diagrama da **Figura 1** pode ser modificado para obter um grafo adequado ao problema. Para construir este modelo, cada ponto representa a localização no mapa do cruzamento de duas ou mais ruas. Note-se que pode haver diferenças mais ou menos significativas entre os cruzamentos (alguns cruzamentos podem ter sinais de trânsito, uns cruzamentos podem ser mais amplos que outros, por exemplo uns podem ser rotundas outros não, etc). Esta diferenças não assumem qualquer importância por estarmos a trabalhar um problema de distribuição de folhetos de publicidade, mas podem ganhar importância se a situação em estudo for outra. Se entre dois cruzamentos há um bloco de casas em que está prevista a distribuição de folhetos, então traçamos uma aresta entre eles. O grafo resultante é o que se mostra na **Figura 15**

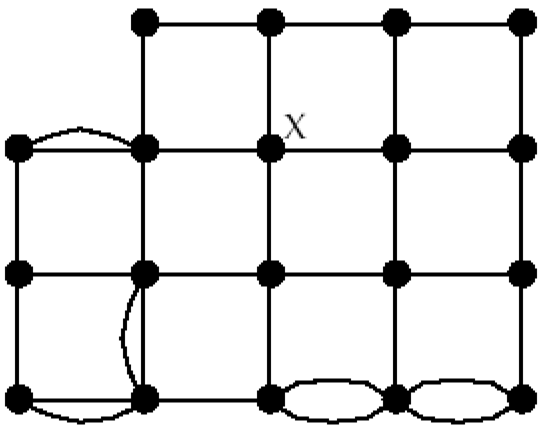


Figura 15

Convém chamar a atenção para o facto de haver na **Figura 1** toda a informação para desenhar o grafo da **Figura 15** e ainda mais alguma que poderia tornar mais difícil a resolução do problema que nos ocupa. Como já referimos anteriormente, controlar a simplificação é a essência da modelação matemática. Chamamos a atenção para que já que a distribuição é feita a pé, as indicações de sentido único das ruas não são importantes e não precisamos de atribuir sentidos às nossas arestas. (Para outras aplicações, as informações dos sentidos da circulação nas ruas poderia ser relevante e o nosso diagrama seria um grafo orientado e não um grafo simplesmente). Para o modelo da nossa situação, também não é necessário atribuir pesos às arestas, já que os blocos de prédios na secção da cidade em que estamos a trabalhar são aproximadamente iguais em comprimento e é preciso percorrer aquelas arestas obrigatoriamente. Quando não acontecer assim, pode ser conveniente usar um grafo pesado como modelo. Não há dúvida que, por este processo, encontrámos um processo visual adequado para representar a informação relativa ao nosso problema. Não nos preocupa, pelo menos para já, a solução do problema.

Como mais um exemplo de construção de modelo para a resolução de um problema, consideremos o Problema 2, que consiste em dar um conjunto de voltas da maneira mais eficiente. Uma das dificuldades deste problema reside no facto de ser vaga a expressão "de maneira eficiente". Interpretemos esta expressão como querendo dizer que é preciso minimizar o tempo total de condução, embora as condições do problema não especifiquem tempos de condução. Pode acontecer termos de acrescentar alguma informação adicional à situação apresentada com vista a podermos analisar o que acontece. Neste caso, a experiência de cada um pode capacitar-nos para estimar os tempos de condução entre os vários locais que a **Figura 2** nos apresenta. Por exemplo, podemos estimar que demoramos 16 minutos para ir de casa à padaria e 9 minutos para ir dos correios ao talho. Podemos fazer muitas cosniderações a este respeito. O tempo de viagem é diferente a diversas horas do dia e pode ser fácial estacionar na biblioteca e muito dificil perto dos correios, o que levaria o bom senso a incluir o tempo para o estacionamento e para as deslocações a ele associadas. Com procedimentos deste tipo, podemos chegar a um modelo de grafo pesado do tipo que se mostra na **Figura 16**

