

A Matemática, da Minha Varanda

Egídio Gonçalves Pereira

Janeiro de 2018

Conteúdo

Introdução	xi
1 Dois Esquadros	1
1.1 Triângulos rectângulos isósceles	1
1.2 Triângulos rectângulos com um ângulo de 30°	5
2 Perímetros e Áreas de Figuras Planas	9
3 Geometria com Régua e Compasso	37
4 A Trigonometria no Triângulo Rectângulo	51
5 Áreas e Volumes	63
6 Equações Trigonométricas	95
6.1 Equações do tipo $\cos x = \cos \alpha$	95
6.2 Equações do tipo $\sin x = \sin \alpha$	96
6.3 Equações do tipo $\tan x = \tan \alpha$	97
6.4 Equações do tipo $a \cos x + b \sin x = c$	97
6.5 Outras equações	99
7 Os Pontos Médios dos Lados do Pentágono	105
8 Equações de Pell-Fermat	113
9 A Travessia do Deserto	139
10 Construção do Polígono Regular de Dezassete Lados	143
11 Sucessões de Números Reais	153
11.1 Limite de uma sucessão	154
11.2 Progressões aritméticas	162
11.3 Progressões geométricas	164

12 Polinómios numa variável	191
12.1 Divisão inteira de polinómios	191
12.2 Funções polinomiais	198
12.2.1 Função afim	198
12.2.2 Função quadrática	202
12.2.3 Função cúbica	215
12.2.4 Função quártica	221
12.2.5 Outros exemplos	224
13 Funções Reais de Variável Real	235
13.1 Estudo de funções reais de variável real	235
13.2 Composição de funções	292
13.2.1 Composição de funções e transformações de gráficos	296
14 Funções Definidas por Ramos	305
14.1 Funções por ramos	305
14.2 Mais Funções Definidas por Ramos	329
15 A Escada do Diabo	341
16 Funções Exponencial e Logarítmica	347
17 Estudo de Funções Trigonométricas	387
18 Indeterminações	411
19 Equações de Segundo Grau	423
19.1 Primeira abordagem	423
19.2 Segunda abordagem	429
20 O método das Tangentes de Newton	433
21 Polinómios de Colocação	439
22 Construindo Cones	449
23 Brincando com Chapéus	455
24 Os Números Complexos	461
24.1 Uma ideia maluca	461
24.1.1 O plano complexo	462
24.1.2 A forma trigonométrica dum número complexo	463
24.1.3 Produto de complexos na forma trigonométrica	464
24.1.4 Quociente entre complexos na forma trigonométrica	464
24.1.5 Potência dum complexo na forma trigonométrica	465
24.1.6 Raízes índice n dum complexo na forma trigonométrica	465
24.2 Pentágono regular inscrito numa circunferência	466
24.3 Maior hexágono regular contido num quadrado	473

24.4 Domínios planos	476
25 O Anel dos Inteiros Gaussianos	487
26 Ternos Pitagóricos	495
26.1 A trigonometria e os ternos Pitagóricos	504
26.2 Os números complexos e os ternos Pitagóricos	506
27 Análise Combinatória	509
27.1 Números de Bell	531
27.2 O Jogo do Dominó	534
28 Probabilidades	551
29 Separadores e Funções Geradoras	613
29.1 Decomposição em somas	614
29.2 Generalização de Combinações e Arranjos	622
29.3 Funções geradoras	626
29.3.1 Funções Geradoras Ordinárias	629
29.3.2 Funções Geradoras Exponenciais	650
29.3.3 Exercícios variados	653
30 Permutações Caóticas	703
30.1 Lemas de Kaplansky	713
31 Números de Catalan	721
31.1 Função Geradora dos Números de Catalan	737
31.2 Matrizes de Hankel	741
31.3 Números de Narayana	742
31.4 As Vacas de Naraian Pandit	748
32 Xadrez, Torres e Polinômios	753
33 Estatística	887
34 Equações Irracionais	901
35 Duas Funções Curiosas	909
36 Como Nascem os Problemas?	915
36.1 Tangentes a uma hipérbole	915
36.2 Tangentes a uma parábola	917
36.3 Termos consecutivos no triângulo de Pascal	923
37 O Teorema de Marion	925
38 As Eleições e o Método de Hondt	945
39 Geometria Analítica no Plano	949

40 O Teorema de Napoleão Bonaparte	989
41 Geometria Analítica no Espaço	1009
42 Círculos e Esferas	1039
43 Um simples triângulo, mas muito para aprender	1043
44 Geometria no Plano	1057
45 Isometrias no Plano	1081
45.1 Simetria axial	1081
45.2 Rotação	1086
45.3 Translação	1087
45.4 Reflexão Deslizante	1088
46 Semelhanças	1091
47 Outras Transformações Afins	1093
47.1 Afinidade com eixo (Strain)	1093
47.1.1 Cisalhamento (shearing)	1103
47.1.2 Afinidade	1110
47.1.3 Homotetia	1113
47.1.4 Semelhança	1115
47.2 Transformações Afins (Bijectivas)	1116
47.3 Transformações Lineares Não Bijectivas	1117
48 Transformações Geométricas em \mathbb{R}^3	1127
48.1 Isometrias	1127
48.1.1 Simetria em relação a um plano	1128
49 Programação Linear	1131
49.1 O método gráfico	1131
49.2 O método do Simplex	1145
49.3 O Grande M	1154
50 Problemas Choque Mate	1161
50.1 Maria e a apanha das maçãs	1161
50.2 A mosca e o pelotão	1164
50.3 O meu filho mais velho toca piano	1165
50.4 O passeio do senhor Anacleto	1166
50.5 Os quatro ciclistas	1167
50.6 A travessia do deserto	1168
50.7 Viagem de ida e volta	1169
50.8 Os três marinheiros	1170
50.9 Brincando com a calculadora	1171
50.10 Filhos, netos e perucas	1172
50.11 O desencontro	1172

50.12A festa	1173
50.13A exploração infantil no tempo dos nossos avós	1173
50.14Histórias do baú	1174
50.15Cinco chapéus	1174
50.16A viagem de comboio	1175
50.17Os três cantores	1176
50.18O rei Artur e o dragão	1176
50.19O aniversário da Cinderela	1177
50.20A morada da Juliana	1178
50.21Meias, às escuras	1179
50.22Circunferências Tangentes	1179
50.23A nódoa de azeite	1184
50.24Um problema de restos	1185
50.25Um problema de divisibilidade	1186
51 A fórmula de Pick	1193
51.1 Um rectângulo especial	1195
51.2 Triângulos	1196
51.3 Quadriláteros	1200
51.4 Polígonos convexos	1201
51.5 Polígonos côncavos	1201
52 Modelos Populacionais	1205
52.1 Lei de Malthus	1205
52.2 Equação Logística	1205
52.3 Interacção entre duas espécies	1206
53 Lógica	1215
53.1 Trabalhando com V e F	1215
53.1.1 A negação	1216
53.1.2 A conjunção, a disjunção e a disjunção exclusiva	1216
53.1.3 A implicação	1225
53.1.4 A equivalência	1228
53.2 Trabalhando com 0 e 1	1230
54 O Teorema do ponto fixo	1233
55 Simetria axial	1239
56 Transformações Afins	1245
56.1 Afinidades	1245
56.2 Transformações Afins	1255
56.2.1 Reflexão	1257
56.2.2 Rotação em torno duma recta (ou eixo)	1258
56.2.3 Translação	1269
56.2.4 Reflexão Deslizante	1270
56.2.5 Simetria em relação a um ponto	1280

56.2.6 Simetria em relação a uma recta	1281
56.2.7 Simetria em relação a um plano	1283
56.2.8 Parafusos	1284
56.2.9 Reflexões rotativas	1285
56.2.10 Homotetias	1286
56.2.11 Semelhanças	1288
56.2.12 Cisalhamento (Shear)	1288
56.3 Mudança de referencial	1313
Bibliografia	1319
Valor de C_{16383}	1325
.1 Matrizes de Hankel	1329

Prefácio

Este trabalho foi escrito sem a preocupação de obter um livro de texto para acompanhar as aulas de Matemática, nem de seguir o programa de Matemática do Ensino Secundário. Pretendeu-se mostrar que a Matemática no Ensino Secundário pode ir além dos habituais exercícios e que existe um vasto campo que pode ser explorado pelos professores e alunos de Matemática. Tratou-se, também, da resposta a um desafio: que livro sobre Matemática seria eu capaz de escrever? De qualquer modo, o texto resulta da experiência da sala de aula, conjugada com uma grande vontade de procurar novos caminhos.

Pretendeu-se, também, lutar contra uma certa maneira de encarar a Matemática, não havendo nenhuma concessão ao facilitismo que por aí anda. Nos tempos atuais, há que mostrar aos alunos e professores que o mais importante, no Ensino, é o trabalho constante e não o "deixa andar" em que caíram muitos alunos que estão à espera dum milagre que resolva os seus problemas. O mesmo acontece com muitos adultos que veriam os seus problemas resolvidos com um bom prémio no Euromilhões. O pior é que o prémio nunca chega...

Este livro foi escrito sem nenhuma preocupação sobre a sua finalidade: não se pretendia um bom livro, não se pretendia publicar um livro, nem se pretendia qualquer tipo de utilização para além da sala de aula. De qualquer modo, partes do livro foram sendo divulgadas a alguns colegas de Escola. Por falar em Escola, parece-me que, numa Escola de dimensão considerável, como a Escola Secundária Jaime Moniz (onde sou professor), poderíamos fazer o nosso próprio LIVRO DE MATEMÁTICA, que englobaria o contributo dos professores interessados e, se possível, de alguns alunos. Tal livro seria uma resposta à habitual falta de espírito colectivo e uma excelente resposta àqueles que dizem que os professores nada fazem.

Finalizo este pequeno prefácio, referindo que já não sei em que altura comecei a escrever este livro: sei que foi há muito tempo e que passei milhares de horas a escrever no Computador. E sem esperar qualquer compensação para esse esforço que, espero, não tenha sido inglório.

Muito sinceramente, gostava que os professores de Matemática pudessem ter acesso a este livro e que se propusessem fazer (fizessem) outro, muito melhor e sem os defeitos que este apresenta. Quanto aos alunos, já não sei. Muitos deles não são capazes de ler uma página dum livro de Matemática. Outros limitam-se a ir às aulas e às explicações, resolvendo listas de exercícios. Um muito pequeno número de alunos parece que ainda se interessa em aprender Matemática. Que não percam esse interesse.

Aproveito estas linhas para a agradecer a todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para este produto final, lendo o texto e apontando gralhas, fazendo com que o seu número seja menor. No entanto, tenha a certeza que elas continuam. Por vezes, abro o livro numa página, ao acaso, e lá está ela, a gralha...

Obrigado a todos os que me incentivaram!

Este livro é dedicado a uma pessoa em particular: À minha professora da instrução primária, D. Estela Castro.

Introdução

Este texto incide, de modo especial, sobre assuntos de 12^o Ano e de 1^o Ano do Ensino Universitário. Para isso contribuiu a minha experiência como professor do Ensino Secundário e como assistente na Universidade da Madeira e na Universidade Católica (Funchal).

Convém referir que, no Capítulo intitulado **Probabilidades**, estão incluídos exercícios das Brochuras editadas pelo Ministério da Educação, exercícios esses que estão assinalados com *.

Não posso deixar de referir que seria interessante incluir no Programa de Matemática do Ensino Secundário assuntos como a lei dos senos e a fórmula de Heron.

Capítulo 1

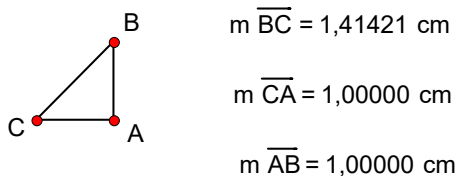
Dois Esquadros

Os estudantes de Desenho e Geometria Descritiva estão familiarizados com dois tipos de esquadros: uns têm um ângulo recto, um ângulo de 30° e um de 60° , enquanto que outros esquadros têm um ângulo recto e dois ângulos de 45° .

Vamos estudar em pormenor esses dois esquadros, isto é, vamos estudar duas classes de triângulos rectângulos. Começemos pelo triângulos rectângulos isósceles (aqueles que têm dois ângulos de 45°).

1.1 Triângulos rectângulos isósceles

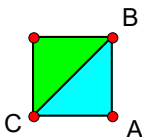
Exemplo 1 Consideremos um triângulo rectângulo em que os comprimentos dos dois catetos medem 1 cm.



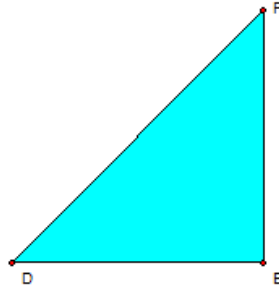
Então, $\overline{BC}^2 = 1^2 + 1^2$, donde se conclui que $\overline{BC} = \sqrt{2}$ (cm).

O perímetro do triângulo é $2 + \sqrt{2}$ (cm), enquanto que a sua área é $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \text{ cm}^2$, isto é, $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$.

Note-se que a área deste triângulo é metade da área dum quadrado com 1 cm de lado.



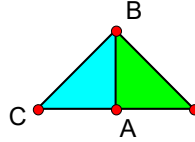
Consideremos, agora, um triângulo rectângulo em que os dois catetos medem x cm.



Este triângulo é semelhante ao anterior, sendo x a razão de semelhança.

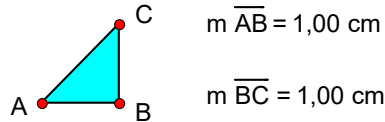
Então, a hipotenusa mede $x\sqrt{2}$ cm, o perímetro é $x(2 + \sqrt{2})$ cm, enquanto que a área é $\frac{1}{2}x^2$ cm².

Juntando dois triângulos iguais a um dos anteriores, podemos obter um quadrado ou um novo triângulo semelhante a esses dois.



A razão de semelhança entre um dos triângulos menores e o triângulo maior (da figura anterior) é $\sqrt{2}$.

Exemplo 2 Consideremos o cone que se obtém quando se roda um triângulo rectângulo isósceles em torno dum dos catetos. Vejamos como obter o volume, a área e a planificação do cone.



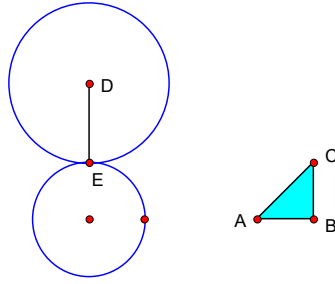
Se rodarmos o triângulo anterior, em torno da recta BC , obtemos um cone de revolução com 1 cm de altura e com uma base que é um círculo com 1 cm de raio. Então, o volume do cone é $\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 1$ cm³, ou seja, $\frac{\pi}{3}$ cm³.

É claro que a área da base é π cm².

A área lateral dum cone de revolução é o produto do semi-perímetro da base pela geratriz (que, neste caso, é a hipotenusa do triângulo gerador). Então, a área lateral do cone é $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 1 \times \sqrt{2}$ cm², ou seja, $\pi\sqrt{2}$ cm².

A área total do cone é $\pi\sqrt{2}$ cm² + π cm², ou seja, $\pi(1 + \sqrt{2})$ cm².

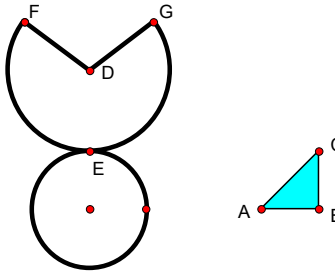
Vejamos como obter a planificação do cone (mais exactamente, será a planificação da fronteira do cone):



Note-se que a figura anterior ainda não é a planificação do cone, pois falta obter um sector circular correspondente à superfície lateral do cone.

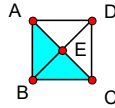
A circunferência maior tem raio $\sqrt{2}$ cm e pretendemos obter um arco cujo comprimento seja igual ao perímetro da circunferência menor. Seja α a amplitude desse arco. Então, $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{2\pi}$, donde vem $\alpha = \frac{360^\circ}{\sqrt{2}} \approx 254,558\,441\,2^\circ$.

Planificação (aproximada) do cone:



Se tivermos um triângulo rectângulo isósceles em que os catetos tenham x cm de comprimento; a área total do cone será $\pi x^2 (1 + \sqrt{2})$ cm², enquanto que o volume será $\frac{\pi}{3} x^3$ cm³.

Exemplo 3 Consideremos, agora, que se roda um triângulo rectângulo isósceles em torno da hipotenusa.

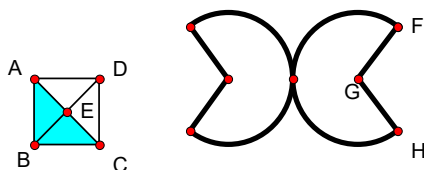


Neste caso, obtemos dois cones "colados" pelas bases. Esses dois cones são gerados por triângulos rectângulos isósceles em que os catetos medem $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm. Então, pelo exemplo anterior, o volume de cada cone é $\frac{\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$ cm³, ou seja, $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ cm³.

Logo, o volume total é $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ cm³.

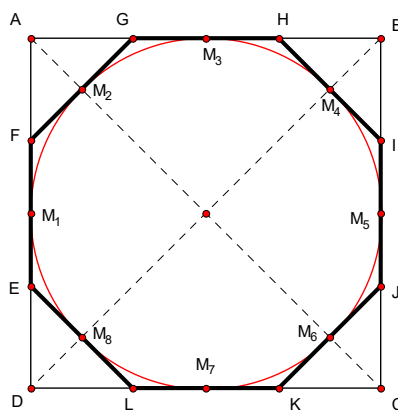
A área lateral de cada cone é $\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{2}$ cm², ou seja, $\frac{\pi}{2} \sqrt{2}$ cm², pelo que a área total do conjunto formado pelos dois cones é $\pi\sqrt{2}$ cm².

Quanto à planificação, note-se que, agora, não temos as bases, pelo que teremos, apenas, dois sectores circulares (de raio igual a 1 cm).



Exemplo 4 Consideremos um octógono regular de lado l e determinemos a sua área.

Consideremos um quadrado que contém quatro dos lados do octógono. Seja x o lado desse quadrado.



Relativamente à figura anterior, temos $\overline{AB} = x$ e $\overline{GH} = l$. Que relação existe entre l e x ?

Ora, $\overline{FG} = \overline{AG}\sqrt{2}$, donde vem $\overline{AG} = \frac{\overline{FG}}{\sqrt{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ e, por isso, $l + 2 \times \frac{l\sqrt{2}}{2} = x$.

Então, $x = l + l\sqrt{2} = l(1 + \sqrt{2})$. E, daqui vem

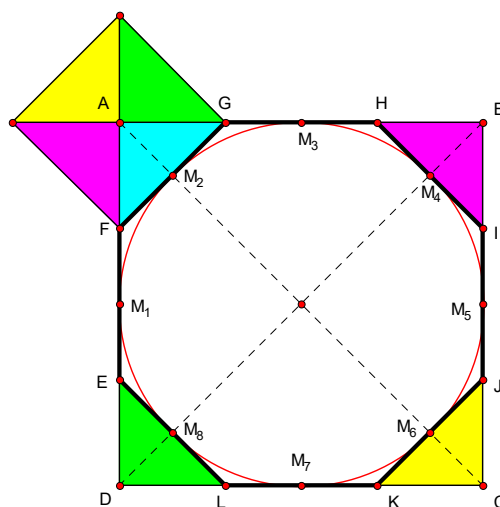
$$l = \frac{x}{\sqrt{2} + 1} = \frac{x(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = x(\sqrt{2} - 1)$$

Então, a área do quadrado é x^2 . Mas, $x^2 = l^2(1 + \sqrt{2})^2 = l^2(1 + 2 + 2\sqrt{2}) = l^2(3 + 2\sqrt{2})$.

A área de $[AGF]$ é $\frac{1}{2} \times \overline{AM_2} \times \overline{FG}$, ou seja, $\frac{1}{2} \times l \times \frac{l}{2}$. Então, a área do octógono é a diferença entre a área do quadrado $[ABCD]$ e o quádruplo da área de $[AGF]$. Então,

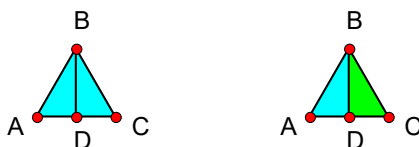
$$A_{\text{oct}} = l^2(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \times \frac{1}{2} \times l \times \frac{l}{2} = l^2(3 + 2\sqrt{2}) - l^2 = l^2(2 + 2\sqrt{2}) = 2l^2(1 + \sqrt{2})$$

Observe-se que a área do octógono de lado l é a diferença entre a área do quadrado de lado $l(1 + \sqrt{2})$ e a área do quadrado de lado l , conforme podemos ver na figura seguinte:



1.2 Triângulos rectângulos com um ângulo de 30°

Começemos por referir que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° (as amplitudes dos ângulos é que medem 60°). Se traçarmos uma altura desse triângulo, obtemos dois triângulos cujos ângulos internos medem 30° , 60° e 90° .



Exemplo 5 Consideremos um triângulo equilátero com 1 cm de lado (ver figura anterior).

Então, $\overline{BC} = 1$ cm, $\overline{DC} = 1$ cm e, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{BD} = \sqrt{2}$ cm.

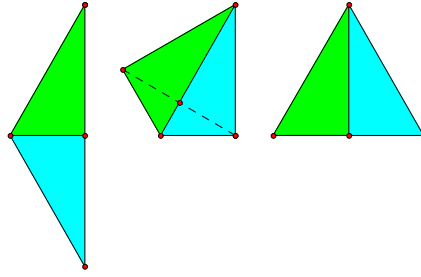
Então, a área de $[ABD]$ mede $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$, ou seja, $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2$.

Logo, a área dum triângulo equilátero de lado 1 cm é $\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

E, por semelhança, concluímos que a área dum triângulo equilátero de lado l é $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

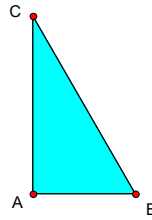
Note-se que as áreas das três figuras seguintes são iguais, uma vez que cada uma delas é formada por dois triângulos e todos os seis triângulos são iguais, tendo-se que cada um deles tem um ângulo de 30° e outro de 60° .

Note-se que a figura da esquerda é um triângulo em que os ângulos internos medem 30° , 30° e 120° , enquanto que a segunda figura é um quadrilátero com dois ângulos rectos, um ângulo de 60° e um ângulo de 120° .



Note-se que a figura da esquerda é um triângulo em que os ângulos internos medem 30° , 30° e 120° .

Estudemos, com mais pormenor, os triângulos rectângulos que têm um ângulo de 30° :

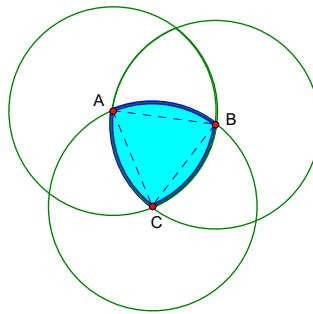


Se $\overline{BC} = x$, então $\overline{AB} = \frac{x}{2}$ e $\overline{AC} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, tendo-se que a área de $[ABC]$ é $\frac{x^2\sqrt{3}}{8}$, enquanto que o perímetro é $\frac{3x}{2} + \frac{x\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $\frac{x}{2}(3 + \sqrt{3})$.

Se $\overline{AB} = y$, então $\overline{BC} = 2y$ e $\overline{AC} = y\sqrt{3}$, tendo-se que a área de $[ABC]$ é $\frac{(2y)^2\sqrt{3}}{8} = y^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, enquanto que o perímetro é $3y + y\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})y$.

Se $\overline{AC} = z$, então $\overline{AB} = \frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{z\sqrt{3}}{3}$ e $\overline{BC} = \frac{2z}{\sqrt{3}} = \frac{2z\sqrt{3}}{3}$, tendo-se que a área de $[ABC]$ é $\left(\frac{2z}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{6}z^2\sqrt{3}$, enquanto que o perímetro é $z + \frac{z\sqrt{3}}{3} + \frac{2z\sqrt{3}}{3} = z + z\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})z$.

Exercício 6 Na figura seguinte temos três circunferências: uma de centro A e que passa por B , outra de centro B e que passa por A e uma terceira de centro C e que passa por A . O ponto C é a intersecção das duas primeiras circunferências. Além disso, temos $\overline{AB} = 2$ cm.



Determine \widehat{ABC} , a área de $[ABC]$ e a área da região a azul (semelhante ao emblema da Lancia).

Resolução

É claro que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 2\text{ cm}$, pelo que $[ABC]$ é um triângulo equilátero. Então, $\widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{ACB} = 60^\circ$.

Logo, os arcos AB , BC e AC são iguais, sendo de 60° as suas amplitudes.

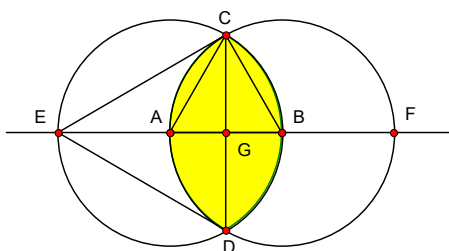
A área de $[ABC]$ é $\frac{2^2}{4}\sqrt{3}\text{ cm}^2 = \sqrt{3}\text{ cm}^2$.

A área do sector circular correspondente ao arco AB é um sexto da área do círculo, ou seja, $\frac{4\pi}{6}\text{ cm}^2$ ou $\frac{2\pi}{3}\text{ cm}^2$.

A área do segmento circular correspondente ao arco AB é $\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)\text{ cm}^2$.

Logo, a área da região azul é $3\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\text{ cm}^2$, ou seja, $(2\pi - 2\sqrt{3})\text{ cm}^2$.

Exercício 7 Na figura seguinte temos uma circunferência de centro A e que passa por B e uma circunferência de centro B e que passa por A . Os pontos C e D pertencem às duas circunferências, enquanto que o ponto E é a intersecção de recta AB com uma das circunferências. Além disso, temos $\overline{AB} = 2\text{ cm}$ enquanto que G é a intersecção das rectas AB e CD .



Determine:

- As amplitudes \widehat{CAB} e \widehat{CEB} .
- \overline{CG} e \overline{EC} .
- A área da região a amarelo

Resolução

- $\widehat{CAB} = 60^\circ$, porque $[ABC]$ é um triângulo equilátero.

$$\widehat{CEB} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \text{ (ângulo inscrito num arco de } 60^\circ \text{)}.$$

- $\overline{AG} = 1\text{ cm}$ e $\overline{CG} = \sqrt{3}\text{ cm}$. Logo, $\overline{EC} = \overline{CD} = 2\sqrt{3}\text{ cm}$, porque $[CDE]$ é um triângulo equilátero, uma vez que os arcos CD , DE e EC são iguais.

- A área da região a amarelo é o dobro da área do segmento circular correspondente a um arco de 120° (o arco CBD , por exemplo).

$$\text{A área de } [ECD] \text{ é } \frac{3 \times 2\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2, \text{ ou seja, } 3\sqrt{3}\text{ cm}^2.$$

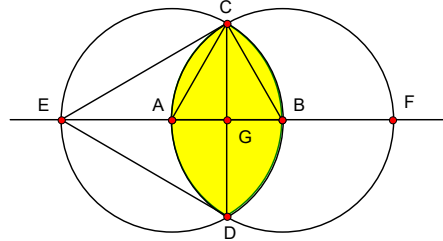
$$\text{A área de cada um dos círculos é } 4\pi\text{ cm}^2.$$

A diferença entre as duas áreas anteriores é $(4\pi - 3\sqrt{3})\text{ cm}^2$, sendo que essa área é o triplo da área do segmento circular correspondente ao arco CBD (por exemplo).

Então, a área do segmento circular limitado pela corda $[CD]$ e pelo arco CBD é um terço de $(4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$, ou seja, $(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

Então, a área a amarelo é o dobro da área anterior, ou seja, $(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

Outra maneira:



A área da região a amarelo é a soma do dobro da área de $[ABC]$ com o quádruplo da área do segmento circular correspondente ao arco AC .

A área de $[ABC]$ é $\frac{2 \times \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$, ou seja, $\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A área do segmento circular, correspondente ao arco CB , é $\frac{4}{6}\pi \text{ cm}^2 - \sqrt{3} \text{ cm}^2 = (\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

Então, a área pretendida é $(2\sqrt{3} + 4 \times (\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3})) \text{ cm}^2 = (\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

Ainda outra maneira possível

Podíamos calcular a área do losango $[ACBD]$: $\frac{2\sqrt{3} \times 2}{2} \text{ cm}^2$, ou seja, $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

E, depois, calculávamos o quádruplo da área de um dos segmentos circulares correspondentes a arcos de 60° :

$$4 \times \left(\frac{4\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{2} \right) \text{ cm}^2 = \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} \right) \text{ cm}^2$$

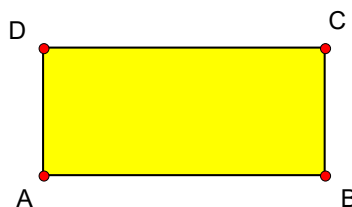
Por fim, a área da região a amarelo é a soma das duas áreas

$$\left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \right) \text{ cm}^2 = \left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \right) \text{ cm}^2$$

Capítulo 2

Perímetros e Áreas de Figuras Planas

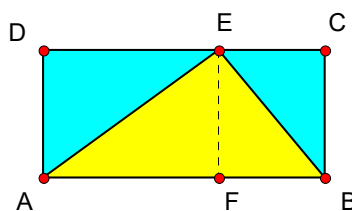
1. Área dum rectângulo



$$A = \text{base} \times \text{altura} = \overline{AB} \times \overline{BC}$$

Representando a base por b e a altura por h , temos $A_{\text{rectângulo}} = bh$.

2. Área dum triângulo

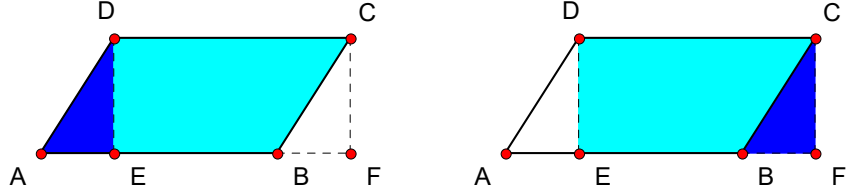


$$\text{A área do triângulo } [ABE] \text{ é dada por } A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{EF}}{2}.$$

Note-se que a área do triângulo $[ABE]$ é metade da área do rectângulo $[ABCD]$.

Representando a base por b e a altura por h , temos $A_{\text{triângulo}} = \frac{bh}{2}$.

3. Área dum paralelogramo

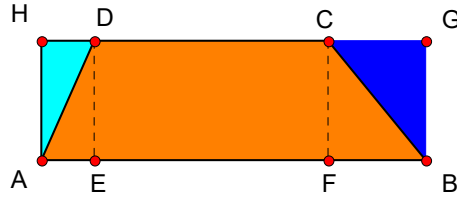


Como os triângulos $[ADE]$ e $[BCF]$ são iguais, têm a mesma área. Então, a área do paralelogramo $[ABCD]$ é igual à área do rectângulo $[CDEF]$. Então, a área dum paralelogramo é dada por

$$A = \text{base} \times \text{altura} = \overline{DC} \times \overline{DE} = \overline{AB} \times \overline{DE}$$

Representando a base por b e a altura por h , temos $A_{\text{paralelogramo}} = bh$.

4. Área dum trapézio

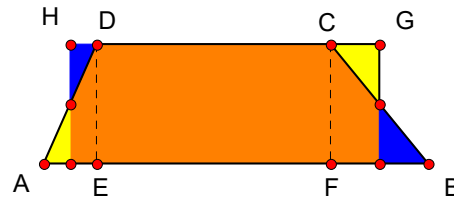


A área do trapézio $[ABCD]$ é igual à área do rectângulo $[ABGH]$ subtraída das áreas dos triângulos $[ADH]$ e $[BCG]$. Também pode ser calculada pela soma da área do rectângulo $[CDEF]$ com as áreas dos triângulos $[ADE]$ e $[BCF]$.

Então, a área do trapézio $[ABCD]$ é

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{DE} - \frac{1}{2} \overline{DE} \times \overline{HD} - \frac{1}{2} \overline{DE} \times \overline{CG} &= \left(\frac{2 \times \overline{AB} - \overline{HD} - \overline{CG}}{2} \right) \times \overline{DE} \\ &= \left(\frac{\overline{AB} + \overline{HG} - \overline{HD} - \overline{CG}}{2} \right) \times \overline{DE} \\ &= \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{DE} \end{aligned}$$

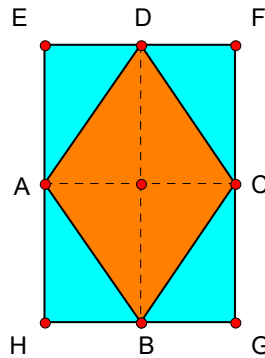
Representando a base maior por B , a base menor por b e a altura por h , temos que a área do trapézio é dada por $A_{\text{trapézio}} = \frac{B+b}{2} \times h$.



Na figura anterior, podemos ver que a área dum trapézio é igual à área dum rectângulo com a mesma altura e cuja base é igual à mediana do trapézio (segmento que une os pontos médios dos dois lados não paralelos).

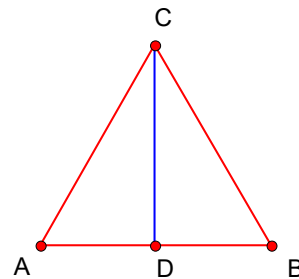
5. Área dum losango

A área dum losango é metade da área do rectângulo cujas bases são iguais às diagonais do losango. Então, $A_{\text{losango}} = \frac{D \times d}{2}$, onde D é a diagonal maior e d é a diagonal menor (do losango).



6. Área dum polígono regular de n lados

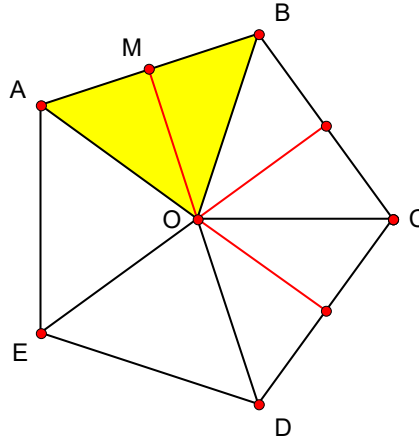
- A área dum triângulo equilátero de lado l (ver figura) é dada pelo semi-produto da base pela altura, isto é, $A = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2}$. No entanto, a altura depende do lado, podendo ser determinada em função do lado l . Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[ACD]$, temos



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \iff l^2 - \frac{l^2}{4} = h^2 \iff \frac{3l^2}{4} = h^2 \iff h = \pm \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Como $h > 0$, vem $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Então, a área dum triângulo equilátero de lado l é $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

- É claro que a área dum quadrado de lado l é l^2 .
- A área dum pentágono regular de lado l (ver figura) é o quádruplo da área dum triângulo de base l e cuja altura h (apótema do pentágono) depende de l .



- Então, $A_{\text{pentágono regular}} = \frac{5lh}{2} = \frac{P}{2} \times h$, onde P é o perímetro do pentágono e h é o apótema. Para determinar h , em função de l , são necessários conhecimentos de Trigonometria.
- No caso dum polígono regular de n lados, com $n \geq 5$, temos exactamente a mesma fórmula:

$$A_{\text{polígono regular}} = \frac{P}{2} \times h$$

onde P é o perímetro do polígono e h é o apótema.

Observe-se que não é costume falar em apótema dum triângulo equilátero nem de apótema dum quadrado, embora tal pudesse ser feito.

7. Área dum círculo

A área dum círculo de raio R é πR^2 .

Observação sobre o valor de π

Apresentamos alguns valores aproximados de π :

1. $\pi \approx 3$ (valor referido na Bíblia)
2. $\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3,142\,857\,143$ (valor referido por Arquimedes)
3. $\pi \approx \frac{333}{106} \approx 3,141\,509\,434$ (valor conhecido por Antoniszoon?)

4. $\pi \approx \frac{355}{113} \approx 3,141\,592\,92$ (valor divulgado por Metz)
5. $\pi \approx \frac{103\,993}{33\,102} \approx 3,141\,592\,653$ (valor conhecido por Antoniszoon?)

Valor de π com 9 casas decimais: $\pi \approx 3,141\,592\,654$.

Metz divulgou, para π , o valor de $\frac{355}{113}$. Este valor foi encontrado por seu pai, Antoniszoon, que também conheceria, para valor de π , a fracção $\frac{333}{106}$ e, talvez, $\frac{103\,993}{33\,102}$.

Supõe-se que Antoniszoon terá usado o algoritmo das fracções contínuas para encontrar $\frac{355}{113}$, já que é pouco provável que tenha obtido esse valor por experimentação. Se, de facto, ele usou o algoritmo das fracções contínuas, de certeza que conhecia o valor aproximado $\frac{333}{106}$, uma vez que esse valor é obtido no passo anterior à obtenção de $\frac{355}{113}$. Segue-se o cálculo de alguns valores aproximados de π , usando o algoritmo das fracções contínuas e utilizando, nos cálculos, 12 casas decimais:

<div> <div>F1 Tools</div> <div>F2</div> <div>F3</div> <div>F4</div> <div>F5 Pr3mID</div> <div>F6</div> </div> <div> <div>ClrHome</div> <div>Done</div> <div>3.14159265359</div> <div>1</div> <div>3.1415926535898 - int(3.1)</div> <div>7.06251330593</div> <div>1/(ans(1)-int(ans(1)))</div> <div>MAIN RAD APPROX FUNC 2/30</div> </div>	<div> <div>F1 Tools</div> <div>F2 R13ebrq</div> <div>F3 Calc</div> <div>F4 Dther</div> <div>F5 Pr3mID</div> <div>F6 Clean Up</div> </div> <div> <div>1</div> <div>7.0625133059307 - int(7.0)</div> <div>15.9965944068</div> <div>1</div> <div>15.996594406774 - int(15.)</div> <div>1.00341723092</div> <div>1/(ans(1)-int(ans(1)))</div> <div>MAIN RAD APPROX FUNC 5/30</div> </div>	<div> <div>F1 Tools</div> <div>F2 R13ebrq</div> <div>F3 Calc</div> <div>F4 Dther</div> <div>F5 Pr3mID</div> <div>F6 Clean Up</div> </div> <div> <div>1</div> <div>1.0034172309245 - int(1.0)</div> <div>292.634598625</div> <div>1</div> <div>292.634598625 - int(292.6)</div> <div>1.57579919118</div> <div>1/(ans(1)-int(ans(1)))</div> <div>MAIN RAD APPROX FUNC 7/30</div> </div>
---	---	---

Logo,

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a_n	3	7	15	1	292	1
p_n	0	1	3	22	333	355	103 993	104 348
q_n	1	0	1	7	106	113	33 102	33 215
$\frac{p_n}{q_n}$	3	$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{103\,993}{33\,102}$	$\frac{104\,348}{33\,215}$

Note-se que $\begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix} = a_n \begin{bmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{n-2} \\ q_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{bmatrix}$.

