



EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 835/Época Especial

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
 - as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
 - as listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

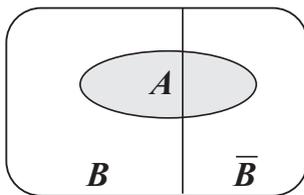
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

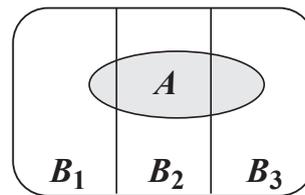
Probabilidades

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ = \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 σ – desvio padrão da variável
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 s – desvio padrão amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \hat{p} – proporção amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

Página em branco

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato. Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

1. Em Portugal, nas eleições autárquicas, é usado o método de Hondt para converter os votos em mandatos.

Num concelho português, realizaram-se recentemente eleições para eleger os 9 vereadores da Câmara Municipal.

A Tabela 1 apresenta o número de votos, validamente expressos, obtido pelas listas dos cinco partidos mais votados nesse ato eleitoral.

Os votos em branco e os votos nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Tabela 1

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	10 918	5947	2022	1483	660

A Maria, uma aluna de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, afirma que:

«Em comparação com o método de Hondt, o método de Hamilton possibilita uma maior representação dos partidos menos votados.»

Segundo o método de Hamilton, a distribuição de mandatos faz-se da forma seguinte.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de votos validamente expressos pelo número total de mandatos.
- Calcula-se a quota padrão para cada uma das listas, dividindo-se o número de votos de cada lista pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada lista um número de mandatos igual à parte inteira da quota padrão.
- Caso ainda fiquem mandatos por distribuir, atribuem-se os mandatos que restam às listas cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores (um mandato para cada lista).
- Na atribuição do último mandato, se houver duas listas cujas quotas padrão apresentem a mesma parte decimal, atribui-se o último mandato à lista com o menor número de mandatos.

Mostre que a Maria tem razão, aplicando o método de Hondt e o método de Hamilton na distribuição dos 9 mandatos correspondentes ao círculo eleitoral do concelho acima referido.

Apresente os valores dos quocientes, resultantes da aplicação do método de Hondt, com arredondamento às décimas, e os valores do divisor padrão e das quotas padrão, resultantes da aplicação do método de Hamilton, com arredondamento às milésimas.

2. A companhia de aviação ASA5 opera nos aeroportos nacionais.

2.1. No avião que faz a viagem entre Lisboa e Faro, há seis tipos de lugares: *Ago*, *Behind*, *Extra-legroom*, *Normal*, *Up-front* e *XL*. Os bilhetes para esta viagem são vendidos, exclusivamente, por duas agências: a NETVOA e a VOARSEMPRE. As duas agências negociam entre si os tipos de lugares que cada uma pode vender.

Na negociação, usa-se o método seguinte.

- Cada agência distribui, confidencialmente, 100 pontos pelos diferentes tipos de lugares, de acordo com as suas preferências.
- Cada tipo de lugar é atribuído, temporariamente, à agência que mais o valoriza. Em caso de empate, o tipo de lugar é atribuído à agência que tiver menos pontos.
- Com esta distribuição temporária, somam-se os pontos de cada uma das agências. Se as duas agências tiverem o mesmo número de pontos, a distribuição temporária torna-se definitiva; se não, a agência que tiver mais pontos transfere um tipo de lugar, ou parte dos lugares desse tipo, para a outra agência, até ficarem ambas com o mesmo número de pontos. Para fazer a transferência, calculam-se os quocientes referentes aos tipos de lugares atribuídos à agência que ficou com mais pontos:

$$\frac{\text{número de pontos atribuídos ao tipo de lugar pela agência vencedora inicial}}{\text{número de pontos atribuídos ao tipo de lugar pela agência perdedora inicial}}$$

Os quocientes são alinhados pela ordem crescente da sua grandeza.

- Faz-se a transferência do tipo de lugar a que corresponde o menor quociente e somam-se, novamente, os pontos de cada uma das agências, de acordo com os pontos distribuídos confidencialmente. Caso esta transferência dê vantagem à agência que a recebe, terá de se efetuar a transferência de apenas uma percentagem dos lugares desse tipo, de modo a igualar o número de pontos.
- No final, obtêm-se os lugares de cada tipo que cada uma das agências pode vender.