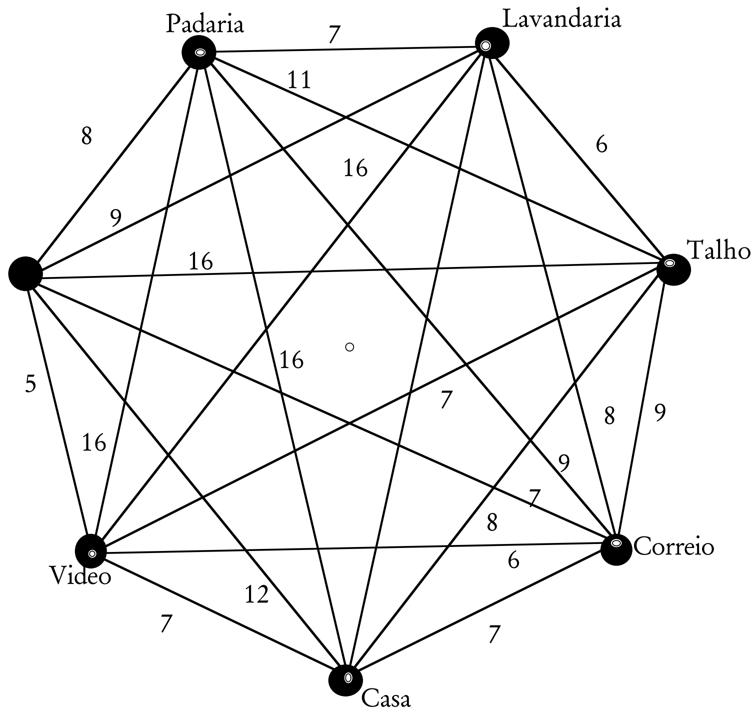


Figura 16

(Um procedimento alternativo para dar pesos ás arestas no nosso modelo pode consistir em estimar um tempo para cada bloco, por exemplo 3 minutos. E, assim, o tempo necessário para ir de um local a outro é obtido multiplicando por 3 o número de blocos que é preciso precorrer para ir de um sítio ao outro. E também podemos atribuir um acréscimo de tempo fixado para cada estacionamento.)

Cada aresta neste diagrama representa o facto de que é possível viajar entre dois locais e o peso que lhe é atribuído representa a duração da viagem (acrescentada do tempo gasto no estacionamento) entre os dois locais, representados por pontos. Lembremo-nos que nos interessa controlar o tempo de condução entre dois pontos, mas não nos interessa minimamente o tempo gasto em cada ponto. Na prática, sabemos que o tempo gasto nas viagens e nos locais pode depender da ordem pela qual se efectuam as visitas aos locais. (Por exemplo, as ruas para o supermercado podem levar menos tempo a percorrer a certas horas do que a outras). Para o nosso problema, assumimos que tais complicações são menores ou desprezáveis de tal modo que as podemos ignorar no nosso processo de modelação.

O grafo da **Figura 16** (ignorando os pesos) é muito comum. Nele, cada vértice está ligado a outro vértice e é, por isso, denominado **grafo completo**. Por ter sete vértices, chamamos-lhe *grafo completo de sete vértices*.

Antes de abordarmos como é que a construção de um grafo pode ajudar a resolver um problema (mais do que ajudar a compreender e visualizar um problema), experimentemos construir um modelo de grafo para cada uma das situações da Secção 1. Em cada caso, temos de nos pôr as seguintes questões.

1. No grafo, o que representa cada vértice (cada ponto)?
2. Que critério seguir para ligar dois vértices por uma aresta? Não é invulgar haver diferentes critérios para ligar pontos por arestas. De facto, muito frequentemente não há uma única resposta correta. A escolha a fazer só depende das finalidades postas pela situação problemática.
3. A situação impôe a atribuição de algum sentido às arestas; o modelo que precisamos é mais um grafo orientado que simplesmente um grafo?
4. Há algum custo associado a cada aresta? Se há, precisamos de construir um grafo pesado.

DIVERTIMENTO COM GRAFOS

Embora inicialmente os grafos nos tenham interessado como ferramentas para resolver uma certa variedade de problemas de aplicação, os grafos sugerem "puzzles" intelectuais que têm interesse por si mesmos. Para exemplo, consideremos o grafo da **Figura 17**