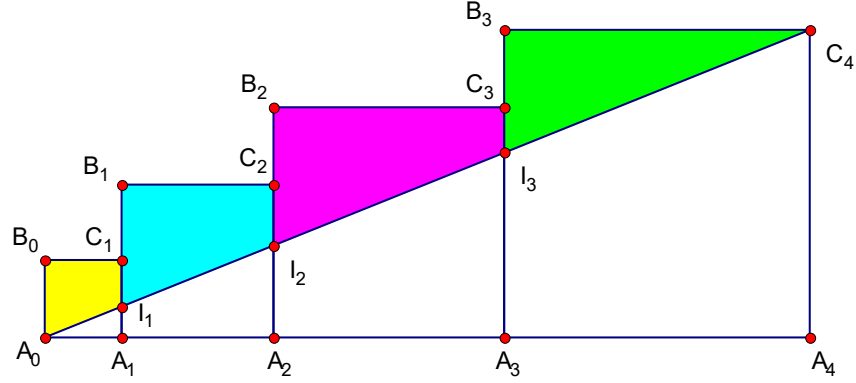
Valores aproximados de π :

$$\frac{22}{7} \approx 3,142\,857\,143, \quad \frac{333}{106} \approx 3,141\,509\,434, \quad \frac{355}{113} \approx 3,141\,592\,92$$

$$\frac{103\,993}{33\,102} \approx 3,141\,592\,653, \quad \frac{104\,348}{33\,215} \approx 3,141\,592\,654$$

Exercício 8 Calcule a área de cada uma das quatro figuras coloridas da figura seguinte, sabendo que $[A_0B_0C_1A_1]$, $[A_1B_1C_2A_2]$, $[A_2B_2C_3A_3]$ e $[A_3B_3C_4A_4]$ são quatro quadrados de lados 1 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm, respectivamente.

E se tivermos n quadrados em vez de 4 quadrados, qual é a área de toda a zona colorida?

**Resolução**

Começemos por notar que, na figura anterior, $[A_0A_1I_1]$, $[A_0A_2I_3]$, $[A_0A_3I_3]$ e $[A_0A_4C_4]$ são triângulos semelhantes.

1. Área do trapézio $[A_0B_0C_1I_1]$:

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_1I_1}} = \frac{1+2+3+4}{4} \Rightarrow \frac{1}{\overline{A_1I_1}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \overline{A_1I_1} = \frac{2}{5}$$

Então, a área de $[A_0B_0C_1I_1]$ é $\frac{1+\frac{3}{5}}{2} \times 1 \text{ cm}^2 = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$

2. Área do trapézio $[I_1B_1C_2I_2]$:

$$\frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{A_2I_2}} = \frac{10}{4} \Rightarrow \frac{3}{\overline{A_2I_2}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \overline{A_2I_2} = \frac{6}{5}$$

Então, $\overline{C_2I_2} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$, pelo que a área de $[I_1B_1C_2I_2]$ é $\frac{\frac{3}{5} + 1 + \frac{4}{5}}{2} \times 2 \text{ cm}^2 = \frac{12}{5} \text{ cm}^2$.

3. Área do trapézio $[I_2B_2C_3I_3]$:

$$\frac{\overline{A_0A_3}}{\overline{A_3I_3}} = \frac{10}{4} \Rightarrow \frac{6}{\overline{A_3I_3}} = \frac{5}{2} \Rightarrow \overline{A_3I_3} = \frac{12}{5}$$

Então, $\overline{C_3I_3} = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$, pelo que a área de $[I_2B_2C_3I_3]$ é $\frac{\frac{4}{5} + 1 + \frac{3}{5}}{2} \times 3 \text{ cm}^2$, ou seja, $\frac{18}{5} \text{ cm}^2$.

4. A área do triângulo $[I_3B_3C_4]$ é $\frac{\frac{3}{5} + 1}{2} \times 4 \text{ cm}^2 = \frac{16}{5} \text{ cm}^2$.

5. A área total da zona colorida é de $\frac{4}{5} \text{ cm}^2 + \frac{12}{5} \text{ cm}^2 + \frac{16}{5} \text{ cm}^2 + \frac{18}{5} \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$.

Note-se que a área do triângulo $[A_0A_4C_4]$ é $\frac{10 \times 4}{2} \text{ cm}^2$, ou seja, 20 cm^2 .

E, a área total dos quatro quadrados é $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \text{ cm}^2$, ou seja, 30 cm^2 .

Logo, a área da zona colorida é $30 \text{ cm}^2 - 20 \text{ cm}^2$, ou seja, 10 cm^2 , como se obteve anteriormente.

6. Se tivermos n quadrados, a área do triângulo $[A_0A_nC_n]$ é dada por

$$\frac{\sum_{k=1}^n k}{2} \times n = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{2} \times n = \frac{n^2(n+1)}{4}$$

E, a área dos n quadrados é dada por

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7. Então, a área colorida será

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)}{4} &= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n^2(n+1)}{12} \\ &= \frac{(n+1)[2n(2n+1) - 3n^2]}{12} \\ &= \frac{(n+1)(4n^2 + 2n - 3n^2)}{12} \\ &= \frac{(n+1)(n^2 + 2n)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{12} \end{aligned}$$

Note-se que, a figura inicial corresponde ao caso $n = 4$.

Então, substituindo n por 4, temos $\frac{4 \times 5 \times 6}{12} = 10$.

8. Área do trapézio $[A_0B_0C_1I_1]$, no caso de n quadrados:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_1I_1}} &= \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} \implies \frac{1}{\overline{A_1I_1}} = \frac{n(n+1)}{2n} \\ &\implies \overline{A_1I_1} = \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

Então, a área de $[A_0B_0C_1I_1]$ é $\frac{1 + 1 - \frac{2}{n+1}}{2} \times 1 \text{ cm}^2 = \frac{2n+2-2}{2n+2} \text{ cm}^2 = \frac{n}{n+1} \text{ cm}^2$. No exercício inicial, tínhamos $n = 4$, pelo que a área de $[A_0B_0C_1I_1]$ é $\frac{4}{5} \text{ cm}^2$, que é o valor

anteriormente obtido. Também podíamos calcular a área do trapézio $[A_0B_0C_1I_1]$ por $1 - \frac{\frac{2}{n+1}}{2} \times 1 = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, o que corresponde a achar a diferença entre a área do quadrado $[A_0B_0C_1A_1]$ e a área do triângulo $[A_0A_1I_1]$.

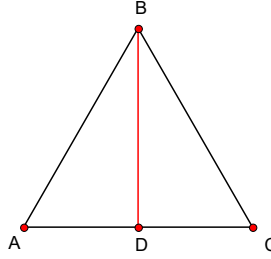
9. Observe-se que a última figura colorida é um triângulo semelhante ao triângulo $[A_0A_nC_n]$. Seja x , a base desse triângulo colorido. Então,

$$\frac{n}{x} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} \iff \frac{n}{x} = \frac{n(n+1)}{2n} \iff \frac{1}{x} = \frac{n+1}{2n} \iff x = \frac{2n}{n+1}$$

Logo, a área do triângulo colorido é $\frac{2n}{n+1} \times n \times \frac{1}{2} = \frac{n^2}{n+1}$.

Exemplo 9 *Um triângulo para mais tarde recordar*

Consideremos um triângulo equilátero $[ABC]$, de lado uma unidade, no qual se traçou a altura $[BD]$:



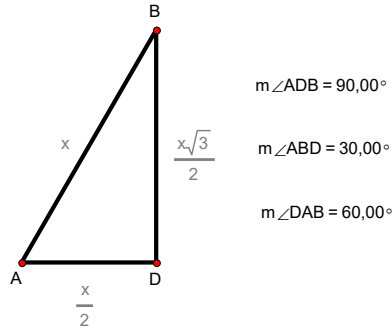
Então, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 1$ e $\overline{AD} = \frac{1}{2}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se tivermos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = x$, então, por semelhança, virá $\overline{AD} = \frac{x}{2}$ e $\overline{BD} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Finalmente, temos que a área dum triângulo equilátero de lado x é $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ unidades de área.

Então, a área do triângulo $[ABD]$, da figura, é $\frac{x^2\sqrt{3}}{8}$ unidades de área.

Note-se que temos um objecto de uso corrente que deve servir de imagem para o que acabámos de afirmar: o esquadro de 30° .



Exercício 10 Um operário de construção civil pretende transportar três tubos cilíndricos iguais e com 30 centímetros de diâmetro. Antes do transporte vai colocar fita-cola à volta dos tubos, na parte superior e na parte inferior, de modo a que os tubos formem um único volume. O operário coloca a fita perpendicularmente às geratrizes dos tubos, os quais ficam tangentes uns aos outros. Qual o comprimento mínimo de fita a colocar, de modo a que a fita dê uma volta completa ao volume?

Resolução

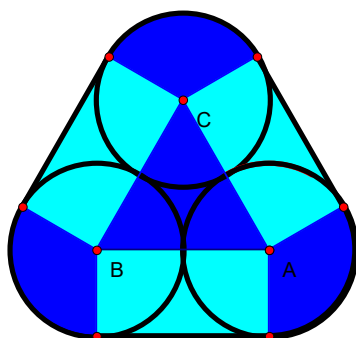
Os centros das circunferências definem um triângulo equilátero com 30 cm de lado.

A parte do tubo onde é colada a fita corresponde a um terço da circunferência já que temos $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Logo, o comprimento da fita é $(3 \times 30 + 3 \times \frac{30\pi}{3})$ cm, ou seja, $(90 + 30\pi)$ cm.

Uma questão interessante consiste em determinar a área da figura anterior:

Para obtermos um resultado mais geral, suponhamos que as circunferências têm raio R . Então, a área de cada rectângulo é $2R^2$, a área dos três sectores circulares é πR^2 , faltando determinar a área do triângulo equilátero de lado $2R$. A altura do triângulo é $R \tan \frac{\pi}{3} = R\sqrt{3}$, pelo que a sua área é $2R \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}$. Então, a área total é $3 \times 2R^2 + \pi R^2 + R^2\sqrt{3}$, ou seja, $(6 + \pi + \sqrt{3}) R^2$.



É claro que podíamos ter calculado a área do triângulo equilátero de lado $2R$, aplicando a fórmula do exemplo anterior:

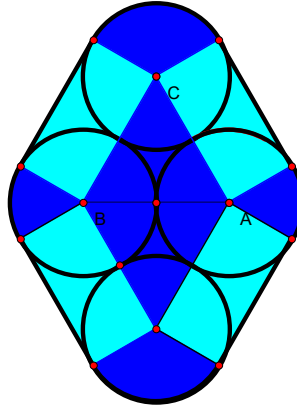
$$A = \frac{(2R)^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \sqrt{3}$$

No caso em que $R = 15$ cm, teremos que a área da figura é de $(6 + \pi + \sqrt{3}) 15^2$ cm², ou seja, $(1350 + 225\pi + 225\sqrt{3})$ cm².

E se em vez de três tubos tivermos quatro tubos?

Com quatro tubos, há muitas maneiras de colocá-los:

1º caso:

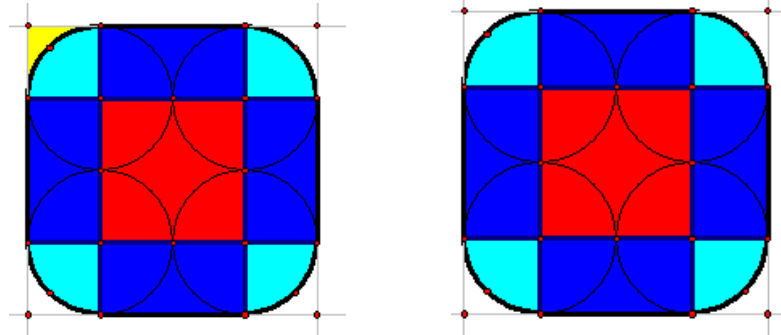


Neste caso, temos que o comprimento da fita é $8R + 2\pi R$, uma vez que a soma dos comprimentos dos quatro arcos onde se cola a fita é igual ao comprimento de uma circunferência (temos dois arcos de 120° e dois arcos de 60° , conforme é fácil de verificar).

Quanto à área, temos quatro rectângulos de área $2R^2$ cada um, quatro sectores circulares cuja área total é igual à área dum círculo, ou seja, πR^2 e dois triângulos equiláteros de área $R^2\sqrt{3}$, cada um.

Então a área total é $8R^2 + \pi R^2 + 2R^2\sqrt{3}$, isto é, $(8 + \pi + 2\sqrt{3}) R^2$.

2º caso:



Neste caso, temos que o comprimento da fita é $8R + 2\pi R$, valor este que é o mesmo do caso anterior.

A área da região a amarelo é $R^2 - \frac{\pi R^2}{4}$, pelo que a área total da figura limitada pela fita é $16R^2 - 4 \times \left(R^2 - \frac{\pi R^2}{4}\right)$, ou seja, $12R^2 + \pi R^2$.

Ora, $8 + \pi + 2\sqrt{3} \approx 14,6$ e $12 + \pi \approx 15,1$. Então, a área é menor no caso anterior.

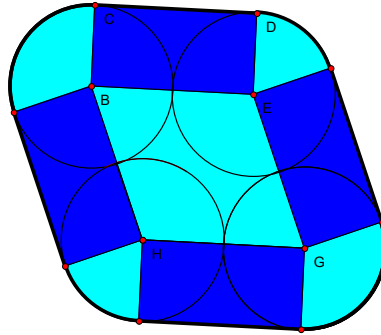
Note-se que a área anterior pode ser calculada, somando as áreas do quadrado ($4R^2$), dos rectângulos azuis ($4 \times 2R^2$) e dos quatro quartos de círculo (πR^2), obtendo-se $12R^2 + \pi R^2$, como anteriormente.

Moral da história: Para armazenar pacotes de quatro garrafas, é melhor que os pacotes tenham a forma da figura do 1º caso. No entanto, isso pode não ser verdade, por causa dos

"desperdícios". Assim, se estivermos a armazenar os pacotes numa sala quadrada, vamos ter zonas da sala desaproveitadas. No caso das salas quadradas (ou rectangulares), os pacotes "quadrados" não provocam tantos "desperdícios". Um pacote "quadrado" colocado num canto da sala (num dos vértices...), quase não provoca desperdício.

Entre as duas posições referidas (os dois casos), há muitos casos intermédios.

Casos intermédios:



Em todos os casos, o comprimento da fita é igual a $8R + 2\pi R$. A área é mínima, quando obtemos uma figura análoga à do primeiro caso e é máxima, quando o losango $[BEGH]$ se transforma num quadrado.

E se tivermos cinco tubos dispostos regularmente?

O perímetro (comprimento da fita) é $10R + 2\pi R$, conforme pode verificar na figura da página seguinte.

A área é $10R^2 + \pi R^2 + A(5, 2R)$, onde $A(5, 2R)$ representa a área dum pentágono regular cujos lados têm comprimento R .

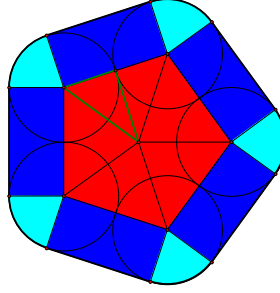
O pentágono vermelho da figura anterior pode ser dividido em cinco triângulos iguais. Cada um desses triângulos tem um lado de comprimento $2R$, um ângulo de 72° e dois ângulos de 54° .

Unindo o centro do pentágono com o ponto médio de um dos seus lados, obtemos um triângulo rectângulo em que um dos catetos tem comprimento R , o outro cateto (o apótema do pentágono) tem comprimento x e o ângulo desse triângulo com vértice no centro do pentágono tem amplitude 36° . Então, $\tan 36^\circ = \frac{R}{x}$, donde vem $x = \frac{R}{\tan 36^\circ}$.

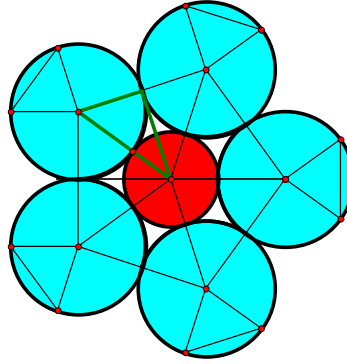
Ora, $\tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, pelo que $x = \frac{R}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$.

Então, a área do pentágono é $5R \times \frac{R}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$, ou seja, $\frac{5R^2}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$.

Logo, a área da figura limitada pela fita é de $10R^2 + \pi R^2 + \frac{5R^2}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$.



Exercício 11 Com base nos resultados anteriores determine a área dos seis círculos da figura seguinte, sabendo que os centros dos cinco círculos exteriores definem um pentágono regular e que duas circunferências consecutivas são tangentes (e a circunferência interior é tangente às outras cinco).



Resolução

Apenas falta determinar r , o raio do círculo interior. Já vimos que os catetos do triângulo verde medem $\frac{R}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$ e R .

Então, representando a hipotenusa por y , temos

$$\begin{aligned} y^2 = R^2 + \frac{R^2}{5-2\sqrt{5}} &\iff y^2 = \frac{(6-2\sqrt{5})R^2}{(5-2\sqrt{5})} \iff y^2 = \frac{(6-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})R^2}{(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})} \\ &\iff y^2 = \frac{(10+2\sqrt{5})R^2}{5} \iff y^2 = \frac{(50+10\sqrt{5})R^2}{25} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } y = \frac{R\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5}. \text{ Então, } r = \frac{R\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5} - R = \left(\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5} - 1 \right) R.$$

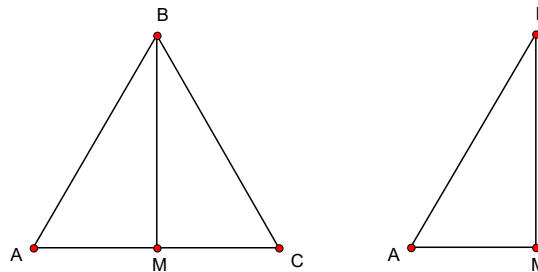
Então, a área dos seis círculos é

$$\begin{aligned}
 5\pi R^2 + \pi \left(\frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{5} - 1 \right)^2 R^2 &= \pi R^2 \left(\frac{50 + 10\sqrt{5}}{25} - 2 \frac{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{5} + 1 \right) \\
 &= \pi R^2 \left(2 + \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}} + 1 \right) \\
 &= \pi R^2 \left(3 + \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{2}{5} \sqrt{50 + 10\sqrt{5}} \right)
 \end{aligned}$$

Dois triângulos a fixar

Vejamos com mais pormenor o triângulo equilátero e o triângulo de ângulos 30° , 60° e 90° .

Consideremos um triângulo equilátero $[ABC]$, de lado l . Seja M o ponto médio de $[AC]$.



Então, $\overline{AM} = \overline{MC}$. Mas, $\overline{AB} = \overline{BC} = l$ e $[BM]$ é um lado comum aos dois triângulos $[ABM]$ e $[BCM]$. Logo, os dois triângulos $[ABM]$ e $[BCM]$ são geometricamente iguais. Então, $\widehat{AMB} = \widehat{CMB}$, pelo que temos $\widehat{AMB} = \widehat{CMB} = 90^\circ$, porque $\widehat{AMC} = 180^\circ$.

Então, $\widehat{ABM} = \widehat{MCB} = 30^\circ$. Mas, $\overline{AM} = \overline{MC} = \frac{l}{2}$.

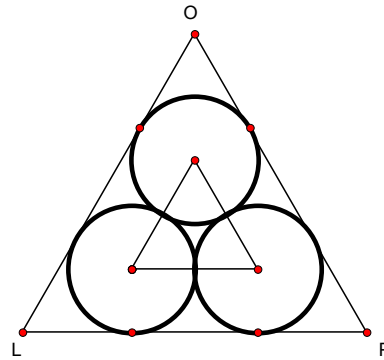
Ora, $\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{AB}^2$, pelo que $\overline{BM}^2 + \frac{l^2}{4} = l^2$. Logo, $\overline{BM}^2 = \frac{3l^2}{4}$.

Logo, $\overline{BM} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, uma vez que $\overline{BM} > 0$. Então, $\overline{BM} = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2}\sqrt{3} = \overline{AM}\sqrt{3}$.

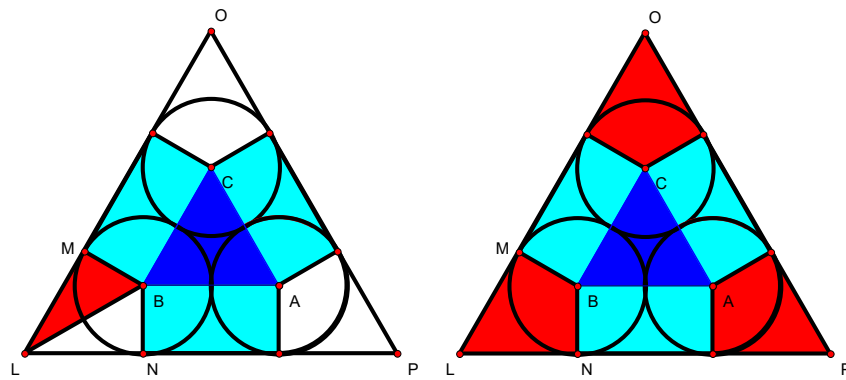
Então, num triângulo rectângulo que tenha um ângulo de 30° , a hipotenusa é o dobro do cateto menor e o cateto maior é o produto de $\sqrt{3}$ pelo cateto menor.

A área do triângulo $[ABC]$, de lado l , é $\frac{l}{2} \times \frac{l}{2}\sqrt{3}$, isto é, $\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$, enquanto que a área de $[ABM]$ é $\frac{l^2}{8}\sqrt{3}$.

Exercício 12 Considere três circunferências de raio R , tangentes duas a duas, como nas figuras seguintes. Considere o triângulo $[LPO]$ definido por tangentes comuns a duas circunferências. Qual a área deste triângulo?



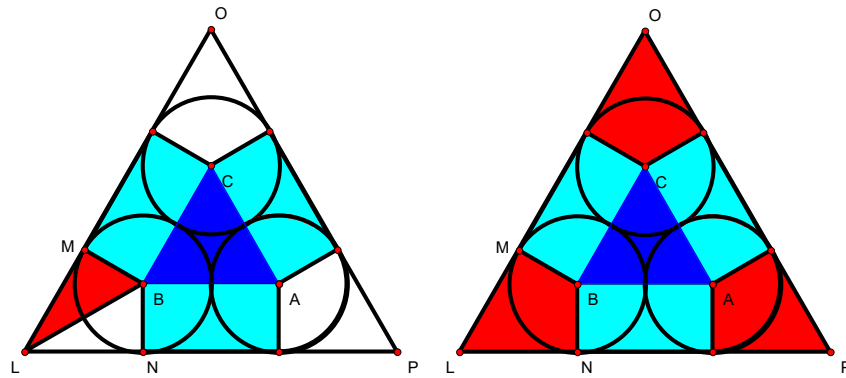
Resolução



Consideremos as duas figuras anteriores. A área do triângulo $[ABC]$, de lado $2R$, é $4 \times \frac{R^2}{4}\sqrt{3}$, ou seja, $R^2\sqrt{3}$. A área dos três retângulos azuis é $3 \times 2R^2$, ou seja, $6R^2$.

Como $\overline{ML} = \overline{MB}\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, a área do triângulo $[BML]$ é $R^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, pelo que a área do quadrilátero $[BMLN]$ é $R^2\sqrt{3}$.

Então, a área de $[LPO]$ é $R^2\sqrt{3} + 6R^2 + 3R^2\sqrt{3}$, ou seja, $(6 + 4\sqrt{3})R^2$.

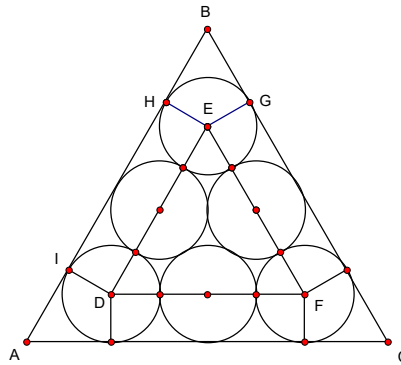


Segunda resolução

Cada quadrilátero vermelho tem a mesma área que o triângulo equilátero azul. E a área de cada retângulo azul claro é $2R^2$.

Então, a área de $[LPO]$ é $6R^2 + 4 \times \frac{4R^2}{4}\sqrt{3}$, ou seja, $6R^2 + 4R^2\sqrt{3}$.

Exercício 13 Considere seis circunferências de raio R , como nas figuras seguintes. Considere o triângulo $[ABC]$ definido por tangentes comuns a duas circunferências. Qual a área deste triângulo?



Resolução

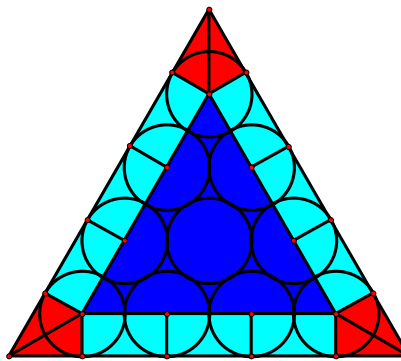
$$\text{Área de } [DEF]: \frac{(4R)^2 \sqrt{3}}{4} = 4R^2\sqrt{3}$$

$$\text{Área de } [BGEH]: \frac{(2R)^2 \sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$

$$\text{Área de } [DEHI]: 4R^2$$

$$\text{Área de } [ABC]: 4R^2\sqrt{3} + 3R^2\sqrt{3} + 12R^2 = 7R^2\sqrt{3} + 12R^2 = R^2(12 + 7\sqrt{3})$$

Exercício 14 Considere dez circunferências de raio R , como nas figuras seguintes. Considere o triângulo $[LPO]$ definido por tangentes comuns a duas circunferências. Qual a área deste triângulo?



Na figura anterior temos três rectângulos de área $6R^2$, um triângulo equilátero de lado $6R$ e seis triângulos de ângulos 30° , 60° e 90° .

A área do triângulo equilátero é $\frac{(6R)^2\sqrt{3}}{4}$, ou seja, $9R^2\sqrt{3}$ (unidades de área).

A área de cada quadrilátero vermelho é o dobro da área dum triângulo de base $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ e altura R , ou seja, a área de cada quadrilátero vermelho é igual à área dum triângulo equilátero de lado $2R$, ou seja, $R^2\sqrt{3}$.

Então, A_T , a área total da figura é

$$A_T = 3 \times 6R^2 + 9R^2\sqrt{3} + 3R^2\sqrt{3} = 18R^2 + 12R^2\sqrt{3}$$

Exercício 15 *E se tivermos $\frac{n(n+1)}{2}$ circunferências?*

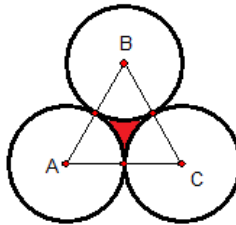
No caso geral, teremos três rectângulos de área $(2n-2)R^2$, um triângulo equilátero de lado $(2n-2)R$ e três quadriláteros de área $R^2\sqrt{3}$, cada um.

Então, A_T , a área total da figura será

$$\begin{aligned} A_T &= 3 \times (2n-2)R^2 + \frac{(2n-2)^2}{4}R^2\sqrt{3} + 3R^2\sqrt{3} \\ &= (6n-6)R^2 + (n-1)^2R^2\sqrt{3} + 3R^2\sqrt{3} \\ &= (6n-6)R^2 + (n^2-2n+4)R^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Como observação final, registre-se que os números da forma $\frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}$, são chamados números triangulares e correspondem á soma dos primeiros n números naturais.

Exercício 16 *Determine a área da região a vermelho, em função do raio R das três circunferências seguintes (tangentes duas a duas).*

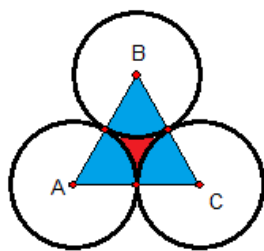


Resolução

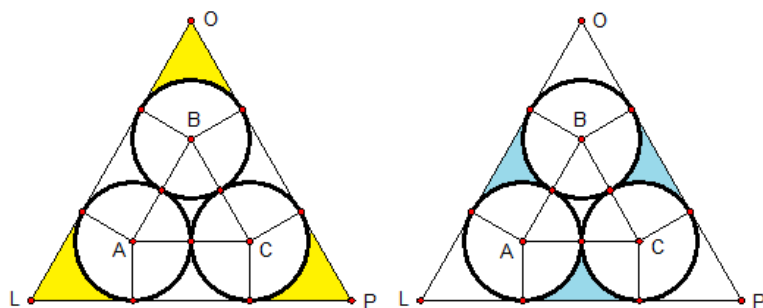
O triângulo $[ABC]$ é equilátero, sendo $2R$ o comprimento de cada lado. Então, a sua área é $\frac{4R^2}{4}\sqrt{3}$.

A área dos sectores circulares, a azul, é $\frac{\pi R^2}{2}$, uma vez que os arcos que definem os sectores circulares (a azul) têm uma amplitude de 60° (cada um).

Então, a área da região a vermelho é $R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2}$, ou seja, $R^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$.



Exercício 17 Determine a área da região a amarelo e da região a azul, em função do raio R das circunferências (que são tangentes duas a duas, em cada triângulo).



Resolução

A área a azul é o triplo da diferença entre a área dum rectângulo de lados R e $2R$ e a área de dois quartos de círculo de raio R .

Então,

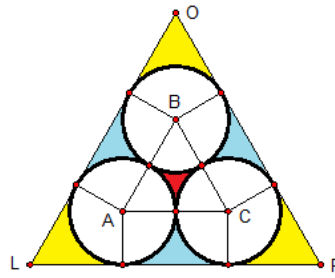
$$A_{\text{azul}} = 3 \left(2R^2 - \frac{\pi}{2} R^2 \right) = 6R^2 - \frac{3\pi}{2} R^2 = 3R^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{2} R^2 (4 - \pi)$$

A área a amarelo é o triplo da diferença entre a área dum quadrilátero (de lados $R, R, R\sqrt{3}, R\sqrt{3}$) e a área de um terço de círculo de raio R .

Mas, a área do quadrilátero é igual à área dum triângulo equilátero de lado $2R$. Então,

$$A_{\text{amarela}} = 3 \left(\frac{4R^2}{4} \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} R^2 \right) = 3R^2 \sqrt{3} - \pi R^2 = R^2 (3\sqrt{3} - \pi)$$

Observação



Já verificámos que a área da região a vermelho é dada por

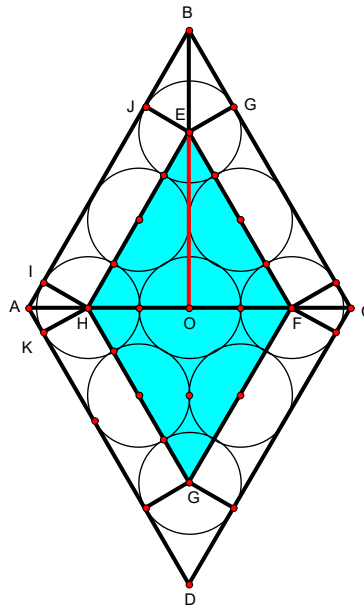
$$A_{\text{vermelha}} = R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2} = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)$$

Calculemos $A_{\text{vermelha}} + A_{\text{amarela}} + A_{\text{azul}}$:

$$\begin{aligned} A_{\text{vermelha}} + A_{\text{amarela}} + A_{\text{azul}} &= R^2\sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{2} + 3R^2\sqrt{3} - \pi R^2 + 6R^2 - \frac{3\pi}{2}R^2 \\ &= 4R^2\sqrt{3} - 3\pi R^2 + 6R^2 \end{aligned}$$

Se à expressão anterior somarmos $3\pi R^2$, que é a área dos três círculos, obtemos $4R^2\sqrt{3} + 6R^2$, valor este que é a área de $[LPO]$.

Exercício 18 *Determine a área do losango $[ABCD]$, definido pelas tangentes às 9 circunferências seguintes:*



Resolução

Área de $[EFH]$: $\frac{(4R)^2}{4}\sqrt{3} = 4R^2\sqrt{3}$. Ora, $\overline{OE} = 2R\sqrt{3}$ e $\overline{OB} = 2R + 2R\sqrt{3}$.

Então, λ , a razão de semelhança entre os triângulos equiláteros $[EFH]$ e $[ABC]$ é $\frac{2R+2R\sqrt{3}}{2R\sqrt{3}}$.

Então,

$$\lambda = \frac{2R + 2R\sqrt{3}}{2R\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Logo,

$$\lambda^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}$$

Área de $[ABC]$:

$$\lambda^2 (4R^2\sqrt{3}) = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3} (4R^2\sqrt{3}) = \frac{16R^2\sqrt{3} + 24R^2}{3} = \frac{8R^2(3 + 2\sqrt{3})}{3}$$

Então, a área de $[ABCD]$ é $\frac{16R^2(3 + 2\sqrt{3})}{3}$ (unidades de área).

Observação 1

Note-se que $9 = 3^2 = 6 + 3$ e que a soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado perfeito:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ...

Soma de dois números triangulares consecutivos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 1^2, 1 + 3 = 4 = 2^2 \\ 3 + 6 = 9 = 3^2, 6 + 10 = 16 = 4^2 \\ 10 + 15 = 25 = 5^2, 15 + 21 = 36 = 6^2 \\ \dots \end{array} \right.$$

Observação 2

Se tivermos n^2 circunferências, com $n \geq 2$, haverá n circunferências na diagonal menor do losango interior.

Então, o comprimento da diagonal menor desse losango é $2(n-1)R$, enquanto que o comprimento da diagonal maior é $2(n-1)R\sqrt{3}$.

Então, o comprimento da diagonal maior do losango exterior é $2(n-1)R\sqrt{3} + 4R$.

Logo, a razão de semelhança entre os dois losangos é

$$\lambda = \frac{2(n-1)R\sqrt{3} + 4R}{2(n-1)R\sqrt{3}} = 1 + \frac{2}{(n-1)\sqrt{3}} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3(n-1)}$$

A área do losango interior é

$$\frac{1}{2} \times 2(n-1)R \times 2(n-1)R\sqrt{3} = 2(n-1)^2 R^2\sqrt{3}$$

Logo, A_n , a área do losango exterior é

$$A_n = 2(n-1)^2 R^2 \sqrt{3} \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3(n-1)} \right)^2 = 2(n-1)^2 R^2 \sqrt{3} \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3(n-1)} + \frac{4}{3(n-1)^2} \right)$$

Para $n = 4$, vem

$$\begin{aligned} A_4 &= 2 \times 9R^2 \sqrt{3} \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{4}{27} \right) = 18R^2 \sqrt{3} \left(\frac{31 + 12\sqrt{3}}{27} \right) \\ &= 18R^2 \times \left(\frac{36 + 31\sqrt{3}}{27} \right) = \frac{2}{3} R^2 (36 + 31\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Para $n = 3$, vem

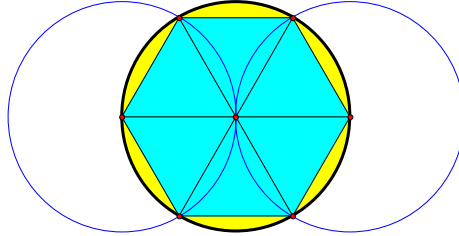
$$\begin{aligned} A_3 &= 2 \times 4R^2 \sqrt{3} \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3 \times 2} + \frac{4}{3 \times 4} \right) = 8R^2 \sqrt{3} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} \right) \\ &= 8R^2 \times \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3} = \frac{16R^2 (3 + 2\sqrt{3})}{3} \end{aligned}$$

Para $n = 2$, vem

$$\begin{aligned} A_2 &= 2R^2 \sqrt{3} \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} \right) = 2R^2 \sqrt{3} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{3} \right) \\ &= 2R^2 \times \frac{12 + 5\sqrt{3}}{3} = \frac{2R^2 (12 + 7\sqrt{3})}{3} \end{aligned}$$

Para $n = 1$, a expressão não tem significado.

Exercício 19 Seja R o raio das três circunferências seguintes. Determine as áreas da região azul, da região amarela e de cada segmento circular.

