Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 835/2.ª Fase 13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, nas páginas 4 e 5, o Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

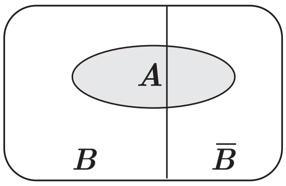
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

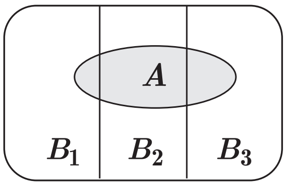
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\bar{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\bar{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais.

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$

1. A Joana estuda na Escola Secundária de Potes. Na turma da Joana, os alunos têm de escolher uma cidade, que será o destino de uma visita de estudo. Os alunos podem escolher Amarante, Braga ou Lamego.

Não havendo consenso entre os alunos, a Directora de Turma propôs que a decisão fosse tomada por votação. Cada aluno deveria ordenar, uma única vez, os nomes das três cidades de acordo com as suas preferências. A ordenação efectuada por cada aluno corresponde a um voto. Foram apurados vinte e um votos válidos.

Na Tabela 1, encontram-se organizados os resultados obtidos.

Tabela 1

	8 votos	**6 votos**	**4 votos**	**3 votos**
1.ª preferência	Braga	Lamego	Amarante	Amarante
2.ª preferência	Lamego	Amarante	Lamego	Braga
3.ª preferência	Amarante	Braga	Braga	Lamego

Suponha que a Directora de Turma decide aplicar o método de contagem de Borda para escolher a cidade a visitar.

Segundo o método de contagem de Borda, a escolha faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- para que um voto seja considerado válido, cada aluno ordena, uma única vez, os nomes das três cidades de acordo com as suas preferências;
- na ordenação final das cidades, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantas as cidades em votação;
- cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto;
- é escolhida a cidade com maior número de pontos.

Verifique se, aplicando o método de contagem de Borda, a cidade vencedora respeitaria a primeira preferência mais votada.

2. O Manuel, o José e o Paulo compraram, em conjunto, um certo número de rifas. Do dinheiro despendido na compra, o Manuel participou com 40%, e o José e o Paulo participaram com 30% cada um.

Um dos bilhetes que compraram permitiu-lhes receber um prémio constituído por três bens: uma máquina fotográfica, um televisor e uma consola de jogos.

Os três jovens vão fazer a partilha do prémio, e o método utilizado é o seguinte.

- Primeira etapa: cada jovem atribui um valor monetário a cada um dos bens do prémio, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações de todos os jovens.
- Segunda etapa: determina-se o valor global atribuído, por cada jovem, ao prémio e o valor que cada jovem considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada jovem, através de uma proporção directa entre a percentagem de participação de cada jovem na compra das rifas e a soma das licitações atribuídas por esse jovem.
- Terceira etapa: cada bem é atribuído ao jovem que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui a esse bem. Se um jovem não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o «valor dos bens recebidos» por esse jovem é zero.
- Quarta etapa: se o valor dos bens recebidos por um jovem for superior ou for inferior à porção justa por si determinada, então esse jovem terá de pagar ou de receber a diferença, respectivamente.
- Quinta etapa (só é aplicada quando existe dinheiro em excesso): o excesso obtém-se subtraindo ao total do valor a pagar o total do valor que os jovens têm a receber. Este excesso é distribuído na proporção directa da participação de cada jovem na compra das rifas.

Na Tabela 2, estão registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada jovem a cada um dos bens, o que corresponde à primeira etapa.

Tabela 2

	Manuel	**José**	**Paulo**
Máquina fotográfica	€140	€120	€180
Televisor	€800	€700	€600
Consola de jogos	€580	€700	€500

Determine a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, de forma a nenhum jovem ter razão para reclamar.

Na sua resposta, deve:

- calcular o valor global atribuído ao prémio por cada jovem;
- determinar a porção justa para cada jovem;
- atribuir os bens aos jovens;
- apurar o valor a pagar ou a receber por cada jovem;
- apurar o excesso, caso exista;
- dividir o excesso, caso exista, pelos jovens;
- indicar o bem e o valor final a receber, ou a pagar, por cada jovem.

3. O senhor Jerónimo e o senhor Manuel depositaram, cada um, a quantia de €$25\,000{,}00$ em contas em duas instituições financeiras diferentes, A e B, respectivamente.

