GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 835/1.ª Fase 16 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

As respostas aos itens que envolvam o uso da calculadora gráfica devem apresentar, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, a janela de visualização e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas introduzidas na calculadora para se obterem as estatísticas pedidas (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

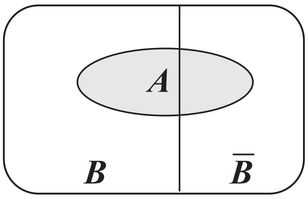
Modelos de grafos

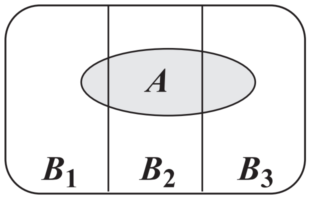
Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

Teorema da probabilidade total e Regra de Bayes





$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

1. Na escola secundária de Semedo, os métodos eleitorais são aplicados nas atividades da escola.

1.1. O diretor da escola pretende organizar um concurso de escrita criativa.

O tema é escolhido pelos alunos, de entre os temas seguintes: Liberdade (L), Recompensa (R), Sonhos (S) e Vida (V).

Cada aluno deve ordenar, uma única vez, os quatro temas, de acordo com as suas preferências. A ordenação efetuada por cada aluno corresponde a um voto. Foram apurados 500 votos válidos.

Na Tabela 1, encontram-se organizados os resultados obtidos.

Tabela 1

	50 votos	**205 votos**	**145 votos**	**100 votos**
1.ª preferência	V	S	V	L
2.ª preferência	L	R	L	V
3.ª preferência	S	L	R	R
4.ª preferência	R	V	S	S

O tema vencedor é apurado através do método seguinte.

- Seleciona-se um par de temas e, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, elabora-se uma nova tabela, semelhante à dada, apenas com os votos nos dois temas que constituem esse par.
- Comparam-se esses temas, contabilizando-se apenas a primeira linha; o tema com o maior número de votos na primeira linha é o vencedor do par escolhido.
- Repetem-se os pontos anteriores até um dos temas ter vencido as comparações com os restantes temas.
- Indica-se o tema vencedor.

Uma professora afirma: «o tema vencedor seria diferente se a escolha fosse feita por maioria simples, tendo-se em conta apenas a percentagem de votos da primeira preferência».

Mostre que a afirmação da professora tem fundamento.

1.2. No início do ano letivo, na escola secundária de Semedo, existiam 30 calculadoras gráficas que podiam ser requisitadas pelos alunos.

O número máximo de calculadoras gráficas que podem ser requisitadas pelos alunos de cada ano de escolaridade depende do número de alunos de cada ano de escolaridade.

A Tabela 2 apresenta o número de alunos de cada ano de escolaridade e o número máximo de calculadoras gráficas que podiam ser requisitadas pelos alunos de cada ano de escolaridade, no início do ano letivo.

Tabela 2

Ano de escolaridade	**10.º**	**11.º**	**12.º**
Número de alunos	210	170	162
Número máximo de calculadoras gráficas	12	9	9

No final do primeiro período, a escola recebeu 120 alunos do 9.º ano de escolaridade e aumentou para 35 o número de calculadoras gráficas que os alunos podiam requisitar. Os alunos do 9.º ano de escolaridade também podem requisitar calculadoras gráficas.

Face a essas alterações, o número máximo de calculadoras gráficas que podem ser requisitadas pelos alunos de cada ano de escolaridade foi reformulado.

Determine, tendo em conta essas alterações, o novo número máximo de calculadoras gráficas que os alunos de cada ano de escolaridade, do 9.º ano ao 12.º ano, podem requisitar, usando o método seguinte.

- Calcule o divisor padrão, dividindo o número total de alunos da escola pelo número total de calculadoras gráficas.
- Calcule a quota padrão para cada um dos anos de escolaridade, dividindo o número de alunos de cada ano de escolaridade pelo divisor padrão.
- Atribua a cada ano de escolaridade um número de calculadoras gráficas igual à parte inteira da quota padrão.
- Caso ainda fiquem calculadoras gráficas por distribuir, atribua as calculadoras gráficas que restam aos anos de escolaridade cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores (uma para cada ano de escolaridade).
- Relativamente à última calculadora gráfica, se houver dois anos de escolaridade cujas quotas padrão apresentem a mesma parte decimal, atribua-a ao ano de escolaridade com o menor número de calculadoras gráficas.

Apresente o valor do divisor padrão e os valores das quotas padrão com arredondamento às milésimas.

Nos cálculos intermédios, utilize o divisor padrão com arredondamento às milésimas.

2. O conselho diretivo de uma faculdade pretende instalar cabo de fibra ótica a ligar sete pavilhões: $A1$, $A2$, $A3$, $A4$, $A5$, $A6$ e $A7$.

Na Tabela 3, encontram-se registadas algumas distâncias mínimas, em metros, entre os pavilhões.

Tabela 3

	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	500	—	—	—	730	350
A2	—	190	—	200	340	—
A3	—	—	150	100	—	—
A4	—	—	—	220	240	—
A5	—	—	—	—	220	—
A6	—	—	—	—	—	650

A instalação de cabo de fibra ótica custa $3,40$ euros por metro.