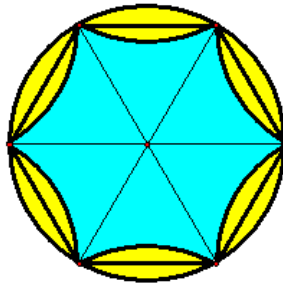


$$\begin{cases} A_{\text{triângulo}} = R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\ A_{\text{hexágono}} = 6R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 \\ A_{\text{amarela}} = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 = \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) R^2 \\ A_{\text{segmento circular}} = \frac{\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2}{6} = \frac{2\pi R^2 - 3R^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} \end{cases}$$

Ou:

$$\begin{aligned} A_{\text{segmento circular}} &= A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triângulo}} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{2\pi R^2}{12} - \frac{3R^2 \sqrt{3}}{12} = \left(\frac{2\pi}{12} - \frac{3\sqrt{3}}{12} \right) R^2 \end{aligned}$$

Exercício 20 Seja R o raio da circunferência seguinte. Sabendo que todos os arcos que limitam a região azul estão contidos em circunferências de raio R e que têm uma amplitude de 60° , determine as áreas da região azul e da região amarela.



$$\begin{cases} A_{\text{círculo}} = \pi R^2 \\ A_{\text{hexágono}} = 6R^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 \end{cases}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{azul}} + \pi R^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 &\implies A_{\text{azul}} + \pi R^2 = 3\sqrt{3} R^2 \\ &\implies A_{\text{azul}} = 3\sqrt{3} R^2 - \pi R^2 = (3\sqrt{3} - \pi) R^2 \\ &\implies A_{\text{azul}} = (3\sqrt{3} - \pi) R^2 \end{aligned}$$

Então,

$$A_{\text{amarela}} = 2 \times (A_{\text{círculo}} - A_{\text{hexágono}}) = 2 \left(\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 \right) = (2\pi - 3\sqrt{3}) R^2$$

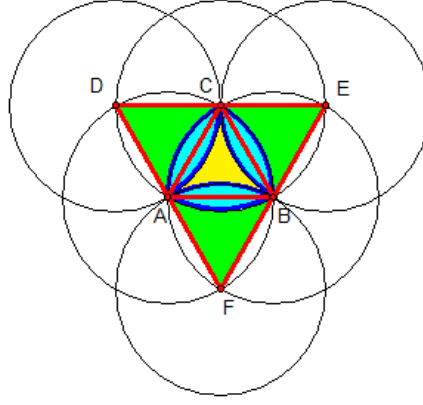
Ou:

$$\begin{cases} A_{\text{segmento circular}} = \frac{\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2}{6} = \frac{2\pi R^2 - 3R^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} \\ A_{\text{amarela}} = 12 \times A_{\text{segmento circular}} = (2\pi - 3\sqrt{3}) R^2 \\ A_{\text{azul}} = A_{\text{círculo}} - 12 \times A_{\text{segmento circular}} = \pi R^2 - 12 \times \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} \end{cases}$$

Logo,

$$A_{\text{azul}} = \pi R^2 - (2\pi - 3\sqrt{3}) R^2 = (\pi - 2\pi + 3\sqrt{3}) R^2 = (3\sqrt{3} - \pi) R^2$$

Exercício 21 *Seja R o raio das seis circunferências seguintes. Determine as áreas da região azul, da região amarela e da região verde.*



$$A_{[ABC]} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{azul}} = 6 \times \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{2}$$

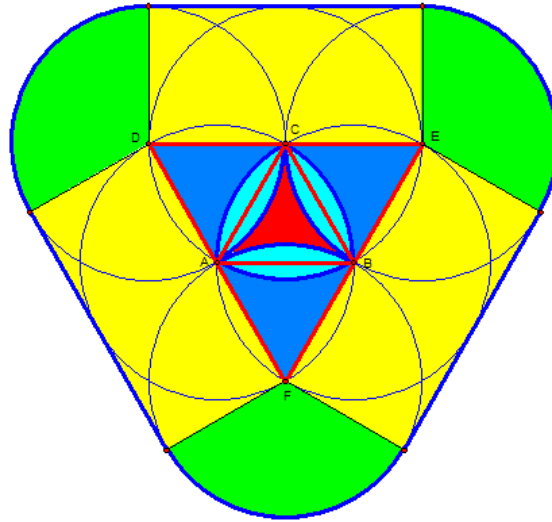
$$\begin{aligned} A_{\text{amarela}} &= \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{A_{\text{azul}}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} \\ &= \frac{(4\sqrt{3} - 2\pi) R^2}{4} = \frac{(2\sqrt{3} - \pi) R^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{verde}} &= 3 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - 3 \times \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} \\ &= \frac{3R^2\sqrt{3} - (2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} = \frac{(6\sqrt{3} - 2\pi) R^2}{4} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi) R^2}{2} \end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned} A_{\text{verde}} &= 4 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - A_{\text{azul}} - A_{\text{amarela}} = R^2\sqrt{3} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{2} - \frac{(2\sqrt{3} - \pi) R^2}{2} \\ &= \frac{(2\sqrt{3} - 2\pi + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \pi) R^2}{2} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi) R^2}{2} \end{aligned}$$

Exercício 22 Determine a área de cada uma das regiões coloridas, em função do raio R das várias circunferências desenhadas.



Este exercício é muito semelhante ao anterior, tendo mais algumas áreas de cálculo imediato.

É fácil verificar que os sectores circulares a verde correspondem a arcos de 120° , pelo que a área total desse sectores é πR^2 .

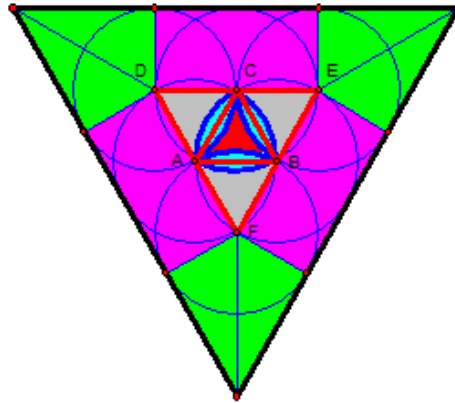
A área de cada rectângulo amarelo é $2R^2$, pelo que a área total dos rectângulos amarelos é $6R^2$.

$$A_{\text{azul claro}} = 6 \times \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{2}$$

$$A_{\text{vermelha}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} = \frac{(2\sqrt{3} - \pi) R^2}{2}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{azul escuro}} &= 3 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - 3 \times \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} \\ &= \frac{3R^2\sqrt{3} - (2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} = \frac{(6\sqrt{3} - 2\pi) R^2}{4} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi) R^2}{2} \end{aligned}$$

Exercício 23 Determine a área de cada uma das regiões coloridas, em função do raio R das várias circunferências desenhadas.



$$A_{\text{azul}} = 6 \times \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{2}$$

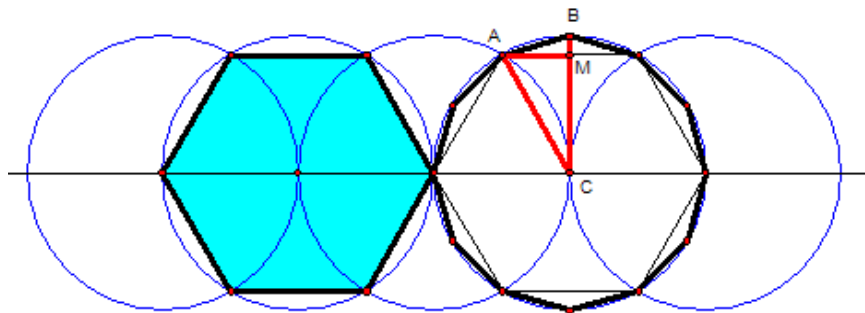
$$A_{\text{vermelha}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} = \frac{(2\sqrt{3} - \pi) R^2}{2}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{cinzenta}} &= 3 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - 3 \times \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} \\ &= \frac{3R^2\sqrt{3} - (2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{4} = \frac{(6\sqrt{3} - 2\pi) R^2}{4} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi) R^2}{2} \end{aligned}$$

$$A_{\text{rosa}} = 6R^2$$

$$A_{\text{verde}} = 3R^2\sqrt{3}$$

Exercício 24 Determine a área do dodecaedro regular, em função do raio R das várias circunferências desenhadas.



$$A_{\text{azul}} = 6 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$$

$$\overline{AC} = R, \quad \overline{AM} = \frac{R}{2}, \quad \overline{CM} = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{BM} = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}R(2 - \sqrt{3})$$

Então,

$$\overline{AB}^2 = \frac{R^2}{4} (2 - \sqrt{3})^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{4} (4 + 3 + 1 - 4\sqrt{3}) = \frac{R^2}{4} (8 - 4\sqrt{3}) = R^2 (2 - \sqrt{3})$$

Logo, $\overline{AB} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ e $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

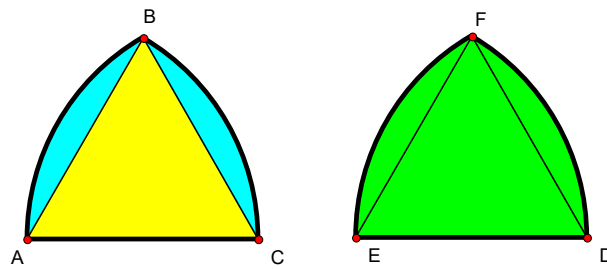
Seja a_{12} , o apótema do dodecágono. Então, $a_{12}^2 + \left(\frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 = R^2$.

Logo, $a_{12}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}(2 - \sqrt{3}) = \frac{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2R^2 + R^2\sqrt{3}}{4}$.

Então, $a_{12} = \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$, pelo que A_{12} , a área do dodecágono, é dada por

$$A_{12} = 12 \times \frac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = 12 \times \frac{R^2}{4}\sqrt{4 - 3} = 3R^2$$

Exercício 25 Determine as áreas das regiões coloridas, sabendo que todos os arcos desenhados estão contidos em circunferências com o mesmo raio R .



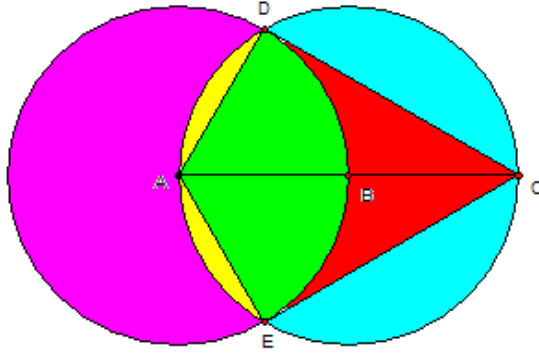
Resolução

$$A_{\text{amarela}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{azul}} = 2 \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2\pi R^2}{6} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{6} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{6}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{verde}} &= A_{\text{amarela}} + A_{\text{azul}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(2\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{6} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{12} + \frac{(4\pi - 6\sqrt{3}) R^2}{12} \\ &= \frac{(4\pi - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) R^2}{12} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3}) R^2}{12} \end{aligned}$$

Exercício 26 Determine as áreas das regiões coloridas, em função do raio R que é o mesmo nas duas circunferências.



$$A_{\text{verde}} = 2 \times \frac{\pi R^2}{6} = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$A_{\text{amarela}} = 2 \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2\pi R^2}{6} - \frac{3R^2 \sqrt{3}}{6} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{6}$$

$$A_{\text{rosa}} = \pi R^2 - A_{\text{verde}} - A_{\text{amarela}} = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\pi R^2}{3} + \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{3} + \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

A área do triângulo $[ADC]$ é $\frac{R \times R \sqrt{3}}{2}$. Então, a área do quadrilátero $[ADCE]$ é $R^2 \sqrt{3}$.

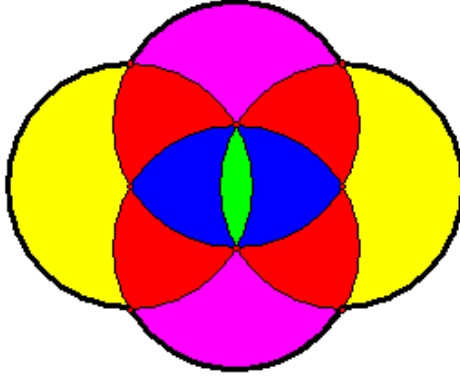
Note-se que a área do quadrilátero $[ADCE]$ é igual à área dum triângulo equilátero de lado $2R$.

$$A_{\text{vermelha}} = R^2 \sqrt{3} - A_{\text{verde}} = R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{3R^2 \sqrt{3} - \pi R^2}{3} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)R^2}{3}$$

$$A_{\text{azul}} = \pi R^2 - A_{\text{amarela}} - R^2 \sqrt{3} = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{3} + \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} - R^2 \sqrt{3} = \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{azul}} = A_{\text{verde}} + A_{\text{amarela}} = \frac{\pi R^2}{3} + \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}$$

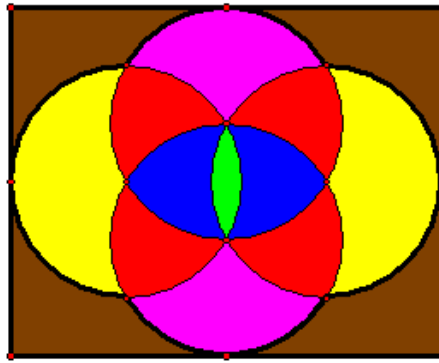
Exemplo 27 Determine a área de cada região colorida e o comprimento da fronteira da figura seguinte:



$$A_{\text{verde}} = 2 \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2\pi R^2}{6} - \frac{3R^2 \sqrt{3}}{6} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{6}$$

$$\begin{aligned}
A_{\text{azul}} &= \frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{6} - \frac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{6} = \frac{\pi R^2}{3} & A_{\text{azul}} &= 2 \times \frac{\pi R^2}{6} = \frac{\pi R^2}{3} \\
A_{\text{vermelha}} &= 2 \times A_{\text{azul}} = \frac{2\pi R^2}{3} \\
A_{\text{amarela}} &= 2 \times \left(\pi R^2 - 3 \times \frac{\pi R^2}{6} - \frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{12} \right) = 2\pi R^2 - \pi R^2 - \frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{6} = \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6} R^2 \\
A_{\text{rosa}} &= 2 \times \left(2 \times \frac{\pi R^2}{6} - \frac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{6} \right) = \frac{4\pi R^2 - 2(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{6} = R^2 \sqrt{3} \\
A_{\text{rosa}} &= 2 \times 2 \times \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \sqrt{3} \\
A_{\text{total}} &= R^2 \sqrt{3} + \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6} R^2 + \frac{2\pi R^2}{3} + \frac{\pi R^2}{3} + \frac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{6} = R^2 \sqrt{3} + \frac{5}{3} R^2 \pi \\
\text{Comprimento da fronteira: } &\pi R + \pi R + \frac{2\pi R}{3} + \frac{2\pi R}{3}, \text{ ou seja, } \frac{10\pi R}{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 28 *Determine a área de cada região colorida:*

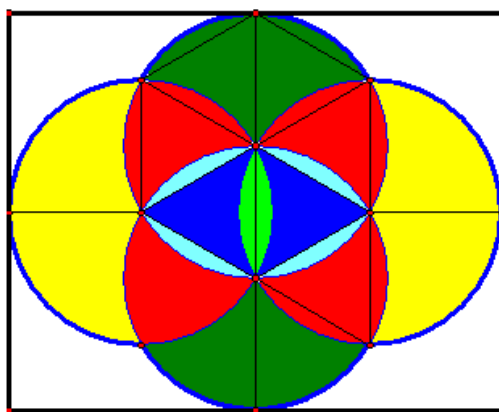


Esta questão é a quase a mesma que foi resolvida no exemplo anterior, tendo-se que calcular a área castanha.

$$\begin{aligned}
A_{\text{verde}} &= \frac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{6} & A_{\text{azul}} &= \frac{\pi R^2}{3} & A_{\text{vermelha}} &= \frac{2\pi R^2}{3} \\
A_{\text{amarela}} &= \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6} R^2 & A_{\text{rosa}} &= R^2 \sqrt{3} \\
\text{Base do rectângulo: } &2R + 2 \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = (2 + \sqrt{3}) R \\
\text{Altura do rectângulo: } &R + R + R = 3R \\
A_{\text{rectângulo}} &= 3(2 + \sqrt{3}) R^2 \\
A_{\text{castanha}} &= 3(2 + \sqrt{3}) R^2 - R^2 \sqrt{3} - \frac{5}{3} R^2 \pi = (6 + 2\sqrt{3} - \frac{5}{3}\pi) R^2
\end{aligned}$$

Observações

Consideremos a figura seguinte:



Cada uma das regiões a vermelho é por dois segmentos circulares correspondentes a arcos de 60° e por um triângulo equilátero ao qual foi retirado um segmento circular. Logo a área de cada uma dessas regiões é igual á área dum triângulo equilátero ao qual se junta um segmento circular, obtendo-se a área dum sector circular que é um sexto da área do círculo. E o mesmo acontece com cada uma das regiões a azul escuro com os dois segmentos circulares a azul claro.

As duas regiões a verde escuro têm a mesma área que quatro triângulos equiláteros.

A região verde claro é constituída por dois segmentos circulares (correspondentes a arcos de 60°).

Capítulo 3

Geometria com Régua e Compasso

Exemplo 29 Como obter um segmento de recta de comprimento \sqrt{n} , com $n \in \mathbb{N}$?

Primeiro processo

Os triângulos coloridos são rectângulos.

No primeiro triângulo, temos que os catetos medem uma unidade e a hipotenusa $\sqrt{2}$.

No segundo triângulo, os catetos medem 1 e $\sqrt{2}$ e a hipotenusa $\sqrt{3}$.

E assim sucessivamente.

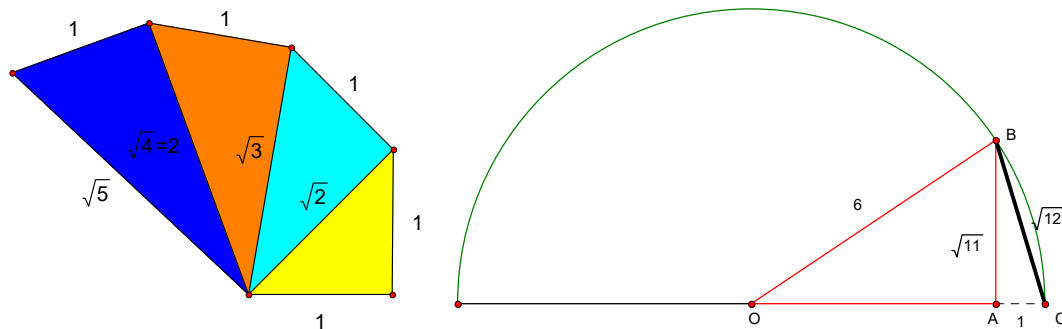
Como conseguir um segmento de recta cujo comprimento seja $\sqrt{11}$?

É claro que interessa um método mais expedito do que obter $\sqrt{11}$ a partir de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{10}$.

Comecemos por recordar que $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, pelo que $(n+1)^2 = n^2 + (\sqrt{2n+1})^2$.

Então, existe um triângulo rectângulo em que a hipotenusa mede $n+1$, um dos catetos mede n , enquanto que o outro cateto mede $\sqrt{2n+1}$.

Então, como $11 = 2 \times 5 + 1$, temos que existe um triângulo rectângulo em que a hipotenusa mede 6, um dos catetos mede 5, enquanto que o outro cateto mede $\sqrt{11}$.

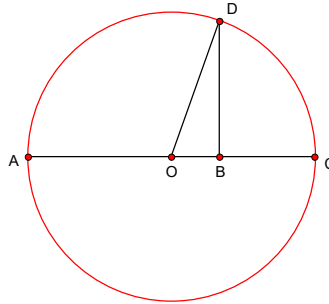


Na figura anterior, temos $\overline{OA} = 5$, $\overline{OB} = 6$, $OA \perp AB$. Então, $\overline{AB} = \sqrt{11}$.

Para conseguir um segmento cujo comprimento seja $\sqrt{12}$, consideramos um triângulo rectângulo em que um dos catetos mede $\sqrt{11}$ e o outro cateto mede 1. A hipotenusa medirá $\sqrt{12}$.

Segundo processo

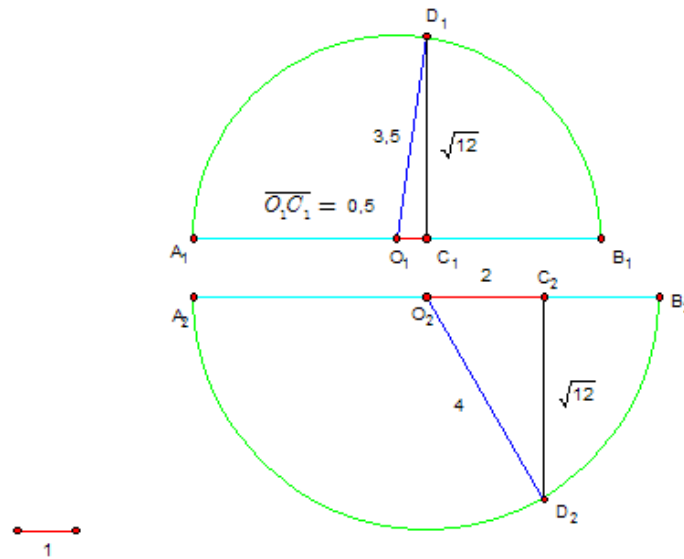
Consideremos três pontos colineares A, B, C , tais que B está entre A e C , $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, com $a < b$. Consideremos a circunferência de diâmetro \overline{AC} , como na figura seguinte:



Então, o raio da circunferência mede $\frac{a+b}{2}$, enquanto que $\overline{OB} = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$. Então,

$$\begin{aligned}\overline{BD}^2 &= \overline{OD}^2 - \overline{OB}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = ab\end{aligned}$$

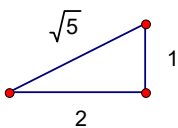
Logo, $\overline{BD} = \sqrt{ab}$. Note-se que se tivermos $b < a$, a situação acaba por ser a mesma. Como $12 = 4 \times 3 = 6 \times 2$, temos as duas construções:



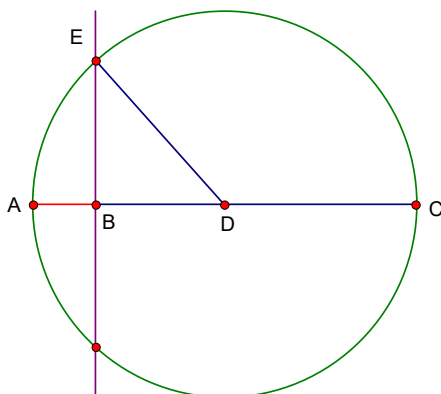
Exemplo 30 Construa um segmento de recta de comprimento $\sqrt{5}$.

Resolução

1. Como $2^2 + 1^2 = (\sqrt{5})^2$, temos

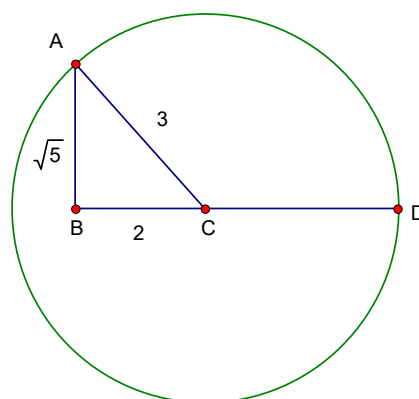


2. De $5 = 5 \times 1$, vem



Note-se que $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = 5$, pelo que $\overline{AD} = 3$.

3. De $5 = 5 \times 1 = (3 + 2) \times (3 - 2) = 3^2 - 2^2$, vem

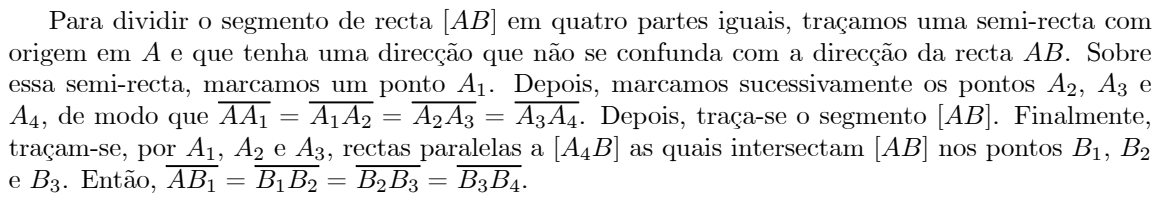


Note-se que as duas últimas construções acabam por ser uma só!

Exemplo 31 Construa um segmento de recta de comprimento $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Resolução

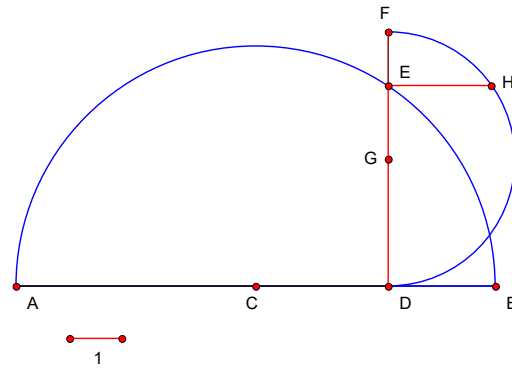
Começamos por construir um segmento de comprimento $\sqrt{14}$ e, depois, dividimo-lo em quatro partes iguais. Em termos práticos, vejamos, em primeiro lugar, como se divide um segmento de recta em partes iguais:



Veremos mais adiante como traçar paralelas com régua e compasso.

Resolução

Começamos por construir um segmento de comprimento $\sqrt{14}$ e, depois, construímos outro de comprimento $\sqrt{\sqrt{14}}$.



Na figura anterior, temos $\overline{AD} = 7$, $\overline{DB} = 2$, $\overline{DE} = \sqrt{14}$, $\overline{EF} = 1$ e $\overline{EH} = \sqrt{\sqrt{14}} = \sqrt[4]{14}$.

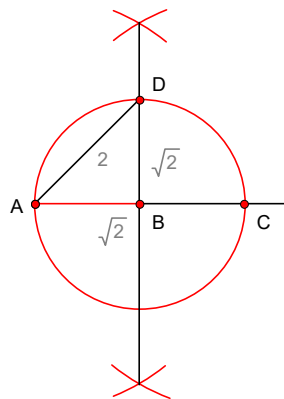
Observação

Se tivermos um segmento de recta de comprimento x , então é possível construir (com régua e compasso) um segmento de recta de comprimento \sqrt{x} , desde que se conheça um segmento de recta de comprimento 1. E assim sucessivamente, pelo que é possível construir um segmento de recta de comprimento $\sqrt[n]{x}$.

Exemplo 33 *Suponhamos que temos um segmento de recta de comprimento $\sqrt{2}$. Como obter o segmento unidade?*

Resolução

Consideremos a figura seguinte, onde $\overline{AB} = \sqrt{2}$. Desenhemos a circunferência de centro B que passa por A . A recta AB intersecta a circunferência em A e num outro ponto C . Construa-se a mediatriz de $[AB]$, a qual intersecta a circunferência inicial em dois pontos. Seja D um desses pontos. Então, devido ao Teorema de Pitágoras, $\overline{AD} = 2$. Então, para construir um segmento unitário, basta construir a mediatriz de $[AD]$. Tal mediatriz não foi construída, para não sobrecarregar o desenho.

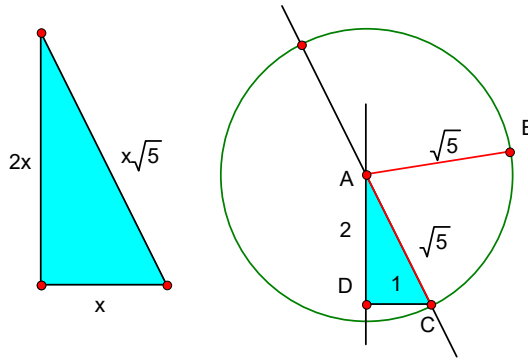


Exemplo 34 Suponhamos que temos um segmento de recta de comprimento $\sqrt{5}$. Como obter o segmento unidade?

Resolução

Consideremos a figura seguinte, onde $\overline{AB} = \sqrt{5}$.

Começamos por construir um triângulo rectângulo arbitrário em que um dos catetos é o dobro do outro. Depois, rodamos o ponto B em torno de A , até intersectar a recta que passa por A e é paralela à hipotenusa do triângulo desenhado anteriormente. Seja C um tal ponto de intersecção (há duas possibilidades). Por A e C desenham-se paralelas aos catetos do referido triângulo. Obtemos, assim, um novo triângulo semelhante ao anterior, pelo que os catetos do segundo triângulo medem 1 e 2 unidades.

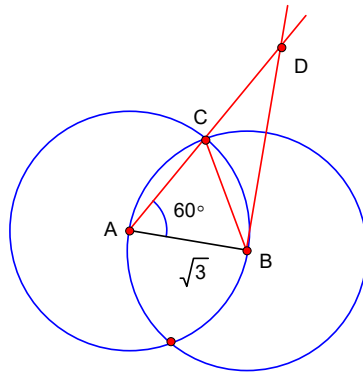


Exemplo 35 Suponhamos que temos um segmento de recta de comprimento $\sqrt{3}$. Como obter o segmento unidade?

Resolução

Consideremos a figura seguinte, onde $\overline{AB} = \sqrt{3}$. Começamos por construir um triângulo equilátero $[ABC]$. Depois, por B , traçamos uma recta perpendicular a $[AB]$. Finalmente determinamos D , o ponto de intersecção das rectas AC e BD . Então, $\overline{BD} = 3$, devido ao facto de ser $\tan A = \sqrt{3}$. Dividindo $[BD]$ em três partes iguais, obtemos um segmento de comprimento 1.

Note-se que esta questão pode ser resolvida de maneira análoga à questão seguinte.



Exemplo 36 Suponhamos que temos um segmento de recta de comprimento $\sqrt{14}$. Como obter o segmento unidade?

Resolução

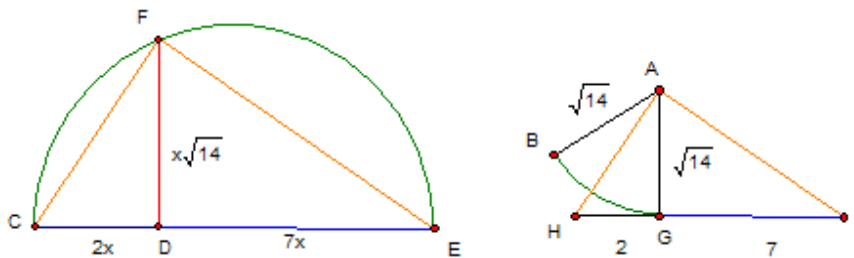
Consideremos a figura seguinte, onde $\overline{AB} = \sqrt{14}$. Começamos por marcar sobre uma recta três pontos C , D e E , com D entre C e E e com $\overline{DE} = \frac{7}{2}\overline{CD}$. Desenhamos a circunferência de diâmetro $[CE]$ e traçamos por D uma recta perpendicular a $[CE]$. Seja F um dos pontos de intersecção dessa perpendicular com a circunferência.

Seguidamente, rodamos $[AB]$ em torno de A , de modo a obtermos $[AG]$ paralelo a $[DF]$.

Por A , desenhamos paralelas a $[CF]$ e $[FE]$, enquanto que, por G , traçamos uma paralela a $[CE]$.

Os triângulos $[CFE]$ e $[AHI]$ são semelhantes, pelo que $\overline{HG} = 2$ e $\overline{GI} = 7$.

Para obter um segmento unitário, basta dividir $[HG]$ em duas partes iguais.



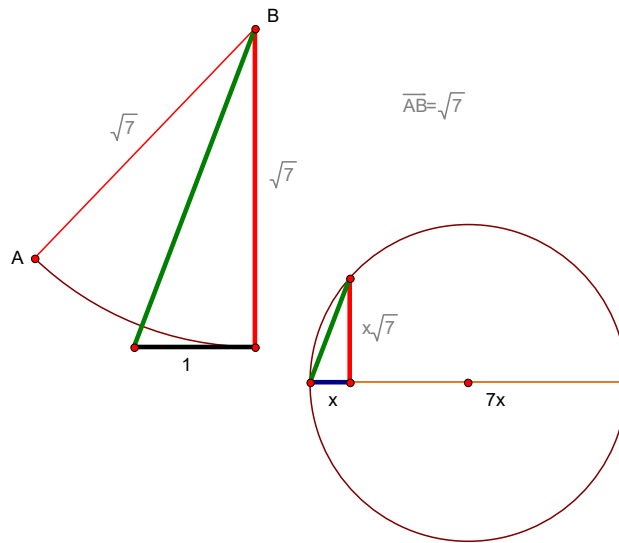
Ao fim e ao cabo, começamos por escolher um segmento de recta arbitrário, o qual servirá de unidade provisoriamente. Depois construímos um segmento de recta com o comprimento indicado ($\sqrt{14}$), mas na unidade "provisória". Depois, através das semelhanças, construímos o segmento de recta de comprimento 1, na unidade inicial.

Note-se que, nos exemplos anteriores, podíamos ter seguido este processo.

Exemplo 37 Suponhamos que temos um segmento de recta de comprimento $\sqrt{7}$. Como obter o segmento unidade?

Resolução

Começamos por marcar, numa recta, três pontos de modo que tenhamos um segmento de comprimento x e outro de comprimento $7x$, de modo que o segmento total terá comprimento $8x$. Pelo ponto médio do segmento de comprimento $8x$, construímos uma circunferência de raio $4x$. Depois, traçamos uma perpendicular e vamos obter um segmento de recta com comprimento $x\sqrt{7}$, como na figura seguinte. Depois, por B , traça-se uma recta paralela ao segmento de comprimento $x\sqrt{7}$ e desenha-se um arco de circunferência de centro B e que passa por A . Então, temos um novo segmento de recta de comprimento $x\sqrt{7}$. Finalmente, por B , traçamos uma recta paralela à hipotenusa do triângulo de catetos x e $x\sqrt{7}$ e uma recta paralela ao diâmetro da circunferência assinalado na figura, obtendo-se um segmento de comprimento 1.



Exemplo 38 Suponhamos que temos um rectângulo em que dois lados medem 3 cm e 5 cm. Como podemos obter um quadrado com a mesma área do rectângulo?

Resolução

A área do rectângulo é 15 cm^2 . Então, o lado do quadrado deve medir $\sqrt{15} \text{ cm}$.

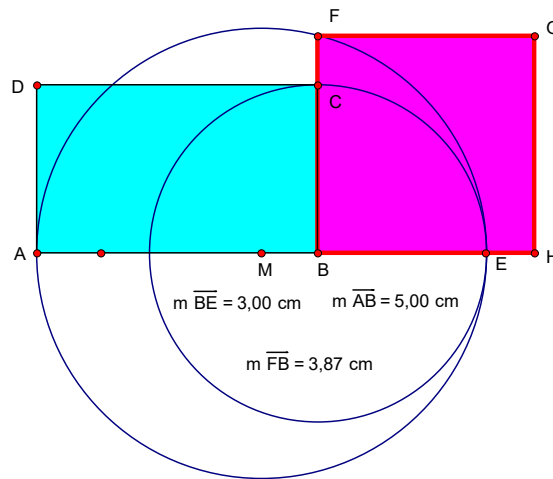
Na figura seguinte, temos que $[ABCD]$ é um rectângulo, $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ e $\overline{BC} = 3 \text{ cm}$.

Desenhou-se uma circunferência de centro B e que passa por C . O ponto E pertence à recta AB e à circunferência anterior, pelo que $\overline{AE} = 8 \text{ cm}$. M é o ponto médio de $[AE]$, embora se tenha omitido a construção para obter M . Seguidamente, desenhou-se a circunferência de diâmetro $[AE]$. Esta última circunferência intersecta a recta BC em dois pontos, um dos quais é F . A área do quadrado de lado $[BF]$ é 15 cm^2 , área esta que é igual à área do rectângulo $[ABCD]$.

Observe-se que o valor indicado para \overline{FB} (na figura seguinte), é um valor aproximado, tendo-se que $3,87^2 = 14,9769$, valor este que é ligeiramente inferior a 15.

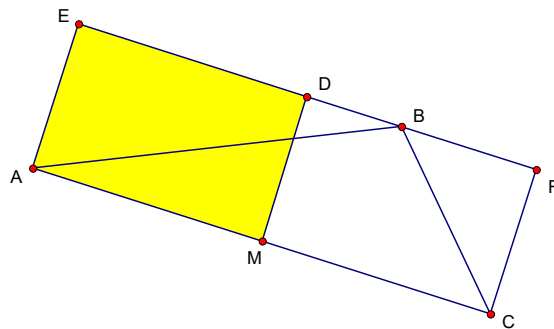
Note-se, ainda, que $\overline{FB} = \sqrt{15} \text{ cm} \approx 3,872983346 \text{ cm}$ e que, embora a calculadora apresente o valor 15 para $3,872983346^2$, esse valor não é exacto.

Registe-se que $3,872983346^2 = 14,99999998393355716$.



Exemplo 39 Construa um quadrado cuja área seja igual à área dum triângulo dado.

Resolução

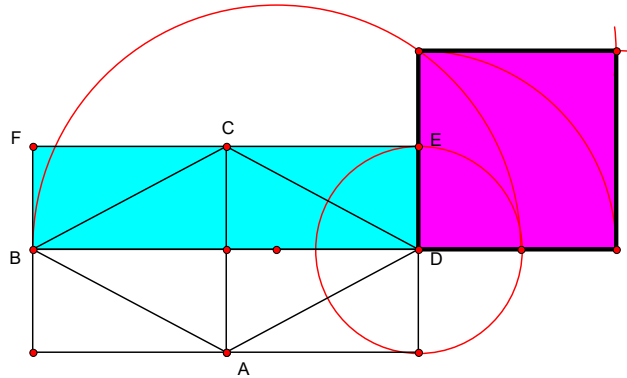


M é o ponto médio de $[AC]$, a recta EF é paralela a AC e DM é perpendicular AC . A área de $[AMDE]$ é igual à área do triângulo $[ABC]$. Depois, continuamos como no exemplo anterior, pois já temos um rectângulo.

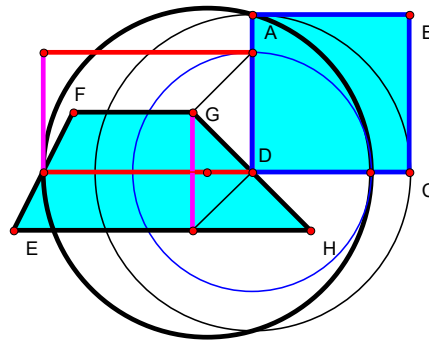
Exemplo 40 Construa um quadrado cuja área seja igual à área dum losango dado.

Resolução

Consideremos o losango $[ABCD]$ da figura seguinte. A área de $[ABCD]$ é igual à área do rectângulo $[BDEF]$ da figura seguinte. Então, caímos no problema anterior.



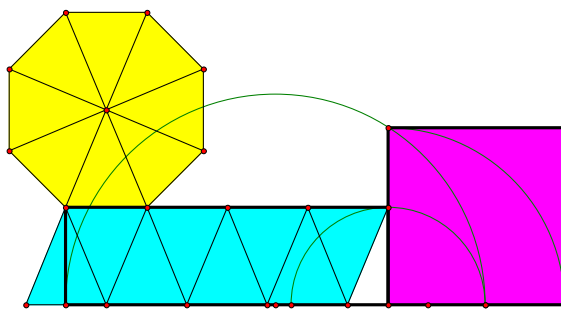
Exemplo 41 Construa um quadrado cuja área seja igual à área dum trapézio dado.

