



Associação de Professores de Matemática

Contactos:

Rua Dr. João Couto, n.º 27-A

1500-236 Lisboa

Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77

Fax: +351 21 716 64 24

<http://www.apm.pt>

email: geral@apm.pt

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS
(PROVA 835) 2013 – 1ªFASE**

Grupo I

1.

1.1. De acordo com o método apresentado, a contagem de pontos de cada tema, incluindo o tema “Festas” é dado por:

- *Bullying*: $415 \times 3 + 370 \times 1 + 200 \times 2 = 2015$ pontos
- Solidariedade: $415 \times 2 + 370 \times 3 + 200 \times 1 = 2140$ pontos
- Festas: $415 \times 1 + 370 \times 2 + 200 \times 3 = 1755$ pontos

Se o tema “Festas” for excluído, a contagem de pontos para os restantes dois temas é dado por:

- *Bullying*: $415 \times 2 + 370 \times 1 + 200 \times 2 = 1600$ pontos
- Solidariedade: $415 \times 1 + 370 \times 2 + 200 \times 1 = 1355$ pontos

Desta forma, se o tema “Festas” for incluído, o tema escolhido será “Solidariedade”, e se o tema “Festas” for excluído o tema escolhido será “*Bullying*”, pelo que não se mantém a escolha do tema nos dois casos.

1.2. A distribuição do número de lugares é apresentado na tabela seguinte:

Ano de escolaridade	10°	11°	12°
Número de alunos	140	120	160
Total	140+120+160 = 420		
Divisor padrão	420 ÷ 20 = 21		
Quota padrão	6,667	5,714	7,619
Quota arredondada	6+1=7	5+1=6	7+1=8
Soma das quotas arredondadas	7+6+8=21		

Uma vez que o total das quotas arredondadas é diferente do número de lugares a distribuir, há que encontrar um divisor modificado para substituir o divisor padrão.

Verifica-se que para um divisor modificado igual a 21,4 se tem:

Ano de escolaridade	10°	11°	12°
Número de alunos	140	120	160
Divisor modificado	21,4		
Quota modificada	6,542	5,607	7,477
Quota modificada arredondada	6+1=7	5+1=6	7
Soma das quotas modificadas arredondadas	7+6+7=20		

Assim a distribuição dos 20 lugares da comissão deverá ser de 7 lugares para os 10° e 12° anos e de 6 lugares para o 11° ano.

2.

2.1. De acordo com a expressão dada, $C_n = C + C \times n \times i$, e pelos dados do enunciado temos que

$$C_n = 1680$$

$$C = 1500$$

$n = 2$, porque em seis meses existem dois trimestres e a capitalização é trimestral

Para determinar a taxa de juro trimestral (i) substituímos estes valores na expressão dada:

$$1680 = 1500 + 1500 \times 2 \times i \Leftrightarrow 180 = 3000 \times i \Leftrightarrow \frac{180}{3000} = i \Leftrightarrow 0,06 = i$$

Pelo que a instituição PIPA propõe uma taxa de juro trimestral de 6%.

2.2. Inserindo os dados da tabela nas tabelas da máquina, obtemos:

L1	L2	L3	1
1	1520	1515	
2	1540	1530.2	
3	1560	1545.5	
4	1580	1560.9	
5	1600	1576.5	
6	1620	1592.3	

L1(1)=1			

Analisando a variação dos montantes da conta X, podemos verificar que a variação é constante, pelo que uma correlação linear, ajusta-se a estes dados.

LinReg(ax+b)	LinReg
Xlist:L1	y=ax+b
Ylist:L2	a=20
FreqList:	b=1500
Store RegEQ:Y1	r ² =1
Calculate	r=1

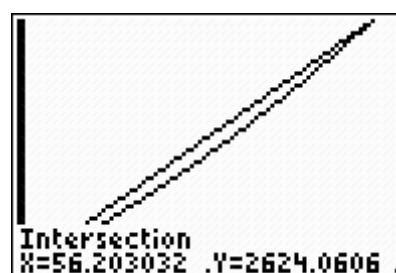
Obtendo-se a partir da regressão linear da calculadora o modelo $y = 20x + 1500$ para a conta X.