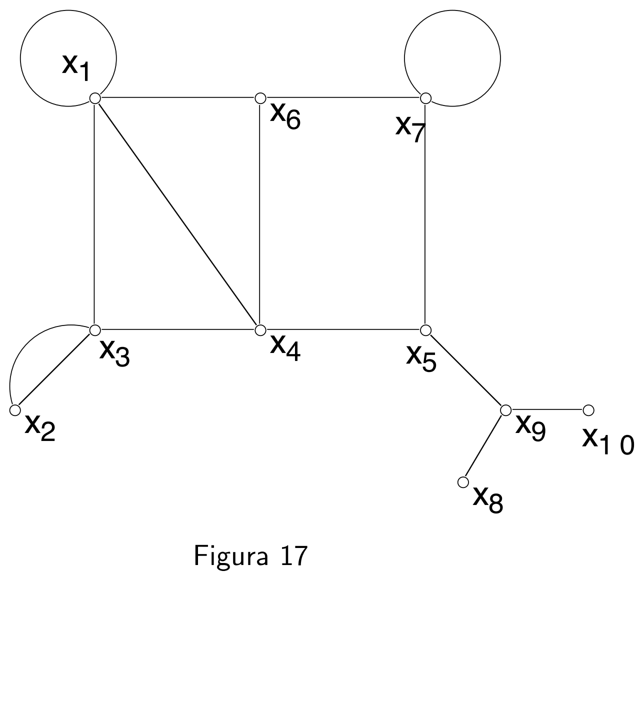


Figura 17

Contemos o número de arestas que incidem em cada vértice. A esse número chamamos **valência** do vértice respectivo. Na **Figura 18** (afinal cópia da Figura 17), a valência de cada vértice está escrita ao seu lado. Chamamos a atenção para o facto de a valência de um vértice nem sempre ser o número de arestas que nele incidem. Quando há um lacete num vértice (isto é, quando há uma aresta que liga um vértice a si mesmo), ele contribui duas vezes para a valência. Nos casos dos vértices sem lacete, é o número de arestas nele incidentes que é a valência.
Suponhamos agora, que escrevemos a sequência de valências do grafo, do maior para o menor valor.

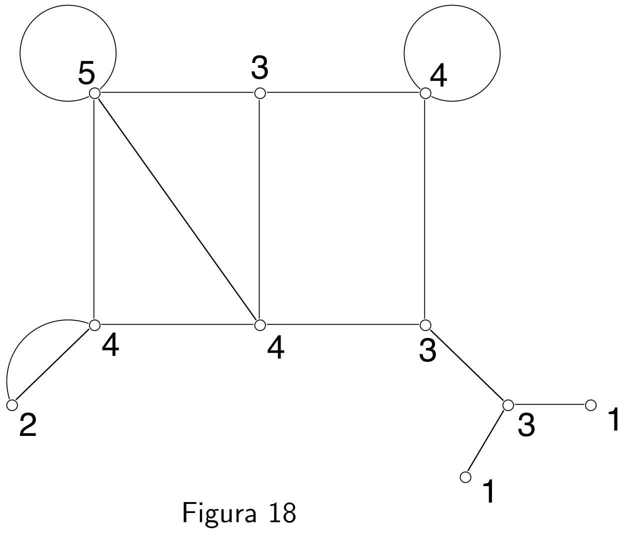


Figura 18

Então aqui vai o enigma. Suponhamos que temos uma sequência de números inteiros positivos. Quando é possível desenhar um grafo de que esses números sejam as valências dos vértices. Quando é possível fazê-lo sem que o grafo tenha lacetes ou arestas múltiplas?

Aqui ficam algumas sequências com as quais experimentar o problema proposto

a) 4, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

b) 5, 5, 3, 3, 3, 3, 2, 2.

c) 7, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2.

d) 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4.

e) 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4

Em cada caso, a finalidade é encontrar (se for possível) um grafo com estes números como valências. Em alguns casos, pode ser possível encontrar mais do que um grafo adequado. Em tais casos, vale a pena pensar acerca dos tipos de grafos que foi possível desenhar.

De forma diferente do que acontece no desporto, a resolução de problemas e jogos intelectuais –jogos matemáticos em particular – pode conduzir a resultados inesperados. É vulgar desenvolver e explorar um conceito matemático de teoria dos grafos só por curiosidade intelectual. E é certo que o conhecimento adquirido por trabalho de pesquisa e abstracção matemática pode vir a servir em inesperadas áreas de aplicação.

Sobre a eficácia inesperada da Matemática

O Prémio Nobel da Física Eugene Wigner comentava a "não razoabilidade da eficiência da matemática" noutros ramos da ciência. A matemática estudada "por puro gozo e divertimento" acaba por ter aplicações surpreendemente úteis. Como exemplo, tomemos o grafo que representa o "cubo" a duas dimensões – o quadrado – em que há pesos associados a cada vértice de que se desconhecem os valores. Suponhamos que conseguimos comprar por algum preço a soma dos valores dos pesos de cada aresta ou de algumas direcções particulares. Poderemos descobrir então os pesos associados a cada vértice? Ou ainda qual é o preço mínimo a pagar para ter a informação suficiente para determinar esses pesos? A **Figura 19** dá um exemplo específico.