Resolução

Exemplo 42 Construa um quadrado cuja área seja igual à área dum octógono regular dado.

Resolução

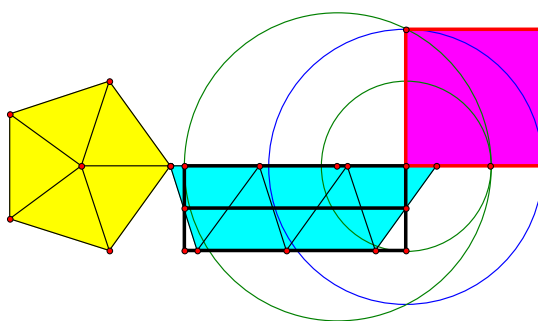
Começamos por obter um paralelogramo e depois um rectângulo com a mesma área do octógono. Depois, basta encontrar um quadrado com a área do rectângulo.



Exemplo 43 Construa um quadrado cuja área seja igual à área dum pentágono regular dado.

Resolução

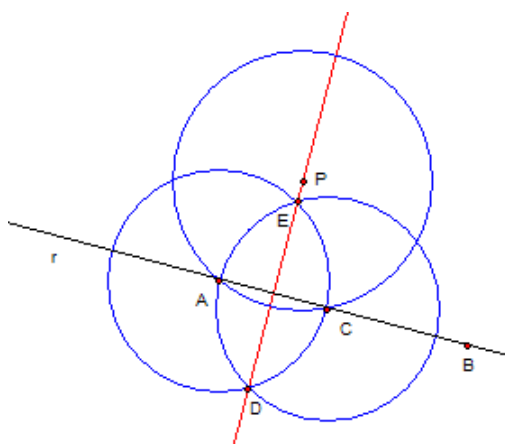
Neste caso, construímos um trapézio e um rectângulo, ambos com a área do pentágono. E, por fim, construímos o quadrado.



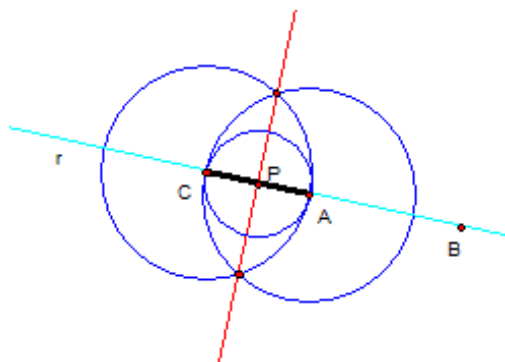
Exemplo 44 Construção duma recta que passa por um ponto e é perpendicular a outra recta.

Resolução

Consideremos um ponto P e uma recta AB que não passa por P . Com centro em P , desenha-se uma circunferência que intersecte a recta AB em dois pontos (neste caso A e C). Depois, constrói-se a mediatriz do segmento de recta $[AC]$. Essa mediatriz passa por P e é perpendicular à recta AB .

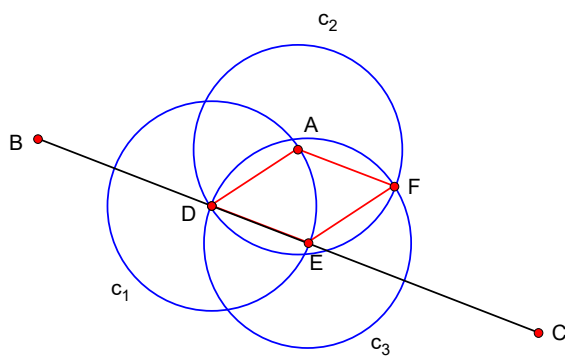


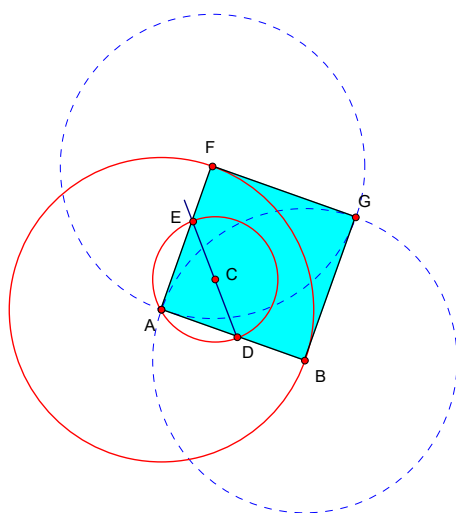
Se o ponto P pertencer à recta AB , basta desenhar uma circunferência de centro P e determinar os pontos de intersecção da recta com a circunferência. Esse pontos definem um segmento de recta cuja mediatriz passa por P e é perpendicular à recta r .



Exemplo 45 Construção duma recta que passa por um ponto e é paralela a outra recta.

Resolução 1

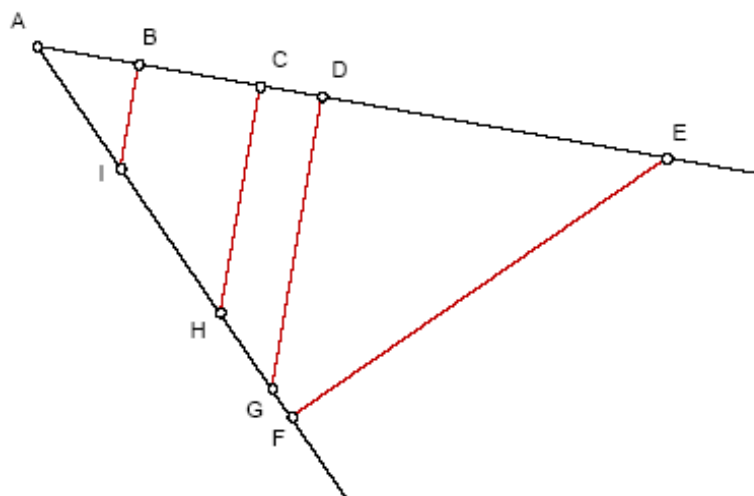




Capítulo 4

A Trigonometria no Triângulo Rectângulo

Consideremos um ângulo agudo qualquer. Se marcarmos vários pontos sobre um dos lados do ângulo e, por cada um desses pontos, traçarmos perpendiculares a esse ou ao outro lado, obtemos vários triângulos rectângulos, todos semelhantes entre si.

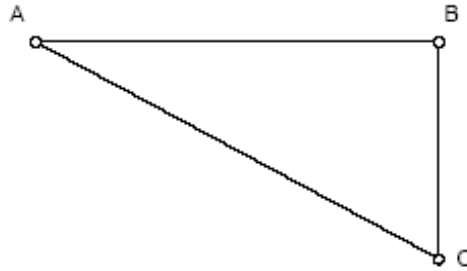


Do facto dos triângulos $[ABI]$, $[ACH]$, $[ADG]$ e $[AEF]$ serem semelhantes, resulta que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{BI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} \\ \frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \\ \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} \end{array} \right.$$

Os quocientes anteriores dependem apenas da amplitude do ângulo e são conhecidos por $\sin A$ (ou $\sin A$), $\cos A$ e $\tan A$ (ou $\operatorname{tg} A$), respectivamente, recebendo o nome genérico de razões trigonométricas.

Consideremos um triângulo rectângulo $[ABC]$, como na figura seguinte:



Neste caso, temos $\sin A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, $\cos A = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, $\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\sin C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, $\cos C = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ e $\tan C = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, verificando-se que $\sin A = \cos C$ e $\cos A = \sin C$. Os ângulos A e C , cuja soma é um ângulo recto, são ângulos complementares. Para além das três razões trigonométricas indicadas, há outras três, as quais são dadas por $\cot A = \frac{1}{\tan A}$, $\sec A = \frac{1}{\cos A}$ e $\csc A = \frac{1}{\sin A}$. Estas razões são a cotangente, a secante e co-secante.

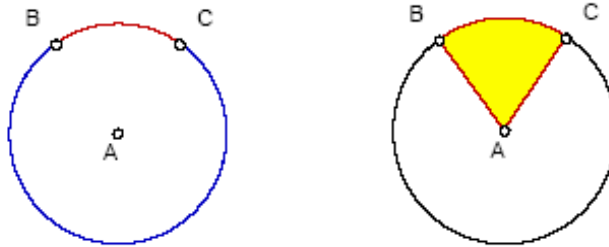
Proposição 47 Para qualquer ângulo agudo A , temos:

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \sin A = \cos A \tan A, \sin^2 A + \cos^2 A = 1, 1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

Exercício 48 Determine a área dum sector circular correspondente a um arco de 70° .

Resolução

Consideremos, numa circunferência de raio R , um arco de 70° .



A área do sector circular, correspondente ao arco BC , calcula-se por meio da proporção (regra de três simples) $\frac{360^\circ}{\pi R^2} = \frac{70^\circ}{A}$, donde vem $A = \frac{7\pi R^2}{36}$.

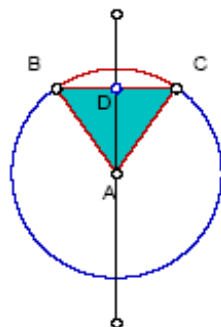
Se trabalhássemos em radianos, teríamos (para a área do mesmo sector circular): $\frac{2\pi}{\pi R^2} = \frac{\frac{7\pi}{18}}{A}$, donde vem $A = \frac{\pi R^2}{2\pi} \times \frac{7\pi}{18} = \frac{7\pi R^2}{36}$, obtendo-se o mesmo resultado, como era de esperar.

No caso de termos um ângulo ao centro de α (radianos), a área do sector circular será dada por $\frac{R^2}{2}\alpha$.

Exercício 49 Determine a área dum triângulo definido por dois raios numa circunferência de raio R e uma corda correspondente a um arco de 70°

Resolução

Consideremos, numa circunferência de raio R , um arco de 70° e os raios definidos pelos extremos do arco e pelo centro da circunferência, como na figura seguinte.



Pelo centro da circunferência, traça-se uma recta perpendicular à corda $[BC]$.

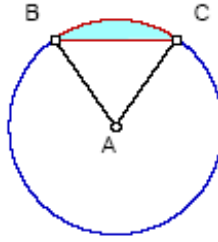
Esta recta divide a corda $[BC]$ em duas partes iguais, tendo-se $\overline{BD} = \overline{DC}$, pelo que os triângulos $[ABD]$ e $[ACD]$ são iguais. Então:

$$\begin{cases} \sin 35^\circ = \frac{\overline{BD}}{R} \\ \cos 35^\circ = \frac{\overline{AD}}{R} \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{BD} = R \sin 35^\circ \\ \overline{AD} = R \cos 35^\circ \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{BC} = 2R \sin 35^\circ \\ \overline{AD} = R \cos 35^\circ \end{cases}$$

Então, a área do triângulo é $\frac{1}{2} \times 2R \sin 35^\circ \times R \cos 35^\circ$, ou seja, $\frac{R^2}{2} \sin 70^\circ$.

No caso de termos um ângulo ao centro de α (radianos), a área do triângulo definido pela corda e os dois raios será dada por $\frac{R^2}{2} \sin \alpha$.

Observe-se que o comprimento da corda, correspondente a um ângulo ao centro de amplitude α , é $2R \sin \frac{\alpha}{2}$.



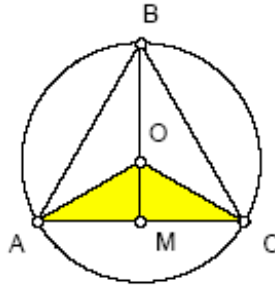
Se quisermos a área do segmento circular definido pela corda $[BC]$ e pelo arco de circunferência BC , basta-nos calcular a diferença entre $\frac{R^2}{2}\alpha$ e $\frac{R^2}{2}\sin \alpha$, ou seja, a área do segmento circular correspondente a um arco de amplitude α radianos é $\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$.

Exercício 50 *Determine a área dum polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio R .*

Resolução

Antes de passarmos ao caso geral, consideremos vários casos particulares, começando pelo triângulo equilátero.

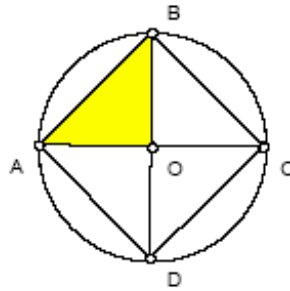
Consideremos a figura seguinte, onde $[ABC]$ é um triângulo equilátero, o qual está dividido em três triângulos iguais.



Seja $R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.

Já sabemos que a área do triângulo $[ABO]$ é $\frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{3}$, pelo que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $A_3 = \frac{3R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{3}$.

No caso do quadrado, vem $A_4 = \frac{4R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{4} = 2R^2$.



Se considerarmos o quadrado como um losango com as diagonais iguais, vem $A_4 = \frac{2R \times 2R}{2} = 2R^2$.

No caso do pentágono regular, temos $A_5 = \frac{5R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{5}$.

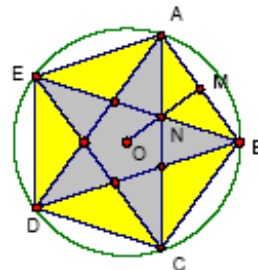
E no caso do polígono regular de n lados, virá $A_n = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$.

Logo, $A_6 = 3R^2 \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$ e $A_{12} = 6R^2 \sin \frac{2\pi}{12} = 3R^2$.

Exercício 51 *Determine a área da estrela regular de cinco pontas, inscrita numa circunferência de raio R .*

Resolução

Consideremos o pentágono da figura seguinte:



Já vimos que a área do pentágono regular $[ABCDE]$ é $\frac{5R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{5}$ e que $\overline{AB} = 2R \sin \frac{\pi}{5}$.

Mas, $\tan \frac{\pi}{5} = \tan \widehat{ABE} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MN}}{R \sin \frac{\pi}{5}}$. Então, $\overline{MN} = R \sin \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{5}$.

Logo, a área de $[ABN]$ é dada por $\frac{1}{2} \times R \sin \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{5} \times 2R \sin \frac{\pi}{5} = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{5}$.

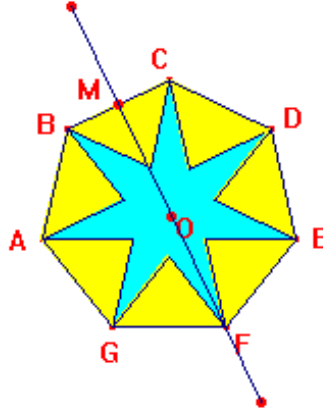
Então, $A_{5,2}$, a área da estrela regular de cinco pontas é:

$$\begin{aligned}
A_{5,2} &= \frac{5R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{5} - 5R^2 \sin^2 \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{5} = 5R^2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} - 5R^2 \sin^2 \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{5} \\
&= 5R^2 \sin \frac{\pi}{5} \left(\cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \tan \frac{\pi}{5} \right) = 5R^2 \sin \frac{\pi}{5} \left(\cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \times \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} \right) \\
&= 5R^2 \times \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} \left(\cos^2 \frac{\pi}{5} - \sin^2 \frac{\pi}{5} \right) = 5R^2 \tan \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}
\end{aligned}$$

Exercício 52 Determine a área das estrelas regulares de sete pontas, inscritas numa circunferência de raio R .

Resolução

A área do heptágono regular é $A_7 = \frac{7R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{7}$.



Por outro lado, temos:

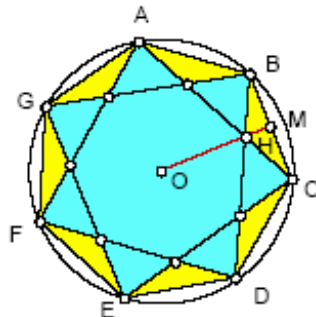
$$\overline{BC} = 2R \sin \frac{\pi}{7} \text{ e } \tan \frac{2\pi}{7} = \tan (\widehat{MCH}) = \frac{\overline{MH}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MH}}{R \sin \frac{\pi}{7}}. \text{ Então, } \overline{MH} = R \sin \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7}.$$

Logo, a área do triângulo $[BCH]$ é $\frac{1}{2} \times 2R \sin \frac{\pi}{7} \times R \sin \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7}$, ou seja, $R^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7}$.

Então, a área da estrela regular de sete pontas considerada é:

$$\begin{aligned}
A_{7,3} &= \frac{7R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{7} - 7R^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7} = \frac{7R^2}{2} \times 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - 7R^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7} \\
&= 7R^2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \tan \frac{2\pi}{7} \right) = 7R^2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \times \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}} \right) \\
&= 7R^2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\frac{\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}} \right) = \frac{7R^2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}}{\cos \frac{2\pi}{7}}
\end{aligned}$$

Mas, conforme se pode ver na figura seguinte, existe uma outra estrela regular de sete pontas.



Para distinguir as duas estrelas, chamar-lhes-emos estrelas $E_{7,3}$ e $E_{7,2}$, respectivamente, por razões óbvias.

Neste último caso, temos:

$$\overline{BC} = 2R \sin \frac{\pi}{7} \text{ e } \tan \frac{\pi}{7} = \tan (\widehat{MCH}) = \frac{\overline{MH}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MH}}{R \sin \frac{\pi}{7}}.$$

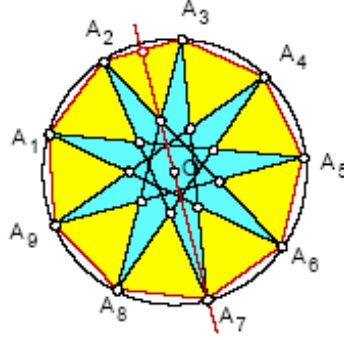
Então, $\overline{MH} = R \sin \frac{\pi}{7} \tan \frac{\pi}{7}$, pelo que a área do triângulo $[BCH]$ é $R \sin \frac{\pi}{7} \times R \sin \frac{\pi}{7} \tan \frac{\pi}{7}$, ou seja, $R^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \tan \frac{\pi}{7}$.

Então, a área da estrela regular de sete pontas considerada é:

$$\begin{aligned} A_{7,2} &= \frac{7R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{7} - 7R^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \tan \frac{\pi}{7} = \frac{7R^2}{2} \times 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - 7R^2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \tan \frac{\pi}{7} \\ &= 7R^2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \tan \frac{\pi}{7} \right) = 7R^2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \times \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{\cos \frac{\pi}{7}} \right) \\ &= 7R^2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{7} \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{7} \right)}{\cos \frac{\pi}{7}} \right) = 7R^2 \tan \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \end{aligned}$$

Exercício 53 Determine a área da estrela regular $E_{9,4}$, inscrita numa circunferência de raio R .

Resolução



Considerando a figura anterior, temos:

$$\overline{A_2A_3} = 2R \sin \frac{\pi}{9}, \text{ e } \tan \frac{3\pi}{9} = \tan \left(\widehat{MA_3H} \right) = \frac{\overline{MH}}{\overline{MA_3}} = \frac{\overline{MH}}{R \sin \frac{\pi}{9}}.$$

$$\text{Então, } \overline{MH} = R \sin \frac{\pi}{9} \tan \frac{3\pi}{9} = R \sin \frac{\pi}{9} \tan \frac{\pi}{3} = R\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{9}.$$

Logo, a área do triângulo $[A_2A_3H]$ é $R \sin \frac{\pi}{9} \times R\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{9}$, ou seja, $R^2\sqrt{3} \sin^2 \frac{\pi}{9}$.

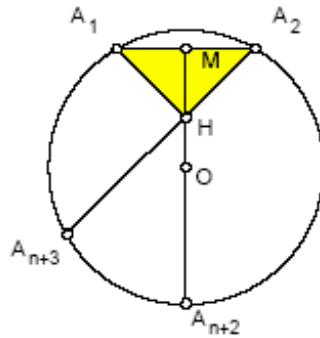
Então, $A_{9,4}$, a área da estrela regular $E_{9,4}$, é dada por:

$$\begin{aligned} A_{9,4} &= \frac{9R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - 9R^2 \sin^2 \frac{\pi}{9} \tan \frac{\pi}{3} = 9R^2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} - 9R^2 \sin^2 \frac{\pi}{9} \tan \frac{\pi}{3} \\ &= 9R^2 \sin \frac{\pi}{9} \left(\cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \times \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \right) = 9R^2 \times \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 9R^2 \times \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} \right) = 9R^2 \times \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{3}} \times \cos \frac{4\pi}{9} \end{aligned}$$

Exercício 54 Calcule a área da estrela regular $E_{2n+1,n}$ inscrita numa circunferência de raio R .

Resolução

Consideremos a figura seguinte:



$$\overline{A_1A_2} = 2R \sin \frac{\pi}{2n+1}, \tan \frac{(n-1)\pi}{2n+1} = \tan \left(\widehat{MA_2H} \right) = \frac{\overline{MH}}{\overline{MA_2}} = \frac{\overline{MH}}{R \sin \frac{\pi}{2n+1}}$$

Então, $\overline{MH} = R \sin \frac{\pi}{2n+1} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n+1}$. Seja A , a área do triângulo $[A_1A_2H]$.

$$\text{Então, } A = R \sin \frac{\pi}{2n+1} \times R \sin \frac{\pi}{2n+1} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n+1}.$$

$$\text{Logo, } A = R^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n+1} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n+1}.$$

Logo, $A_{2n+1,n}$, a área da estrela regular $E_{2n+1,n}$ é:

$$\begin{aligned} A_{2n+1,n} &= (2n+1) \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{2n+1} - (2n+1) R^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n+1} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \\ &= (2n+1) R^2 \sin \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{\pi}{2n+1} - (2n+1) R^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n+1} \tan \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \\ &= (2n+1) R^2 \sin \frac{\pi}{2n+1} \left(\cos \frac{\pi}{2n+1} - \sin \frac{\pi}{2n+1} \times \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2n+1}}{\cos \frac{(n-1)\pi}{2n+1}} \right) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} A_{2n+1,n} &= \frac{(2n+1) R^2 \sin \frac{\pi}{2n+1}}{\cos \frac{(n-1)\pi}{2n+1}} \left(\cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{(n-1)\pi}{2n+1} - \sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \right) \\ &= (2n+1) R^2 \times \frac{\sin \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{n\pi}{2n+1}}{\cos \frac{(n-1)\pi}{2n+1}} \end{aligned}$$

Para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$, temos as fórmulas obtidas anteriormente.

Se calcularmos l , o limite da área da estrela regular $E_{2n+1,n}$, inscrita numa circunferência de raio R , obtemos:

$$\begin{aligned}
 l &= \lim \frac{(2n+1)R^2 \times \sin \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{n\pi}{2n+1}}{\cos \frac{(n-1)\pi}{2n+1}} = \pi R^2 \lim \frac{\sin \frac{\pi}{2n+1}}{\frac{\pi}{2n+1}} \times \lim \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{2n+1} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \right)} \\
 &= \pi R^2 \times 1 \times \lim \frac{\sin \left(\frac{2n\pi + \pi - 2n\pi}{4n+2} \right)}{\sin \left(\frac{2n\pi + \pi - 2n\pi + 2\pi}{4n+2} \right)} = \pi R^2 \lim \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4n+2} \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{4n+2} \right)} = \frac{\pi R^2}{3}
 \end{aligned}$$

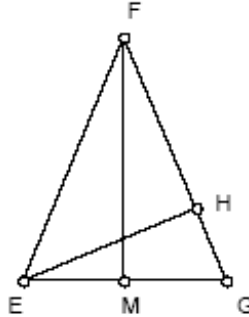
O valor de l não deixa de ser curioso, pois é um terço da área do círculo circunscrito à estrela.

Exercício 55 Considere um triângulo $[EFG]$, no qual temos $\overline{EF} = \overline{FG} = 13$ cm e $\overline{EG} = 10$ cm. Determine:

1. A área do triângulo.
2. O seno dos ângulos internos do triângulo.

Resolução

1. Consideremos o triângulo da figura:



Seja M o ponto médio do lado $[EG]$. Como $\overline{EF} = \overline{FG}$, temos que o triângulo $[EFM]$ é rectângulo em M . Aplicando o Teorema de Pitágoras, vem $\overline{FM}^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; então, $\overline{FM} = 12$, pelo que a área do triângulo $[EFG]$ é $\frac{10 \times 12}{2} \text{ cm}^2$, ou seja, 60 cm^2 .

$$2. \sin(\widehat{FEG}) = \frac{12}{13} = \sin(\widehat{FGE})$$

Seja H , o pé da perpendicular ao lado $[FG]$ que passa por E .

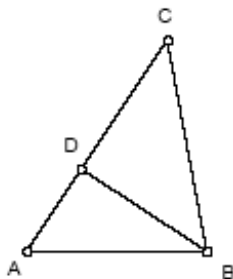
Então, $\frac{\overline{EH} \times \overline{FG}}{2} = 60$, donde vem $\overline{EH} \times 13 = 120$ cm.

Então, $\overline{EH} = \frac{120}{13}$ cm. Logo, $\sin(\widehat{EFG}) = \frac{\frac{120}{13}}{13} = \frac{120}{169}$.

Exercício 56 Considere um triângulo $[ABC]$, tal que $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm e $\overline{AC} = 7$ cm. Determine a área e o seno dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

Resolução

Consideremos o triângulo $[ABC]$ da figura:



D é o pé da altura que passa por B . Suponhamos que $\overline{AD} = x$ cm e que $\overline{DB} = y$ cm.

Então, $\overline{DC} = (7 - x)$ cm. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ABD]$ e $[DBC]$, temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (7 - x)^2 + y^2 = 36 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 49 - 14x + x^2 + y^2 = 36 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 49 - 14x + 25 = 36 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y^2 = 25 - \frac{361}{49} \\ x = \frac{19}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = \frac{864}{49} \\ x = \frac{19}{7} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm \frac{12\sqrt{6}}{7} \\ x = \frac{19}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{1}{2} \times \frac{12\sqrt{6}}{7} \times 7$ cm² = $6\sqrt{6}$ cm².

$$\sin A = \frac{\frac{12\sqrt{6}}{7}}{5} = \frac{12}{35}\sqrt{6}; \sin C = \frac{\frac{12\sqrt{6}}{7}}{6} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$$

Seja h , a altura referente ao vértice C . Então, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{5h}{2}$.

Logo, $6\sqrt{6} = \frac{5h}{2}$, donde vem $h = \frac{12\sqrt{6}}{5}$. Logo, $\sin B = \frac{\frac{12\sqrt{6}}{5}}{6} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$.

Fazendo $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, temos:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\frac{12}{35}\sqrt{6}}{6} = \frac{2}{35}\sqrt{6}; \frac{\sin B}{b} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{6}}{7} = \frac{2}{35}\sqrt{6}; \frac{\sin C}{c} = \frac{\frac{2}{7}\sqrt{6}}{5} = \frac{2}{35}\sqrt{6}$$

Certamente que não será por acaso que, neste exemplo, obtivemos

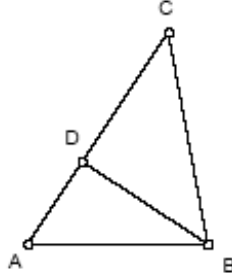
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Este exercício é bastante importante e pode ser resolvido por outras maneiras, sendo retomado mais adiante.

Exercício 57 Considere um triângulo $[ABC]$, tal que $\overline{AB} = 7\text{ cm}$, $\overline{BC} = 8\text{ cm}$ e $\overline{AC} = 9\text{ cm}$. Determine a área e o seno dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

Resolução

Consideremos o triângulo $[ABC]$ da figura:



D é o pé da altura que passa por B . Suponhamos que $\overline{AD} = x\text{ cm}$ e que $\overline{DB} = y\text{ cm}$. Então, $\overline{DC} = (9 - x)\text{ cm}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ABD]$ e $[DBC]$, temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ (9 - x)^2 + y^2 = 64 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ 81 - 18x + x^2 + y^2 = 64 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ 81 - 18x + 49 = 64 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ 18x = 66 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 49 - \frac{121}{9} \\ x = \frac{11}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y^2 = \frac{320}{9} \\ x = \frac{11}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm \frac{8\sqrt{5}}{3} \\ x = \frac{11}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{5}}{3} \times 9\text{ cm}^2 = 12\sqrt{5}\text{ cm}^2$.

$$\sin A = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{3}}{7} = \frac{8}{21}\sqrt{5}; \sin C = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{3}}{8} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$$

Seja h , a altura referente ao vértice C . Então, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{7h}{2}$.

Logo, $12\sqrt{5} = \frac{7h}{2}$, donde vem $h = \frac{24\sqrt{5}}{7}$. Logo, $\sin B = \frac{\frac{24\sqrt{5}}{7}}{8} = \frac{3}{7}\sqrt{5}$.

Fazendo $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, temos:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\frac{8}{21}\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{21}; \frac{\sin B}{b} = \frac{\frac{3}{7}\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{21}; \frac{\sin C}{c} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{5}}{7} = \frac{\sqrt{5}}{21}$$

E mais uma vez obtivemos

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

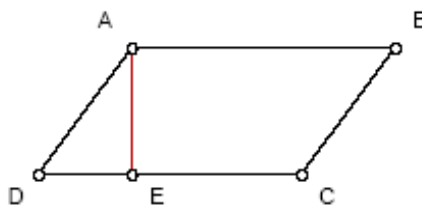
Capítulo 5

Áreas e Volumes

Exercício 58 Determine a área dum paralelogramo, conhecidos os lados e um dos ângulos internos.

Resolução

Consideremos o paralelogramo da figura seguinte, onde $AE \perp DC$:



$\sin D = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \implies \overline{AE} = \overline{AD} \sin D$. Então, a área do paralelogramo é:

$$\overline{DC} \times \overline{AD} \sin D = \overline{DC} \times \overline{DA} \cos D \tan D = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} \tan D.$$

Note-se que, num paralelogramo $[ABCD]$, são válidas as igualdades $\sin A = \sin B = \sin C = \sin D$, pelo que a fórmula que dá a área do paralelogramo pode ser aplicada, mesmo que o ângulo seja obtuso. No entanto, se se tratar dum rectângulo, a fórmula (com $\tan D$) não tem significado. É claro que, nas fórmulas anteriores, podemos utilizar outros pares de vectores.

Exercício 59 Considere, em \mathbb{R}^2 , os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 0)$ e $C = (4, 3)$.

1. Determine o ponto D , de modo que $[ABCD]$ seja um paralelogramo.
2. Determine a área do paralelogramo anterior.

Resolução

1. $D = C + \overrightarrow{BA} = (4, 3) + (1, 2) - (3, 0) = (2, 5)$

$$2. \overrightarrow{AB} = (3, 0) - (1, 2) = (2, -2), \overrightarrow{AD} = (2, 5) - (1, 2) = (1, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (2, -2) \cdot (1, 3) = 2 - 6 = -4$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{8}, \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{10}$$

Então,

$$\cos A = \frac{-4}{\sqrt{8} \times \sqrt{10}} = \frac{-4}{4\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Logo, $1 + \tan^2 D = 5$, donde se conclui que $\tan D = -2$, uma vez que o ângulo A é obtuso.

Então, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \tan D = -4 \times (-2) = 8$, que é a área do paralelogramo.

Observemos que há um outro processo de calcular a área dum paralelogramo, o qual consiste em criar um terceiro eixo, de modo a considerarmos o paralelogramo em \mathbb{R}^3 .

Assim, em vez de $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ e $\overrightarrow{AD} = (1, 3)$, consideramos $\overrightarrow{AB} = (2, -2, 0)$ e $\overrightarrow{AD} = (1, 3, 0)$ e calculamos o chamado produto externo:

$$\begin{aligned} (2, -2, 0) \times (1, 3, 0) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0e_1 + 0e_2 + 8e_3 = (0, 0, 8) \end{aligned}$$

A área do paralelogramo é a norma do vector $(0, 0, 8)$, ou seja, 8.

Teorema 60 *Teorema de Carnot (ou lei dos cosenos). Consideremos um triângulo $[ABC]$ qualquer. Então:*

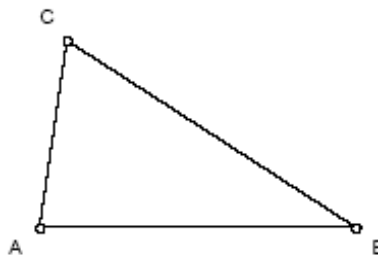
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos C$$

Demonstração

Comecemos por observar que a igualdade anterior costuma ser escrita do seguinte modo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

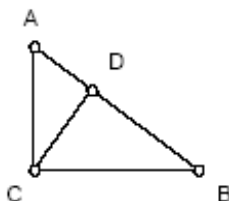
Além disso, o Teorema de Pitágoras é um caso particular deste teorema (caso em que o ângulo é recto).



Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, temos:

$$\begin{aligned}
 \overline{AB}^2 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\
 &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \\
 &= \overline{AC}^2 + 2 \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overline{CB}^2 \\
 &= \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2 \times \overline{AC} \times \overline{CB} \times \cos(\pi - \hat{C}) \\
 &= \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{CB} \times \cos C
 \end{aligned}$$

Problema 61 Considere o triângulo rectângulo $[ABC]$ da figura seguinte:



Suponhamos que $\overline{AC} = 3$ cm e $\overline{BC} = 4$ cm. Determine o volume do sólido que se obtém, quando o triângulo dá uma volta completa em torno de:

1. recta AC
2. recta BC
3. recta AB

Resolução

1. Quando o triângulo dá uma volta completa, em torno da recta AC , gera um cone (de revolução) com 3 cm de altura e cuja base é um círculo de 4 cm de raio. Então, o volume do cone é de $\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 3$ cm³, ou seja, o volume do cone é de 16π cm³.
2. Quando o triângulo dá uma volta completa, em torno da recta BC , gera um cone com 4 cm de altura e cuja base é um círculo de 3 cm de raio. Então, o volume do cone é de $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4$ cm³, ou seja, o volume do cone é de 12π cm³.
3. Quando o triângulo dá uma volta completa, em torno da recta AB , gera um sólido formado por dois cones com a mesma base. A base comum dos cones é um círculo cujo raio é a altura do triângulo $[ABC]$, relativa ao lado $[AB]$.

A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{3 \times 4}{2}$ cm² = 6 cm², sendo $\overline{AB} = 5$ cm (aplicando o Teorema de Pitágoras). Supondo que $\overline{CD} = h$ cm, temos que $\frac{5h}{2} = 6$, donde se conclui que $h = \frac{12}{5}$.

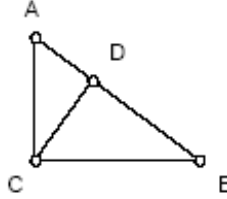
Suponhamos que $\overline{AD} = x$ cm. Então, $\overline{DB} = (5 - x)$ cm. Logo, o volume do cone gerado pelo triângulo $[ACD]$ é, em cm³, dado por $V_1 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 \pi x = \frac{48}{25} \pi x$.

O volume do cone gerado pelo triângulo $[BCD]$ é dado por $V_2 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 \pi (5 - x) = \frac{48}{25} \pi (5 - x)$. Então, o volume total é dado por

$$V = V_1 + V_2 = \frac{48}{25} \pi x + \frac{48}{25} \pi (5 - x) = \frac{48}{25} \pi \times 5 = \frac{48}{5} \pi$$

Observemos que não foi necessário calcular \overline{AD} e \overline{DB} , para podermos calcular o volume total, embora seja necessário calculá-los, se desejarmos saber os valores de V_1 e V_2 .

Problema 62 Considere o triângulo rectângulo $[ABC]$ da figura seguinte:



Suponhamos que $\overline{AC} = b$ cm e $\overline{BC} = a$ cm e que $[AC] \perp [BC]$. Determine o volume do sólido que se obtém, quando o triângulo dá uma volta completa em torno de:

1. recta AC
2. recta BC
3. recta AB

Resolução

1. Quando o triângulo dá uma volta completa, em torno da recta AC , gera um cone (de revolução) com b cm de altura e cuja base é um círculo de a cm de raio. Então, o volume do cone é de $\frac{1}{3} \times \pi \times a^2 \times b$ cm³, ou seja, o volume do cone é de $\frac{\pi a^2 b}{3}$ cm³.
2. Quando o triângulo dá uma volta completa, em torno da recta BC , gera um cone com b cm de altura e cuja base é um círculo de a cm de raio. Então, o volume do cone é de $\frac{1}{3} \times \pi \times b^2 \times a$ cm³, ou seja, o volume do cone é de $\frac{\pi a b^2}{3}$ cm³.
3. Quando o triângulo dá uma volta completa, em torno da recta AB , gera um sólido formado por dois cones com a mesma base. A base comum dos cones é um círculo cujo raio é a altura do triângulo $[ABC]$, relativa ao lado $[AB]$.

A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{ab}{2}$ cm², sendo $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$ cm (aplicando o Teorema de Pitágoras). Supondo que $\overline{CD} = h$ cm, temos que $\frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}$, donde se conclui que $h = \frac{ab}{c} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Suponhamos que $\overline{AD} = x$ cm. Então, $\overline{DB} = (c - x)$ cm. Logo, o volume do cone gerado pelo triângulo $[ACD]$ é, em cm³, dado por $V_1 = \frac{1}{3} \times h^2 \pi x$.

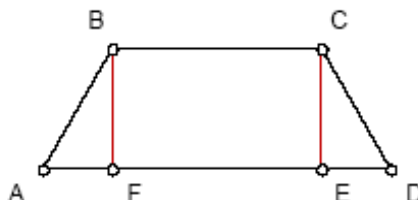
O volume do cone gerado pelo triângulo $[BCD]$ é dado por $V_2 = \frac{1}{3} \times h^2 \pi (c - x)$

Então, o volume total é dado por $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} \times h^2 \pi x + \frac{1}{3} \times h^2 \pi (c - x) = \frac{1}{3} h^2 \pi c$.

Substituindo h por $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e c por $\sqrt{a^2+b^2}$, obtemos

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 \pi \sqrt{a^2+b^2} = \frac{a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}} \pi$$

Problema 63 Considere o trapézio isósceles da figura seguinte:

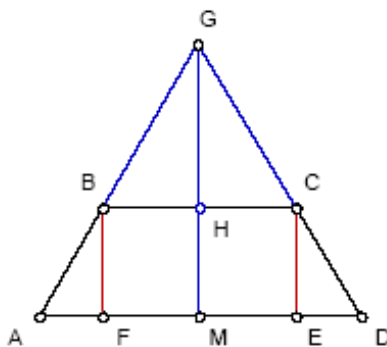


Suponha que $\overline{AD} = 30$ cm, $\overline{BC} = 20$ cm e $A = 60^\circ$. Determine o volume do sólido que se obtém, quando o trapézio dá uma volta completa em torno da:

1. mediatriz das bases do trapézio
2. recta AD
3. recta BC

Resolução

1. Quando o trapézio dá uma volta completa, em torno da mediatriz das bases, define um tronco de cone em que as bases estão contidas em planos paralelos.



