GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 835/2.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

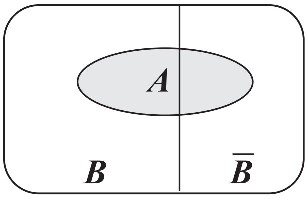
Modelos de grafos

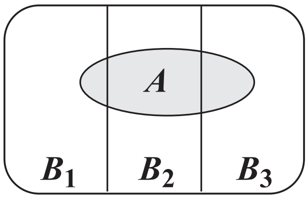
Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

Teorema da probabilidade total e Regra de Bayes





$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

1. Os alunos da escola de Penha Alta estudam a aplicação dos métodos eleitorais e de partilha a várias situações.

1.1. Os métodos eleitorais procuram garantir a representação proporcional. No entanto, a atribuição de mandatos segundo o método de Hondt pode ter um resultado diferente da atribuição de mandatos segundo o método de Saint-Laguë.

Na Tabela 1, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos pelas listas de cada um dos cinco partidos mais votados na eleição dos representantes para a assembleia municipal de Penha Alta.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Tabela 1

Partido	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Número de votos	22 010	17 124	15 144	12 333	11 451

Na eleição dos representantes para a assembleia municipal, são atribuídos 15 mandatos correspondentes ao círculo eleitoral de Penha Alta.

Segundo o método de Saint-Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte.

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Determine as diferenças entre os números de mandatos atribuídos às listas dos cinco partidos mais votados no círculo eleitoral de Penha Alta resultantes da aplicação do método de Hondt e da aplicação do método de Saint-Laguë.

Caso proceda a arredondamentos, conserve uma casa decimal.

1.2. A direção da associação de estudantes da escola de Penha Alta decidiu inquirir os alunos da escola sobre a cor da bandeira da associação. Os alunos podem escolher de entre as cores seguintes: amarelo (A), vermelho (V) e castanho (C).

Cada aluno deve ordenar, uma única vez, as três cores, de acordo com as suas preferências. A ordenação efetuada por cada aluno corresponde a um voto. Foram apurados 430 votos válidos.

Na Tabela 2, encontram-se organizados os resultados obtidos.

Tabela 2

	150 votos	**180 votos**	**100 votos**
1.ª preferência	Castanho	Amarelo	Castanho
2.ª preferência	Amarelo	Vermelho	Vermelho
3.ª preferência	Vermelho	Castanho	Amarelo

O Manuel afirma que a falta de indicação do método a usar no apuramento da cor vencedora pode inviabilizar o processo de escolha da cor, pois, aplicando o método A ou o método B, a cor vencedora não será a mesma.

Método A

- Seleciona-se um par de cores e, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, elabora-se uma nova tabela, semelhante à dada, apenas com os votos nas duas cores que constituem esse par.
- Comparam-se essas cores, contabilizando-se apenas a primeira linha; a cor com o maior número de votos na primeira linha é a vencedora do par escolhido.
- Repetem-se os pontos anteriores até uma das cores ter vencido as comparações com as restantes cores.
- Indica-se a cor vencedora.

Método B

- Na ordenação das cores, cada primeira preferência recebe, em cada voto, tantos pontos quantas as cores em votação.
- Cada segunda preferência recebe, em cada voto, menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência, em cada voto, um ponto.
- É escolhida a cor com maior número de pontos.

Mostre, aplicando os dois métodos, que o Manuel tem razão.

2. O Francisco reside na vivenda A, em Penha Alta, e dá apoio domiciliário a residentes em quatro vivendas, B, C, D e E.

Na Tabela 3, estão registadas as distâncias mínimas, em metros, entre as cinco vivendas: A, B, C, D e E.

Tabela 3

	B	**C**	**D**	**E**
A	100	110	100	150
B	—	100	190	110
C	—	—	180	140
D	—	—	—	110

De modo a determinar a distância mínima a percorrer na visita aos residentes a quem dá apoio domiciliário, o Francisco aplica o algoritmo seguinte.