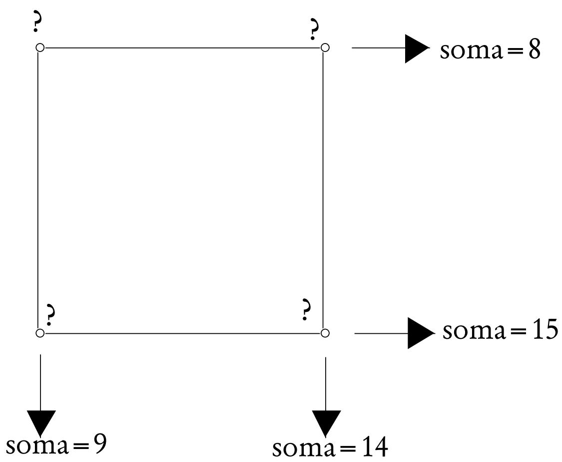


Figura 19
Poderemos nós reconstruir os pesos de forma únivoca?

Quais são os números (?) que somados dão aqueles valores? Este é um problema discreto análogo ao problema apresentado pelo matemático checo Johannes Radon nos anos 20. Radon considerou o problema sobre a imagem de uma mancha complicada no plano, em que a cada ponto da mancha é atribuído um número, como se mostra na **Figura 20**.

Suponhamos que é possível determinar a soma de todos os números sobre cada linha recta que corta a mancha. (Falando correctamente, já que há uma infinidade de números desconhecidos sobre um segmento de recta, não podemos falar de soma ordinária e teremos de utilizar o conceito de **integral**, estudado no cálculo, que permite calcular o valor de somas infinitas que satisfaçam a certas condições).

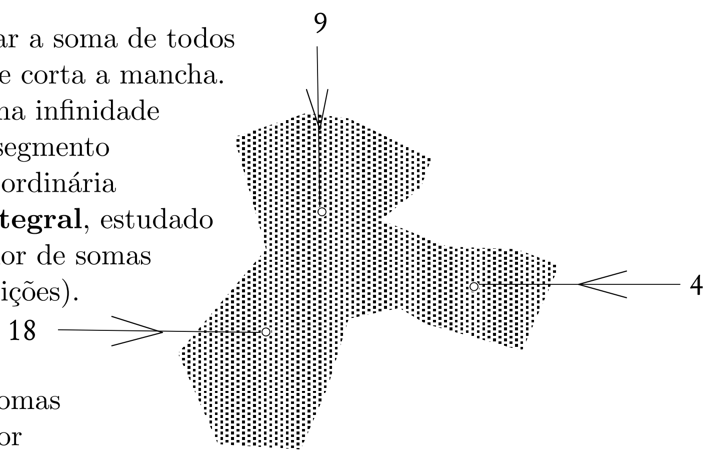


Figura 20

O jogo intelectual de Radon permitiu mostrar que, usando estas somas de linhas, poderíamos descobrir o valor de todos os números desconhecidos atribuídos aos pontos da mancha.

O trabalho de Radon apareceu como um jogo intelectual e nada mais. Contudo, após a invenção dos computadores, foi este trabalho que tornou possível a operação dos digitalizadores "TAC-scan", de que Godfrey Houndsfield foi pioneiro. Estas máquinas tornaram possível fazer as imagens raios-X de partes do corpo humano. A ideia consistiu em pensar que as perdas de energia que ocorrem quando um feixe de raios-x é projectado sobre um corte de um objecto tri-dimensional, actuavam como um integral das densidades ao longo das linhas do corte. O trabalho de Radon permitiu reconstruir as densidades, e usando feixes de raios-x sobre muitos cortes, podemos reconstruir uma imagem tridimensional de partes do corpo humano (particularmente da cabeça). E, como os tumores têm densidade diferente dos tecidos normais, tornou-se possível, usando máquinas TAC e as ideias de Radon, diagnosticar quistos nos crânios, o que não era possível com recurso só aos vulgres raios-x.