O volume desse tronco de cone pode ser obtido pela diferença entre os volumes dos cones gerados pelos triângulos $[AGM]$ e $[BGH]$.

$$\text{Ora, } \tan A = \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{BH}} \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{\overline{GM}}{15 \text{ cm}} = \frac{\overline{GH}}{10 \text{ cm}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{GM} = 15\sqrt{3} \text{ cm} \\ \overline{GH} = 10\sqrt{3} \text{ cm} \end{cases}$$

Então, o volume do cone gerado por $[BGH]$ é, em cm^3 , dado por $V_1 = \frac{1}{3} \times 100\pi \times 10\sqrt{3}$ e o volume do cone gerado por $[AGM]$ é, em cm^3 , dado por $V_2 = \frac{1}{3} \times 225\pi \times 15\sqrt{3}$

O volume do tronco de cone é, em cm^3 , dado por:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{1}{3} \times 225\pi \times 15\sqrt{3} - \frac{1}{3} \times 100\pi \times 10\sqrt{3} = \frac{2375\pi}{3}\sqrt{3}$$

2. Quando o trapézio dá uma volta completa, em torno da recta AD , gera um sólido formado por um cilindro de revolução (cujo raio é a altura do trapézio e cuja altura é \overline{BC}) e por dois cones de revolução de alturas \overline{AF} e \overline{ED} e cujas bases são as bases do cilindro anterior. Ora, $\overline{AF} = \overline{ED} = 5 \text{ cm}$, $\overline{BC} = 20 \text{ cm}$ e $\overline{BF} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$. Então, o volume do cilindro, em cm^3 , é $V_3 = \pi (5\sqrt{3})^2 \times 20 = 1500\pi$

O volume dum dos cones, em cm^3 , é $V_4 = \frac{1}{3} \times \pi (5\sqrt{3})^2 \times 5 = 125\pi$

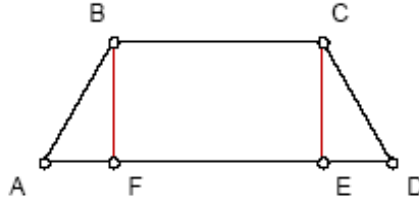
Logo, o volume total do sólido, em cm^3 , é $V_3 + 2V_4 = 1750\pi$

3. Quando o trapézio dá uma volta completa, em torno da recta BC , gera um cilindro de revolução (com 30 cm de altura e $5\sqrt{3} \text{ cm}$ de raio) ao qual são retirados dois cones de revolução de altura 5 cm e cujas bases são as bases do cilindro anterior.

Então, o volume do cilindro, em cm^3 , é $V_5 = \pi (5\sqrt{3})^2 \times 30 = 2250\pi$. O volume de cada cone, em cm^3 , é $V_6 = \frac{1}{3} \times \pi (5\sqrt{3})^2 \times 5 = 125\pi$

Finalmente, temos que o volume total do sólido, em cm^3 , é $V_5 - 2V_6 = 2250\pi - 2 \times 125\pi = 2000\pi$.

Problema 64 Considere o trapézio isósceles da figura seguinte:

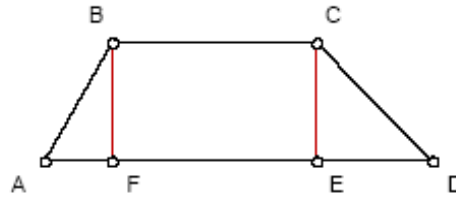


Suponha que $\overline{AD} = x$, $\overline{BC} = y$ e $\widehat{A} = \alpha$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Determine o volume do sólido que se obtém, quando o trapézio dá uma volta completa em torno da:

1. mediatriz das bases do trapézio
2. recta AD
3. recta BC

Resolução

1.



$$\text{Ora, } \tan \alpha = \frac{\overline{GM}}{\frac{x}{2}} = \frac{\overline{GH}}{\frac{y}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{GM} = \frac{x}{2} \tan \alpha \\ \overline{GH} = \frac{y}{2} \tan \alpha \end{cases}$$

O volume do cone gerado por $[BGH]$ é $V_1 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{y}{2} \tan \alpha = \frac{1}{24}\pi y^3 \tan \alpha$.

O volume do cone gerado por $[AGM]$ é $V_2 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{x}{2} \tan \alpha = \frac{1}{24}\pi x^3 \tan \alpha$.

Então, o volume do tronco de cone é

$$V = V_2 - V_1 = \frac{1}{24}\pi y^3 \tan \alpha - \frac{1}{24}\pi x^3 \tan \alpha = \frac{\pi}{24} (x^3 - y^3) \tan \alpha$$

2. Quando o trapézio dá uma volta completa, em torno da recta AD , gera um sólido formado por um cilindro de revolução (cujo raio é a altura do trapézio e cuja altura é \overline{BC}) e por dois cones de revolução de alturas \overline{AF} e \overline{ED} e cujas bases são as bases do cilindro anterior. Ora, $\overline{AF} = \overline{ED} = \frac{x-y}{2}$, $\overline{BC} = y$ e $\overline{BF} = \frac{x-y}{2} \tan \alpha$. Então, o volume do cilindro é $V_3 = \pi \left(\frac{x-y}{2} \tan \alpha\right)^2 y$

O volume dum dos cones é $V_4 = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{x-y}{2} \left(\frac{x-y}{2} \tan \alpha\right)^2 = \frac{\pi}{24} (x-y)^3 \tan^2 \alpha$

Finalmente, temos que o volume total do sólido é:

$$V_3 + 2V_4 = \pi y \left(\frac{x-y}{2} \tan \alpha\right)^2 + \frac{\pi}{12} (x-y)^3 \tan^2 \alpha = (x+2y) \frac{\pi}{12} (x-y)^2 \tan^2 \alpha$$

3. Quando o trapézio dá uma volta completa, em torno da recta BC , gera um cilindro de revolução (com altura x e raio $\frac{x-y}{2} \tan \alpha$) ao qual são retirados dois cones de revolução de altura $\frac{x-y}{2}$ e cujas bases são as bases do cilindro anterior. Então, o volume do cilindro é $V_5 = \pi x \left(\frac{x-y}{2} \tan \alpha\right)^2$. O volume de cada cone é

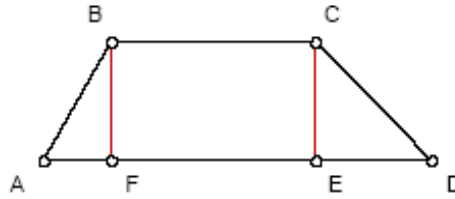
$$V_6 = \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{x-y}{2} \tan \alpha\right)^2 \times \frac{x-y}{2} = \frac{1}{24} \pi (x-y)^3 \tan^2 \alpha$$

Finalmente, temos que o volume total do sólido é:

$$V_5 - 2V_6 = \pi x \left(\frac{x-y}{2} \tan \alpha\right)^2 - \frac{\pi}{12} (x-y)^3 \tan^2 \alpha = \frac{\pi}{12} (2x+y) (x-y)^2 \tan^2 \alpha$$

Problema 65 Considere o trapézio seguinte, em que $\overline{AD} = 36$ cm, $\overline{BC} = 20$ cm, $A = 60^\circ$, $D =$

45° .



Determine o volume do sólido que se obtém, quando o trapézio dá uma volta completa em torno de:

1. recta AD

2. recta BC

Resolução

1. Suponhamos que o trapézio dá uma volta completa em torno da recta AD .

Sejam $x_1 = \overline{AF}$, $x_2 = \overline{ED}$, $h = x_1 = \overline{BF}$. Então, $x_1 + x_2 + 20 = 36$, pelo que $x_1 + x_2 = 16$. Por outro lado, temos $\tan 60^\circ = \frac{h}{x_1}$ e $\tan 45^\circ = \frac{h}{x_2}$. Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} h = x_1\sqrt{3} \\ h = x_2 \\ x_1 + x_2 = 16 \end{cases} &\implies \begin{cases} h = x_1\sqrt{3} \\ x_2 = x_1\sqrt{3} \\ x_1 + x_1\sqrt{3} = 16 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} h = \frac{16\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \\ x_2 = h \\ x_1 = \frac{16}{1+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} h = \frac{48-16\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = h \\ x_1 = \frac{16\sqrt{3}-16}{2} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} h = 24 - 8\sqrt{3} \\ x_2 = 24 - 8\sqrt{3} \\ x_1 = 8\sqrt{3} - 8 \end{cases} \end{aligned}$$

O trapézio gera um sólido formado por um cilindro e dois cones de revolução. A altura do cilindro é 20 cm, enquanto que a base tem raio $(24 - 8\sqrt{3})$ cm. Logo, o volume do cilindro (em cm^3) é $V_1 = \pi (24 - 8\sqrt{3})^2 \times 20 = 20\pi (24 - 8\sqrt{3})^2 = 7680\pi (2 - \sqrt{3})$.

O volume do cone gerado pelo triângulo $[ABF]$ é dado (em cm^3) por:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\pi}{3} (24 - 8\sqrt{3})^2 \times (8\sqrt{3} - 8) = \frac{\pi}{3} \times 64 (3 - \sqrt{3})^2 \times 8 (\sqrt{3} - 1) \\ &= \frac{512\pi}{3} \times (12 - 6\sqrt{3}) \times (\sqrt{3} - 1) = 1024\pi (2 - \sqrt{3}) \times (\sqrt{3} - 1) \\ &= 1024\pi (2\sqrt{3} - 2 - 3 + 1) \sqrt{3} = 1024\pi (3\sqrt{3} - 5) \end{aligned}$$

O volume do cone gerado pelo triângulo $[CDE]$ é dado (em cm^3) por:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{\pi}{3} (24 - 8\sqrt{3})^2 \times (24 - 8\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} (24 - 8\sqrt{3})^2 \times (8\sqrt{3} - 8) \times \sqrt{3} \\ &= V_2 \times \sqrt{3} = 13\,824\pi (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Então, o volume dos dois cones é $1024\pi (3\sqrt{3} - 5) + 1024\pi (9 - 5\sqrt{3}) = 1024\pi (4 - 2\sqrt{3})$, ou seja, $2048\pi (2 - \sqrt{3})$.

E o volume total do sólido (em cm^3) é $V = 7680\pi (2 - \sqrt{3}) + 2048\pi (2 - \sqrt{3}) = 9728\pi (2 - \sqrt{3})$.

2. Suponhamos, agora, que o trapézio dá uma volta completa em torno da recta BC . Neste caso, o trapézio gera um cilindro de altura \overline{AD} , ao qual são retirados dois cones de \overline{AF} e \overline{ED} . O raio das bases é \overline{BF} . Sejam $x_1 = \overline{AF}$, $x_2 = \overline{ED}$, $h = \overline{BF}$, como na alínea anterior. A única diferença é que o volume do sólido é dado por $V = V'_1 - V_2 - V_3$.

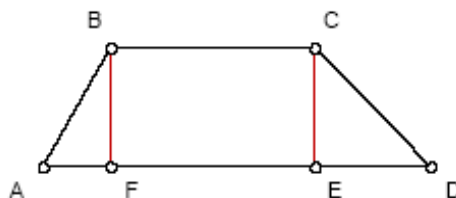
Ora,

$$\begin{aligned} V'_1 &= \pi (24 - 8\sqrt{3})^2 \times 36 = 36 \times 64\pi (3 - \sqrt{3})^2 = 2304\pi (9 + 3 - 6\sqrt{3}) \\ &= 2304\pi \times 6 (2 - \sqrt{3}) = 13\,824\pi (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Então:

$$V = V'_1 - V_2 - V_3 = 13\,824\pi (2 - \sqrt{3}) - 2048\pi (2 - \sqrt{3}) = 11\,776\pi (2 - \sqrt{3})$$

Problema 66 Considere o trapézio da figura seguinte, em que supomos $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $A = \alpha$, $D = \beta$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.



Determine o volume do sólido que se obtém, quando o trapézio dá uma volta completa em torno de:

1. recta AD
2. recta BC

Resolução

1. Suponhamos que o trapézio dá uma volta completa em torno da recta AD .

Sejam $x_1 = \overline{AF}$, $x_2 = \overline{ED}$, $h = x_1 = \overline{BF}$. Então, $x_1 + x_2 + b = a$, pelo que $x_1 + x_2 = a - b$. Por outro lado, temos $\tan \alpha = \frac{h}{x_1}$ e $\tan \beta = \frac{h}{x_2}$. Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} h = x_1 \tan \alpha \\ h = x_2 \tan \beta \\ x_1 + x_2 = a - b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} h = x_1 \tan \alpha \\ x_1 \tan \alpha = x_2 \tan \beta \\ x_1 \tan \beta + x_2 \tan \beta = (a - b) \tan \beta \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} h = x_1 \tan \alpha \\ x_2 = \frac{x_1 \tan \alpha}{\tan \beta} \\ x_1 \tan \beta + x_1 \tan \alpha = (a - b) \tan \beta \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} h = \frac{(a - b) \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \\ x_2 = \frac{(a - b) \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} \\ x_1 = \frac{(a - b) \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \end{cases} \end{aligned}$$

O trapézio gera um sólido formado por um cilindro e dois cones de revolução. A altura do cilindro é b , enquanto que a base tem raio $\frac{(a-b)\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$. Logo, o volume do cilindro é

$$V_1 = \pi b \left(\frac{(a - b) \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \right)^2 = \frac{\pi b (a - b)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{(\tan \alpha + \tan \beta)^2}$$

O volume do cone gerado pelo triângulo $[ABF]$ é:

$$V_2 = \frac{\pi (a - b)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3 (\tan \alpha + \tan \beta)^2} \times \frac{(a - b) \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\pi (a - b)^3 \tan^2 \alpha \tan^3 \beta}{3 (\tan \alpha + \tan \beta)^3}$$

O volume do cone gerado pelo triângulo $[CDE]$ é:

$$V_3 = \frac{\pi (a - b)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3 (\tan \alpha + \tan \beta)^2} \times \frac{(a - b) \tan \alpha}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{\pi (a - b)^3 \tan^3 \alpha \tan^2 \beta}{3 (\tan \alpha + \tan \beta)^3}$$

Então, o volume dos dois cones é

$$\begin{aligned} V_2 + V_3 &= \frac{\pi (a - b)^3 \tan^2 \alpha \tan^3 \beta}{3 (\tan \alpha + \tan \beta)^3} + \frac{\pi (a - b)^3 \tan^3 \alpha \tan^2 \beta}{3 (\tan \alpha + \tan \beta)^3} \\ &= \frac{\pi (a - b)^3 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta (\tan \alpha + \tan \beta)}{3 (\tan \alpha + \tan \beta)^3} \\ &= \frac{\pi (a - b)^3 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3 (\tan \alpha + \tan \beta)^2} \end{aligned}$$

E o volume total do sólido é

$$\begin{aligned}
 V_1 + V_2 + V_3 &= \frac{3\pi b(a-b)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3(\tan \alpha + \tan \beta)^2} + \frac{\pi(a-b)^3 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3(\tan \alpha + \tan \beta)^2} \\
 &= \frac{\pi(a-b)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta (3b + a - b)}{3(\tan \alpha + \tan \beta)^2} \\
 &= \frac{\pi(a-b)^2 (a+2b) \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3(\tan \alpha + \tan \beta)^2}
 \end{aligned}$$

2. A única diferença, relativamente à questão anterior, é que o volume do sólido é dado por $V'_1 - V_2 - V_3$.

Ora,

$$\begin{aligned}
 V'_1 - V_2 - V_3 &= \frac{3\pi b(a-b)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3(\tan \alpha + \tan \beta)^2} - \frac{\pi(a-b)^3 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3(\tan \alpha + \tan \beta)^2} \\
 &= \frac{\pi(a-b)^2 \tan^2 \alpha \tan^2 \beta (3b - a + b)}{3(\tan \alpha + \tan \beta)^2} \\
 &= \frac{\pi(a-b)^2 (2a+b) \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}{3(\tan \alpha + \tan \beta)^2}
 \end{aligned}$$

Observação:

No primeiro exemplo resolvido anteriormente, tínhamos $a = 30$ cm, $b = 20$ cm, $\alpha = \beta = 60^\circ$. Se aplicarmos as fórmulas que acabamos de deduzir, obtemos (em cm^3):

$$\begin{aligned}
 V_1 + V_2 + V_3 &= \frac{\pi(30-20)^2(30+40)(\sqrt{3})^2(\sqrt{3})^2}{3(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{100\pi \times 70 \times 9}{3 \times 12} = 1750\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V'_1 - V_2 - V_3 &= \frac{\pi(30-20)^2(60+20)(\sqrt{3})^2(\sqrt{3})^2}{3(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{100\pi \times 80 \times 9}{3 \times 12} = 2000\pi
 \end{aligned}$$

No segundo exemplo, tínhamos $a = 36$ cm, $b = 20$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$. Então:

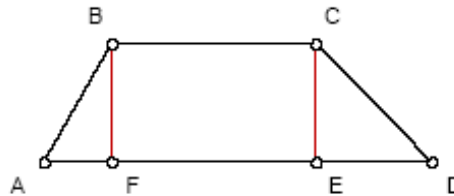
$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 &= \frac{\pi (36 - 20)^2 (36 + 40) (\sqrt{3})^2 \times 1^2}{3 (\sqrt{3} + 1)^2} \\ &= \frac{256\pi \times 76 \times 3}{3 (4 + 2\sqrt{3})} \\ &= \frac{256\pi \times 38}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 256\pi \times 38 (2 - \sqrt{3}) \\ &= 9728\pi (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'_1 - V_2 - V_3 &= \frac{\pi (36 - 20)^2 (72 + 20) (\sqrt{3})^2 \times 1^2}{3 (\sqrt{3} + 1)^2} \\ &= \frac{256\pi \times 92 \times 3}{3 (4 + 2\sqrt{3})} \\ &= \frac{256\pi \times 46}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ &= 256\pi \times 46 (2 - \sqrt{3}) \\ &= 11776\pi (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Exercício 67 Determine as áreas dos trapézios dos exercícios anteriores.

Resolução

Consideremos o trapézio da figura seguinte, em que $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$, $A = \alpha$, $D = \beta$, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.



Já vimos que $h = \frac{(a - b) \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$. Então, a área do trapézio é dada por:

$$\frac{a + b}{2} \times \frac{(a - b) \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{(a^2 - b^2) \tan \alpha \tan \beta}{2 (\tan \alpha + \tan \beta)}$$

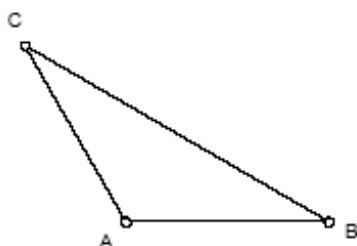
No caso do primeiro trapézio, tínhamos $\overline{AD} = 30$ cm, $\overline{BC} = 20$ cm, $A = 60^\circ$, $D = 60^\circ$.

Então, a área do trapézio é $\frac{(a^2 - b^2) \tan \alpha \tan \beta}{2(\tan \alpha + \tan \beta)} = \frac{(900 - 400) \sqrt{3} \sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + \sqrt{3})} = \frac{500 \sqrt{3} \sqrt{3}}{4 \sqrt{3}} = 125 \sqrt{3}$.

No segundo caso, tínhamos $\overline{AD} = 36$ cm, $\overline{BC} = 20$ cm, $A = 60^\circ$, $D = 45^\circ$, pelo que a área do trapézio é

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 - b^2) \tan \alpha \tan \beta}{2(\tan \alpha + \tan \beta)} &= \frac{(36^2 - 400) \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{896 \sqrt{3} (\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{448(3 - \sqrt{3})}{2} = 224(3 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Exercício 68 Considere o triângulo da figura seguinte, em que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm e que $\hat{A} = 120^\circ$.

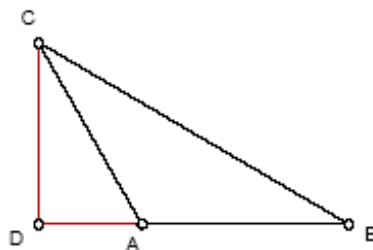


Determine o volume do sólido que se obtém, quando o triângulo $[ABC]$ dá uma volta completa em torno de:

1. recta AB
2. recta BC
3. recta AC

Resolução

1. Consideremos a figura seguinte:



Quando o triângulo $[ABC]$ dá uma volta completa, em torno da recta AB , gera um cone de altura \overline{DB} , ao qual é retirado um cone de altura \overline{AD} . A base comum é um círculo de raio \overline{CD} .

Consideremos o triângulo rectângulo $[ACD]$. Como $\hat{CAB} = 120^\circ$, temos que $\hat{CAD} = 60^\circ$.

Então, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CA}}$. Logo, $\overline{AD} = 5$ cm. Mas, $\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$.

Então, $\overline{CD} = 5\sqrt{3}$ cm, pelo que o volume do cone gerado por $[BCD]$ é, (em cm^3):

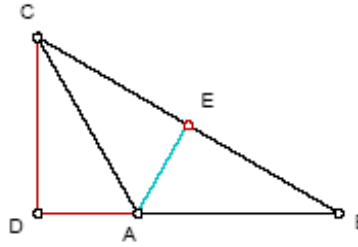
$$V_1 = \frac{\pi}{3} \times (5\sqrt{3})^2 \times (5 + 10) = 375\pi$$

O volume do cone gerado por $[ACD]$ é, (em cm^3):

$$V_2 = \frac{\pi}{3} \times (5\sqrt{3})^2 \times 5 = 125\pi$$

Logo, o volume do sólido, em cm^3 , é $V = 375\pi - 125\pi = 250\pi$.

2. Como o triângulo é isósceles, neste caso, o volume pedido é $250\pi \text{ cm}^3$.
3. Consideremos a figura seguinte, onde $[AE]$ é uma altura de $[ABC]$:

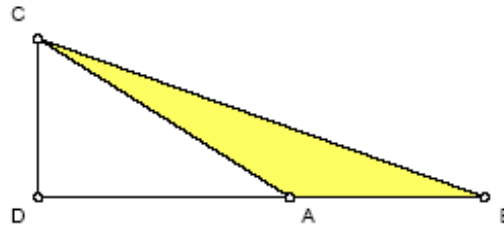


É fácil verificar que os triângulos $[ACD]$ e $[ACE]$ são iguais. Então, $\overline{AE} = 5$ cm e $\overline{CE} = 5\sqrt{3}$ cm.

O triângulo $[ABC]$, quando roda em torno da recta BC , define dois cones iguais unidos pelas bases, pelo que o volume do sólido é o dobro do volume de um desses cones. Logo, o volume do sólido, em cm^3 , é:

$$V = \frac{2\pi}{3} \times 5^2 \times 5\sqrt{3} = \frac{250\pi}{3}\sqrt{3}$$

Exercício 69 Considere o triângulo da figura seguinte, em que temos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\widehat{CAB} = \alpha$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.



Determine o volume do sólido que se obtém, quando o triângulo $[ABC]$ dá uma volta completa em torno de:

1. recta AB
2. recta AC
3. recta BC

Resolução

1. Quando o triângulo $[BCD]$ dá uma volta completa, em torno da recta AB , define um cone de altura \overline{BD} e cuja base é um círculo de raio \overline{CD} , enquanto que o triângulo $[ACD]$ define um cone com a mesma base do anterior, mas de altura \overline{AD} . O volume V , do sólido gerado por $[ABC]$, é a diferença entre os volumes dos dois cones referidos.

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{CD} = b \sin \alpha$$

$$\text{Então, } \begin{cases} V_1 = \frac{\pi b^2 \sin^2 \alpha}{3} \times \overline{BD} \\ V_2 = \frac{\pi b^2 \sin^2 \alpha}{3} \times \overline{AD} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{\pi b^2 \sin^2 \alpha}{3} \times \overline{BD} - \frac{\pi b^2 \sin^2 \alpha}{3} \times \overline{AD} \\ &= \frac{\pi b^2 \sin^2 \alpha}{3} \times (\overline{BD} - \overline{AD}) = \frac{\pi b^2 c \sin^2 \alpha}{3} \end{aligned}$$

No exercício anterior, tínhamos $c = b = 10$ cm e $\hat{A} = 120^\circ$. Substituindo, na fórmula anterior, obtemos:

$$V = \frac{\pi \times 100 \times 10 \sin^2 120^\circ}{3} = 250\pi$$

2. Relativamente à alínea anterior, basta trocar o papel das letras B e C . Então:

$$V = \frac{\pi bc^2 \sin^2 \alpha}{3}$$

3. A área do triângulo $[ABC]$ pode ser calculada de duas maneiras seguintes, obtendo-se, por um lado, $\frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2}$ e, por outro, $\frac{\overline{BC} \times h}{2}$, onde h é a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao lado $[BC]$.

Então, $h = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{\overline{BC}}$, pelo que o volume pretendido é dado por

$$V = \frac{\pi}{3} \times \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{CD}^2}{\overline{BC}^2} \times \overline{BC} = \frac{\pi c^2 b^2 \sin^2 \alpha}{3a} = \frac{\pi c^2 b^2 \sin^2 \alpha}{3\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}$$

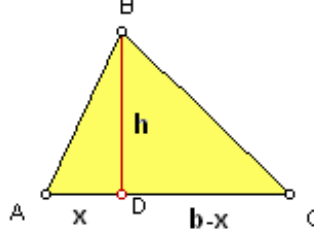
No problema anterior, tínhamos $b = 10, c = 10, \alpha = 120^\circ$. Substituindo estes valores na expressão anterior, obtemos

$$V = \frac{\pi \times 100 \times 100 \times \frac{3}{4}}{3\sqrt{100 + 100 + 200 \times \frac{1}{2}}} = \frac{\pi \times 100 \times 75}{3\sqrt{300}} = \frac{\pi \times 100 \times 75}{3 \times 10\sqrt{3}} = \frac{250\pi}{\sqrt{3}} = \frac{250\pi\sqrt{3}}{3}$$

Problema 70 (*Fórmula de Heron*) Determine a área dum triângulo de lados a, b, c .

Resolução

Consideremos o triângulo da figura seguinte:



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = (b-x)^2 + h^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c^2 - x^2 = h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + c^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h = \pm \sqrt{(c+x)(c-x)} \\ x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $h > 0$, temos $h = \sqrt{(c+x)(c-x)}$, com $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.
Logo,

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(c+x)(c-x)} = \sqrt{\left(c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \left(c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2b} \times \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{2b} \times \frac{a^2 - (b-c)^2}{2b}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b}} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2b} \end{aligned}$$

Então, a área do triângulo é

$$\begin{aligned} \frac{bh}{2} &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \left(\frac{b+c-a}{2}\right) \left(\frac{a+b-c}{2}\right) \left(\frac{a-b+c}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)} \end{aligned}$$

Se representarmos o semiperímetro por s , então a área do triângulo de lados a, b, c é dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Esta fórmula é conhecida por fórmula de Heron (ou Herão, como começou a ser chamado). No entanto, segundo alguns autores, já seria conhecida por Arquimedes, o qual viveu vários séculos antes de Heron.

Exercício 71 Determine a área dum triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm, aplicando a fórmula de Heron e, depois, determine as três alturas do triângulo.

Resolução

Como $s = \frac{5+6+7}{2}$ cm = 9 cm, temos $A = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2}$ cm² = $6\sqrt{6}$ cm²

$$\text{Então, } \begin{cases} \frac{5h_1}{2} = 6\sqrt{6} \\ \frac{6h_2}{2} = 6\sqrt{6} \\ \frac{7h_3}{2} = 6\sqrt{6} \end{cases} \text{ . Logo, } \begin{cases} h_1 = \frac{12\sqrt{6}}{5} \\ h_2 = 2\sqrt{6} \\ h_3 = \frac{12\sqrt{6}}{7} \end{cases} \text{ .}$$

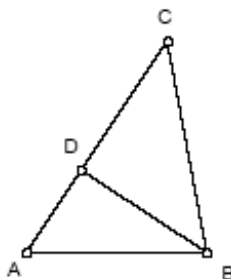
As alturas medem $\frac{12\sqrt{6}}{5}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm e $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ cm.

Exercício 72 Considere um triângulo $[ABC]$ tal que $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 8$ cm e $\overline{AC} = 9$ cm. Determine:

1. A área do triângulo.
2. O seno dos ângulos internos do triângulo.

Resolução

1. $s = \frac{7+8+9}{2}$ cm = 12 cm. Então, a área do triângulo é $\sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3}$ cm² = $12\sqrt{5}$ cm².
2. Calculemos a altura relativa ao vértice B :



$$\frac{9h}{2} = 12\sqrt{5} \iff h = \frac{8\sqrt{5}}{3} \text{ . Logo, } \sin A = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{3}}{7} = \frac{8\sqrt{5}}{21} \text{ e } \sin C = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{3}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ .}$$

$$\text{Altura relativa ao vértice } C: \frac{7h_1}{2} = 12\sqrt{5} \iff h_1 = \frac{24\sqrt{5}}{7}$$

$$\text{Logo, } \sin B = \frac{\frac{24\sqrt{5}}{7}}{8} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \text{ .}$$

Exercício 73 Determine a área dum triângulo equilátero de lado l .

Resolução

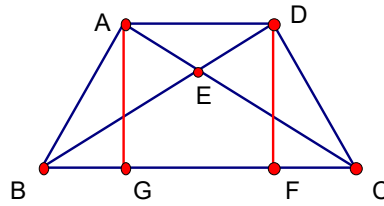
Como $s = \frac{3l}{2}$, temos

$$A = \sqrt{\frac{3l}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{2}} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

É claro que este exercício pode ser resolvido de maneira muito simples, traçando uma altura do triângulo e usando o Teorema de Pitágoras: $\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$, donde vem $h^2 = \frac{3l^2}{4}$. Então, $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, pelo que a área do triângulo é dada por $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Também podemos usar a trigonometria: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{h}{l}$, donde vem $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ e $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Problema 74 Considere o trapézio $[ABCD]$, com $\overline{AB} = \overline{AD} = 6$ cm, $\widehat{ABC} = \widehat{DCB} = \frac{\pi}{3}$.



Determine a área de cada um dos quatro triângulos em que as diagonais dividem o trapézio.

Resolução

Seja h a altura do trapézio (em cm). Então, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{h}{6}$, donde vem $h = 6 \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$. E, de $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{BG}}{\overline{AB}}$, vem $\overline{BG} = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 3 = \overline{FC}$.

A área do triângulo $[ABD]$, em cm^2 , é dada por $A_1 = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$. A área do triângulo $[ACD]$ também é igual a $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Dos resultados já obtidos, vem $\overline{BC} = (6 + 3 + 3) \text{ cm} = 12 \text{ cm}$.

A área do trapézio, em cm^2 , é $A_T = \frac{12 + 6}{2} \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

Seja A_2 a área do triângulo $[ADE]$.

Então, a área do triângulo $[BCE]$ é $\lambda^2 A_2$, onde λ é a razão de semelhança entre os triângulos $[BCE]$ e $[ADE]$, ou seja, $\lambda = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{12}{6} = 2$.

Então, $2 \times 9\sqrt{3} - A_2 + 4A_2 = 27\sqrt{3}$, donde se conclui que $A_2 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$ e que a área do triângulo $[BCE]$ é $4A_2$, ou seja, $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Conclusão:

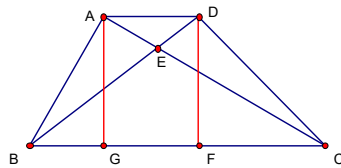
A área do triângulo $[ADE]$ é $3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A área do triângulo $[ACE]$ é $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A área do triângulo $[ABE]$ é $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A área do triângulo $[CDE]$ é $6\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Problema 75 Considere o trapézio, em que se verifica $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\widehat{ABC} = \alpha$, $\widehat{DCB} = \beta$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.



Determine a área de cada um dos quatro triângulos em que as diagonais dividem o trapézio.

Resolução

Seja h a altura do trapézio. Então, $\sin \alpha = \frac{h}{a}$, donde vem $h = a \sin \alpha$. E, de $\cos \alpha = \frac{\overline{BG}}{a}$, vem $\overline{BG} = a \cos \alpha$.

A área do triângulo $[ABD]$ é dada por $A_1 = \frac{ab \sin \alpha}{2}$. A área do triângulo $[ACD]$ (também) é igual a $\frac{ab \sin \alpha}{2}$, porque tem a mesma base e a mesma altura do triângulo $[ABD]$.

Por outro lado, $\tan \beta = \frac{h}{\overline{FC}}$, donde vem $\overline{FC} = \frac{h}{\tan \beta} = \frac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta}$.

Então, $\overline{BC} = b + a \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta}$.

A área do trapézio é $A_T = \frac{2b + a \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta}}{2} \times a \sin \alpha$.

Então,

$$A_T = \frac{2b \sin \beta + a \sin \beta \cos \alpha + a \sin \alpha \cos \beta}{2 \sin \beta} \times a \sin \alpha = \frac{2ab \sin \alpha \sin \beta + a^2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}$$

Seja A_2 a área do triângulo $[ADE]$.

Então, a área do triângulo $[BCE]$ é $\lambda^2 A_2$, onde λ é a razão de semelhança entre os triângulos $[BCE]$ e $[ADE]$, ou seja,

$$\lambda = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{b + a \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta}}{b} = 1 + \frac{a \sin \beta \cos \alpha + a \sin \alpha \cos \beta}{b \sin \beta} = 1 + \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{b \sin \beta}$$

Começemos por observar que a área do trapézio $[ABCD]$ pode ser obtida, somando as áreas dos triângulos $[ABD]$, $[ACD]$ e $[BCE]$, desde que se desconte a área de $[ADE]$, por ter sido contada duas vezes.

$$\text{Então, } 2 \times \frac{ab \sin \alpha}{2} - A_2 + \lambda^2 A_2 = \frac{2ab \sin \alpha \sin \beta + a^2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{2 \sin \beta}$$

$$2ab \sin \alpha - 2A_2 + 2\lambda^2 A_2 = \frac{2ab \sin \alpha \sin \beta + a^2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

$$2(\lambda^2 - 1) A_2 = \frac{2ab \sin \alpha \sin \beta + a^2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta} - \frac{2ab \sin \alpha \sin \beta}{\sin \beta}$$

$$2(\lambda^2 - 1) A_2 = \frac{a^2 \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

Começemos por calcular $\lambda^2 - 1$:

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 1 &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) = \left(1 + \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{b \sin \beta} - 1\right) \left(1 + \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{b \sin \beta} + 1\right) \\ &= \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{b \sin \beta} \times \frac{2b \sin \beta + a \sin(\alpha + \beta)}{b \sin \beta} = \frac{a \sin(\alpha + \beta) (2b \sin \beta + a \sin(\alpha + \beta))}{b^2 \sin^2 \beta}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{\frac{a^2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}}{2(\lambda^2 - 1)} = \frac{\frac{a^2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}}{2 \times \frac{a \sin(\alpha + \beta) (2b \sin \beta + a \sin(\alpha + \beta))}{b^2 \sin^2 \beta}} \\ &= \frac{a^2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \times \frac{b^2 \sin^2 \beta}{2a \sin(\alpha + \beta) (2b \sin \beta + a \sin(\alpha + \beta))} \\ &= \frac{a \sin \alpha}{1} \times \frac{b^2 \sin \beta}{2(2b \sin \beta + a \sin(\alpha + \beta))} = \frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin(\alpha + \beta)}\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= 1 + \lambda^2 - 1 = 1 + \frac{a \sin(\alpha + \beta) (2b \sin \beta + a \sin(\alpha + \beta))}{b^2 \sin^2 \beta} \\ &= \frac{b^2 \sin^2 \beta + a \sin(\alpha + \beta) (2b \sin \beta + a \sin(\alpha + \beta))}{b^2 \sin^2 \beta} \\ &= \frac{b^2 \sin^2 \beta + a \sin(\alpha + \beta) (2b \sin \beta + a \sin(\alpha + \beta))}{b^2 \sin^2 \beta} \\ &= \frac{b^2 \sin^2 \beta + 2ab \sin \beta \sin(\alpha + \beta) + a^2 \sin^2(\alpha + \beta)}{b^2 \sin^2 \beta}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\lambda^2 A_2 &= \frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin(\alpha + \beta)} \times \frac{b^2 \sin^2 \beta + 2ab \sin \beta \sin(\alpha + \beta) + a^2 \sin^2(\alpha + \beta)}{b^2 \sin^2 \beta} \\ &= \frac{a \sin \alpha}{4b \sin \beta + 2a \sin(\alpha + \beta)} \times \frac{b^2 \sin^2 \beta + 2ab \sin \beta \sin(\alpha + \beta) + a^2 \sin^2(\alpha + \beta)}{\sin \beta}\end{aligned}$$

A área do triângulo $[ADE]$ é

$$\frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin(\alpha + \beta)}$$

A área do triângulo $[BCE]$ é

$$\frac{a \sin \alpha}{4b \sin \beta + 2a \sin(\alpha + \beta)} \times \frac{b^2 \sin^2 \beta + 2ab \sin \beta \sin(\alpha + \beta) + a^2 \sin^2(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

A área do triângulo $[ABE]$ é

$$\frac{ab \sin \alpha}{2} - \frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)}$$

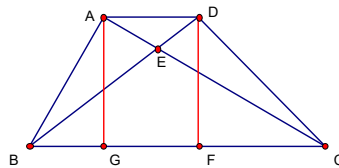
A área do triângulo $[CDE]$ é

$$\frac{ab \sin \alpha}{2} - \frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)}$$

No exercício anterior, tínhamos $a = b = 6$, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$. Substituindo, vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)} = \frac{216 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}}{24 \sin \frac{\pi}{3} + 12 \sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{18 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}}{2 \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{18\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt{3} \\ \frac{a \sin \alpha}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)} \times \frac{b^2 \sin^2 \beta + 2ab \sin \beta \sin (\alpha + \beta) + a^2 \sin^2 (\alpha + \beta)}{\sin \beta} = 12\sqrt{3} \\ \frac{ab \sin \alpha}{2} - \frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)} = 6\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Problema 76 Considere o trapézio seguinte, em que supomos $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{CD} = c$, $\widehat{ABC} = \alpha$, com $a < c$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Determine a área de cada um dos quatro triângulos em que as diagonais dividem o trapézio.