De modo a minimizar o custo da instalação do cabo de fibra ótica, a ligação entre os pavilhões foi feita recorrendo-se ao algoritmo seguinte.

- Ordenam-se as distâncias registadas na Tabela 3, pela ordem crescente da sua grandeza, indicando-se, para cada distância, o par de pavilhões que lhe corresponde.
- Constrói-se um grafo, cujos vértices representam os pavilhões, selecionando-se, sucessivamente, as distâncias menores e tendo-se em conta que, se a aresta a que corresponde a distância selecionada não levar à formação de um circuito, essa aresta deve ser considerada; caso contrário, essa aresta não deve ser considerada.
- O algoritmo termina quando, no grafo, o número de arestas é igual ao número de vértices menos um.

Determine, nestas condições, o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica.

Na sua resposta, deve:

– aplicar o algoritmo;

– indicar o número mínimo de metros de cabo de fibra ótica necessários;

– calcular o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica.

Página em branco

3. Em Semedo, construiu-se uma nova urbanização.

3.1. A câmara municipal contratou uma empresa para analisar a qualidade da água da urbanização. O estudo realizado revelou a existência de micro-organismos.

3.1.1. No início do estudo, às zero horas do dia 13 de setembro de 2013, o número de micro-organismos na água era 3 milhares de milhões por cm^3. Cinco dias após o início do estudo, o número de micro-organismos na água era $19{,}39$ milhares de milhões por cm^3.

O número P de micro-organismos na água, em milhares de milhões por cm^3, t dias após o início do estudo, é bem aproximado por um modelo exponencial.

Na Figura 1, apresenta-se parte da representação gráfica de $P(t)$ (com $t \geq 0$)

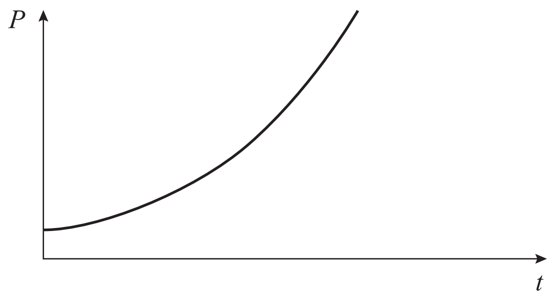


Figura 1

Determine um modelo exponencial, da forma $a \times e^{bt}$ ou da forma $a \times b^t$, que se ajuste à evolução de $P(t)$, recorrendo à calculadora.

Apresente o valor de b com arredondamento às milésimas.

3.1.2. Às zero horas do dia 18 de setembro de 2013, foi adicionada à água uma substância que elimina micro-organismos.

Considere, agora, que o número M de micro-organismos na água, em milhares de milhões por cm^3, t dias após a adição da substância, é bem aproximado pelo modelo seguinte.

$$M(t) = 19{,}39 \times e^{-0{,}08\,t} \quad (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

Determine, recorrendo às potencialidades gráficas da calculadora, o número mínimo de dias necessários para que o número de micro-organismos presentes na água seja inferior a um oitavo do número de micro-organismos que tinham sido contabilizados na água no instante em que se adicionou a substância.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. O Francisco comprou um apartamento na nova urbanização de Semedo. Dirigiu-se à repartição de finanças e solicitou informação sobre o IMI (Imposto Municipal sobre Imóveis).

O IMI é um imposto que incide sobre o valor patrimonial tributário dos prédios rústicos, urbanos ou mistos, situados em Portugal.

O valor patrimonial tributário dos prédios urbanos novos, destinados à habitação, ao comércio, à indústria e aos serviços, depende de vários parâmetros.

Na Tabela 4, encontra-se a avaliação do imóvel do Francisco, realizada por um perito, segundo os parâmetros usados na determinação do valor patrimonial tributário dos prédios urbanos novos destinados à habitação.

Tabela 4

Tipo de prédio	Prédio edificado
Afetação	Habitação
Área bruta de construção e área excedente à área de implantação (A)	$312{,}32\ m^2$
Coeficiente de afetação (Ca)	1,00
Coeficiente de localização (Cl)	1,40
Coeficiente de qualidade e conforto (Cq)	1,10
Coeficiente de vetustez (Cv)	0,85
Valor base dos prédios edificados (Vc)	603,00 euros

O valor patrimonial tributário dos prédios urbanos é obtido pela expressão seguinte.

$$Vt = A \times Ca \times Cl \times Cq \times Cv \times Vc$$

O valor patrimonial tributário dos prédios urbanos apurado é arredondado para a dezena de euros imediatamente superior.

Para 2014, estipulou-se que o valor do IMI dos prédios urbanos seria $0{,}6\%$ do valor patrimonial tributário arredondado.

Determine o valor do IMI que o Francisco deverá pagar em 2014, de acordo com a avaliação realizada pelo perito.