S e c ç ã o 3

Teoria de Grafos

Neste trabalho, propositadamente evitámos resolver os problemas de teoria de grafos que só foram desenvolvidos como modelos de situações apresentadas. É claro que esperamos que resolvam completamente os problemas, bem como todos os exercícios que se apresentam a seguir. Estamos convencidos que é muitas vezes mais difícil formular matematicamente um problema do que resolvê-lo depois de estar posto sob a forma de problema de grafos. Problemas da teoria de grafos de vários tipos têm sido estudados desde há muitos anos por investigadores matemáticos. Isto está feito para todos os problemas do tipo de "procurar um circuito de Euler num grafo" (referências 1, 2, 3, 4 e 5); "procurar um circuito hamiltoniano num grafo" (referências 1, 4 e 5); "procurar uma boa coloração de vértices" para um grafo (referências 1, 4 e 5) ou "encontrar isomorfos e duais" para um grafo (referência 5). Logo que uma situação fica formulada em termos de teoria de grafos, os matemáticos podem procurar estabelecer algoritmos para os resolver. Embora descobrir algoritmos rápidos possa ser uma tarefa complexa, frequentemente não é mais complexa do que encontrar as técnicas adequadas e necessárias à passagem aos modelos de grafos.

Referências

(1) Chartrand, G. 1991. *Graphs as Mathematical Models.* New : Dover Press.

(2) COMAP. 1994. *For all Practical Purposes.* 3d ed. New York: W. H. Freeman.

(3) Malkeevitch, J. (content developer). 1992. *Geometry: New Tools for New Technologies.* Lexington, MA: COMAP. VHS videorecording..

(4) Malkevitch, J., and Walter Meyer. 1974. *Graphs, Models and Finite Mathematics.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

(5) Ore, O. 1992. *Graphs and Their Uses.* Revised edition by R. Wilson, 1992. Washington, D. C.: MAA

Exercícios

Nota 1 Sempre que usamos a expressão "desenhar um modelo de grafo", estamos a referir-nos a qualquer tipo de grafo, seja grafo simples, grafo pesado, grafo orientado ou grafo orientado e pesado.

Nota 2 Neste módulo, não discutimos métodos da teoria de grafos para resolver os problemas envolvidos. Mas se tiver conhecimento desses métodos através de professor ou por conta própria, deve usá-los complementarmente à tentativa e erro.

1.

Os gestores de um moderno e pequeno zoo gostariam de organizar o encarceramento dos animais que parecesse tão natural quanto possível. Em cada ambiente, devia conviver uma variedade de animais compatíveis, isto é, que não se atacassem mutuamente ou espalhassem doenças prejudiciais uns aos outros. O zoo pretende começar por exibir 9 espécies, cujos nomes aparecem substituídos pelas letras A a I na tabela de dupla entrada da **Figura 21**. Cada símbolo "X" exprime que o par de animais respectivo não pode partilhar um cárcere em comum.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	–	X	X	X					X
B	X	–	X	X					X
C	X	X	–	X				X	X
D	X	X	X	–	X			X	X
E				X	–	X		X	X
F					X	–	X	X	
G						X	–	X	
H				X	X	X	X	–	X
I	X	X	X	X	X			X	–

Figura 21.

1. Desenhe um modelo de grafo que represente a situação.
2. Procure, por via da tentativa e erro, calcular o número mínimo de possíveis cárceres ou ambientes.
3. Podemos resolver o problema, sem colocarmos mais do que três tipos de animais em cada ambiente?

2.

Uma pequena companhia pretende ligar por cabo de fibra óptica os edifícios das suas sedes espalhadas por vários quarteirões. Pretende-se garantir o envio de mensagens entre qualquer par de locais. Logo que o cabo esteja colocado, há-de ser possível enviar e receber mensagens para todos os locais via cabo, muito embora nem todos os pares de sítios estejam directamente ligados. Os locais são designados por letras de "a" a "f" na tabela de dupla entrada da **Figura 22** em que os números representam os custos em milhares de euros da instalação do cabo onde é possível. As casas em branco identificam os pares de locais entre os quais não é possível fazer a instalação de cabo.

	a	b	c	d	e	f
a	–				5	18
b	2	–	6	3	1	
c		6	–	16		
d		3	16	–	9	4
e	5	1		9	–	20
f	18			4	20	–

Figura 22

1. Desenhe um modelo de grafo que seja adequado ao problema.
2. Por tentativa e erro, procure a instalação mais barata para os objectivos pretendidos.