Resolução

A diferença, em relação ao problema anterior, é conhecermos $c = \overline{CD}$, em vez de conhecermos $\beta = \widehat{BCD}$.

Seja h a altura do trapézio. Então, $\sin \alpha = \frac{h}{a}$, donde vem $h = a \sin \alpha$. E, de $\cos \alpha = \frac{\overline{BG}}{a}$, vem $\overline{BG} = a \cos \alpha$.

A área do triângulo $[ABD]$ é dada por $A_1 = \frac{ab \sin \alpha}{2}$. A área do triângulo $[ACD]$ (também) é igual a $\frac{ab \sin \alpha}{2}$.

Seja $\beta = \widehat{BCD}$. Então, $\sin \beta = \frac{h}{\overline{CD}} = \frac{h}{c} = \frac{a \sin \alpha}{c}$, donde vem $\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{c^2}}$.

Mas, $\overline{CF} = \overline{CD} \cos \beta = c \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{c^2}} = \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$.

Então, $\overline{BC} = b + a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}$.

A área de $[BCD]$ é $\frac{(b + a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}) a \sin \alpha}{2}$.

A área de $[ABD]$ é $\frac{bh}{2}$, ou seja, $\frac{ab \sin \alpha}{2}$.

A área do trapézio é $A_T = \frac{2b + a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{2} \times a \sin \alpha$.

Então,

$$A_T = \frac{2ab + a^2 \cos \alpha + a \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{2} \times \sin \alpha$$

Seja A_2 a área do triângulo $[ADE]$.

Então, a área do triângulo $[BCE]$ é $\lambda^2 A_2$, onde λ é a razão de semelhança entre os triângulos $[BCE]$ e $[ADE]$, ou seja

$$\lambda = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{b + a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{b}$$

Então,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left(\frac{b + a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{b} \right)^2 = \left(1 + \frac{a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{b} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{c^2 + a^2 \cos(2\alpha) + 2ab \cos \alpha + (2b + 2a \cos \alpha) \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{b^2} \end{aligned}$$

Só temos o resultado final, por falta de espaço.

$$\text{Logo, } \lambda^2 - 1 = \frac{c^2 + a^2 \cos(2\alpha) + 2ab \cos \alpha + (2b + 2a \cos \alpha) \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{b^2}$$

$$\text{Então, } 2 \times \frac{ab \sin \alpha}{2} - A_2 + \lambda^2 A_2 = \frac{2ab + a^2 \cos \alpha + a \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{2} \times \sin \alpha. \text{ Logo:}$$

$$\begin{aligned} 2ab \sin \alpha - 2A_2 + 2\lambda^2 A_2 &= \left(2ab + a^2 \cos \alpha + a \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha} \right) \sin \alpha \\ 2(\lambda^2 - 1) A_2 &= \left(2ab + a^2 \cos \alpha + a \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha} \right) \sin \alpha - 2ab \sin \alpha \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\left(a^2 \cos \alpha + a \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha} \right) \sin \alpha}{\frac{2c^2 + 2a^2 \cos(2\alpha) + 4ab \cos \alpha + (4b + 4a \cos \alpha) \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{b^2}} \\ A_2 &= \frac{\left(a^2 \cos \alpha + a \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha} \right) b^2 \sin \alpha}{2c^2 + 2a^2 \cos(2\alpha) + 4ab \cos \alpha + (4b + 4a \cos \alpha) \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}} \end{aligned}$$

O valor de $\lambda^2 A_2$ pode ser dado por

$$\begin{aligned}\lambda^2 A_2 &= \frac{2ab + a^2 \cos \alpha + a\sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}}{2} \times \sin \alpha - 2 \times A_1 + A_2 \\ &= \frac{\left(2ab + a^2 \cos \alpha + a\sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}\right) \sin \alpha}{2} - \frac{2ab \sin \alpha}{2} + A_2 \\ &= \frac{a \left(a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}\right) \sin \alpha}{2} + A_2\end{aligned}$$

A área do triângulo $[ADE]$ é

$$\frac{ab^2 \left(a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}\right) \sin \alpha}{4ab \cos \alpha + (4b + 4a \cos \alpha) \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha} + 2a^2 \cos(2\alpha) + 2c^2}$$

A área do triângulo $[BCE]$ é

$$\frac{a \left(a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}\right) \sin \alpha}{2} + A_2$$

A área do triângulo $[ABE]$ é

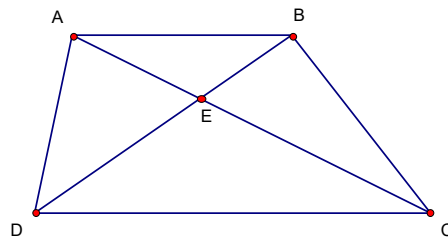
$$\frac{ab \sin \alpha}{2} - \frac{ab^2 \left(a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}\right) \sin \alpha}{4ab \cos \alpha + (4b + 4a \cos \alpha) \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha} + 2a^2 \cos(2\alpha) + 2c^2}$$

A área do triângulo $[CDE]$ é

$$\frac{ab \sin \alpha}{2} - \frac{ab^2 \left(a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}\right) \sin \alpha}{4ab \cos \alpha + (4b + 4a \cos \alpha) \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha} + 2a^2 \cos(2\alpha) + 2c^2}$$

Os problemas anteriores foram inspirados num problema apresentado por José Paulo Viana, na revista da APM, *Educação e Matemática*, que apresentamos a seguir:

Problema 77 A Ana e a Rita tinham a tarefa de medir a área dos quatro triângulos em que as diagonais dividem um dado trapézio. A Ana foi a primeira a fazer as medições, tendo concluído que as áreas dos triângulos $[ADE]$ e $[ABE]$ mediam 60 cm^2 e 40 cm^2 , respectivamente. Quando entregou o trapézio com as medições efectuadas à Rita, esta exclamou, com ar feliz: "Já não preciso de fazer qualquer medição". A Rita tem razão?



Resolução

Se as áreas dos triângulos $[ADE]$ e $[ABE]$ medem 60 cm^2 e 40 cm^2 , respectivamente, então a área do triângulo $[ABD]$ mede 100 cm^2 .

Como o triângulo $[ABC]$ tem a mesma base e a mesma altura do triângulo $[ABD]$, então a área do triângulo $[ABC]$ mede 100 cm^2 , pelo que a área do triângulo $[BCE]$ mede 60 cm^2 .

Passemos à questão de determinar a área do triângulo $[CDE]$:

Os triângulos $[CDE]$ e $[ABE]$ são semelhantes, porque têm, de um para o outro, os ângulos iguais. A razão de semelhança é a razão entre as alturas dos dois triângulos.

Só que é mais fácil considerar os triângulos $[ADE]$ e $[ABE]$. Podemos considerar uma base comum aos dois triângulos: $[AE]$.

A razão entre h , a altura do triângulo $[ADE]$, e h_1 , a altura do triângulo $[ABE]$, é a razão entre as suas áreas, porque os dois triângulos têm a mesma base $[AE]$. Então, $\frac{h}{h_1} = \frac{60}{40}$, donde se conclui que $h = \frac{3}{2}h_1$. Logo, a altura do triângulo $[CDE]$ também é $\frac{3}{2}h_1$. Note-se que todas as alturas estão a ser consideradas relativamente a $[AE]$ ou $[AC]$.

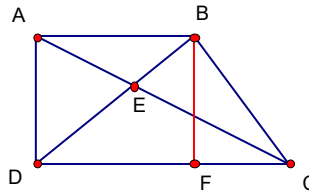
Então, representando por r a razão de semelhança, temos

$$r = \frac{\frac{3}{2}h_1}{h_1} = \frac{3}{2}$$

Logo, a razão entre as áreas dos triângulos $[CDE]$ e $[ABE]$ é $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, ou seja, $\frac{9}{4}$. Então, a área do triângulo $[CDE]$ mede $\frac{9}{4} \times 40 \text{ cm}^2$, ou seja, 90 cm^2 .

Registe-se que a área do trapézio é $60 \text{ cm}^2 + 40 \text{ cm}^2 + 60 \text{ cm}^2 + 90 \text{ cm}^2$, isto é, 250 cm^2 . A área do triângulo $[BCD]$ é 150 cm^2 , tendo-se que o quociente entre as áreas dos triângulos $[BCD]$ e $[ABD]$ é $\frac{3}{2}$, valor este que é a razão entre \overline{CD} e \overline{AB} , uma vez que os dois triângulos têm a mesma altura.

Problema 78 Suponhamos que temos um trapézio $[ABCD]$, rectângulo em A , como na figura seguinte, tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = 5 \text{ cm}$ e $\overline{AD} = 4 \text{ cm}$. Determine as áreas dos quatro triângulos em que as diagonais dividem o trapézio.

**Resolução**

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[BCF]$, temos $4^2 \text{ cm}^2 + \overline{CF}^2 = 5^2 \text{ cm}^2$, donde se conclui que $\overline{CF} = 3 \text{ cm}$.

Então, $\overline{CD} = 8 \text{ cm}$ e A_T , a área do trapézio, é dada por $A_T = \frac{8+5}{2} \times 4 \text{ cm}^2$, ou seja, $A_T = 26 \text{ cm}^2$.

As áreas dos triângulos $[ABD]$ e $[ABC]$ são as duas iguais a $\frac{5}{2} \times 4 \text{ cm}^2$, ou seja, 10 cm^2 .

Os triângulos $[ABE]$ e $[CDE]$ são semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{8}{5}$, pelo que o quociente entre a área do triângulo $[CDE]$ e a área do triângulo $[ABE]$ é $\frac{64}{25}$.

Representando a área do triângulo $[ABE]$ por $K \text{ cm}^2$, temos:

$$10 + 10 - K + \frac{64}{25}K = 26 \iff 500 - 25K + 64K = 650 \iff 39K = 150 \iff K = \frac{50}{13}$$

A área do triângulo $[ABE]$ é $\frac{50}{13} \text{ cm}^2$.

A área do triângulo $[CDE]$ é $\frac{64}{25} \times \frac{50}{13} \text{ cm}^2 = \frac{128}{13} \text{ cm}^2$.

A área do triângulo $[ADE]$ é $10 \text{ cm}^2 - \frac{50}{13} \text{ cm}^2 = \frac{80}{13} \text{ cm}^2$.

A área do triângulo $[BCE]$ é $\frac{80}{13} \text{ cm}^2$.

Podemos chegar a estes valores, substituindo num dos problemas anteriores, a por 4 cm, b por 5 cm, α por $\frac{\pi}{2}$ e β por $\arcsin \frac{4}{5}$, notando que os vértices B e D estão trocados.

A área do triângulo $[ADE]$:

$$\frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)} = \frac{100 \sin \beta}{20 \sin \beta + 8 \cos \beta} = \frac{50}{13}$$

A área do triângulo $[BCE]$:

$$\frac{a \sin \alpha}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)} \times \frac{b^2 \sin^2 \beta + 2ab \sin \beta \sin (\alpha + \beta) + a^2 \sin^2 (\alpha + \beta)}{\sin \beta} = \frac{128}{13}$$

A área do triângulo $[ABE]$:

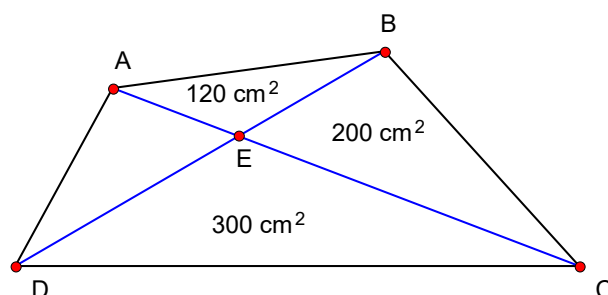
$$\frac{ab \sin \alpha}{2} - \frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)} = \frac{80}{13}$$

A área do triângulo $[CDE]$:

$$\frac{ab \sin \alpha}{2} - \frac{ab^2 \sin \alpha \sin \beta}{4b \sin \beta + 2a \sin (\alpha + \beta)} = \frac{80}{13}$$

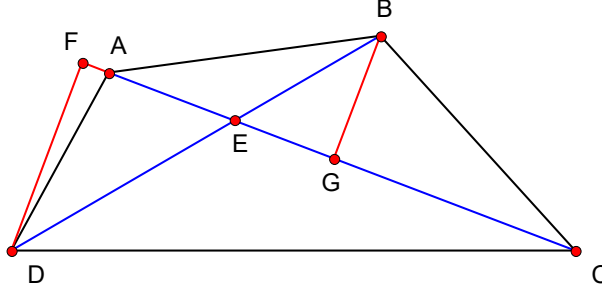
Alguns meses depois deste Capítulo ter sido escrito, nas Olimpíadas da Matemática, promovidas pela Sociedade Portuguesa de Matemática, surgiu a seguinte questão:

Problema 79 *O quadrilátero indicado na figura seguinte está dividido em quatro triângulos. As áreas de três desses triângulos são 120 cm^2 , 200 cm^2 e 300 cm^2 . Determine a área do quarto triângulo.*



Resolução

Consideremos a seguinte figura:



O segmento de recta $[BG]$ é altura dos triângulos $[ABE]$, $[ABC]$ e $[EBC]$.

O segmento de recta $[DF]$ é altura dos triângulos $[ADE]$, $[DEC]$ e $[ADC]$.

Recordamos que, em triângulos com a mesma altura, a razão entre as áreas é igual à razão entre as bases.

Suponhamos que $\overline{AE} = x$ cm, que $\overline{EC} = y$ cm e que a área do triângulo $[ADE]$ é α cm². Então, considerando os triângulos $[ABE]$ e $[EBC]$, temos

$$\frac{200}{120} = \frac{y}{x} \iff \frac{5}{3} = \frac{y}{x}$$

Considerando os triângulos $[ADE]$ e $[DEC]$, vem

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{300}{y} \iff \frac{y}{x} = \frac{300}{\alpha}$$

Então, $\frac{300}{\alpha} = \frac{5}{3}$, donde vem $\alpha = 180$. Logo, a área do triângulo $[ADE]$ é 180 cm².

Outra resolução

Consideremos os quatro triângulos em que ficou dividido o quadrilátero. É conhecido que a área dum paralelogramo $[ABCD]$ é dada por $\overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin A$. Em vez de $\sin A$, podemos escrever $\sin B$ ou $\sin C$ ou $\sin D$, porque os ângulos são iguais ou suplementares.

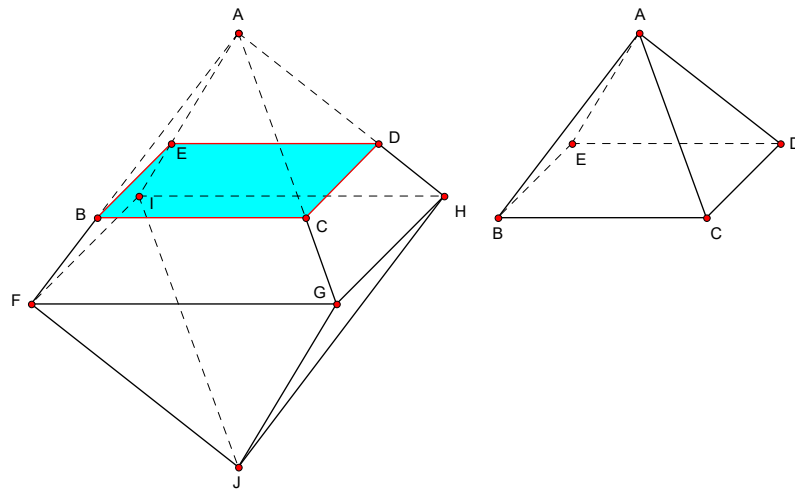
A área dum triângulo é metade da área dum paralelogramo, pelo que a área dum triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B$.

Seja α a amplitude do ângulo AED . Então, relativamente à figura, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{DE} \times \sin \alpha = A_1 \\ \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{BE} \times \sin \alpha = 120 \\ \frac{1}{2} \times \overline{BE} \times \overline{CE} \times \sin \alpha = 200 \\ \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{CE} \times \sin \alpha = 300 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}} = \frac{A_1}{120} \\ \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}} = \frac{3}{2} \end{array} \right. \implies \frac{A_1}{120} = \frac{3}{2} \implies A_1 = 180$$

Logo, a área do triângulo $[ADE]$ é de 180 cm².

Exercício 80 Considere um octaedro regular com 6 cm de aresta. O octaedro sofreu um corte, como se indica na figura:



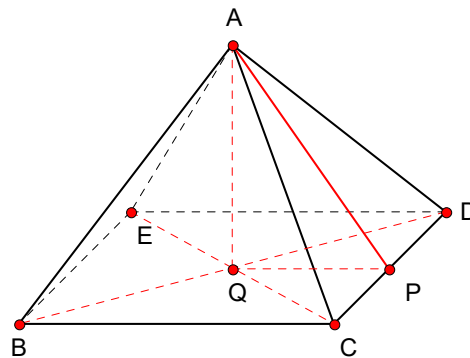
O plano $BCDE$ é paralelo ao plano $FGHI$. Suponha que $\overline{DH} = a$ cm. Determine, em função de a , a área e o volume da pirâmide retirada.

Resolução

Este exercício foi adaptado duma questão colocada num exame de 12º Ano de Matemática.

Um octaedro regular é constituído por 8 faces que são triângulos equiláteros. Então, $[BCDE]$ e $[FGHI]$ são quadrados.

E $\overline{AD} = (6 - a)$ cm, pelo que a área da base da pirâmide é $(6 - a)^2$ cm². É claro que tem de ser $0 \leq a \leq 6$.



E as faces laterais da pirâmide também são triângulos equiláteros, pelo que $\overline{AP} = (3 - \frac{a}{2})\sqrt{3}$ cm. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo (rectângulo) $[APQ]$, vem

$$\overline{AQ}^2 = 3 \left(3 - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(3 - \frac{a}{2}\right)^2 = 2 \left(3 - \frac{a}{2}\right)^2$$

Então, $\overline{DJ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, pelo que o volume da pirâmide é de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 \sqrt{3} \times \frac{a}{\sqrt{3}}$, ou seja, $\frac{a^3}{6}$.

Logo, o volume da pirâmide é um sexto do volume do cubo.

Logo, o volume do outro sólido em que ficou dividido o cubo é $\frac{5a^3}{6}$.

Outra resolução

Suponhamos que a aresta do cubo mede uma unidade (de comprimento).

Então, o comprimento de cada diagonal facial é $\sqrt{2}$.

Logo, a altura do triângulo equilátero $[ACH]$ é $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

A área do triângulo equilátero $[ACH]$ é $(\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$, ou seja, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Seja J o baricentro de $[ACH]$. Então, $\overline{AJ} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ora, $\overline{JD}^2 + \overline{AJ}^2 = \overline{AD}^2$. Então, $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \overline{AJ}^2 = 1^2$. Logo, $\overline{AJ}^2 = \frac{3}{9}$. Então, $\overline{AJ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, a altura da pirâmide é $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Então, V , o volume da pirâmide, é dado por

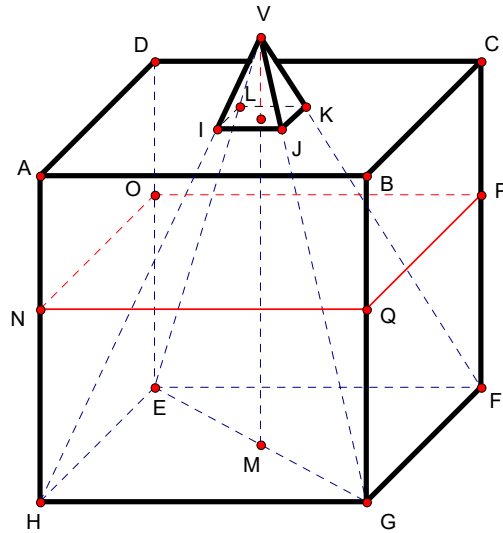
$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{3 \times 2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

No caso geral, sendo a o comprimento da aresta do cubo, o volume da pirâmide vem multiplicado por a^3 , uma vez que os dois cubos e as duas pirâmides são semelhantes, sendo a o valor da razão de semelhança.

Exercício 82 Considere um cubo com 10 cm de aresta e uma pirâmide regular cuja base é uma das faces do cubo. A secção produzida na pirâmide pela face do cubo estritamente paralela à base da pirâmide tem uma área de 4 cm².

1. Determine a altura da pirâmide.
2. Determine o volume da pirâmide.
3. Determine o volume do maior tronco de pirâmide contido no cubo.
4. Suponha que o cubo era oco e formado por 5 faces de vidro, por termos retirado a face superior. Suponha que a pirâmide é maciça e que não absorve água. Enchemos de água a parte livre do cubo e, cuidadosamente, retiramos a pirâmide de modo a não derramar água do cubo. Depois, colocamos o cubo numa mesa (de tampo horizontal) e deixamos a superfície da água ficar em

equilíbrio. Determine a altura da água contida no cubo.



Resolução

1. A pirâmide de vértice V e base $[IJKL]$ é semelhante à pirâmide de vértice V e base $[EFGH]$.

Ora, $[IJKL]$ é um quadrado com 2 cm de lado, uma vez que a sua área é de 4 cm². Então, a razão de semelhança entre as duas pirâmides é 5. Seja h cm a altura da pirâmide menor. Então, a altura da pirâmide maior é $5h$.

Então, $5h - h = 10$, donde se conclui que $h = \frac{5}{2}$. Então, $h = \frac{25}{2}$, pelo que a altura da pirâmide maior é 12,5 cm.

- 2.

$$V = \frac{1}{3} \times 10^2 \times \frac{25}{2} \text{ cm}^3 = \frac{1250}{3} \text{ cm}^3$$

3. V_1 , o volume da pirâmide menor, é dado por

$$V_1 = \frac{1}{3} \times 2^2 \times \frac{5}{2} \text{ cm}^3 = \frac{10}{3} \text{ cm}^3 = \frac{V}{125}$$

Logo, o volume do troco de pirâmide é

$$V - V_1 = \frac{1250}{3} \text{ cm}^3 - \frac{10}{3} \text{ cm}^3 = \frac{1240}{3} \text{ cm}^3$$

4. O volume do cubo é 1000 cm³. O volume do tronco de pirâmide é $\frac{1240}{3}$ cm³.

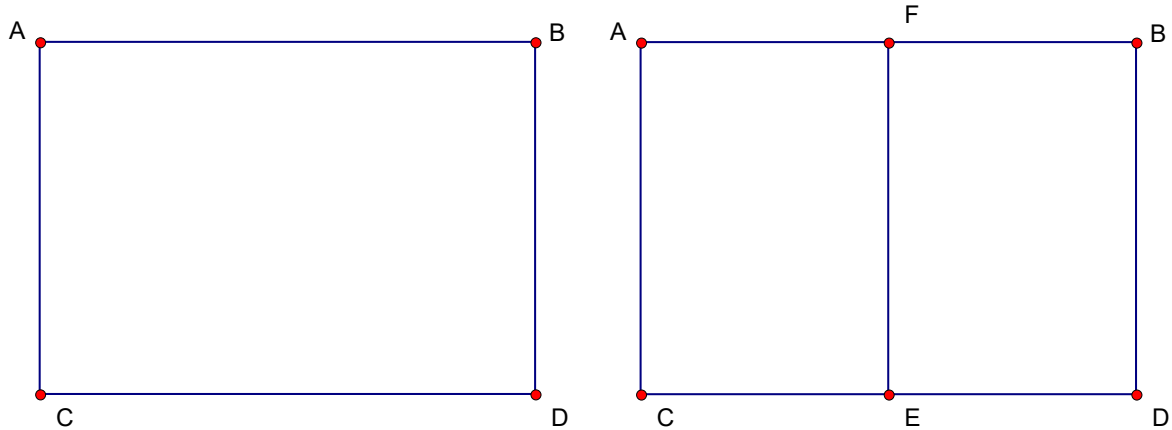
Então, o volume da água é $1000 \text{ cm}^3 - \frac{1240}{3} \text{ cm}^3$, ou seja, $\frac{1760}{3}$ cm³.

Então, a altura da água é $\frac{\frac{1760}{3} \text{ cm}^3}{100 \text{ cm}^2}$, ou seja, $\frac{88}{15}$ cm.

Breve história do papel A₄

Uma folha de papel A₄ é um rectângulo de 297 mm por 210 mm. Porquê?

Comecemos por notar que uma folha de papel A₄ resulta da divisão duma folha de papel A₃ em duas partes iguais, dividindo ao meio a maior dimensão, como se mostra na figura seguinte:



Por sua vez, o formato A₃ resulta do formato A₂, sendo que tudo começa no formato A₀.

Se tivermos um documento (ou imagem) em papel A₄ e quisermos ampliá-lo para papel A₃, convém que todo o documento (ou imagem) fique visível no novo formato. Então os dois formatos devem ser rectângulos semelhantes. Mas, voltemos à figura apresentada.

Pretendemos que os rectângulos [ABCD] e [ACEF] devam ser semelhantes, pelo que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$.

Mas, $\overline{AB} = 2 \times \overline{AF}$, pelo que $2 \times \overline{AF}^2 = \overline{AC}^2$. Logo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \sqrt{2}$$

Vamos definir o formato A₀ como um rectângulo semelhante aos anteriores e com 1 m² de área. Então, devemos ter $x^2\sqrt{2} = 1 \wedge x > 0$, pelo que $x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Ora $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0,8408964155$ e $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} \approx 1,189207115$, pelo que o formato A₀ é um rectângulo com as dimensões (aproximadas) de 84,09 cm × 118,92 cm.

Formato A₀: 118,92 cm × 84,09 cm

Formato A₁: 84,09 cm × 59,46 cm

Formato A₂: 59,46 cm × 42,04 cm

Formato A₃: 42,04 cm × 29,73 cm

Formato A₄: 29,73 cm × 21,02 cm

Logo, o papel A₄ tem as dimensões 297 mm por 210 mm.

Recorrendo ao algoritmo da fracções contínuas, temos:

$$\alpha_0 = \sqrt{2} \implies a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - \lfloor \sqrt{2} \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \implies a_1 = \lfloor 1 + \sqrt{2} \rfloor = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - \lfloor 1 + \sqrt{2} \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \alpha_1$$

Então, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots$

Logo,

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a_n	\dots	\dots	1	2	2	2	2	2
p_n	0	1	1	3	7	17	41	99
q_n	1	0	1	2	5	12	29	70
$\frac{p_n}{q_n}$	\dots	\dots	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{99}{79}$

Na última linha do quadro anterior, temos valores aproximados de $\sqrt{2}$.

Então, um rectângulo de 99 mm por 70 mm satisfaz os nossos objectivos, só que é muito pequeno. Triplicando as suas dimensões, obtemos um rectângulo de 297 mm por 210 mm, ou seja, obtemos o formato A₄.

Esta poderia ter sido a história do papel A₄. Mas tal não aconteceu, tendo-se ainda que a história real é mais fácil de entender do que a história inventada.

Se não entende nada de fracções contínuas, não se preocupe com esse facto. Se pretender aprender alguma coisa sobre fracções contínuas, leia o Capítulo intitulado "Equações de Pell-Fermat" ou consulte um livro de *Teoria dos Números*.

Capítulo 6

Equações Trigonométricas

6.1 Equações do tipo $\cos x = \cos \alpha$

1. $\cos x = \cos \alpha \iff x = \pm \alpha + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
2. $\cos x = -\cos \alpha \iff x = \pi \pm \alpha + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = (2k+1)\pi \pm \alpha, (k \in \mathbb{Z})$
3. $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = \frac{(6k \pm 1)\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$
4. $\cos x = -\frac{1}{2} \iff \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \iff x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
Logo, $x = \frac{(6k \pm 2)\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = \frac{(12k \pm 1)\pi}{6}, (k \in \mathbb{Z})$
6. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \iff x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
Logo, $x = \frac{(12k \pm 5)\pi}{6}, (k \in \mathbb{Z})$
7. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = \frac{(8k \pm 1)\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$
8. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \iff x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
Logo, $x = \frac{(8k \pm 3)\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$
9. $\cos x = 1 \iff x = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
10. $\cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = (2k+1)\pi, (k \in \mathbb{Z})$
11. $\cos(2x) = \sin x \iff \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
 $\iff 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
 $\iff 4x = \pi - 2x + 4k\pi \vee 4x = -\pi + 2x + 4k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
 $\iff 6x = (4k+1)\pi \vee 2x = (4k-1)\pi, (k \in \mathbb{Z})$
 $\iff x = \frac{(4k+1)\pi}{6} \vee x = \frac{(4k-1)\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$
12. $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$13. \cos x = \frac{1}{3} \iff \cos x = \cos(\cos^{-1}(\frac{1}{3})) \iff x = \pm \cos^{-1}(\frac{1}{3}) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$14. \cos x = -\frac{1}{3} \iff \cos x = \cos(\pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3}))$$

$$\text{Logo, } x = \pi - \cos^{-1}(\frac{1}{3}) + 2k\pi \vee x = -\pi + \cos^{-1}(\frac{1}{3}) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

6.2 Equações do tipo $\sin x = \sin \alpha$

$$1. \sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$2. \sin x = -\sin \alpha \iff \sin x = \sin(-\alpha)$$

$$\text{Logo, } x = -\alpha + 2k\pi \vee x = \pi + \alpha + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$3. \sin x = \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Logo, } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$4. \sin x = -\frac{1}{2} \iff \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\text{Logo, } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$5. \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Logo, } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$6. \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3})$$

$$\text{Logo, } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$7. \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Logo, } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$8. \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\text{Logo, } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$9. \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$10. \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$11. \sin x = 0 \iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$12. \sin x = \sin 1 \iff x = 1 + 2k\pi \vee x = \pi - 1 + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$13. \sin(2x) = \sin x \iff 2x = x + 2k\pi \vee 2x = \pi - x + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Logo, } x = 2k\pi \vee x = \frac{(2k+1)\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$14. \cos(2x) = \sin x \iff \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin x \iff \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$\text{Logo, } x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Logo, } 2x = \pi - 4x + 4k\pi \vee 2x = \pi + 4x + 4k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Logo, } 6x = (4k+1)\pi \vee -2x = (4k+1)\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{E, por fim, } x = \frac{(4k+1)\pi}{6} \vee x = \frac{(-4k-1)\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

15. $\sin x = \frac{1}{3} \iff \sin x = \sin \left(\sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right)$
 $\iff x = \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + 2k\pi \vee x = \pi - \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
16. $\sin x = -\frac{1}{3} \iff \sin x = \sin \left(-\sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) \right)$
 $\iff x = -\sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + 2k\pi \vee x = \pi + \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right) + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

6.3 Equações do tipo $\tan x = \tan \alpha$

1. $\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
2. $\tan x = -\tan \alpha \iff \tan x = \tan(-\alpha) \iff x = -\alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
3. $\tan x = 1 \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
4. $\tan x = -1 \iff \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) \iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
5. $\tan x = \sqrt{3} \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
6. $\tan x = -\sqrt{3} \iff \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right) \iff x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
7. $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
8. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \iff \tan x = \tan \left(-\frac{\pi}{6} \right) \iff x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
9. $\tan x = 0 \iff \tan x = \tan 0 \iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
10. $\sin x = \cos x \iff \tan x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
11. $\tan(2x) = \tan x \iff 2x = x + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \wedge \cos(2x) \neq 0 \wedge \cos x \neq 0$
12. Logo, $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
13. $\tan(3x) = \tan x \iff 3x = x + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \wedge \cos(3x) \neq 0 \wedge \cos x \neq 0$
 $\iff x = \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \wedge \cos(3x) \neq 0 \wedge \cos x \neq 0$
 $\iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
14. $\tan x = 2 \iff \tan x = \tan(\tan^{-1}(2)) \iff x = \tan^{-1}(2) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
15. $\tan x = -2 \iff \tan x = \tan(-\tan^{-1}(2)) \iff x = -\tan^{-1}(2) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

6.4 Equações do tipo $a \cos x + b \sin x = c$

Consideremos a equação $a \cos x + b \sin x = c$, com $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Fazendo $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha$ e $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$, vem:

$$\begin{aligned}
 a \cos x + b \sin x = c &\iff \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
 &\iff \cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
 &\iff \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}
 \end{aligned}$$

Esta equação tem solução, caso $-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$, transformando-se, então, na equação

$$\cos(x - \alpha) = \cos \beta, \text{ com } \cos \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

O valor de α determina-se a partir de $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha$ e $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$.

Note-se que $\tan \alpha = \frac{b}{a}$.

A seguir, apresentam-se alguns exemplos de equações deste tipo.

1.

$$\begin{aligned} \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 &\iff \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 1 \\ &\iff \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} = 1 \\ &\iff \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \\ &\iff x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \cos x - \sqrt{3} \sin x = 1 &\iff \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \\ &\iff x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \sin x = \cos x &\iff \cos x - \sin x = 0 \iff \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = 0 \\ &\iff \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = 0 \\ &\iff \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ &\iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
-\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2} &\iff \cos x - \sqrt{3} \sin x = -\sqrt{2} \\
&\iff \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{3\pi}{4} \\
&\iff x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\
&\iff x = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Este último exemplo mostra-nos que, na resolução duma equação do tipo $a \cos x + b \sin x = c$, com $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, podemos supor, sem qualquer perda de generalidade, que $a > 0$.

6.5 Outras equações

1. Resolução da equação $2 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

$$\begin{aligned}
2 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 &\iff \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\
&\iff \cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2} \\
&\iff x = \pi + 2k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\
&\iff x = (2k+1)\pi \vee x = \frac{(6k \pm 1)\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

2. Resolução da equação $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$

$$\begin{aligned}
2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0 &\iff \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \\
&\iff \sin x = -1 \vee \sin x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Então, $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Logo, $x = \frac{(4k-1)\pi}{2} \vee x = \frac{(12k-1)\pi}{6} \vee x = \frac{(12k-5)\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$

3. Resolução da equação $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$

$$\begin{aligned}
 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0 &\iff \cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \\
 &\iff \cos x = \frac{5 \pm 3}{4} \\
 &\iff \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = 2 \\
 &\iff \cos x = \frac{1}{2} \\
 &\iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

4. Resolução da equação $2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$

$$\begin{aligned}
 2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0 &\iff \sin x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \\
 &\iff \sin x = \frac{5 \pm 7}{4} \\
 &\iff \sin x = 3 \vee \sin x = -\frac{1}{2} \\
 &\iff \sin x = -\frac{1}{2} \\
 &\iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

5. Resolução da equação $\sin^2 x - 5 \sin x + 4 = 0$

$$\begin{aligned}
 \sin^2 x - 5 \sin x + 4 = 0 &\iff \sin x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \\
 &\iff \sin x = \frac{5 \pm 3}{2} \\
 &\iff \sin x = 4 \vee \sin x = 1 \\
 &\iff \sin x = 1 \\
 &\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

6. Resolução da equação $\sin^2 x - 5 \sin x + 6 = 0$

$$\begin{aligned}
 \sin^2 x - 5 \sin x + 6 &= 0 \iff \sin x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \iff \sin x = \frac{5 \pm 1}{2} \\
 &\iff \sin x = 2 \vee \sin x = 3
 \end{aligned}$$

Esta equação é impossível, porque $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

7. Resolução da equação $\sin^2 x - 5 \sin x + 7 = 0$

$\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$, pelo que a equação é impossível.

8. Resolução da equação
- $2\cos^2 x + \cos x + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$, pelo que a equação é impossível.

9. Resolução da equação
- $\tan^3 x - 3\tan x = 0$

$$\begin{aligned}\tan^3 x - 3\tan x = 0 &\iff \tan x (\tan^2 x - 3) = 0 \\ &\iff \tan x = 0 \vee \tan x = \pm\sqrt{3} \\ &\iff x = k\pi \vee x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

10. Resolução da equação
- $4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$

Para resolver a equação anterior é necessário resolver, em primeiro lugar, a equação de terceiro grau $4y^3 - 2y^2 - 2y + 1 = 0$.

Quando nos aparece uma equação de terceiro grau, para resolver, deve haver uma solução fácil de encontrar, como $1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, ou outro valor do género. No entanto, há uma propriedade interessante das equações polinomiais de coeficientes inteiros: Se houver alguma solução racional, ela será da forma $\frac{r}{s}$, onde r é um divisor do termo independente e s é um divisor do coeficiente do termo de maior grau.

Então, se houver solução racional da equação $4y^3 - 2y^2 - 2y + 1 = 0$, essa solução será da forma $\frac{r}{s}$, onde r é um divisor de 1 e s é um divisor de 4. Logo, $r = \pm 1$ e $s = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Logo, as possíveis soluções racionais da equação $4y^3 - 2y^2 - 2y + 1 = 0$, são $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

Se, em $4y^3 - 2y^2 - 2y + 1$, substituirmos y por $\frac{1}{2}$, obtemos: $4 \times \frac{1}{8} - 2 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 + 1 = 0$

Então, $\frac{1}{2}$ é uma das soluções da equação $4y^3 - 2y^2 - 2y + 1 = 0$, pelo que o polinómio pode ser transformado no produto dum polinómio de primeiro grau por outro de segundo grau, aplicando a conhecida regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4 & -2 & -2 & 1 \\ & & 2 & 0 & -1 \\ \hline & 4 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Então, $4y^3 - 2y^2 - 2y + 1 = (y - \frac{1}{2})(4y^2 - 2)$, pelo que $4y^3 - 2y^2 - 2y + 1 = 0$

Logo, $y = \frac{1}{2} \vee y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Então,

$$\begin{aligned}4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0 &\iff \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \vee x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

11. Resolução da equação
- $(1 + 2\sin x)(1 + 2\cos x) = 0$

$$(1 + 2\sin x)(1 + 2\cos x) = 0 \iff \sin x = -\frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2}$$

Logo, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

12. Resolução da equação
- $(1 - 2 \sin x)(1 + \tan x) = 0$

$$(1 - 2 \sin x)(1 + \tan x) = 0 \iff \sin x = \frac{1}{2} \vee \tan x = -1$$

$$\text{Logo, } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = k\pi - \frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$$

13. Resolução da equação
- $(\tan^2 x - 3)(1 + \tan x) = 0$

$$\begin{aligned} (\tan^2 x - 3)(1 + \tan x) &= 0 \iff \tan x = \pm\sqrt{3} \vee \tan x = -1 \\ \iff x &= k\pi \pm \frac{\pi}{3} \vee x = k\pi - \frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

14. Resolução da equação
- $(\tan^2 x - \frac{1}{3})(1 - \tan x) = 0$

$$\left(\tan^2 x - \frac{1}{3}\right)(1 - \tan x) = 0 \iff \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \tan x = 1$$

$$\text{Logo, } x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

15. Resolução da equação
- $\tan(3x) = \tan x$

$$\begin{aligned} \tan(3x) = \tan x &\iff 3x = x + k\pi \wedge \cos(3x) \neq 0 \wedge \cos x \neq 0, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff \cos(3x) \neq 0 \wedge \cos x \neq 0 \wedge x = \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Se em $\frac{k\pi}{2}$, tivéssemos k ímpar, então teríamos $\cos x = 0 \wedge \cos(3x) = 0$.