A Tabela 2 apresenta os pontos atribuídos por cada agência aos diferentes tipos de lugares.

Tabela 2

Agência \ Tipo de lugar	NETVOA	VOARSEMPRE
<i>Ago</i>	22	18
<i>Behind</i>	26	21
<i>Extra-legroom</i>	6	1
<i>Normal</i>	33	55
<i>Up-front</i>	8	1
<i>XL</i>	5	4

Determine, aplicando o método descrito, como serão distribuídos os tipos de lugares que cada agência pode vender.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

- 2.2.** O diretor de operações de terra da companhia de aviação ASA5 fez uma lista das tarefas efetuadas entre a aterragem de um certo avião e uma nova descolagem.

A Tabela 3 apresenta o tempo necessário para concretizar cada tarefa (Duração) e, quando existem, as tarefas que devem ser previamente concluídas (Tarefa(s) precedente(s)).

Tabela 3

Tarefa	Duração (em minutos)	Tarefa(s) precedente(s)
Carregamento de bagagem (CB)	16	Descarga de bagagem (DB)
Descarga de bagagem (DB)	2	—
Desembarque de passageiros (DP)	14	—
Embarque de passageiros (EP)	20	Desembarque de passageiros (DP) e Descarga de bagagem (DB)
Limpeza da cabine (LC)	12	Desembarque de passageiros (DP)
Reabastecimento alimentar (RA)	4	Limpeza da cabine (LC)

Há tarefas que se podem realizar em simultâneo, por exemplo, enquanto decorre o Desembarque de passageiros (DP), pode estar a realizar-se a Descarga de bagagem (DB).

Determine o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que antecedem uma nova descolagem (D) desse avião da ASA5, nas condições previstas na Tabela 3.

Na sua resposta, apresente:

- um grafo que represente a situação, incluindo o significado dos elementos (arestas e vértices) que o constituem;
- as possíveis sequências de concretização das tarefas e a respetiva duração.

- 2.3.** A partir de uma amostra aleatória de 220 viagens Lisboa-Faro, o presidente da ASA5 identificou 11 viagens com um tempo de voo menor ou igual a 45 minutos.

Construa um intervalo com uma confiança de 95% para estimar a proporção de viagens com um tempo de voo menor ou igual a 45 minutos, nas ligações Lisboa-Faro.

Apresente os extremos do intervalo com arredondamento às milésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

3. O número, P , de residentes num concelho, em função de t , em meses, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$P(t) = \frac{1239}{1 + 23 \times e^{-0,13t}} \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

t é o número de meses que decorrem após o início de janeiro de 2010. Por exemplo, $P(1)$, com arredondamento às unidades, representa o número de residentes no início de fevereiro de 2010.

- 3.1. Entre o início de janeiro de 2010 e o início de janeiro de 2013, o número de residentes no concelho aumentou.

Determine o valor desse aumento.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 3.2. Um estudo concluiu que, dadas as dimensões geográficas do concelho, o número de residentes do concelho não pode exceder um determinado valor. Diz-se, por isso, que, com o decorrer do tempo, há um limite para o valor de P .

Identifique um valor aproximado para esse limite.

Justifique a sua resposta, recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora.

4. O número, N , de sócios do Grupo Desportivo de Altivo (GDA), em função do número de anos, t , que decorreram após o final de 1980, é bem aproximado pelo modelo $N(t) = at + b$, com arredondamento às unidades, sendo a e b duas constantes.

A Tabela 4 apresenta o número de sócios do GDA no final de alguns anos.