Os depósitos evoluíram como se apresenta nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3

Evolução do depósito do senhor Jerónimo (instituição A)	A_n
A_0: Capital depositado no final de 2004	€$25\,000{,}00$
A_1: Capital acumulado no final de 2005	€$25\,625{,}00$
A_2: Capital acumulado no final de 2006	€$26\,265{,}63$
A_3: Capital acumulado no final de 2007	€$26\,922{,}27$
A_4: Capital acumulado no final de 2008	€$27\,595{,}32$

Tabela 4

Evolução do depósito do senhor Manuel (instituição B)	B_n
B_0: Capital depositado no final de 2004	€$25\,000{,}00$
B_1: Capital acumulado no final de 2005	€$25\,700{,}00$
B_2: Capital acumulado no final de 2006	€$26\,400{,}00$
B_3: Capital acumulado no final de 2007	€$27\,100{,}00$
B_4: Capital acumulado no final de 2008	€$27\,800{,}00$

3.1. O senhor Jerónimo decidiu prolongar a permanência do capital depositado na sua conta na instituição A, nas mesmas condições, por mais três anos.

Determine o capital acumulado no final de 2011.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

3.2. Em conversa com o senhor Manuel, o senhor Jerónimo afirmou que:

«Comparando as duas instituições financeiras, nas mesmas condições de evolução dos depósitos apresentadas nas Tabelas 3 e 4, se nos primeiros anos a instituição B é a melhor escolha para obter o máximo de capital acumulado, a partir de certa altura, a instituição A torna-se mais vantajosa.»

Justifique a veracidade da afirmação anterior para um novo depósito de €$25\,000{,}00$, numa nova conta, no final de 2010, a partir da representação gráfica dos modelos de evolução dos depósitos nas duas instituições financeiras, A e B.

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que modela o depósito na instituição A;
- escrever a expressão que modela o depósito na instituição B;
- reproduzir, na folha de respostas, os gráficos visualizados na calculadora;
- reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- indicar o ano a partir do qual a instituição A se torna mais vantajosa.

3.3. O senhor Manuel ofereceu o capital acumulado no final de 2008 ao seu filho Miguel. Esse dinheiro foi investido pelo Miguel na sua empresa de distribuição de congelados.

Na Figura 1, encontra-se o grafo que serve de modelo à volta utilizada pelo camião da empresa do Miguel, para efectuar a distribuição de congelados pelos supermercados que fornece.

No grafo, o vértice A representa a sede da empresa do Miguel, e os vértices B, C, D e E representam os supermercados. Cada aresta representa um trajecto directo que liga dois supermercados, ou que liga um supermercado à sede da empresa do Miguel.

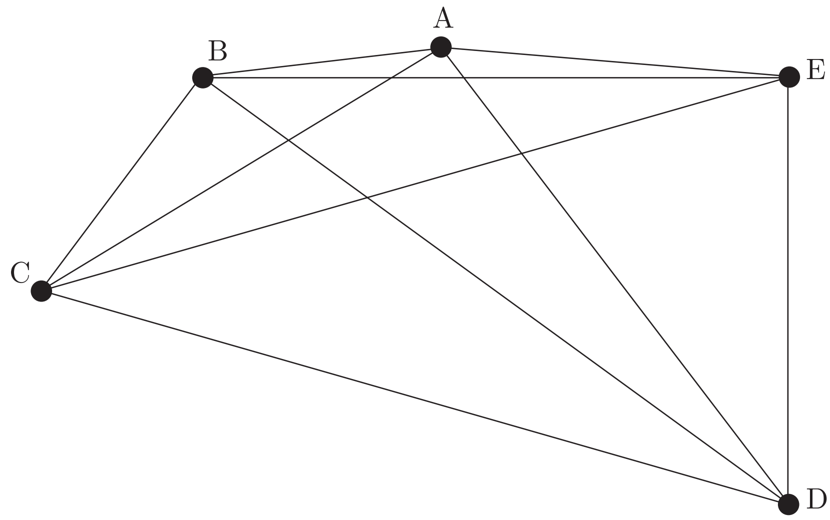


Figura 1

O Miguel elaborou uma lista com as voltas de distribuição, que começam e terminam na sede da sua empresa, visitando todos os supermercados, e não repetindo nenhum deles. Para o Miguel, o que importa é o número de quilómetros percorridos, por isso, é indiferente, por exemplo, percorrer ABCDEA ou percorrer AEDCBA.

3.3.1. Num determinado dia, o camião deve visitar, em primeiro lugar, o supermercado representado por D, visitando depois os restantes, e não repetindo nenhum deles, antes de regressar à sede da empresa.

Identifique todas as voltas possíveis para esse dia.

3.3.2. Mostre que o grafo da Figura 1 admite, exactamente, doze voltas distintas, que podem fazer parte da lista do Miguel.

4. Num canal de televisão, num certo dia, publicitou-se um novo perfume.

No dia seguinte, fez-se uma sondagem para averiguar alguns resultados relacionados com a publicidade ao novo perfume.