16. Resolução da equação
- $\tan(2x) = \tan x$

$$\begin{aligned} \tan(2x) = \tan x &\iff 2x = x + k\pi \wedge \cos(2x) \neq 0 \wedge \cos x \neq 0, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff \cos(2x) \neq 0 \wedge \cos x \neq 0 \wedge x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

17. Resolução da equação
- $\tan(5x) = \tan(3x)$

$$\begin{aligned} \tan(5x) = \tan(3x) &\iff 5x = 3x + k\pi \wedge \cos(5x) \neq 0 \wedge \cos(3x) \neq 0, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff \cos(5x) \neq 0 \wedge \cos(3x) \neq 0 \wedge x = \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

18. Resolução da equação
- $\sin(3x) + \sin(2x) + \sin x = 0$

Seja $f(x) = \sin(3x) + \sin(2x) + \sin x$. Então,

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff \sin(3x) + \sin(2x) + \sin x = 0 \\
 &\iff \sin(2x+x) + 2\sin x \cos x + \sin x = 0 \\
 &\iff \sin(2x)\cos x + \sin x \cos(2x) + 2\sin x \cos x + \sin x = 0 \\
 &\iff 2\sin x \cos x \cos x + \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x \cos x + \sin x = 0 \\
 &\iff 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^2 x - \sin^3 x + 2\sin x \cos x + \sin x = 0 \\
 &\iff 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x + 2\sin x \cos x + \sin x = 0 \\
 &\iff \sin x (3\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos x + 1) = 0 \\
 &\iff \sin x = 0 \vee 3\cos^2 x + \cos^2 x + 2\cos x = 0 \\
 &\iff \sin x = 0 \vee 4\cos^2 x + 2\cos x = 0 \\
 &\iff \sin x = 0 \vee 2\cos x (2\cos x + 1) = 0 \\
 &\iff \sin x = 0 \vee \cos x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \\
 &\iff x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

Esta equação é mais fácil de resolver, se conhecermos a fórmula

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Aplicando a fórmula anterior, vem:

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff \sin(3x) + \sin(2x) + \sin x \\
 &\iff \sin(3x) + \sin x + \sin(2x) = 0 \\
 &\iff 2\sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} + \sin(2x) = 0 \\
 &\iff 2\sin(2x)\cos x + \sin(2x) = 0 \\
 &\iff \sin(2x)(2\cos x + 1) = 0 \\
 &\iff \sin(2x) = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \\
 &\iff 2x = k\pi \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\
 &\iff x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

19. Resolução da equação $\sin(4x) + \sin(2x) + \cos x = 0$

Seja $g(x) = \sin(4x) + \sin(2x) + \cos x$. Então, vem

$$\begin{aligned}
 g(x) = 0 & \iff \sin(4x) + \sin(2x) + \cos x = 0 \\
 & \iff 2\sin(2x)\cos(2x) + \sin(2x) + \cos x = 0 \\
 & \iff 4\sin x \cos x \cos(2x) + 2\sin x \cos x + \cos x = 0 \\
 & \iff \cos x (4\sin x \cos(2x) + 2\sin x + 1) = 0 \\
 & \iff \cos x = 0 \vee 4\sin x \cos(2x) + 2\sin x + 1 = 0 \\
 & \iff \cos x = 0 \vee 4\sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x + 1 = 0 \\
 & \iff \cos x = 0 \vee 4\sin x (1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x + 1 = 0 \\
 & \iff \cos x = 0 \vee 4\sin x - 8\sin^3 x + 2\sin x + 1 = 0 \\
 & \iff \cos x = 0 \vee -8\sin^3 x + 6\sin x + 1 = 0
 \end{aligned}$$

E, aparentemente, chegámos a um beco sem saída.

Aplicando a fórmula do exercício anterior, vem:

$$\begin{aligned}
 g(x) = 0 & \iff \sin(4x) + \sin(2x) + \cos x = 0 \\
 & \iff 2\sin \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} + \cos x = 0 \\
 & \iff 2\sin(3x)\cos x + \cos x = 0 \\
 & \iff \cos x (2\sin(3x) + 1) = 0 \\
 & \iff \cos x = 0 \vee \sin(3x) = -\frac{1}{2} \\
 & \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee 3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\
 & \iff x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \vee x = \frac{(12k-1)\pi}{18} \vee x = \frac{(12k-5)\pi}{18}, (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

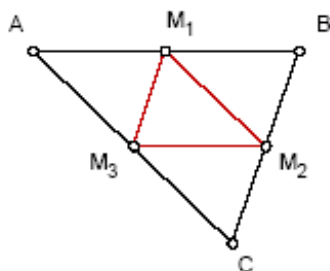
Capítulo 7

Os Pontos Médios dos Lados do Pentágono

Problema 83 *Determine os vértices dum pentágono $[ABCDE]$, conhecidos os pontos médios dos lados do pentágono (pontos M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5).*

Resolução

Vejam os a resolução do problema, no caso de polígonos mais simples. No caso do triângulo, temos:

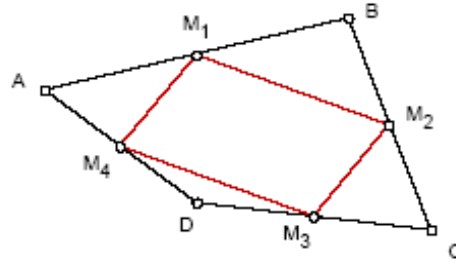


Os pontos M_1, M_2 e M_3 definem um triângulo semelhante ao triângulo $[ABC]$, tendo cada lado de $[M_1M_2M_3]$ metade do comprimento do correspondente lado de $[ABC]$. Além disso, os lados dos dois triângulos são inversamente paralelos (relacionados com este assunto estão o Teorema de Thales e o seu recíproco).

Passemos, agora, à questão de determinar A, B e C , dados M_1, M_2 e M_3 :

Por M_1 , traçamos uma paralela a $[M_2M_3]$, por M_2 , uma paralela a $[M_1M_3]$ e por M_3 , uma paralela a $[M_1M_2]$, obtendo-se os pontos A, B e C .

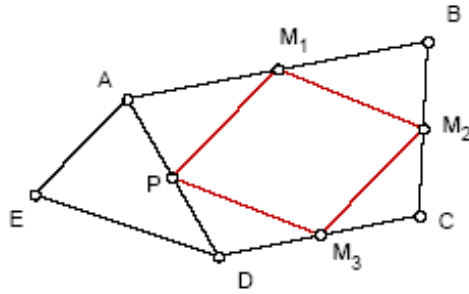
No caso dum quadrilátero, consideremos os pontos médios dos seus lados:



O quadrilátero $[M_1M_2M_3M_4]$ é um paralelogramo. Este facto vai ser muito útil, para a resolução do problema, no caso do pentágono (e não só!).

Observe-se que se os pontos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 não definirem um paralelogramo, o problema de determinar A , B , C e D é impossível.

Passemos ao caso do pentágono. Consideremos os cinco vértices A , B , C , D , E e o quadrilátero $[ABCD]$, tendo-se que M_1 é o ponto médio de $[AB]$, M_2 é o ponto médio de $[BC]$, M_3 é o ponto médio de $[CD]$ e P é o ponto médio de $[AD]$:

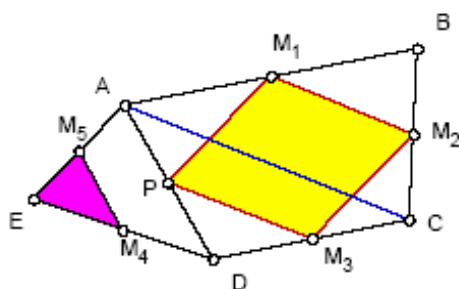


Consideremos, agora, os cinco pontos M_1 , M_2 , M_3 , M_4 e M_5 .

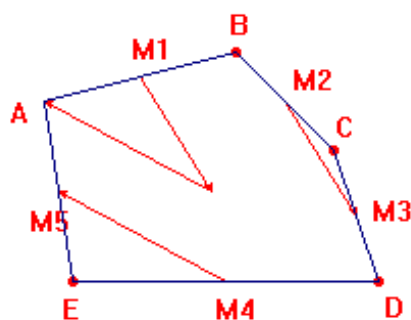
A partir dos pontos M_1 , M_2 e M_3 , determinamos o ponto P , de modo a obtermos um paralelogramo.

Ora, o ponto P é o ponto médio da diagonal do pentágono $[AD]$, a qual é paralela ao segmento de recta definido pelos pontos M_4 e M_5 .

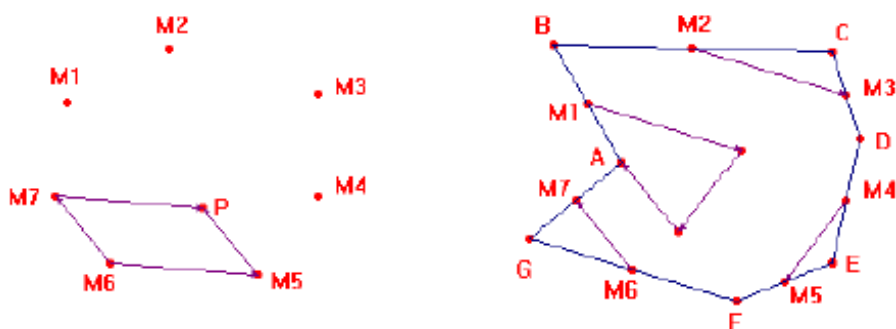
Então, por P , traçamos uma recta paralela a $[M_4M_5]$ e determinamos o ponto $A = P + \overrightarrow{M_4M_5}$.



Depois, conforme se verifica na figura anterior, determinam-se os restantes pontos, da seguinte maneira: B é o simétrico de A , em relação a M_1 , C é o simétrico de B , em relação a M_2 , D é o simétrico de C , em relação a M_3 e E é o simétrico de D , em relação a M_4 . Uma construção, ainda mais simples, é:



Podemos resolver o problema anterior, considerando sete pontos, em vez de cinco. Através dum paralelogramo, determinamos P , o ponto médio de $[AE]$, e estamos de regresso ao problema anterior, uma vez que temos os pontos médios dos cinco lados dum pentágono. Por indução, resolve-se o problema, quando o número de vértices é ímpar.



Vejamos, então, uma forma algébrica de abordar o problema:

Sejam A, B, C, D, E os vértices dum pentágono e sejam M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 os pontos médios dos seus lados. Então, temos

$$\begin{cases} M_1 = \frac{A+B}{2} \\ M_2 = \frac{B+C}{2} \\ M_3 = \frac{C+D}{2} \\ M_4 = \frac{D+E}{2} \\ M_5 = \frac{A+E}{2} \end{cases}$$

Matricialmente, vem:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix}$$

E, com uma Calculadora, podemos encontrar a matriz inversa:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 \\ M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5 \\ -M_1 + M_2 + M_3 - M_4 + M_5 \\ M_1 - M_2 + M_3 + M_4 - M_5 \\ -M_1 + M_2 - M_3 + M_4 + M_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo:

$$A = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5$$

$$B = M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5$$

$$C = -M_1 + M_2 + M_3 - M_4 + M_5$$

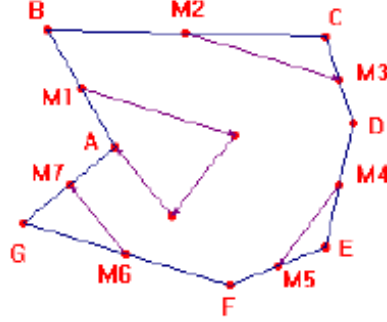
$$D = M_1 - M_2 + M_3 + M_4 - M_5$$

$$E = -M_1 + M_2 - M_3 + M_4 + M_5$$

$$\text{Então, } \begin{cases} A = M_1 + \overrightarrow{M_2 M_3} + \overrightarrow{M_4 M_5} \\ B = M_2 + \overrightarrow{M_3 M_4} + \overrightarrow{M_5 M_1} \\ C = M_3 + \overrightarrow{M_4 M_5} + \overrightarrow{M_1 M_2} \\ D = M_4 + \overrightarrow{M_5 M_1} + \overrightarrow{M_2 M_3} \\ E = M_5 + \overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_3 M_4} \end{cases}$$

Se tivermos 7 pontos, obtemos:

$$\begin{cases} A = M_1 + \overrightarrow{M_2 M_3} + \overrightarrow{M_4 M_5} + \overrightarrow{M_6 M_7} \\ B = M_2 + \overrightarrow{M_3 M_4} + \overrightarrow{M_5 M_6} + \overrightarrow{M_7 M_1} \\ C = M_3 + \overrightarrow{M_4 M_5} + \overrightarrow{M_6 M_7} + \overrightarrow{M_1 M_2} \\ D = M_4 + \overrightarrow{M_5 M_6} + \overrightarrow{M_7 M_1} + \overrightarrow{M_2 M_3} \\ E = M_5 + \overrightarrow{M_6 M_7} + \overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_3 M_4} \\ F = M_6 + \overrightarrow{M_7 M_1} + \overrightarrow{M_2 M_3} + \overrightarrow{M_4 M_5} \\ G = M_7 + \overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_3 M_4} + \overrightarrow{M_5 M_6} \end{cases}$$



Repare-se que, para obter B , basta somar uma unidade aos índices da expressão que nos dá A , o mesmo acontecendo com os restantes vértices, que são obtidos da expressão do vértice anterior. Claro que estamos a supor que $M_8 = M_1$, etc..

Se tivermos $2n + 1$ pontos médios e se representarmos os vértices por A_1, \dots, A_{2n+1} , teremos:

$$A_1 = M_1 + \overrightarrow{M_2 M_3} + \overrightarrow{M_4 M_5} + \dots + \overrightarrow{M_{2n} M_{2n+1}} = M_1 + \sum_{k=1}^n \overrightarrow{M_{2k} M_{2k+1}}$$

Exemplo 84 Consideremos os pontos $M_1 = (2, 3)$, $M_2 = (1, 5)$, $M_3 = (3, 6)$, $M_4 = (5, 3)$, $M_5 = (4, 1)$.

Então:

$$A = (2, 3) - (1, 5) + (3, 6) - (5, 3) + (4, 1) = (3, 2)$$

$$B = (1, 5) - (3, 6) + (5, 3) - (4, 1) + (2, 3) = (1, 4)$$

$$C = (3, 6) - (5, 3) + (4, 1) - (2, 3) + (1, 5) = (1, 6)$$

$$D = (5, 3) - (4, 1) + (2, 3) - (1, 5) + (3, 6) = (5, 6)$$

$$E = (4, 1) - (2, 3) + (1, 5) - (3, 6) + (5, 3) = (5, 0)$$

Observe-se que a soma das abcissas dos vértices $(3 + 1 + 1 + 5 + 5)$ é igual à soma das abcissas dos pontos médios $(2 + 1 + 3 + 5 + 4)$, o mesmo acontecendo com as ordenadas.

A razão é que $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = A + B + C + D + E$.

Exemplo 85 O caso de um número par de pontos médios

Se tivermos quatro pontos médios, em vez de cinco, virá

$$M_1 = \frac{A+B}{2}, M_2 = \frac{B+C}{2}, M_3 = \frac{C+D}{2}, M_4 = \frac{A+D}{2},$$

$$\text{Então, } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2M_1 \\ 2M_2 \\ 2M_3 \\ 2M_4 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2M_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2M_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2M_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2M_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2M_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2M_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2M_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2M_4 - 2M_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2M_1 - 2M_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2M_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2M_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2M_4 - 2M_1 + 2M_2 \end{bmatrix}$$

Logo, $2M_4 - 2M_1 + 2M_2 = 2M_3$.

Logo, para haver solução, deve ser $M_4 - M_3 = M_1 - M_2$, ou seja, $\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{M_2M_1}$.

Então, os pontos M_1 , M_2 , M_3 e M_4 definem um paralelogramo.

Se $M_4 - M_3 = M_1 - M_2$, o sistema é simplesmente indeterminado e podemos obter uma solução, escolhendo para A um ponto qualquer

Calculando determinantes, temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Ficou, ainda, provado que a matriz tem característica 3, pelo que, de facto, o sistema anterior é simplesmente indeterminado.

Observe-se que obtivemos determinantes de duas matrizes triangulares, os quais são de cálculo imediato.

E no caso de seis vértices:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{De notar que a última linha da matriz } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é dada por } L_6 = L_1 - L_2 + L_3 -$$

$L_4 + L_5$.

Logo, o problema tem solução, se e só se

$$M_6 = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 = M_1 + \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_4M_5}$$

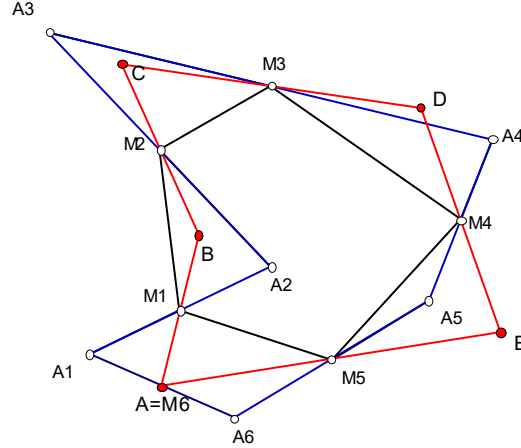
Se tivermos $2n + 2$ pontos, $M_1, M_2, \dots, M_{2n+2}$, o problema terá solução se, e só se,

$$M_{2n+2} = M_1 - M_2 + M_3 - \dots - M_{2n} + M_{2n+1} = M_1 + \overrightarrow{M_2M_3} + \dots + \overrightarrow{M_{2n}M_{2n+1}}$$

Mas, voltando ao caso de 6 pontos médios, não podemos deixar passar a oportunidade que se nos deparou, quase que por magia: O ponto $M_6 = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5$, no caso do hexágono,

é exactamente o ponto A do caso do pentágono. Então, vamos aproveitar este facto e o facto do problema do hexágono ser indeterminado, quando possível, para resolver o problema do pentágono.

Consideremos os pontos M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5 , que são os pontos médios dos lados dum pentágono. Consideremos A_1 , um ponto qualquer. Agora, determinamos A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 , de modo que M_1 seja o ponto médio de $[A_1A_2]$, M_2 seja o ponto médio de $[A_2A_3]$, ..., até M_5 que é o ponto médio de $[A_5A_6]$. Seja M_6 o ponto médio de $[A_1A_6]$. Então, M_6 é o ponto A pretendido.



E, agora, encontram-se os restantes pontos:

B é o simétrico de A , em relação a M_1 , C é o simétrico de B , em relação a M_2 , D é o simétrico de C , em relação a M_3 e E é o simétrico de D , em relação a M_4 .

Está, assim determinado o pentágono pretendido.

Exemplo 86 Consideremos, em \mathbb{R}^3 , os cinco pontos $M_1 = (2, 2, -4)$, $M_2 = (3, 4, 1)$, $M_3 = (4, 1, -4)$, $M_4 = (5, -1, -7)$ e $M_5 = (7, 4, 5)$.

Então:

$$\begin{cases} A = (2, 2, -4) - (3, 4, 1) + (4, 1, -4) - (5, -1, -7) + (7, 4, 5) = (5, 4, 3) \\ B = (2, 2, -4) + (3, 4, 1) - (4, 1, -4) + (5, -1, -7) - (7, 4, 5) = (-1, 0, -11) \\ C = -(2, 2, -4) + (3, 4, 1) + (4, 1, -4) - (5, -1, -7) + (7, 4, 5) = (7, 8, 13) \\ D = (2, 2, -4) - (3, 4, 1) + (4, 1, -4) + (5, -1, -7) - (7, 4, 5) = (1, -6, -21) \\ E = -(2, 2, -4) + (3, 4, 1) - (4, 1, -4) + (5, -1, -7) + (7, 4, 5) = (9, 4, 7) \end{cases}$$

Observe-se que, neste caso, temos um pentágono, uma vez que, como poderíamos verificar, os pontos dados são coplanares e três pontos consecutivos não são colineares. No entanto, o problema pode ser colocado duma forma geral, sem fazer referência a qualquer pentágono, mas, apenas, a pontos médios de segmentos de recta.

Observação

Se não gostarmos de somar pontos, podemos usar a Geometria Analítica, representando os pontos por pares ordenados. Os resultados obtidos serão os mesmos, mas teremos o dobro das equações, as quais podem dividir-se em dois sistemas de equações, um para as abcissas e outro para as ordenadas. Claro que o trabalho é a dobrar. E, se estivermos a trabalhar em \mathbb{R}^3 , ainda será

pior. Podemos, ainda, usar números complexos o que nos tira problemas de consciência e nos poupa trabalho.

Refira-se que este problema está relacionado com a definição de espaço afim associado a um espaço vectorial sobre um corpo, sendo que, trivialmente, o espaço afim pode ser o próprio espaço vectorial. Neste caso, ponto é um vector, sendo que plano é uma determinada classe de equivalência duma certa relação de equivalência definida à custa de certo subespaço vectorial.

Repare-se que um corpo é um espaço vectorial sobre si próprio, tendo-se que os elementos do corpo tanto podem ser vectores como escalares.

Alguns dos conteúdos relacionados com este problema:

Ponto médio de um segmento de recta, mediatriz de um segmento de recta, vector, simetria central, simetria axial, translação, soma de um ponto com um vector, soma de vectores, Teorema de Thales e seu recíproco, figuras semelhantes, razão de semelhança, coordenadas de pontos e vectores, vectores linearmente (in)dependentes, matrizes, característica duma matriz, determinante duma matriz quadrada, matriz inversa, resolução de sistemas de equações, método de indução, números complexos e utilização do Cabri Geometry II e de calculadoras gráficas.

Capítulo 8

Equações de Pell-Fermat

Vejam como resolver as equações $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, com $x, y \in \mathbb{N}$.

Começemos pela equação $x^2 - 2y^2 = -1$. Como esta equação admite a solução $x_0 = 1, y_0 = 1$ e 2 não é quadrado perfeito, então admite infinitas soluções, o mesmo acontecendo com a equação $x^2 - 2y^2 = 1$, a qual admite a solução trivial $x = 1, y = 0$. Para obtermos as soluções das duas equações, procedemos do seguinte modo:

Consideramos a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, (na qual $b_{11} = b_{22} = x_0 = 1, b_{21} = y_0 = 1, b_{12} = 2y_0 = 2$)

e, ainda, as duas sucessões (x_n) e (y_n) definidas por $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, com $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Então:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Se prestarmos atenção, verificamos que, alternadamente, obtemos soluções de cada uma das equações. Se pretendemos as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$, multiplicamos a matriz $A = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, obtendo-se $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, depois multiplicamos $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ pela solução $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e assim sucessivamente. Se pretendemos as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = -1$, multiplicamos $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtendo-se $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, depois multiplicamos $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ pela solução $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, etc.

Ao sistema $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$, ou a outro análogo, chamamos um sistema de equações com diferenças.

Os cálculos para obtenção das soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$, podem ser efectuados numa folha de cálculo:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	1	3	17	99	577	3363	19601	114243	665857	3880899
y	0	2	12	70	408	2378	13860	80782	470832	2744210

É possível obter o termo geral das soluções das equações $x^2 - 2y^2 = -1$ e $x^2 - 2y^2 = 1$, determinando a matriz A^n , para o que procedemos à diagonalização da matriz A . Os valores próprios de A são as raízes do polinómio característico $\lambda^2 - 6\lambda + 1$ que são $3 \pm 2\sqrt{2}$.

Os termos gerais das duas sucessões que dão as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = 1$ são

$$\begin{cases} x_n = c_1 (3 + 2\sqrt{2})^n + c_2 (3 - 2\sqrt{2})^n \\ y_n = c_3 (3 + 2\sqrt{2})^n + c_4 (3 - 2\sqrt{2})^n \end{cases}$$

com $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, constantes estas que podem ser obtidas a partir das condições iniciais. Neste caso, temos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $c_4 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, pelo que

$$\begin{cases} x_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2} \\ y_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Também podemos definir as duas sucessões anteriores, por meio de duas equações com diferenças, a dois passos:

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 3, y_0 = 0, y_1 = 2 \\ x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0 \\ y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 0 \end{cases}$$

E obtinhamos, novamente, $\begin{cases} x_n = c_1 (3 + 2\sqrt{2})^n + c_2 (3 - 2\sqrt{2})^n \\ y_n = c_3 (3 + 2\sqrt{2})^n + c_4 (3 - 2\sqrt{2})^n \end{cases}$

De modo análogo se encontram as soluções da equação $x^2 - 2y^2 = -1$.

As equações do tipo $x^2 - Ny^2 = 1$, com N um número natural não quadrado perfeito, são conhecidas por equações de Pell-Fermat e estão relacionadas com as Fracções Contínuas, um outro tópico da Teoria dos Números.

De qualquer modo, podemos adiantar que os termos gerais das soluções da equação $x^2 - Ny^2 = 1$, com N não quadrado, são dadas por

$$\begin{cases} x_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{N})^n + (x_1 - y_1\sqrt{N})^n}{2} \\ y_n = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{N})^n - (x_1 - y_1\sqrt{N})^n}{2\sqrt{N}} \end{cases}$$

onde x_1 e y_1 são os menores inteiros positivos que satisfazem a condição $x^2 - Ny^2 = 1$ (a esse par de números chama-se solução fundamental).

Exemplo 87 *Determine os números triangulares que são quadrados perfeitos.*

Resolução

Número triangular é um número da forma $\frac{n(n+1)}{2}$, o que corresponde à soma $1 + 2 + \dots + n$. Então devemos ter $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$. Ora:

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2 \iff n^2 + n = 2m^2 \iff 4n^2 + 4n + 1 = 8m^2 + 1 \iff (2n+1)^2 - 8m^2 = 1$$

Esta equação é do tipo $x^2 - 8y^2 = 1$, mas pode ser resolvida a partir da equação $x^2 - 2y^2 = 1$. Para isso, basta observarmos que, em qualquer solução desta última equação, temos x ímpar e y par.

Então, $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_k + 4y_k \\ 2x_k + 3y_k \end{bmatrix}$, com $x_0 = 1, y_0 = 0$.

Como $\begin{cases} 2n_k + 1 = x_k \\ y_k = 2m_k \end{cases}$, temos $\begin{cases} n_k = \frac{x_k - 1}{2} \\ m_k = \frac{y_k}{2} \end{cases}$, pelo que $\begin{cases} n_0 = \frac{x_0 - 1}{2} = 0 \\ m_0 = \frac{y_0}{2} = 0 \end{cases}$

De $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_k + 4y_k \\ 2x_k + 3y_k \end{bmatrix}$, vem:

$$\begin{bmatrix} 2n_{k+1} + 1 \\ 2m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2n_k + 1) + 4(2m_k) \\ 2(2n_k + 1) + 3(2m_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n_k + 8m_k + 3 \\ 4n_k + 6m_k + 2 \end{bmatrix}$$

E daqui obtemos, $\begin{bmatrix} 2n_{k+1} + 1 \\ 2m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n_k + 8m_k + 3 \\ 4n_k + 6m_k + 2 \end{bmatrix}$, donde se conclui que:

$$\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3n_k + 4m_k + 1 \\ 2n_k + 3m_k + 1 \end{bmatrix}$$

Recorrendo a uma folha de cálculo, vem:

k	n	m	m^2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	8	6	36
3	49	35	1225
4	288	204	41616
5	1681	1189	1413721
6	9800	6930	48024900
7	57121	40391	1631432881
8	332928	235416	554220693056

Vejamos como resolver a equação $x^2 - 8y^2 = 1$, diretamente:

Esta equação admite a solução trivial $(1, 0)$ e a solução $(3, 1)$, dita solução fundamental. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então, $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_n + 8y_n \\ x_n + 3y_n \end{bmatrix}$, com $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$.

Na tabela seguinte, indicam-se algumas soluções da equação:

x	1	3	17	99	577	3363	19601	114243	665857
y	0	1	6	35	204	1189	6930	40391	235416

Observe-se que a equação $x^2 - 8y^2 = -1$ não tem soluções inteiras, uma vez que, se x é ímpar, então $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

Note-se, também, que obter a solução fundamental duma equação do tipo $x^2 - Ny^2 = -1$, com N não quadrado, pode ser bastante complicado, para quem não conhecer o respectivo algoritmo. Uma terceira observação é que a equação $x^2 - Ny^2 = -1$, com N não quadrado, é impossível sempre que N admita um divisor da forma $4n + 3$, ou que N seja múltiplo de 4. Finalmente, registe-se

que o facto da equação $x^2 - Ny^2 = -1$ ter ou não ter soluções inteiras depende do comprimento do período do desenvolvimento de \sqrt{N} em fracção contínua ser ímpar ou ser par. Mas, o que é uma fracção contínua?

Intuitivamente, diremos que fracção contínua é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

com a_0 um inteiro qualquer e $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ inteiros positivos.

As fracções contínuas podem ser finitas (que representam números racionais), infinitas periódicas (que representam as chamadas irracionais quadráticas) ou infinitas não periódicas (que representam os restantes números irracionais).

Note-se que talvez fosse melhor dizermos fracção continuada, mas é habitual dizer-se fracção contínua.

Seguem-se dois exemplos da determinação da fracção contínua correspondente a um número irracional:

Vejamos como obter a expansão de $3 - 2\sqrt{2}$, em fracção contínua:

$$\alpha = \alpha_0 = 3 - 2\sqrt{2} = 0, 17 \dots \text{Então, } a_0 = 0.$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} = 5, 82 \dots \text{Então, } a_1 = 5.$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2} - 5} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{8 - 4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = 1, 20 \dots \text{Então, } a_2 = 1.$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2 + 2\sqrt{2} = 4, 8 \dots \text{Então, } a_3 = 4.$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2 + 2\sqrt{2} - 4} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = \alpha_2 = 1, 20 \dots \text{Então, } a_4 = 1.$$

A partir daqui, tudo se repete, obtendo-se uma fracção contínua periódica. Então, $\alpha_0 = 0 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$.

$$\text{Logo, } \alpha_0 = \langle 0, 5, 1, 4, 1, 4, \dots \rangle = \langle 0, 5, \overline{1, 4} \rangle$$

Como exercício, vejamos a maneira de obter a expansão de $\sqrt{41}$, em fracção contínua:

$$\alpha = \alpha_0 = \sqrt{41} = 6, 40 \dots \text{Então, } a_0 = 6.$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{6 + \sqrt{41}}{5} = 2, 48 \dots \text{Então, } a_1 = 2.$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{6 + \sqrt{41}}{5} - 2} = \frac{5}{\sqrt{41} - 4} = \frac{5(\sqrt{41} + 4)}{25} = \frac{4 + \sqrt{41}}{5} = 2, 08 \dots \text{Então, } a_2 = 2.$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{4 + \sqrt{41}}{5} - 2} = \frac{5}{\sqrt{41} - 6} = \frac{5(6 + \sqrt{41})}{5} = 6 + \sqrt{41} = 12, 40 \dots \text{Então, } a_3 = 12.$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{6 + \sqrt{41} - 12} = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \alpha_1 = 2, 48 \dots \text{Então, } a_4 = 2.$$

$$\text{Logo, } \alpha = \alpha_0 = \langle 6, 2, 2, 12, 2, 2, 12, \dots \rangle = \langle 6, \overline{2, 2, 12} \rangle$$

Obtivemos, assim, uma fracção contínua periódica, cujo período tem comprimento 3.

Como 3 é ímpar, a equação $x^2 - 41y^2 = -1$ tem infinitas soluções inteiras, o mesmo acontecendo com a equação $x^2 - 41y^2 = 1$. Essas soluções estão indicadas na seguinte tabela em que

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \\ q_{-2} = 1, p_{-2} = 0, q_{-1} = 0, p_{-1} = 1 \end{cases}$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n	6	2	2	12	2	2	12
p_n	0	1	6	13	32	397	826	2049	25 414
q_n	1	0	1	2	5	62	129	320	3969
$\frac{p_n}{q_n}$	6	6, 5	6, 4	6, 403 2	6, 403 1	6, 403 125	6, 403 124

Como o período tem comprimento 3, as soluções das equações $x^2 - 41y^2 = \pm 1$ aparecem nas colunas correspondentes a $n = -1, 2, 5, 8, 11, \dots$

Mais precisamente, as soluções de $x^2 - 41y^2 = 1$ aparecem nas colunas $n = -1, 5, 11, \dots$ e as soluções de $x^2 - 41y^2 = -1$ aparecem nas colunas $n = 2, 8, 14, \dots$

Refira-se, ainda, que $\lim \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{41}$ e que às fracções $\frac{p_n}{q_n}$ chamamos convergentes.

Se o leitor quiser dar-se ao trabalho de obter a expansão de $\sqrt{1609}$ em fracção contínua, irá verificar que, mesmo para raízes quadradas de números razoavelmente pequenos como 1609, o trabalho poderá ser razoavelmente grande. Aqui, uma folha de cálculo não é de grande utilidade (a menos que se saiba mais sobre fracções contínuas), mas podemos utilizar a calculadora TI 92 ou outra que permita trabalhar com valores exactos de $\sqrt{1609}$.