Tabela 4

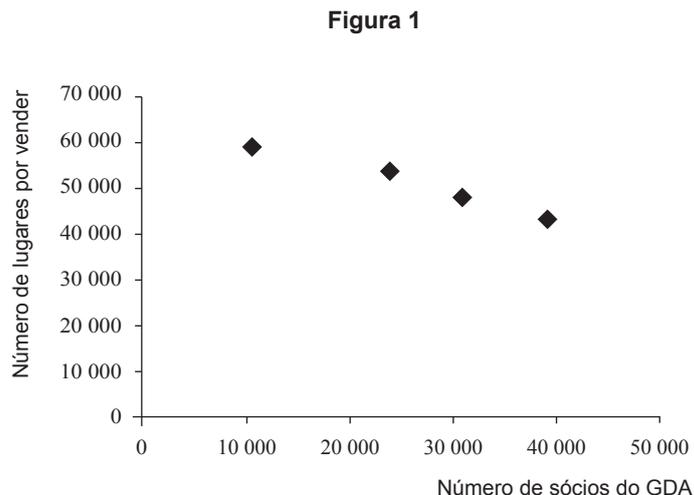
Ano	N.º de sócios
1980	10 585
1990	23 150
2000	30 981
2010	39 125

- 4.1. Estime o número de sócios que o GDA atingiu no final de 2005 com base no modelo $N(t)$, admitindo que este se mantém válido entre o final de 1980 e o final de 2010.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

4.2. O diagrama de dispersão representado na Figura 1 mostra uma forte associação linear negativa entre o número de sócios do GDA e o número de lugares por vender nos jogos de futebol.



Relativamente à Figura 1, apenas uma das opções seguintes está correta.

Opção I	Opção II	Opção III
$r = -0,987$	$r = -0,987$	$r = -0,087$
$a = 1,744$	$a = -0,558$	$a = -1,744$
$b = 10\,354,123$	$b = 65\,346,152$	$b = 65\,346,152$

Em cada uma das opções, r representa o coeficiente de correlação linear, e a e b representam os parâmetros da reta de regressão linear $y = ax + b$

Elabore uma composição na qual:

- identifique a opção correta;
- apresente uma razão para rejeitar cada uma das restantes opções.

4.3. Nos 12 últimos jogos da equipa de futebol do GDA, registou-se o número de sócios do clube desportivo GDA que foram assistir ao jogo. A seguir, apresentam-se os dados registados.

15 680	17 549	14 746	19 418	20 353	22 222
28 763	26 894	34 370	37 174	38 108	39 043

Determine a média e o desvio padrão dos dados registados.

Apresente os resultados com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

5. O gabinete de apoio ao comércio de Altivo determina, mensalmente, para todos os estabelecimentos comerciais, um determinado índice.

Considere que o índice de cada estabelecimento comercial é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 1 e desvio padrão 0,25

Note que:

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ , então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68,27\%$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95,45\%$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99,73\%$$

- 5.1. Num determinado mês, escolheu-se, ao acaso, um estabelecimento comercial de Altivo.

Determine a probabilidade de o índice desse estabelecimento pertencer ao intervalo $\left] \frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right[$

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

- 5.2. Noutro mês, escolheram-se, ao acaso, três estabelecimentos comerciais de Altivo.

Determine a probabilidade de apenas dois desses estabelecimentos apresentarem índices pertencentes ao intervalo $\left] 1, \frac{3}{2} \right[$

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.3. No balcão de atendimento do gabinete de apoio ao comércio de Altivo, 3 em cada 8 atendimentos de comerciantes destinam-se a obter informação sobre a abertura de novas empresas comerciais. Os restantes atendimentos são pagamentos.

Nos atendimentos:

- a probabilidade de o índice da empresa do comerciante estar compreendido entre 0,5 e 1,5, sabendo-se que o comerciante procurou informação sobre a abertura de novas empresas comerciais, é 0,82
- a probabilidade de o índice da empresa do comerciante estar compreendido entre 0,5 e 1,5, sabendo-se que o comerciante se deslocou ao gabinete de apoio para efetuar pagamentos, é 0,30

Escolhe-se, ao acaso, um atendimento de um comerciante.

Determine a probabilidade de esse atendimento ter sido feito a um comerciante que procurava informação sobre a abertura de novas empresas, sabendo-se que o índice da sua empresa está compreendido entre 0,5 e 1,5

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

FIM

Página em branco