3.

No problema anterior não há qualquer menção à possibilidade de haver custos envolvidos na troca de mensagens entre dois locais. Acrescente aos dados do problema anterior, os custos de equipamentos que em cada local tornam possível a troca de mensagens conforme **Figura 23**, sabendo que não se devem considerar custos associados a locais para os quais não há ligações directas.

	a	b	c	d	e	f
Custos:	9	3	5	7	11	4

Figura 23

1. Desenhe um modelo de grafo apropriado à situação apresentada agora.
2. Pode determinar uma configuração de custo mínimo ou calcular o custo mínimo para estabelecer as ligações por cabo e equipamentos de troca de mensagens?

4.

Desenhe o grafo que um químico usaria como modelo dos seguintes compostos: metano (CH_4), etanol (C_2H_6); propano (C_3H_8); butano (C_4H_10) e isobutano (C_4H_10). (Nota: Butano e Isobutano tem o mesmo número de átomos de hidrogénio e de carbono, mas são fisicamente diferentes – o que pode significar que grafos não isomorfos podem ou devem ser desenhados para os representar)

5.

Uma escola vai organizar uma escola de verão que é dividida em 12 secções, denominadas de "a" a "l" na tabela da **Figura 24**, em que o símbolo "X" identifica as secções que têm estudantes comuns. Para a prestação de provas de exame, pode contar-se com 3 tempos em cada dia. A escola pretende planear a realização dos exames no menor número de dias possível sem criar conflitos entre estudantes ou l aos estudantes que querem efectuar todos os seus exames.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a	–	X								X		X
b	X	–	X					X			X	
c		X	–	X						X		X
d			X	–	X			X	X			
e				X	–	X		X	X			
f					X	–	X					
g						X	–	X				
h				X	X		X	–	X			
i				X	X			X	–	X		
j	X		X						X	–	X	
k		X								X	–	X
l	X		X	X							X	–

Figura 24

1. Desenhe um grafo para servir de modelo à informação disponível.
2. Construa uma solução por tentativa e erro.
3. O que faria de diferente se aceitássemos um númeor limitado de conflitos na calendarização dos exames?

6.

A **Figura 25** mostra uma parte de um bairro. Um carro varredor de ruas deve obedecer aos sentidos do trânsito, varrendo sempre na proximidade dos passeios assinalados pelas linhas quebradas no mapa. Embora os carros não possam fazer inversões de marcha nos cruzamentos das ruas, ao varredor de ruas tal é permitido.