4. Na escola secundária de Semedo, os alunos estudam o consumo diário de café no bar da escola.

Na Tabela 5, encontram-se registados os dados referentes à variável «número de cafés bebidos, em cada dia, pelo Manuel», numa amostra aleatória de 40 dias.

Tabela 5

0	1	2	2	2	1	3	2	1	1	3	4	1	3	3	0	1	5	4	2
0	4	1	3	4	4	2	4	5	3	3	1	2	4	8	5	0	1	8	4

4.1. Represente os dados da Tabela 5, referentes à variável «número de cafés bebidos, em cada dia, pelo Manuel», num diagrama de barras.

Comece por organizar os dados numa tabela de frequências absolutas simples.

4.2. Um aluno apresentou o diagrama da Figura 2 como sendo o diagrama de extremos e quartis da variável «número de cafés bebidos, em cada dia, pelo Manuel» referente à amostra recolhida.

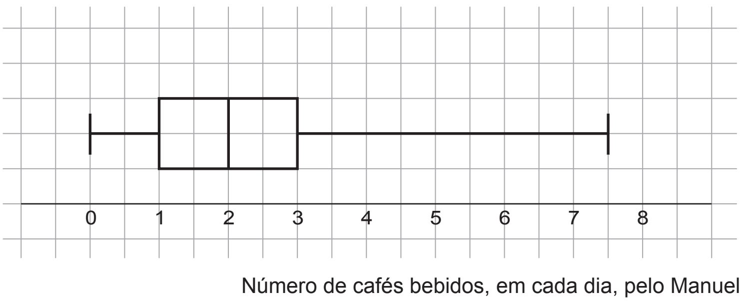


Figura 2

Ao analisar o diagrama da Figura 2, o Manuel afirmou: «este diagrama não pode representar a amostra recolhida».

Construa, com os dados da Tabela 5, o diagrama de extremos e quartis que representa a amostra recolhida e identifique as diferenças entre o diagrama que construiu e o diagrama da Figura 2.

4.3. Determine um intervalo com uma confiança de 95% para estimar o valor médio da variável «número de cafés bebidos, em cada dia, pelo Manuel».

Apresente os extremos do intervalo com arredondamento às milésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Página em branco

5. Em Semedo, os condutores utilizam a oficina ECOL para abastecerem os seus veículos, com ou sem lavagem.

5.1. O depósito de Gás de Petróleo Liquefeito (GPL) da oficina ECOL tem 2000 litros de capacidade.

A quantidade de GPL no depósito altera-se em função dos abastecimentos e da reposição de GPL.

Em cada semana, a quantidade de GPL no depósito segue uma distribuição normal com valor médio igual a 800 litros e desvio padrão igual a 40 litros.

Note que:

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68{,}27\%$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95{,}45\%$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99{,}73\%$$

Sempre que a quantidade de GPL no depósito for inferior a 42% da capacidade do depósito, é acionado um alarme.

Escolhe-se, aleatoriamente, uma semana.

Determine a probabilidade de o alarme, nessa semana, não ser acionado.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. Dos condutores de Semedo que utilizam a oficina ECOL, 78% abastecem os seus veículos de GPL e os restantes abastecem os seus veículos de gasolina. Quando utilizam a ECOL, os condutores podem optar por abastecimento de GPL ou de gasolina, com ou sem lavagem.

Os registos da oficina indicam que:

- dos condutores que abasteceram os seus veículos de GPL, 20% optaram pelo abastecimento com lavagem;
- dos condutores que abasteceram os seus veículos de gasolina, 63% optaram pelo abastecimento sem lavagem.

Foi selecionado, ao acaso, um condutor que utilizou a ECOL para fazer o abastecimento do seu veículo com lavagem.

Determine a probabilidade de esse condutor ter abastecido o seu veículo de gasolina.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

5.3. Na ECOL, efetuou-se um estudo sobre as características dos veículos.

Foram inquiridos apenas os funcionários que têm veículo. Os resultados foram os seguintes:

- 50% têm veículo com sensores de estacionamento (com ou sem gancho de reboque);
- 60% têm veículo com gancho de reboque (com ou sem sensores de estacionamento);
- 15% têm veículo sem sensores de estacionamento e sem gancho de reboque.

Escolhe-se, ao acaso, um funcionário da ECOL que tem veículo.

Indique, determinando as probabilidades, qual dos dois acontecimentos, A ou B, é o mais provável:

A : «o funcionário escolhido ter veículo com sensores de estacionamento e com gancho de reboque»;

B : «o funcionário escolhido ter veículo apenas com gancho de reboque».

FIM

COTAÇÕES

1.		
1.1.	20 pontos	
1.2.	20 pontos	
		40 pontos
2.	15 pontos	
		15 pontos
3.		
3.1.		
3.1.1.	10 pontos	
3.1.2.	20 pontos	
3.2.	15 pontos	
		45 pontos
4.		
4.1.	15 pontos	
4.2.	20 pontos	
4.3.	15 pontos	
		50 pontos
5.		
5.1.	15 pontos	
5.2.	20 pontos	
5.3.	15 pontos	
		50 pontos
TOTAL		**200 pontos**