Relativamente aos dados da conta Y, o aumento não é constante, mas o capital no final de cada mês é 1,01 vezes maior que o do final do mês anterior (por outras palavras, verifica-se um aumento de 1% em relação ao mês anterior), o que indicia um modelo exponencial .

ExpReg	ExpReg
Xlist:L1	y=a*b^x
Ylist:L3	a=1499.999313
FreqList:	b=1.010000352
Store RegEQ:Y2	r ² =.9999999933
Calculate	r=.9999999966

Recorrendo a uma regressão exponencial na calculadora, obtém-se o modelo $y = 1500 \times 1,01^x$ para a conta Y.

Recorrendo à representação gráfica dos dois modelos, para valores de x entre 0 e 60, e de y entre 1500 e 2620, e determinando o ponto de intersecção dos dois gráficos:



Podemos observar que no final do 56º mês o montante da conta Y ainda não era superior ao montante da conta X, e que no final do 57º mês, esta situação já seria verificada, pelo que a Carla tem razão.

2.3.

2.3.1. De acordo com o modelo dado, temos que $x=10$, pelo que, substituindo na

$$\text{expressão do modelo vem } N(10) = \frac{30}{1+16 \times e^{-1,15x}} \approx 30$$

Pelo que o número de aplicações feitas é de aproximadamente 30.

2.3.2. Consideremos os acontecimentos:

3M – A aplicação escolhida é a de 3 meses;

6M – A aplicação escolhida é a de 6 meses.

R – A aplicação deu rendimento

\bar{R} - a aplicação não deu rendimento

O número de aplicações feitas por um período de capitalização igual a 3 meses é dado

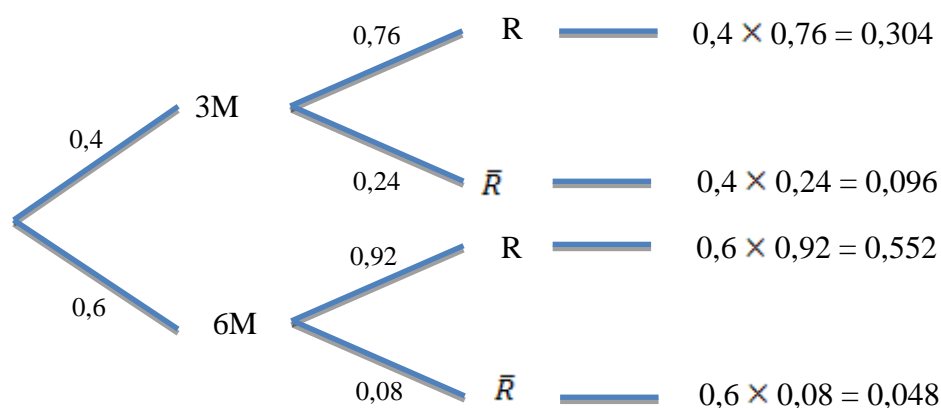
por $N(3) \approx 20$, e a 6 meses por $N(6) \approx 30$

Deste modo:

$$P(3M) = \frac{20}{50} \approx 0,4, \text{ sendo } 50 \text{ o número total de aplicações feitas nesse dia}$$

$$P(6M) = \frac{30}{50} \approx 0,6$$

Consideremos o seguinte diagrama:

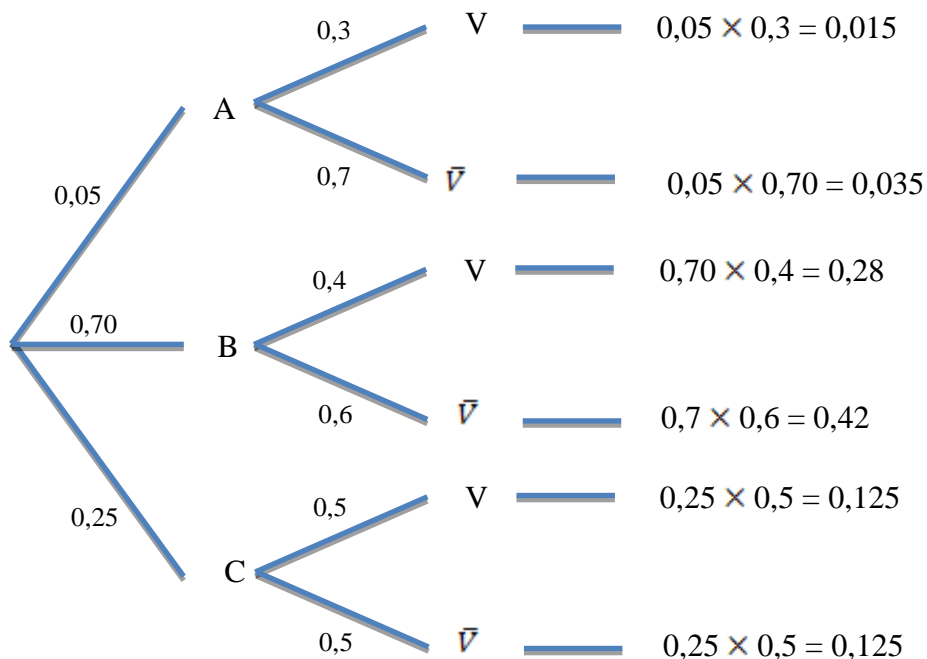


Assim

$$P(3M|R) = \frac{0,304}{0,304 + 0,552} = \frac{38}{107}$$

3.

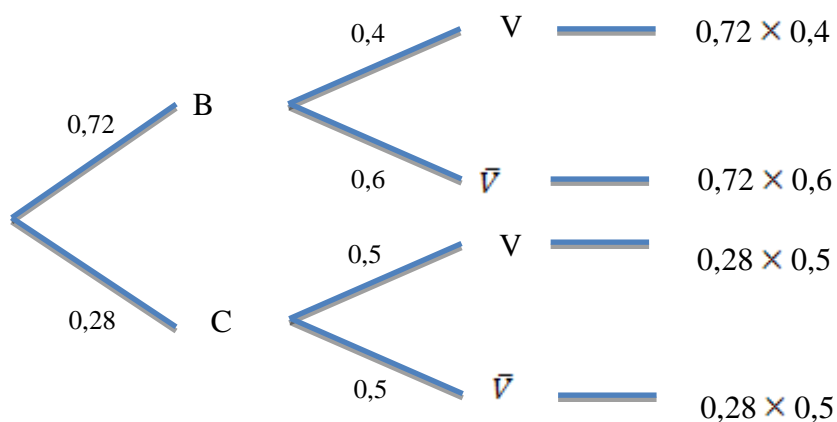
3.1. A partir do seguinte diagrama



Podemos agora preencher a tabela:

Acontecimentos	A	B	C	Total
V	0.015	0.28	0.125	0.42
\bar{V}	0.035	0.42	0.125	0.58
Total	0.05	0.7	0.25	1

3.2. Recorrendo a um novo diagrama



A probabilidade do André vencer uma partida é dada pelo valor da expressão:

$$0,72 \times 0,4 + 0,28 \times 0,5 = 0,428$$

4.