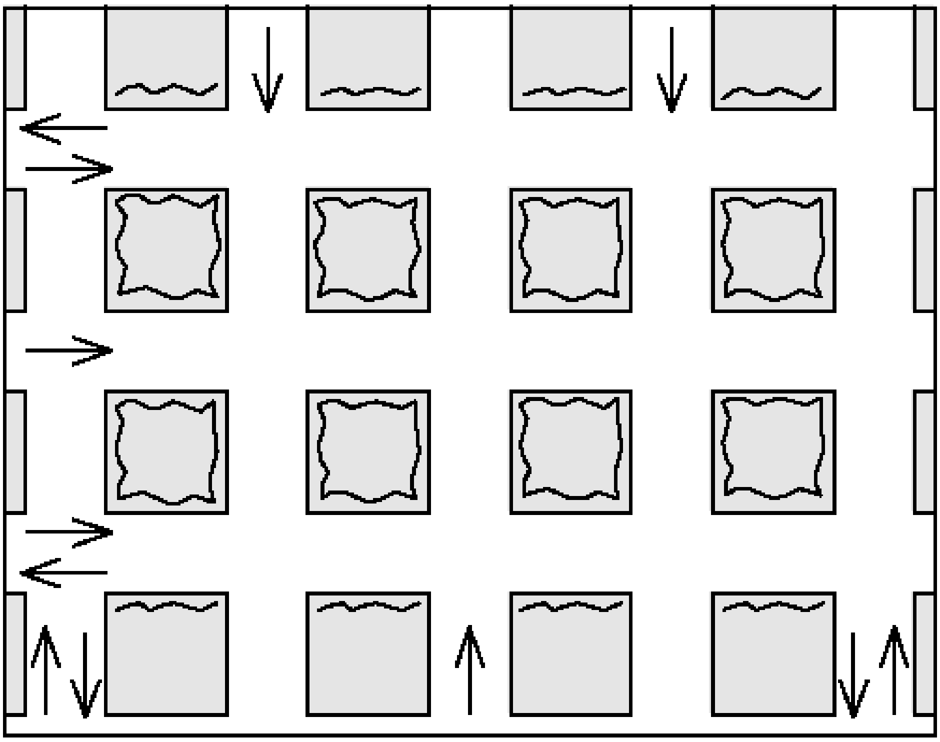


Figura 25 ,

1. Construa modelo de grafo.
2. Sabendo que cada troço de rua tem de ser varrida pelo menos uma vez, encontre um percurso eficiente para o trabalho do carro varredor de ruas.
3. Procure um percurso eficiente para o varredor para o caso de ser necessário que cada troço de rua seja varrido pelo menos duas vezes.

7.

A tabela da **Figura 26** mostra o tempo gasto por 3 trabalhadores em cada uma de 3 funções de uma cadeia.

	Tarefa 1	Tarefa 2	Tarefa 3
Trabalhador 1	18	12	31
Trabalhador 2	14	11	22
Trabalhador 3	19	17	29

Figura 26

1. Desenhe um grafo que ilustre (ou substitua) a informação dada pela tabela.
2. Como devemos distribuir os trabalhadores pelas diferentes tarefas de modo a minimizar o tempo gasto na produção?
3. Se em vez de tempo os números representassem lucros na colocação de um determinado trabalhador numa determinada tarefa, que distribuição faríamos para ter o máximo proveito?
4. Quantas distribuições diferentes se podem fazer?
5. Se tivessemos 6 trabalhadores para 6 tarefas, quantas distribuições diferentes poderíamos ter?

8.

Para duas sequências binárias de igual comprimento, podemos usar o número de posições em que elas diferem como medida da distância entre elas. Por exemplo, 0011 e 0000 estão distanciadas 2 unidades enquanto 0000 e 1111 estão à distância 2.

1. Escreva todas as sequências binárias de comprimento 3.
2. Desenhe o grafo que representa cada sequência biária por um vértice, e há arestas entre os vértices que distam exactamente uma unidade.
3. Pode encontrar-se um circuito dos vértices do grafo em que cada vértice seja visitado uma vez e não mais do que uma vez?
4. Pense em aplicações desta situação.

9.

A **Figura 27** mostra uma colecção de segmentos de recta verticais. Ao programar o movimento de um "robot" num espaço em que há obstáculos, é necessário considerar a informação sobre os corredores entre os obstáculos. Embora os obstáculos não sejam vulgarmente segmentos de recta, aqui, para simplificar, consideramos os obstáculos como segmentos de recta verticais. Na **Figura 27**. do ponto C podem ver-se os pontos A, B, E e F, mas não se vêem os pontos D, G e H. Qual é o grafo a desenhar para nos ajudar a ver a informação sobre as linhas de visão na figura?

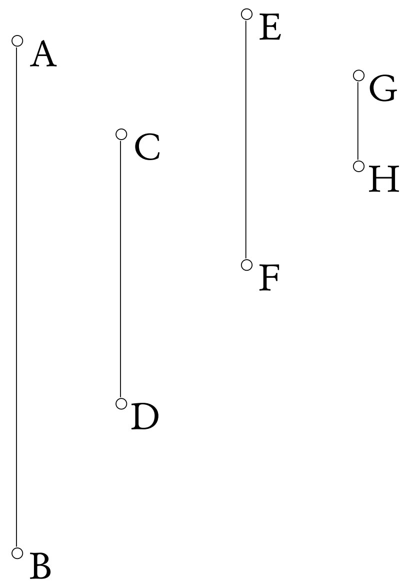


Figura 27

10.

A **Figura 28** mostra microprocessadores (designados pelas letras "A" a "H") num computador que podem estar directamente ligados uns aos outros (um "X" identifica uma ligação directa). Desenhe um grafo que mostre, para cada microprocessador, quais dos outros com ele podem comunicar através de exactamente um microprocessador. Como pode generalizar o problema?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	–	X	X				X	
B	X	–		X				X
C	X		–	X	X			
D		X	X	–		X		X
E			X		–	X	X	
F				X	X	–		X
G	X				X		–	X
H		X		X		X	X	–

Figura 28.

11.

