GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 835/1.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por $1, 2, 3, 4, 5$, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

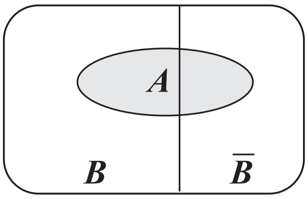
Modelos de grafos

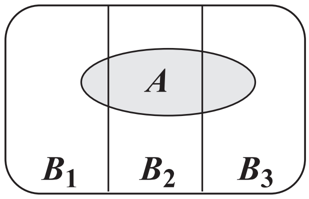
Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes





$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x}-z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\hat{p}-z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

Página em branco

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

1. No concelho de Avelares, realizaram-se recentemente eleições para a constituição de um órgão consultivo da população. Este órgão tem 9 consultores.

A Tabela 1 apresenta o número de votos, validamente expressos, obtidos pelas 4 listas concorrentes a esse ato eleitoral.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Tabela 1

Lista	A	B	C	D
Número de votos	220	530	650	150

Para converter os votos em mandatos, aplicou-se o método que a seguir se descreve:

- divide-se o número de votos obtidos por cada lista sucessivamente por $1, 3, 5, 7, 9$, etc.;
- ordenam-se todos os quocientes obtidos, arredondados às décimas, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao órgão consultivo da população;
- atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série;
- no caso de só ficar um mandato por atribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Na referida eleição, foram atribuídos os 9 mandatos, correspondentes aos lugares disponíveis para o órgão consultivo da população.

Depois de publicados os resultados, os representantes da lista A afirmaram que os mandatos poderiam ter sido atribuídos na proporção direta dos votos obtidos por cada uma das listas, com arredondamento à unidade. Aplicando este método, à lista C, por exemplo, seriam atribuídos quatro mandatos, uma vez que $\frac{650}{1550} \times 9 \approx 3{,}774$.

Verifique se a adoção do método proposto pelos representantes da lista A modificaria, ou não, o número de mandatos a atribuir a cada lista concorrente.

2. Uma agência de viagens, sediada no concelho de Avelares, organiza e vende, através da Internet, percursos de autocarro entre várias cidades europeias.

2.1. Para organizar um percurso que passe por Amesterdão, Berlim, Munique, Paris e Viena, um funcionário da agência começou por registar, na Tabela 2, as distâncias mínimas, em quilómetros, entre cada duas cidades.

Tabela 2

	Amesterdão	**Berlim**	**Munique**	**Paris**	**Viena**
Amesterdão		663	825	501	1148
Berlim			604	1055	674
Munique				828	435
Paris					1236
Viena					

De forma a minimizar os custos operacionais, o funcionário definiu, através de um grafo, um percurso fechado que liga as cinco cidades, tendo adotado o seguinte procedimento:

- escolher a aresta do grafo com menos peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas de menos peso, garantindo que três arestas do percurso que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os vértices sejam incluídos;
- apresentar um percurso pretendido conforme o vértice de partida escolhido.

Apresente um percurso possível, com início e fim em Amesterdão, de acordo com o procedimento utilizado pelo funcionário da agência.

Na sua resposta, apresente:

– o grafo usado, indicando os pesos de cada aresta;

– um percurso que o funcionário poderá ter definido.

2.2. No final do ano, o diretor da agência de viagens atribuiu um prémio a três dos funcionários, Alice, Bernardo e Camila, por terem atingido os objetivos estabelecidos pela empresa. O prémio é constituído por um computador, um *tablet* e uma viagem.

Para dividirem o prémio, de modo que nenhum dos funcionários tenha razão para reclamar, acordaram utilizar o método de licitação secreta a seguir descrito.

- Cada funcionário atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos três bens e coloca o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações dos três funcionários são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada funcionário e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada funcionário considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três bens.
- Cada bem é atribuído ao funcionário que mais o valoriza, considerando-se que ele recebe o valor monetário que atribuiu ao respetivo bem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um funcionário não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor dos bens recebidos por esse funcionário é zero euros.
- Caso o valor dos bens recebidos por um funcionário ultrapasse o valor que este tinha considerado justo receber, o funcionário disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, o funcionário recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda sobre dinheiro este é distribuído em partes iguais pelos três funcionários.

Na Tabela 3, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada funcionário aos bens, nas licitações secretas.

Tabela 3

Bens \ Funcionários	Alice	Bernardo	Camila
Computador	600	950	750
Tablet	350	300	300
Viagem	850	1000	810

De acordo com o método acima descrito, determine como será distribuído o prémio por cada um dos funcionários e o valor monetário a pagar ou a receber, de forma que nenhum deles tenha razão para reclamar.

3. O Gabinete de Avelares Prudente (GAP) tem por missão promover a segurança rodoviária no concelho. Neste âmbito, foi feito um levantamento estatístico de dados sobre os habitantes do concelho de Avelares que têm carta de condução.

3.1. De modo a conhecer a estrutura da população encartada, o GAP aplicou um inquérito a 950 habitantes encartados, tendo-se verificado que:

- 350 desses habitantes foram encartados em 1990;
- 250 desses habitantes eram encartados do sexo feminino;
- dos encartados do sexo feminino, 110 foram encartados em 1990.

Determine quantos dos habitantes encartados que responderam ao inquérito eram homens não encartados em 1990.