4.1. Usando os dados fornecidos temos a tabela seguinte:

Número de filhos	Frequência absoluta acumulada	Frequência absoluta simples	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
1	78	78	$78 \div 200 = 0,39$	0,39
2	166	$166 - 78 = 88$	$88 \div 200 = 0,44$	$0,39 + 0,44 = 0,83$
3	184	$184 - 166 = 18$	$18 \div 200 = 0,09$	$0,83 + 0,09 = 0,92$
4	196	$196 - 184 = 12$	$12 \div 200 = 0,06$	$0,92 + 0,06 = 0,98$
5	200	$200 - 196 = 4$	$4 \div 200 = 0,02$	$0,98 + 0,02 = 1$
Total		200	1	

4.2. Inserindo os dados em listas (L1 e L2 no exemplo) e usando as capacidades da calculadora gráfica

<table border="1"> <thead> <tr> <th>L1</th> <th>L2</th> <th>L3</th> <th>2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>66</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>46</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>38</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>38</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>12</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-----</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="4">L2(6) =</td> </tr> </tbody> </table>	L1	L2	L3	2	1	66	-----		2	46	-----		3	38	-----		4	38	-----		5	12	-----		-----				L2(6) =				<table border="1"> <thead> <tr> <th>1-Var Stats</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>List:L1</td> </tr> <tr> <td>FreqList:L2</td> </tr> <tr> <td>Calculate</td> </tr> </tbody> </table>	1-Var Stats	List:L1	FreqList:L2	Calculate	<table border="1"> <thead> <tr> <th>1-Var Stats</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\bar{x} = 2.42$</td> </tr> <tr> <td>$\Sigma x = 484$</td> </tr> <tr> <td>$\Sigma x^2 = 1500$</td> </tr> <tr> <td>$Sx = 1.285246784$</td> </tr> <tr> <td>$\sigma x = 1.282029641$</td> </tr> <tr> <td>$\downarrow n = 200$</td> </tr> </tbody> </table>	1-Var Stats	$\bar{x} = 2.42$	$\Sigma x = 484$	$\Sigma x^2 = 1500$	$Sx = 1.285246784$	$\sigma x = 1.282029641$	$\downarrow n = 200$
L1	L2	L3	2																																										
1	66	-----																																											
2	46	-----																																											
3	38	-----																																											
4	38	-----																																											
5	12	-----																																											

L2(6) =																																													
1-Var Stats																																													
List:L1																																													
FreqList:L2																																													
Calculate																																													
1-Var Stats																																													
$\bar{x} = 2.42$																																													
$\Sigma x = 484$																																													
$\Sigma x^2 = 1500$																																													
$Sx = 1.285246784$																																													
$\sigma x = 1.282029641$																																													
$\downarrow n = 200$																																													

Obtivemos os valores de 2,42 para a média e de 1,3 para o desvio padrão, a partir dos dados da tabela inicial.

Alterando os dados da primeira lista e refazendo os procedimentos anteriores.

<table border="1"> <thead> <tr> <th>L1</th> <th>L2</th> <th>L3</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>66</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>46</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>38</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>38</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>12</td> <td>-----</td> <td></td> </tr> <tr> <td>-----</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="4">L1(6) =</td> </tr> </tbody> </table>	L1	L2	L3	1	0	66	-----		1	46	-----		2	38	-----		3	38	-----		4	12	-----		-----				L1(6) =				<table border="1"> <thead> <tr> <th>1-Var Stats</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>List:L1</td> </tr> <tr> <td>FreqList:L2</td> </tr> <tr> <td>Calculate</td> </tr> </tbody> </table>	1-Var Stats	List:L1	FreqList:L2	Calculate	<table border="1"> <thead> <tr> <th>1-Var Stats</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\bar{x} = 1.42$</td> </tr> <tr> <td>$\Sigma x = 284$</td> </tr> <tr> <td>$\Sigma x^2 = 732$</td> </tr> <tr> <td>$Sx = 1.285246784$</td> </tr> <tr> <td>$\sigma x = 1.282029641$</td> </tr> <tr> <td>$\downarrow n = 200$</td> </tr> </tbody> </table>	1-Var Stats	$\bar{x} = 1.42$	$\Sigma x = 284$	$\Sigma x^2 = 732$	$Sx = 1.285246784$	$\sigma x = 1.282029641$	$\downarrow n = 200$
L1	L2	L3	1																																										
0	66	-----																																											
1	46	-----																																											
2	38	-----																																											
3	38	-----																																											
4	12	-----																																											