	Tarefa predecedente	Tempo
T_1	nenhuma	8
T_2	nenhuma	11
T_3	T_1	7
T_4	T_5	6
T_5	T_1, T_2	2
T_6	T_5	14
T_7	T_2	9

Figura 29

A tabela da **Figura 29** mostra um conjunto de tarefas que devem ser executadas para que determinada função seja cumprida.

1. Desenhe um grafo que seja um modelo apropriado à situação.
2. Qual é o prazo mínimo para executar o conjunto de tarefas?

12.

As comissões de uma legislatura estão a tentar calendarizar as sua actividades de tal modo que pessoas que pertencem a diferentes comissões não tenham de estar em dois lugares simultaneamente. As 12 comissões (designadas pelas letras "a" a "l") estão representadas na **Figura 30**, em que se assinala com um "X" aquelas que têm membros em comum.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a	–	X									X	X
b	X	–	X	X							X	X
c		X	–	X							X	X
d		X	X	–	X						X	X
e				X	–	X				X	X	
f					X	–	X					
g						X	–	X	X	X		
h							X	–	X	X		X
i							X	X	–	X		X
j					X		X	X	X	–	X	
k	X	X	X	X	X					X	–	X
l	X	X	X	X				X	X		X	–

Figura 30

1. Construa um grafo que seja um bom modelo para a situação apresentada.
2. Qual é o menor número de reuniões de todas as comissões que se podem calendarizar evitando conflitos?

13.

Um novo parque de diversões tem uma rede de ruas como a que é mostrada na **Figura 31**.

1. Será possível atribuir sentidos a cada uma das ruas (sem que qualquer delas tenha duplo sentido) de tal modo que seja possível conduzir de um cruzamento para outro qualquer num e noutro sentido? Dito de outro modo, o que interessa é saber se posso contar com um caminho de ruas de um sentido de "a" para "b" e outro de "b" para "a" para ir de um cruzamento a outro.

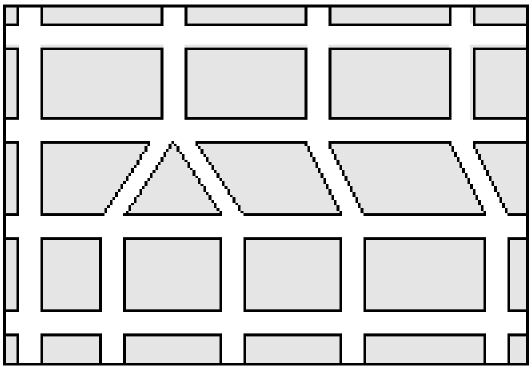


Figura 31

14.

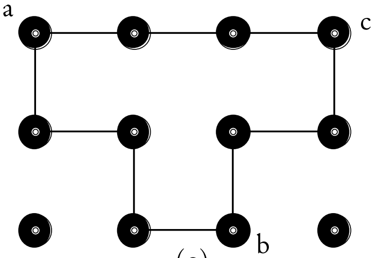
A **Figura 32** mostra cinco componentes (designadas pelas letras "a" a "e") de um ciruito impresso que se ligam electricamente (ligação assinalada com "X"). Poderemos localizar os componentes (pontos) numa placa do tipo apresentado na Figura 32(b) de tal modo que as soldas só se encontrem nos pontos ou buracos da placa? A Figura 32(c) mostra como se podem juntar 3 componentes (a, b, c) nas condições descritas para o trabalho de soldadura na placa de suporte. Há claramente outras soluções, usando diferentes ligações ou localizando em furos diferentes os componentes.

Este exercício dá um pouco do espírito do "design VISI", i.e., do problema em como colocar de modo eficiente os chips nas placas

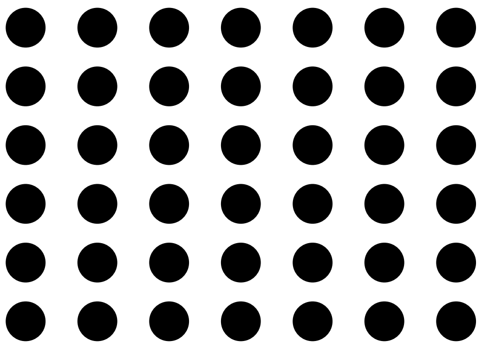
Figura 32

	a	b	c	d	e
a	–	X	X	X	X
b	X	–	X		X
c	X	X	–	X	X
d	X		X	–	X
e	X	X	X	X	–

(a)



(c)



(b)