3.2. Segundo o GAP, que acompanha o número de novos encartados, a percentagem M de novos encartados que são mulheres, t anos após 1980, é bem aproximada pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$M(t) = \frac{58}{1 + 1{,}7e^{-0{,}23t}}$$

Por exemplo, no ano de 1982, a percentagem de novos encartados que são mulheres, é igual a 28%, pois $M(2) \approx 27{,}98$

3.2.1. Em 1985, o número de novos encartados foi 4750. Quantas mulheres foram encartadas nesse ano?

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2.2. Determine o primeiro ano em que, no mês de janeiro, a percentagem de novos encartados do sexo feminino foi superior a 50%.

3.2.3. Realizou-se um estudo sobre os encartados no ano 2000 e concluiu-se que:

- 40% dos condutores do sexo masculino conduzem automóveis a gasóleo;
- 70% dos condutores do sexo feminino não conduzem automóveis a gasóleo.

Escolheu-se um condutor que tirou a carta no ano 2000.

Com base no estudo realizado e de acordo com o modelo, determine a probabilidade de o encartado ser do sexo feminino, sabendo-se que não conduz um automóvel a gasóleo.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4. O Ivo, que vive no estrangeiro, veio de férias à sua terra natal, Avelares, em Portugal. Como queria comprar um automóvel, dirigiu-se a um *stand*, onde foi informado de que são várias as parcelas que perfazem o preço de venda ao público (PVP). Ao preço base (preço sem impostos), é adicionado o Imposto Sobre Veículos (ISV) e, a esta soma, é aplicado o Imposto sobre o Valor Acrescentado (IVA) à taxa de 23%.

Por exemplo, um automóvel com um preço base de $12\,500$ euros e com um ISV associado de 7883 euros terá o seu PVP calculado como se demonstra:

$$PVP = (12\,500 + 7883) \times 1{,}23 = 25\,071{,}10 \text{ euros}$$

Quando questionado sobre o seu interesse em efetivar a compra, o Ivo respondeu:

«Penso que a vossa proposta não me interessa, porque no país onde vivo a taxa de IVA é de 18% e é aplicada somente ao preço base do automóvel. Depois de se ter aplicado o IVA, adiciona-se o ISV para determinar o PVP do automóvel.»

Quando chegou a casa, o Ivo foi determinar o PVP, em Portugal e no país onde vive, do automóvel que pretendia comprar. Nessa altura, recordou-se de que no país onde vive o valor do ISV é superior em 28% ao ISV praticado em Portugal.

O automóvel que interessa ao Ivo tem um preço base de $18\,000$ euros em ambos os países, e o ISV em Portugal é de 9251 euros.

A que conclusão terá chegado o Ivo?

Justifique a sua resposta.

5. Recentemente, o GAP levou a cabo um inquérito a 200 condutores encartados, selecionados ao acaso, com o intuito de saber quantos exames de condução realizaram até ficarem encartados.

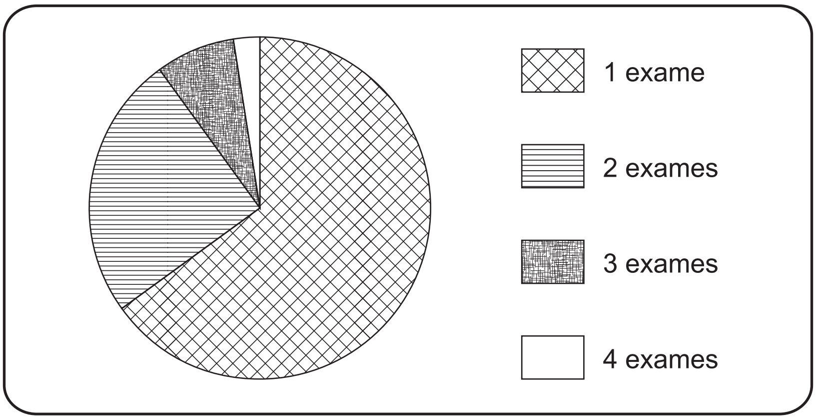
O número de exames realizados variou entre 1 e 4. Na Tabela 4, apresenta-se parte da informação recolhida.

Tabela 4

Número de exames realizados	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de encartados	130	50	a	b

5.1. Os autores do estudo pretendiam divulgar a informação recolhida na revista do GAP e decidiram apresentá-la através de um gráfico circular idêntico ao Gráfico 1.

Gráfico 1
Número de exames de condução realizados



Sabe-se que o ângulo ao centro correspondente ao setor dos encartados que realizaram exatamente três exames de condução tem de amplitude 27 graus.

Determine os valores de a e b.

5.2. Considere que $a = 12$ e $b = 8$

Escolhem-se, ao acaso, dois dos encartados considerados na Tabela 4 .

Seja X a variável aleatória: «número de encartados que realizaram exatamente 2 exames».

Construa uma tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente o valor das probabilidades na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5.3. Os 200 condutores inquiridos foram também questionados relativamente ao número de horas que dedicaram à preparação do exame de condução.

Os dados obtidos permitiram concluir que os inquiridos gastaram uma média de $30{,}2$ horas na preparação do exame, com um desvio padrão de $3{,}4$ horas.

Defina um intervalo com 95% de confiança para o número médio de horas que os encartados dedicaram à preparação do exame de condução.

Apresente os extremos do intervalo de confiança arredondados às décimas, explicitando os valores usados no cálculo.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

1.	25 pontos	
		25 pontos
2.		
2.1.	20 pontos	
2.2.	20 pontos	
		40 pontos
3.		
3.1.	20 pontos	
3.2.		
3.2.1.	10 pontos	
3.2.2.	15 pontos	
3.2.3.	20 pontos	
		65 pontos
4.	15 pontos	
		15 pontos
5.		
5.1.	20 pontos	
5.2.	20 pontos	
5.3.	15 pontos	
		55 pontos
TOTAL		**200 pontos**