Após a análise das respostas, concluiu-se que:

- 75% dos indivíduos inquiridos viram a referida publicidade;
- 45% dos indivíduos inquiridos compraram o novo perfume;
- 20% dos indivíduos inquiridos não viram a referida publicidade, nem compraram o novo perfume.

Escolheu-se, ao acaso, um indivíduo inquirido na sondagem.

4.1. Determine a probabilidade de o indivíduo escolhido ter comprado o novo perfume e não ter visto a publicidade.

Apresente o resultado sob a forma de percentagem.

4.2. Determine a probabilidade de o indivíduo escolhido ter comprado o novo perfume, sabendo que ele viu a publicidade.

Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

5. Uma empresa de telecomunicações e multimédia pretende lançar um novo produto. Para isso, encomendou uma sondagem a um especialista no assunto. No seu trabalho, o especialista procurou determinar o número de televisores e o número de leitores de DVD, por habitação. Numa amostra aleatória de 1000 habitações, recolhida em 2009, verificou que o número de televisores e o número de leitores de DVD se distribuíam como consta do Gráfico 1 e do Gráfico 2, respectivamente.

Gráfico 1

Número de televisores, por habitação

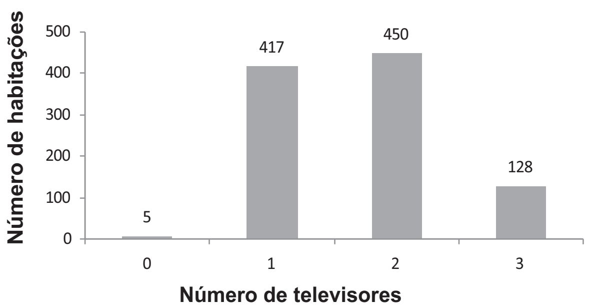
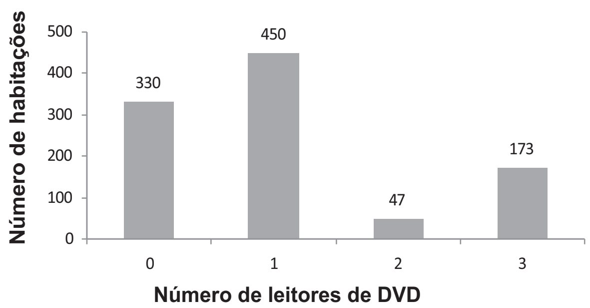


Gráfico 2

Número de leitores de DVD, por habitação



5.1. Determine a mediana e os quartis do *número de leitores de DVD, por habitação*.

5.2. Comente a afirmação seguinte, tendo em conta os dados que constam dos Gráficos 1 e 2.

«O aspecto do gráfico e o valor do desvio padrão de uma variável estatística estão relacionados.»

Na sua resposta, deve:

- calcular os valores da média e do desvio padrão da variável *número de televisores, por habitação,* na amostra;
- calcular os valores da média e do desvio padrão da variável *número de leitores de DVD, por habitação,* na amostra;
- concluir, comparando o aspecto dos Gráficos 1 e 2; nessa comparação, use os valores obtidos para os desvios padrão.

Apresente os valores das médias e dos desvios padrão arredondados às centésimas.

5.3. Seja X a variável aleatória que representa o *número de televisores, por habitação,* na população em que foi recolhida a amostra do Gráfico 1.

Suponha que o modelo de distribuição de probabilidades para X é o seguinte, em que a e b são dois números reais.

X	0	1	2	3
$P(\mathrm{X})$	a	$0{,}425$	b	$0{,}120$

Determine a e b, sabendo que $P(\mathrm{X} \geq 1) = 0{,}995$

5.4. Em 2001, apurou-se que 12% das habitações portuguesas tinham 2 televisores.

Era de esperar que em 2009 a percentagem de habitações portuguesas com 2 televisores fosse superior à registada em 2001.

Numa amostra aleatória de 1000 habitações, recolhida em 2009, concluiu-se que havia 450 habitações com 2 televisores.

Justifique se haverá razão para duvidar do aumento da percentagem de habitações portuguesas com 2 televisores, entre 2001 e 2009.

Fundamente a sua resposta a partir da construção de um intervalo de confiança de 90% para a proporção de habitações portuguesas com 2 televisores em 2009.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, sete casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo com arredondamento às milésimas.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

1.	20 pontos	
		20 pontos
2.	20 pontos	
		20 pontos
3.		
3.1.	10 pontos	
3.2.	20 pontos	
3.3.		
3.3.1.	15 pontos	
3.3.2.	15 pontos	
		60 pontos
4.		
4.1.	15 pontos	
4.2.	20 pontos	
		35 pontos
5.		
5.1.	15 pontos	
5.2.	20 pontos	
5.3.	15 pontos	
5.4.	15 pontos	
		65 pontos
TOTAL		**200 pontos**