L1(6) =																																													
1-Var Stats																																													
List:L1																																													
FreqList:L2																																													
Calculate																																													
1-Var Stats																																													
$\bar{x} = 1.42$																																													
$\Sigma x = 284$																																													
$\Sigma x^2 = 732$																																													
$Sx = 1.285246784$																																													
$\sigma x = 1.282029641$																																													
$\downarrow n = 200$																																													

obtivemos os valores de 1,42 para a média e de 1,3 para o desvio padrão.

Como seria de esperar, uma vez que todas as observações foram reduzidas em 1 unidade, a média foi reduzida em 1 unidade, e o desvio padrão permanece sem alterações, uma vez que as diferenças em relação à média são exactamente iguais nas duas situações.

4.3. Sabe-se que $I =]0,34958; 0,53042[= \left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p} \times (1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p} \times (1-\hat{p})}{n}} \right]$

Amplitude de $I = 0,18084 = 2 \times z \sqrt{\frac{\hat{p} \times (1-\hat{p})}{n}}$

Onde

$$\hat{p} = \frac{38+38+12}{200} = 0,44$$

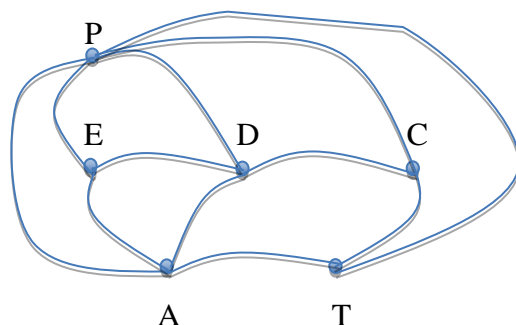
$$n=200$$

Assim

$$2z \sqrt{\frac{0,44 \times 0,56}{200}} = 0,18084 \Leftrightarrow z \approx 2,576$$

Valor de z que corresponde a um nível de confiança de 99%

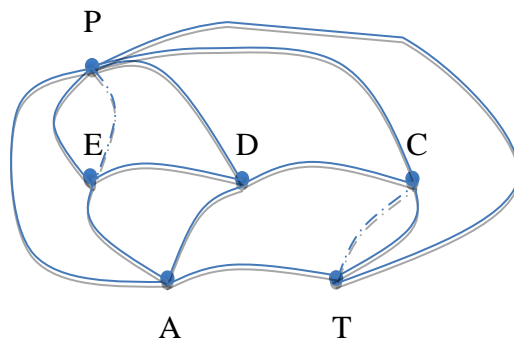
5. Um possível grafo que modele a situação é o seguinte, onde os vértices representam cada um dos espaços do recinto e as arestas, o percurso que vai de um espaço a outro passando por uma porta



- P- pátio
- E- exposição
- D- espaço de debate
- C- cantina
- A - auditório
- T- teatro

Para que seja possível efectuar uma ronda ao recinto, passando por todas as portas uma única vez, começando e terminando o trajecto na cantina, teria que existir pelo menos um circuito de Euler no grafo que representa a situação. Pelo Teorema de Euler, e dado que o grafo é conexo, todos os vértices teriam que ter grau par, o que não acontece.

Assim, a solução para efectuar uma ronda percorrendo todas as portas e passando o menor número de vezes por cada uma, passa por duplicar o número mínimo de arestas de forma a que todos os vértices passem a ter grau par. Tal é possível duplicando as arestas PE e TC (a tracejado na figura a seguir)



- P- pátio
- E- exposição
- D- espaço de debate
- C- cantina
- A - auditório
- T- teatro

Uma solução possível para a situação colocada seria a ronda:
 C T A P E D C P E A D P T C

FIM