- Define-se A como ponto de partida.
- Seleciona-se a vivenda mais próxima e estabelece-se a ligação entre as duas tendo em conta que, se houver duas vivendas à mesma distância, a escolha é aleatória. Essa ligação é o caminho a percorrer entre as duas vivendas.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhuma vivenda e regressando-se ao ponto de partida depois de selecionar todas as vivendas.

Mostre, aplicando o algoritmo, que a escolha aleatória, quando existem duas vivendas à mesma distância, pode levar o Francisco a percorrer uma distância maior do que seria necessário para visitar os residentes a quem dá apoio domiciliário.

Página em branco

3. Em três cidades, Peso, Neiva e Runa, a população evolui segundo modelos de crescimento distintos.

Um modelo matemático que se ajusta bem à evolução do número P de habitantes de Peso, com arredondamento às unidades, em função do número t de anos que decorrem após o dia 1 de junho de 2000, é

$$P(t) = 1800 \times e^{0,05t} \quad (t = 0, 1, 2, 3, ...)$$

Um modelo matemático que se ajusta bem à evolução do número N de habitantes de Neiva, com arredondamento às unidades, em função do número t de anos que decorrem após o dia 1 de junho de 2000, é

$$N(t) = 2000 + 1000 \ln(2t + 5) \quad (t = 0, 1, 2, 3, ...)$$

Um modelo matemático que se ajusta bem à evolução do número R de habitantes de Runa, com arredondamento às unidades, em função do número t de anos que decorrem após o dia 1 de junho de 2000, é

$$R(t) = at + b \quad (t = 0, 1, 2, 3, ... \text{ e } a \text{ e } b \text{ são duas constantes.})$$

Considere que $t = 0$ corresponde ao dia 1 de junho de 2000, para todos os modelos.

3.1. Determine ao fim de quantos anos, após o dia 1 de junho de 2000, se estima que o número de habitantes de Peso duplique.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. Determine, recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora, o número mínimo de anos ao fim dos quais se estima que o número de habitantes de Peso seja superior ao número de habitantes de Neiva.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

3.3. Na Tabela 4, apresentam-se os números de habitantes de Runa contabilizados de 2000 a 2006, no dia 1 de junho.

Tabela 4

t	0	1	2	3	4	5	6
R	632	894	1144	1407	1665	1920	2183

Estime o número de habitantes que se previa para Runa no dia 1 de junho de 2012, de acordo com a Tabela 4 e admitindo que o número de habitantes em função do número de anos é melhor aproximado por um modelo do tipo $R(t) = at + b$

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

4. Habitualmente, o café é servido com uma saqueta de açúcar. Para os comerciantes, estão disponíveis, no mercado, os seguintes tipos de embalagens:

- caixa de 5 quilogramas, com uma média de 830 saquetas com, aproximadamente, 6 gramas de açúcar cada uma;
- caixa de $5{,}4$ quilogramas, com uma média de 760 saquetas com, aproximadamente, 7 gramas de açúcar cada uma;
- caixa de 6 quilogramas, com uma média de 750 saquetas com, aproximadamente, 8 gramas de açúcar cada uma.

4.1. A Maria recolheu, aleatoriamente, uma amostra de saquetas de uma caixa de 5 quilogramas e pesou cada uma das saquetas.

No gráfico da Figura 1, está uma representação dos dados recolhidos pela Maria.

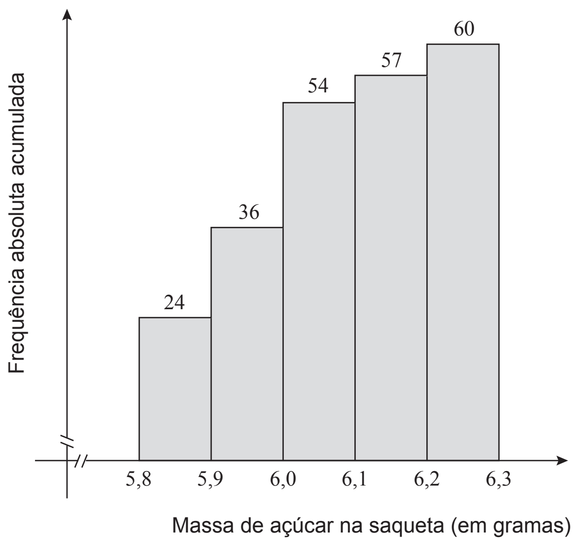


Figura 1

Construa uma tabela de frequências, em que indique as frequências absolutas simples, as frequências relativas simples e as frequências relativas acumuladas, para a variável *massa de açúcar na saqueta*, com os dados recolhidos pela Maria.

4.2. Na fábrica SUCRE, apenas se produzem e se embalam saquetas com, aproximadamente, 7 gramas de açúcar cada uma. No processo de embalagem contabilizou-se o número de saquetas, por caixa, de uma amostra de 20 caixas obtida aleatoriamente.

Na Tabela 5, é apresentado o número de saquetas de açúcar, por caixa, na amostra recolhida.

Tabela 5

Número de saquetas de açúcar por caixa	693	714	735	756	819	840
Número de caixas	1	1	2	3	5	8

Na amostra, a média do número de saquetas de açúcar por caixa é diferente da média esperada.

Determine o número de saquetas de açúcar que se deve retirar a cada uma das caixas da amostra de modo que a média do número de saquetas, por caixa, na amostra seja 760, sabendo que se deve retirar o mesmo número de saquetas de açúcar a cada uma das caixas da amostra.

4.3. Numa amostra aleatória de n saquetas de açúcar retiradas de uma caixa de 6 quilogramas, aproximadamente 52% das saquetas têm 8 ou mais gramas.

Determine o número mínimo de saquetas de açúcar, n, necessário para que o intervalo de 95% de confiança para a proporção de saquetas com 8 ou mais gramas, na caixa, tenha uma amplitude de aproximadamente $0{,}20$, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

5. Uma seguradora faz aplicações financeiras em apenas três bancos. Cada um dos bancos tem igual probabilidade de ser escolhido.

Para cada uma das aplicações financeiras, há apenas duas possibilidades: com lucro ou sem lucro. Admita que, num certo dia, a probabilidade de lucro de uma aplicação financeira é $0{,}72$ se pertence ao banco JURO, $0{,}75$ se pertence ao banco RENDE e $0{,}90$ se pertence ao banco GANHA.

5.1. Nesse dia, foram feitas 3500 aplicações financeiras pela seguradora no banco GANHA.

Determine o número dessas aplicações financeiras que se estima que não obtenham lucro.

5.2. Escolhe-se, ao acaso, uma aplicação financeira feita pela seguradora nesse dia.

Determine a probabilidade de a aplicação financeira pertencer ao banco JURO, sabendo que a aplicação financeira obteve lucro.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5.3. Sabe-se que a duração de uma aplicação financeira é uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio igual a μ

Sejam a e b dois números inteiros positivos, tais que $a < \mu < b$

Na Figura 2, estão representados a curva de Gauss e os números a, μ e b

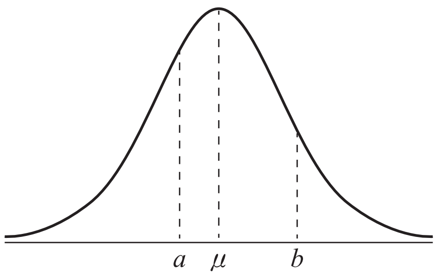


Figura 2

Determine $P(a < X < b)$ se $P(a < X < \mu) = 0{,}12$ e $P(X > b) = 0{,}17$

FIM

COTAÇÕES

1.		
1.1.	20 pontos	
1.2.	20 pontos	
		40 pontos
2.	15 pontos	
		15 pontos
3.		
3.1.	15 pontos	
3.2.	20 pontos	
3.3.	10 pontos	
		45 pontos
4.		
4.1.	15 pontos	
4.2.	20 pontos	
4.3.	15 pontos	
		50 pontos
5.		
5.1.	15 pontos	
5.2.	20 pontos	
5.3.	15 pontos	
		50 pontos
TOTAL		**200 pontos**