Seguidamente, apresentamos os cálculos para a determinação da fracção contínua que representa $\sqrt{1609}$. Note-se que, dado $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ representa o maior número inteiro não superior a x .

$$\alpha_0 = \sqrt{1609} \implies a_0 = \lfloor \sqrt{1609} \rfloor = 40$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1609} - \lfloor \sqrt{1609} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} \implies a_1 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} \rfloor = 8$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 40}{9} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 32}{65} \implies a_2 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 32}{65} \rfloor = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 32}{65} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 32}{65} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 33}{8} \implies a_3 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 33}{8} \rfloor = 9$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 33}{8} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 33}{8} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 39}{11} \implies a_4 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 39}{11} \rfloor = 7$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 39}{11} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 39}{11} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 38}{15} \implies a_5 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 38}{15} \rfloor = 5$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 38}{15} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 38}{15} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 37}{16} \implies a_6 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 37}{16} \rfloor = 4$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 37}{16} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 37}{16} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 27}{55} \implies a_7 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 27}{55} \rfloor = 1$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 27}{55} - \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 27}{55} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609} + 28}{15} \implies a_8 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 28}{15} \rfloor = 4$$

$$\begin{aligned}
\alpha_9 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+28}{15} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{15} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+32}{39} \Rightarrow a_9 = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{39} \rfloor = 1 \\
\alpha_{10} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+32}{39} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{39} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+7}{40} \Rightarrow a_{10} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+7}{40} \rfloor = 1 \\
\alpha_{11} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+7}{40} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+7}{40} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+33}{13} \Rightarrow a_{11} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{13} \rfloor = 5 \\
\alpha_{12} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+33}{13} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{13} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+32}{45} \Rightarrow a_{12} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{45} \rfloor = 1 \\
\alpha_{13} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+32}{45} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{45} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+13}{32} \Rightarrow a_{13} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+13}{32} \rfloor = 1 \\
\alpha_{14} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+13}{32} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+13}{32} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+19}{39} \Rightarrow a_{14} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+19}{39} \rfloor = 1 \\
\alpha_{15} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+19}{39} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+19}{39} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+20}{31} \Rightarrow a_{15} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+20}{31} \rfloor = 1 \\
\alpha_{16} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+20}{31} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+20}{31} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+11}{48} \Rightarrow a_{16} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+11}{48} \rfloor = 1 \\
\alpha_{17} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+11}{48} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+11}{48} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+37}{5} \Rightarrow a_{17} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{5} \rfloor = 15 \\
\alpha_{18} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+37}{5} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{5} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+38}{33} \Rightarrow a_{18} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{33} \rfloor = 2 \\
\alpha_{19} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{33} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{33} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+28}{25} \Rightarrow a_{19} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{25} \rfloor = 2 \\
\alpha_{20} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+28}{25} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{25} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+22}{45} \Rightarrow a_{20} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+22}{45} \rfloor = 1 \\
\alpha_{21} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+22}{45} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+22}{45} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+23}{24} \Rightarrow a_{21} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{24} \rfloor = 2 \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+23}{24} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{24} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+25}{41} \Rightarrow a_{22} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+25}{41} \rfloor = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{23} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+25}{41} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+25}{41} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+16}{33} \Rightarrow a_{23} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+16}{33} \rfloor = 1 \\
\alpha_{24} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+16}{33} - \lfloor \frac{\sqrt{1609}+16}{33} \rfloor} = \frac{\sqrt{1609}+17}{40} \Rightarrow a_{24} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{40} \rfloor = 1 \\
\alpha_{25} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+17}{40} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+23}{27} \Rightarrow a_{25} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{27} \rfloor = 2 \\
\alpha_{26} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+23}{27} - 2} = \frac{\sqrt{1609}+31}{24} \Rightarrow a_{26} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+31}{24} \rfloor = 2 \\
\alpha_{27} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+31}{24} - 2} = \frac{\sqrt{1609}+17}{55} \Rightarrow a_{27} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{55} \rfloor = 1 \\
\alpha_{28} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+17}{55} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+38}{3} \Rightarrow a_{28} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{3} \rfloor = 26 \\
\alpha_{29} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{3} - 26} = \frac{\sqrt{1609}+40}{3} \Rightarrow a_{29} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+40}{3} \rfloor = 26 \\
\alpha_{30} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+40}{3} - 26} = \frac{\sqrt{1609}+38}{55} \Rightarrow a_{30} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{55} \rfloor = 1 \\
\alpha_{31} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{55} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+17}{24} \Rightarrow a_{31} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{24} \rfloor = 2 \\
\alpha_{32} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+17}{24} - 2} = \frac{\sqrt{1609}+31}{27} \Rightarrow a_{32} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+31}{27} \rfloor = 2 \\
\alpha_{33} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+31}{27} - 2} = \frac{\sqrt{1609}+23}{40} \Rightarrow a_{33} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{40} \rfloor = 1 \\
\alpha_{34} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+23}{40} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+17}{33} \Rightarrow a_{34} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+17}{33} \rfloor = 1 \\
\alpha_{35} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+17}{33} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+16}{41} \Rightarrow a_{35} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+16}{41} \rfloor = 1 \\
\alpha_{36} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+16}{41} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+25}{24} \Rightarrow a_{36} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+25}{24} \rfloor = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{37} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+25}{24} - 2} = \frac{\sqrt{1609}+23}{45} \Rightarrow a_{37} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+23}{45} \rfloor = 1 \\
\alpha_{38} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+23}{45} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+22}{25} \Rightarrow a_{38} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+22}{25} \rfloor = 2 \\
\alpha_{39} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+22}{25} - 2} = \frac{\sqrt{1609}+28}{33} \Rightarrow a_{39} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{33} \rfloor = 2 \\
\alpha_{40} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+28}{33} - 2} = \frac{\sqrt{1609}+38}{5} \Rightarrow a_{40} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+38}{5} \rfloor = 15 \\
\alpha_{41} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+38}{5} - 15} = \frac{\sqrt{1609}+37}{48} \Rightarrow a_{41} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+37}{48} \rfloor = 1 \\
\alpha_{42} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+37}{48} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+11}{31} \Rightarrow a_{42} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+11}{31} \rfloor = 1 \\
\alpha_{43} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+11}{31} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+20}{39} \Rightarrow a_{43} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+20}{39} \rfloor = 1 \\
\alpha_{44} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+20}{39} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+19}{32} \Rightarrow a_{44} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+19}{32} \rfloor = 1 \\
\alpha_{45} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+19}{32} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+13}{45} \Rightarrow a_{45} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+13}{45} \rfloor = 1 \\
\alpha_{46} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+13}{45} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+32}{13} \Rightarrow a_{46} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{13} \rfloor = 5 \\
\alpha_{47} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+32}{13} - 5} = \frac{\sqrt{1609}+33}{40} \Rightarrow a_{47} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+33}{40} \rfloor = 1 \\
\alpha_{48} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+33}{40} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+7}{39} \Rightarrow a_{48} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+7}{39} \rfloor = 1 \\
\alpha_{49} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+7}{39} - 1} = \frac{\sqrt{1609}+32}{15} \Rightarrow a_{49} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+32}{15} \rfloor = 4 \\
\alpha_{50} &= \frac{1}{\frac{\sqrt{1609}+32}{15} - 4} = \frac{\sqrt{1609}+28}{55} \Rightarrow a_{50} = \lfloor \frac{\sqrt{1609}+28}{55} \rfloor = 1
\end{aligned}$$

$$\alpha_{51} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 28}{55} - 1} = \frac{\sqrt{1609} + 27}{16} \Rightarrow a_{51} = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 27}{16} \rfloor = 4$$

$$\alpha_{52} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 27}{16} - 4} = \frac{\sqrt{1609} + 37}{15} \Rightarrow a_{52} = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 37}{15} \rfloor = 5$$

$$\alpha_{53} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 37}{15} - 5} = \frac{\sqrt{1609} + 38}{11} \Rightarrow a_{53} = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 38}{11} \rfloor = 7$$

$$\alpha_{54} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 38}{11} - 7} = \frac{\sqrt{1609} + 39}{8} \Rightarrow a_{54} = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 39}{8} \rfloor = 9$$

$$\alpha_{55} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 39}{8} - 9} = \frac{\sqrt{1609} + 33}{65} \Rightarrow a_{55} = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 33}{65} \rfloor = 1$$

$$\alpha_{56} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 33}{65} - 1} = \frac{\sqrt{1609} + 32}{9} \Rightarrow a_{56} = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 32}{9} \rfloor = 8$$

$$\alpha_{57} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1609} + 32}{9} - 8} = \sqrt{1609} + 40 \Rightarrow a_{57} = \lfloor \sqrt{1609} + 40 \rfloor = 80$$

$$\alpha_{58} = \frac{1}{\sqrt{1609} + 40 - 80} = \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} = \alpha_1$$

$$\text{Logo, } a_{58} = a_1 = \lfloor \frac{\sqrt{1609} + 40}{9} \rfloor = 8$$

A partir daqui, tudo se repete, pelo que $\sqrt{1609}$ se escreve como uma fracção contínua periódica, tendo-se que o período é constituído por 57 números.

Convém registar que o comprimento do período não tem nada a ver com a ordem de grandeza dos números de que estamos a achar a fracção contínua.

No exemplo seguinte, veremos a fracção contínua correspondente ao número $\sqrt{1613}$, número este que está próximo de $\sqrt{1609}$.

Agora, vamos descobrir alguns dos convergentes de $\sqrt{1609}$.

$$\text{Ora, } \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \\ q_{-2} = 1, p_{-2} = 0, q_{-1} = 0, p_{-1} = 1 \end{cases}, \text{ pelo que temos}$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	40	8	1	9	7	5	4	1
p_n	0	1	40	321	361	3570	25 351	130 325	546 651	676 976
q_n	1	0	1	8	9	89	632	3249	13 628	16 877

n	8	9	10	11	12	13
a_n	4	1	1	5	1	1
p_n	3254 555	3931 531	7186 086	39 861 961	47 048 047	86 910 008
q_n	81 136	98 013	179 149	993 758	1172 907	2166 665

n	14	16	17	18
a_n	1	1	15	2
p_n	133 958 055	354 826 118	5543 259 833	11 441 345 784
q_n	3339 572	8845 809	138 193 372	285 232 553

n	19	20	21	22
a_n	2	1	2	1
p_n	28 425 951 401	39 867 297 185	108 160 545 771	148 027 842 956
q_n	708 658 478	993 891 031	2696 440 540	3690 331 571

n	23	24	25	26
a_n	1	1	2	2
p_n	256 188 388 727	404 216 231 683	1064 620 852 093	2533 457 935 869
q_n	6386 772 111	10 077 103 682	26 540 979 475	63 159 062 632

n	27	28	29	30
a_n	1	26	26	1
p_n	3598 078 787 962	96 083 506 422 881	2501 769 245 782 868	2597 852 752 205 749
q_n	89 700 042 107	2395 360 157 414	62 369 064 134 871	64 764 424 292 285

n	31	32	33
a_n	2	2	1
p_n	7697 474 750 194 366	17 992 802 252 594 481	25 690 277 002 788 847
q_n	191 897 912 719 441	448 560 249 731 167	640 458 162 450 608

n	34	35	36
a_n	1	1	2
p_n	43 683 079 255 383 328	69 373 356 258 172 175	182 429 791 771 727 678
q_n	1089 018 412 181 775	1729 476 574 632 383	4547 971 561 446 541

n	37	38	39
a_n	1	2	2
p_n	251 803 148 029 899 853	686 036 087 831 527 384	1623 875 323 692 954 621
q_n	6277 448 136 078 924	17 102 867 833 604 389	40 483 183 803 287 702

n	40	41	42
a_n	15	1	1
p_n	25 044 165 943 225 846 699	26 668 041 266 918 801 320	51 712 207 210 144 648 019
q_n	624 350 624 882 919 919	664 833 808 686 207 621	1289 184 433 569 127 540

n	43	44	45
a_n	1	1	1
p_n	78 380 248 477 063 449 339	130 092 455 687 208 097 358	208 472 704 164 271 546 697
q_n	1954 018 242 255 335 161	3243 202 675 824 462 701	5197 220 918 079 797 862

n	46	47
a_n	5	1
p_n	1172 455 976 508 565 830 843	1380 928 680 672 837 377 540
q_n	29 229 307 266 223 452 011	34 426 528 184 303 249 873

n	48	49
a_n	1	4
p_n	2553 384 657 181 403 208 383	11 594 467 309 398 450 211 072
q_n	63 655 835 450 526 701 884	289 049 869 986 410 057 409

n	50	51
a_n	1	4
p_n	14 147 851 966 579 853 419 455	68 185 875 175 717 863 888 892
q_n	352 705 705 436 936 759 293	1699 872 691 734 157 094 581

n	52	53
a_n	5	7
p_n	355 077 227 845 169 172 863 915	2553 726 470 091 902 073 936 297
q_n	8852 069 164 107 722 232 198	63 664 356 840 488 212 719 967

n	54	55
a_n	9	1
p_n	23 338 615 458 672 287 838 290 588	25 892 341 928 764 189 912 226 885
q_n	581 831 280 728 501 636 711 901	645 495 637 568 989 849 431 868

n	56
a_n	8
p_n	230 477 350 888 785 807 136 105 668
q_n	5745 796 381 280 420 432 166 845

Note-se que

$$230\,477\,350\,888\,785\,807\,136\,105\,668^2 - 1609 \times 5745\,796\,381\,280\,420\,432\,166\,845^2 = -1$$

Agora, podemos construir a seguinte matriz

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 230\,477\,350\,888\,785\,807\,136\,105\,668 & 5745\,796\,381\,280\,420\,432\,166\,845 \times 1609 \\ 5745\,796\,381\,280\,420\,432\,166\,845 & 230\,477\,350\,888\,785\,807\,136\,105\,668 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 230\,477\,350\,888\,785\,807\,136\,105\,668 & 9244\,986\,377\,480\,196\,475\,356\,453\,605 \\ 5745\,796\,381\,280\,420\,432\,166\,845 & 230\,477\,350\,888\,785\,807\,136\,105\,668 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O determinante da matriz anterior é -1 . Se calcularmos o quadrado da matriz B , obtemos a seguinte matriz A (cujo determinante é 1).

$$A = B^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\text{com } \begin{cases} a_{11} = 106\,239\,618\,545\,424\,991\,765\,243\,316\,655\,636\,841\,919\,665\,809\,723\,452\,449 \\ a_{12} = 4261\,519\,938\,569\,096\,081\,181\,067\,659\,408\,860\,556\,055\,239\,782\,039\,066\,280 \\ a_{21} = 2648\,551\,857\,407\,766\,364\,935\,405\,630\,459\,204\,820\,419\,664\,252\,354\,920 \\ a_{22} = a_{11} \end{cases}$$

Então, descobrimos uma solução da equação $x^2 - 1609y^2 = -1$. A partir desta solução podemos obter a solução fundamental da equação $x^2 - 1609y^2 = 1$. Para isso, basta multiplicar a matriz A por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, obtendo-se a primeira coluna da matriz A .

Logo, essa solução fundamental é

$$\begin{bmatrix} 106\,239\,618\,545\,424\,991\,765\,243\,316\,655\,636\,841\,919\,665\,809\,723\,452\,449 \\ 2648\,551\,857\,407\,766\,364\,935\,405\,630\,459\,204\,820\,419\,664\,252\,354\,920 \end{bmatrix}$$

Outra maneira, consiste em multiplicar a matriz B , pela primeira coluna de B , não sendo preciso calcular a matriz A .

Vejamos, finalmente, a fração contínua correspondente ao número $\sqrt{1613}$, número este que está próximo de $\sqrt{1609}$.

Exemplo 88 *Determine a expansão de $\sqrt{1613}$ em fração contínua.*

Resolução

$$\beta_0 = \sqrt{1613} \implies b_0 = \lfloor \sqrt{1613} \rfloor = 40$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1613} - \lfloor \sqrt{1613} \rfloor} = \frac{\sqrt{1613} + 40}{13} \implies b_1 = \lfloor \frac{\sqrt{1613} + 40}{13} \rfloor = 6$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1613} + 40}{13} - \lfloor \frac{\sqrt{1613} + 40}{13} \rfloor} = \frac{\sqrt{1613} + 38}{13} \implies b_2 = \lfloor \frac{\sqrt{1613} + 38}{13} \rfloor = 6$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{1613} + 38}{13} - \lfloor \frac{\sqrt{1613} + 38}{13} \rfloor} = \sqrt{1613} + 40 \implies b_3 = \lfloor \sqrt{1613} + 40 \rfloor = 80$$

$$\beta_4 = \frac{1}{\sqrt{1613} + 40 - \lfloor \sqrt{1613} + 40 \rfloor} = \frac{\sqrt{1613} + 40}{13} = \beta_1$$

$$\text{Então, } \sqrt{1613} = \langle 40, \overline{6, 6, 80} \rangle = 40 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{80 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$$

Exemplo 89 *Determine os Ternos Pitagóricos da forma $(x, x+1, y)$.*

Resolução

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 = y^2 &\iff x^2 + x^2 + 2x + 1 = y^2 \iff 2x^2 + 2x + 1 = y^2 \\ &\iff 4x^2 + 4x + 1 = 2y^2 - 1 \iff (2x+1)^2 - 2y^2 = -1 \end{aligned}$$

Neste caso temos de resolver a equação $X^2 - 2Y^2 = -1$.

Dos problemas anteriores já sabemos que

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3X_n + 4Y_n \\ 2X_n + 3Y_n \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 2x_{n+1} + 1 \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(2x_n + 1) + 4y_n \\ 2(2x_n + 1) + 3y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_n + 3 + 4y_n \\ 4x_n + 2 + 3y_n \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_n + 2y_n + 1 \\ 4x_n + 3y_n + 2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Também podemos calcular directamente os valores de X e Y e, depois, os valores de x , como se indica na tabela seguinte:

n	X	Y	x	$x + 1$	y
0	1	1	0	1	1
1	7	5	3	4	5
2	41	29	20	21	29
3	239	169	119	120	169
4	1393	985	696	697	985
5	8119	5741	4059	4060	5741
6	47321	33461	23660	23661	33461
7	275807	195025	137903	137904	195025
8	1607521	1136689	803760	803761	1136689
9	9369319	6625109	4684659	4684660	6625109
10	54608393	38613965	27304196	27304197	38613965
11	318281039	225058681	159140519	159140520	225058681

Neste ponto, é muito natural que achemos que o problema está resolvido e queiramos ficar por aqui. Mas, também pode acontecer que achemos que pode haver mais para descobrir.

Se nos lembrarmos da sucessão de Fibonacci e das suas propriedades, talvez nos apeteça calcular o quadrado dum termo da sucessão que nos dá os valores de y e comparar o resultado com o produto dos termos "adjacentes".

Assim, $5^2 = 29 \times 1 - 4$, $29^2 = 169 \times 5 - 4$, $169^2 = 985 \times 29 - 4$, ...

É natural supor que, para todo o número natural n , tenhamos $y_{n+2} = \frac{4+y_n^2}{y_n}$, o que nos permite calcular qualquer termo, conhecidos os dois primeiros.

Mas, se estivermos fora de contexto e olharmos para a sucessão definida por $y_{n+2} = \frac{4+y_n^2}{y_n}$, com $y_0 = 1$ e $y_1 = 5$, uma dúvida nos surgirá: Serão todos os termos desta sucessão números inteiros?

Adiante-se que as semelhanças com a sucessão de Fibonacci não ficam por aqui, como se verá mais adiante.

Uma propriedade curiosa desta sucessão é a seguinte:

$$5 = 2^2 + 1^2, 29 = 5^2 + 2^2, 169 = 12^2 + 5^2, 985 = 29^2 + 12^2, \dots$$

Consideremos as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por
$$\begin{cases} u_1 = 1, v_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_{n+1} + v_n = 2u_n + 5v_n \end{cases}, \text{ cujos}$$

primeiros termos (a partir do terceiro) estão indicados na seguinte tabela:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	29	169	985	5741	33461	195025	1136689	6625109
v_n	70	408	2378	13860	80782	470832	2744210	15994428

Os valores de u são os valores de y . Mas, como obter os valores de x ?

A resposta está neste quadro:

u	1	5	29	169	985	5741	33461	195025	1136689
v	2	12	70	408	2378	13860	80782	470832	2744210
x	3	20	119	696	4059	23660	137903	803760	4684659
$x+1$	4	21	120	697	4060	23661	137904	803761	4684660
y	5	29	169	985	5741	33461	195025	1136689	6625109

Os elementos da última linha da tabela anterior são os da primeira linha, eliminando o 1º elemento (1) e deslocando os restantes uma casa para a esquerda. O primeiro elemento da terceira linha (3) é a soma de 1 com 2. O segundo elemento da terceira linha (20) é a soma dos números 1, 2, 5 e 12, ou dos números 3, 5 e 12. O terceiro elemento da terceira linha (119) é a soma dos números 20, 29 e 70, ou a soma $1 + 2 + 5 + 12 + 29 + 70$.

E os três últimos elementos de cada coluna dão-nos os sucessivos ternos Pitagóricos que pretendíamos. Mas há mais:

Cada elemento da 2ª linha é o dobro da soma dos elementos da 1ª linha até à respectiva coluna:
 $2 = 2 \times 1, 12 = 2 \times (1 + 5), 70 = 2 \times (1 + 5 + 29), \dots$

Cada elemento da 1ª linha (com exceção do 1º?) é a soma de 1 com o dobro da soma dos elementos da 2ª linha que estão nas colunas anteriores:

$$5 = 1 + 2 \times 2, 29 = 1 + 2 \times (2 + 12), 169 = 1 + 2 \times (2 + 12 + 70), \dots$$

Mas voltemos às sucessões definidas por

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3X_n + 4Y_n \\ 2X_n + 3Y_n \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_n + 2y_n + 1 \\ 4x_n + 3y_n + 2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

É fácil verificar que $\begin{cases} X_{n+2} - 6X_{n+1} + X_n = 0 \\ y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 0 \\ x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 2 \end{cases}$, pelo que é possível obter o termo geral das

três sucessões, se tivermos alguns conhecimentos de equações com diferenças. Refira-se que as duas primeiras são equações lineares homogêneas, enquanto que a terceira é uma equação linear não homogênea. A equação característica, $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$, é a mesma para as três equações. As raízes da equação característica são $3 \pm 2\sqrt{2}$, ou seja, $(1 \pm \sqrt{2})^2$.

Seja $\alpha = \alpha_0 = 1 + \sqrt{2}$. Como $2 < 1 + \sqrt{2} < 3$, temos $a_0 = 2$. Então,

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2} = \alpha_0$$

Então, $\alpha = 1 + \sqrt{2} = \langle 2, 2, 2, 2, 2, \dots \rangle = \langle \overline{2} \rangle$.

Se o leitor está familiarizado com frações contínuas, sabe preencher a seguinte tabela, cujas duas últimas linhas são bastante curiosas, pois nela aparecem os valores de u e de v , alternadamente:

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2
p_n	0	1	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985
q_n	1	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378

Vejamos como obter os termos gerais das sucessões envolvidas.

$$X_n = C_1 (3 + 2\sqrt{2})^n + C_2 (3 - 2\sqrt{2})^n$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = 7 \end{cases} &\implies \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 (3 + 2\sqrt{2}) + C_2 (3 - 2\sqrt{2}) = 7 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ C_1 (3 + 2\sqrt{2}) + (1 - C_1) (3 - 2\sqrt{2}) = 7 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ C_1 (3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}) = 7 - 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ C_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1+\sqrt{2}}{2} (3 + 2\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2} (3 - 2\sqrt{2})^n, \forall n \in \mathbb{N}_0 \\ &= \frac{(1+\sqrt{2})^{2n+1}}{2} + \frac{(1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

$$y_n = C_3 (3 + 2\sqrt{2})^n + C_4 (3 - 2\sqrt{2})^n$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 5 \end{cases} &\implies \begin{cases} C_3 + C_4 = 1 \\ C_3 (3 + 2\sqrt{2}) + C_4 (3 - 2\sqrt{2}) = 5 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_4 = 1 - C_3 \\ C_3 (3 + 2\sqrt{2}) + (1 - C_3) (3 - 2\sqrt{2}) = 5 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_4 = 1 - C_3 \\ C_3 (3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}) = 5 - 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_4 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ C_3 = \frac{2+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$y_n = \frac{2+\sqrt{2}}{4} (3 + 2\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4} (3 - 2\sqrt{2})^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$x_n = C_5 (3 + 2\sqrt{2})^n + C_6 (3 - 2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 3 \end{cases} &\implies \begin{cases} C_5 + C_6 - \frac{1}{2} = 0 \\ C_5 (3 + 2\sqrt{2}) + C_6 (3 - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{2} = 3 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_6 = \frac{1}{2} - C_5 \\ C_5 (3 + 2\sqrt{2}) + (\frac{1}{2} - C_5) (3 - 2\sqrt{2}) = \frac{7}{2} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_6 = \frac{1}{2} - C_5 \\ C_5 (3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2}) = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} + \sqrt{2} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} C_6 = \frac{1-\sqrt{2}}{4} \\ C_5 = \frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1+\sqrt{2}}{4} (3+2\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{4} (3-2\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0 \\ &= \frac{(1+\sqrt{2})^{2n+1}}{4} + \frac{(1-\sqrt{2})^{2n+1}}{4} - \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Exemplo 90 Determine as unidades do Anel $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

Resolução

Relembramos que unidade dum anel com identidade é um elemento invertível. Calculemos o inverso de $a + b\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

Então, $a^2 - 2b^2$ tem de dividir a e b . Então, $a^2 - 2b^2$ tem de dividir o máximo divisor comum entre a e b .

Por outro lado, o máximo divisor comum entre a e b divide $a^2 - 2b^2$, pelo que $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

E, assim, fomos conduzidos às equações $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, com $x, y \in \mathbb{Z}$, o que (como já sabemos) mostra que há infinitas unidades no Anel considerado.

Como curiosidade, note-se que uma das unidades é $1 + \sqrt{2}$, a partir da qual obtemos outras unidades, como por exemplo, $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, $(1 + \sqrt{2})^3 = 7 + 5\sqrt{2}$, $(1 + \sqrt{2})^4 = 17 + 12\sqrt{2}$, obtendo-se, também, as soluções (inteiras e positivas) das equações $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. As outras unidades obtêm-se através dos conjugados e dos simétricos das unidades acima referidas.

Exemplo 91 Na minha Rua, só há casas num dos lados. As casas estão numeradas $(1, 2, 3, \dots)$ e verifica-se um facto curioso: a soma dos números das casas que estão antes da minha é exactamente igual à soma dos números das casas que estão depois da minha. Em que número moro e quantas casas tem a minha Rua?

Resolução

Suponhamos que moro na casa número n e que há k casas depois da minha. Então:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &= \frac{(n+1+n+k)k}{2} &\iff n^2 - n &= 2nk + k^2 + k \\ & &\iff n^2 - (1+2k)n - (k^2 + k) &= 0 \\ & &\iff n &= \frac{1+2k \pm \sqrt{(1+2k)^2 + 4(k^2 + k)}}{2} \\ & &\iff n &= \frac{1+2k \pm \sqrt{8k^2 + 8k + 1}}{2} \end{aligned}$$

Neste problema, apenas interessa a solução positiva, com a condição de $8k^2 + 8k + 1$ ser um quadrado perfeito.

Então $8k^2 + 8k + 1 = x^2$, para certo inteiro x .

$$\begin{aligned}
8k^2 + 8k + 1 = x^2 &\iff 2(4k^2 + 4k + 1) = x^2 + 1 \\
&\iff 2(2k + 1)^2 - x^2 = 1 \\
&\iff x^2 - 2(2k + 1)^2 = -1
\end{aligned}$$

E, mais uma vez, obtivemos a equação de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = -1$, com $y = 2k + 1$. Note-se que $n = \frac{1+2k+x}{2}$, com x um inteiro positivo ou nulo.

Na tabela seguinte, apresentam-se algumas soluções da equação e onde estão indicadas algumas soluções do problema proposto:

x	1	7	41	239	1393	8119	47321	275807	1607521
y	1	5	29	169	985	5741	33461	195025	1136689
k	0	2	14	84	492	2870	16730	97512	568344
n	1	6	35	204	1189	6930	40391	235416	1372105
$n + k$	1	8	49	288	1681	9800	57121	332928	1940449

Exemplo 92 Moro numa Rua onde há casas nos dois lados. Num dos lados, as casas têm números pares e no outro números ímpares; eu moro numa casa de número par, enquanto o meu tio mora numa casa de número ímpar que, por sinal, é o número a seguir ao meu. Além disso, verifica-se que a soma dos números das casas pares que não estão depois da minha é igual à soma dos números das casas ímpares que não estão antes da casa do meu tio. Qual o número da minha casa?

Resolução

Suponhamos que moro na casa número $2n$ e que há k casas de número ímpar que não estão antes da casa do meu tio.

$$\text{Então, } \begin{cases} 2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1) \\ (2n+1) + \dots + (2n+2k-1) = \frac{2n+1+2n+2k-1}{2} \times k = (2n+k)k = 2nk + k^2 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
n^2 + n = 2nk + k^2 &\iff n^2 + (1-2k)n - k^2 = 0 \\
&\iff n = \frac{2k-1 \pm \sqrt{4k^2 - 4k + 1 + 4k^2}}{2} \\
&\iff n = \frac{2k-1 \pm \sqrt{8k^2 - 4k + 1}}{2}
\end{aligned}$$

Então $8k^2 - 4k + 1 = y^2$, para certo inteiro y .

$$8k^2 - 4k + 1 = y^2 \iff 16k^2 - 8k + 1 = 2y^2 - 1 \iff (4k-1)^2 - 2y^2 = -1$$

E mais uma vez obtivemos $x^2 - 2y^2 = -1$, agora com $x = 4k - 1$.

Na tabela seguinte apresentam-se algumas soluções da equação que resolve o problema proposto:

x	1	7	41	239	1393	8119	47321	275807
y	1	5	29	169	985	5741	33461	195025
k	0,5	2	10,5	60	348,5	2030	11830,5	68952
n	0,5	4	24,5	144	840,5	4900	28560,5	166464
$2n$	1	8	49	288	1681	9800	57121	332928

Observe-se que n tem de ser um número inteiro e x deve ser da forma $4k-1$, pelo que as soluções do problema (8, 288, 9800, 332928, ...) aparecem em colunas alternadas.

Exemplo 93 *É fácil verificar que a soma de dois números triangulares consecutivos é um quadrado. Determine os quadrados que são soma de quatro números triangulares consecutivos.*

Resolução

Seja $f(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2} + \frac{(n+3)(n+4)}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(n+1)(2n+2)}{2} + \frac{(n+3)(2n+6)}{2} = \frac{2(n+1)^2}{2} + \frac{2(n+3)^2}{2} \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 2 + 2n^2 + 12n + 18}{2} = \frac{4n^2 + 16n + 20}{2} = 2n^2 + 8n + 10 \end{aligned}$$

Então, $2n^2 + 8n + 10 = t^2 = 4y^2$, com $t = 2y$.

$$2n^2 + 8n + 10 = 4y^2 \iff n^2 + 4n + 4 + 1 = 2y^2 \iff (n+2)^2 - 2y^2 = -1$$

E, mais uma vez, obtivemos a equação $x^2 - 2y^2 = -1$, tendo-se que uma das soluções do problema é constituída pelos quatro números 15, 21, 28 e 36 cuja soma é 100.

x	7	41	239	1393	8119	47321
y	5	29	169	985	5741	33461
n	5	39	237	1391	8117	47319
$\frac{n(n+1)}{2}$	15	780	28 203	968 136	32 946 903	1119 567 540
$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$	21	820	28 441	969 528	32 955 021	1119 614 860
$\frac{(n+2)(n+3)}{2}$	28	861	28 680	970 921	32 963 140	1119 662 181
$\frac{(n+3)(n+4)}{2}$	36	903	28 920	972 315	32 971 260	1119 709 503
$2n^2 + 8n + 10$	100	3364	114 244	3880 900	131 836 324	4478 554 084

Exemplo 94 *Determine os números triangulares que são dados pela soma de dois números triangulares consecutivos.*

Resolução

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2} \iff (n+1)^2 = \frac{m(m+1)}{2}$$

Então, basta-nos determinar os números triangulares que são quadrados, o que foi feito num dos exemplos anteriores.

Exemplo 95 *Seja n um quadrado, tal que a soma dos primeiros n números naturais (positivos) é outro quadrado. Determine os dois quadrados.*

Resolução

$$\sum_{k=1}^{x^2} k = \frac{x^2(x^2+1)}{2} = t^2, \text{ pelo que temos de resolver a equação } x^2(x^2+1) = 2t^2.$$

Suponhamos, por absurdo, que x^2 é par. Então o factor primo 2 ocorre, no primeiro membro, um número par de vezes e, no segundo membro, um número ímpar de vezes. Logo, x^2 é ímpar, pelo que $\text{mdc}(x, 2) = 1 = \text{mdc}(x^2, 2)$, pelo que x^2 divide t^2 e daqui se conclui que x divide t , pelo que $t = yx$, para certo natural y . Logo, $x^2(x^2 + 1) = 2y^2x^2$, pelo que $x^2 + 1 = 2y^2$, ou seja, $x^2 - 2y^2 = -1$.

E, mais uma vez, obtivemos a equação $x^2 - 2y^2 = -1$.

Na seguinte tabela, apresentam-se algumas soluções do problema:

x	1	7	41	239	1393
y	1	5	29	169	985
$t = xy$	1	35	1189	40 391	1372 105
$n = x^2$	1	49	1681	57 121	1940 449
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	1225	1413 721	1631 432 881	1882 672 131 025
t^2	1	1225	1413 721	1631 432 881	1882 672 131 025

Exemplo 96 Resolva a equação $(2x^2 + 1)^2 - 8t^2 = 1$, com $x, t \in \mathbb{N}$.

Resolução

$$\begin{aligned} (2x^2 + 1)^2 - 8t^2 = 1 &\iff 4x^4 + 4x^2 + 1 - 8t^2 = 1 \iff 4x^4 + 4x^2 = 8t^2 \\ &\iff x^4 + x^2 = t^2 \iff x^2(x^2 + 1) = t^2 \end{aligned}$$

E obtivemos a equação do problema anterior.

Exemplo 97 Determine os números hexagonais que são números triangulares.

Resolução

Neste caso, quase que não precisamos fazer nada. Recordamos que número k -gonal é um número natural da forma $\frac{((k-2)n + 4 - k)n}{2}$. Então, para $k = 6$, vem que número hexagonal é um número da forma $\frac{(4n-2)n}{2}$, ou seja, da forma $(2n-1)n$. Mas, $(2n-1)n = \frac{(2n-1)2n}{2}$, pelo que todo o número hexagonal é um número triangular.

Se quisermos fazer cálculos, sem ter reparado na igualdade anterior:

$$\begin{aligned} 2n^2 - n = \frac{m(m+1)}{2} &\iff 4n^2 - 2n = m^2 + m \\ &\iff 16n^2 - 8n = 4m^2 + 4m \\ &\iff 16n^2 - 8n + 1 = 4m^2 + 4m + 1 \\ &\iff (4n-1)^2 = (2m+1)^2 \\ &\iff 4n-1 = 2m+1 \vee 4n-1 = -2m-1 \\ &\iff 4n = 2m+2 \vee 4n = -2m \\ &\iff m = 2n-1 \vee m = -2n \end{aligned}$$

É claro que só interessam as soluções positivas, pelo que $m = 2n - 1$, ou seja, n pode ser qualquer número natural, pelo que todo o número hexagonal é um número triangular.

A seguir, apresentamos os primeiros 15 números triangulares e os primeiros 15 números hexagonais:

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(2n-1)n$
1	1	1
2	3	6
3	6	15
4	10	28
5	15	45

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(2n-1)n$
6	21	66
7	28	91
8	36	120
9	45	153
10	55	190

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(2n-1)n$
11	66	231
12	78	276
13	91	325
14	105	378
15	120	435

Exemplo 98 A soma dos primeiros n números triangulares (positivos) é igual ao produto de n por um quadrado. Determine n e o tal quadrado.

Resolução

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = nt^2 &\iff \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k = nt^2 \\
&\iff \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = nt^2 \\
&\iff \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = nt^2 \\
&\iff \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = nt^2 \\
&\iff \frac{(n+1)(n+2)}{6} = t^2 \\
&\iff n^2 + 3n + 2 = 6t^2 \\
&\iff 4n^2 + 12n + 8 = 24t^2 \\
&\iff 4n^2 + 12n + 9 = 24t^2 + 1 \\
&\iff (2n+3)^2 - 24t^2 = 1
\end{aligned}$$

O problema consiste na resolução da equação $X^2 - 24Y^2 = 1$, equação esta que admite a solução fundamental $(5, 1)$.

$$\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5X_k + 24Y_k \\ X_k + 5Y_k \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2n_{k+1} + 3 \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2n_k + 3 \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10n_k + 24t_k + 15 \\ 2n_k + 5t_k + 3 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Então, } \begin{bmatrix} 2n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10n_k + 24t_k + 12 \\ 2n_k + 5t_k + 3 \end{bmatrix}, \text{ donde vem } \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5n_k + 12t_k + 6 \\ 2n_k + 5t_k + 3 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo, } \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ t_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_2 \\ t_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_3 \\ t_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 241 \\ 99 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} n_4 \\ t_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 241 \\ 99 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2399 \\ 980 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemplo 99 Determine os números pentagonais que são quadrados.

Resolução

Número pentagonal é um número da forma $\frac{(3n-1)n}{2}$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{(3n-1)n}{2} = t^2 &\iff 3n^2 - n = 2t^2 \\ &\iff 36n^2 - 12n + 1 = 24t^2 + 1 \\ &\iff (6n-1)^2 - 24t^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5X_k + 24Y_k \\ X_k + 5Y_k \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \\ \begin{bmatrix} 6n_{k+1} - 1 \\ t_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 24 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6n_k - 1 \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30n_k + 24t_k - 5 \\ 6n_k + 5t_k - 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então, $\begin{bmatrix} 6n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30n_k + 24t_k - 4 \\ 6n_k + 5t_k - 1 \end{bmatrix}$, donde vem

$$\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5n_k + 4t_k - \frac{2}{3} \\ 6n_k + 5t_k - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ t_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} n_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E temos um problema: Para que valores de k , n_k é inteiro?

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_{k+2} \\ t_{k+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ t_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ t_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49n_k + 40t_k - 8 \\ 60n_k + 49t_k - 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, n_k é inteiro, quando k é ímpar.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_3 \\ t_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 99 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_5 \\ t_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 81 \\ 99 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7921 \\ 9701 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_7 \\ t_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7921 \\ 9701 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 776\,161 \\ 950\,599 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} n_9 \\ t_9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 49 & 40 \\ 60 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 776\,161 \\ 950\,599 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 76\,055\,841 \\ 93\,149\,001 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Os números pentagonais e quadrados são, $1, 99^2, 9701^2, 950\,599^2, 93\,149\,001^2, \dots$

É claro que só nos interessa conhecer os valores de t_k e de t_k^2 , com k ímpar.

$$\begin{aligned} \begin{cases} t_{k+1} = 6n_k + 5t_k - 1 \\ t_{k+2} = 60n_k + 49t_k - 10 \end{cases} &\implies \begin{cases} 10t_{k+1} = 60n_k + 50t_k - 10 \\ t_{k+2} = 60n_k + 49t_k - 10 \end{cases} \\ &\implies t_{k+2} = 10t_{k+1} - t_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 99 \\ 10 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 99 \\ 10 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9701 \\ 980 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9701 \\ 980 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 950\,599 \\ 96\,030 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 950\,599 \\ 96\,030 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 93\,149\,001 \\ 9409\,960 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 99 & -10 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 93\,149\,001 \\ 9409\,960 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9127\,651\,499 \\ 922\,080\,050 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resposta: $1^2, 99^2, 9701^2, 950\,599^2, 93\,149\,001^2, 9127\,651\,499^2, \dots$

$$1^2 = 1, \quad 99^2 = 9801, \quad 9701^2 = 94\,109\,401, \quad 950\,599^2 = 903\,638\,458\,801$$

$$93\,149\,001^2 = 8676\,736\,387\,298\,001, \quad 9127\,651\,499^2 = 83\,314\,021\,887\,196\,947\,001$$

Exemplo 100 Determine os números pentagonais que são números triangulares.

Resolução

$$\begin{aligned} \frac{(3n+2)(n+1)}{2} &= \frac{m(m+1)}{2} &\iff 3n^2 + 5n + 2 &= m^2 + m \\ &&\iff 36n^2 + 20n + 24 &= 12m^2 + 12m \\ &&\iff 36n^2 + 20n + 25 &= 12m^2 + 12m + 1 \\ &\iff (6n+5)^2 &= 3(4m^2 + 4m + 1) - 2 \\ &\iff (6n+5)^2 - 3(2m+1)^2 &= -2 \end{aligned}$$

A resolução desta equação implica o estudo prévio da equação $x^2 - 3y^2 = -2$, a qual admite a solução $(1, 1)$.

A solução fundamental da equação $x^2 - 3y^2 = 1$ é $(2, 1)$. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Então, $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71 \\ 41 \end{bmatrix}$$

Vejamos como obter os valores de m e n :

$$\begin{bmatrix} 6n_{k+1} + 5 \\ 2m_{k+1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6n_k + 5 \\ 2m_k + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12n_k + 6m_k + 13 \\ 6n_k + 4m_k + 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 6n_{k+1} = 12n_k + 6m_k + 8 \\ 2m_{k+1} = 6n_k + 4m_k + 6 \end{cases} &\implies \begin{cases} n_{k+1} = 2n_k + m_k + \frac{4}{3} \\ m_{k+1} = 3n_k + 2m_k + 3 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} n_{k+2} = 2n_{k+1} + m_{k+1} + \frac{4}{3} \\ m_{k+2} = 3n_{k+1} + 2m_{k+1} + 3 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} n_{k+2} = 4n_k + 2m_k + \frac{8}{3} + 3n_k + 2m_k + 3 + \frac{4}{3} \\ m_{k+2} = 6n_k + 3m_k + 4 + 6n_k + 4m_k + 6 + 3 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} n_{k+2} = 7n_k + 4m_k + 7 \\ m_{k+2} = 12n_k + 7m_k + 13 \end{cases}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n_{k+2} \\ m_{k+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_k \\ m_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7n_k + 4m_k + 7 \\ 12n_k + 7m_k + 13 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \frac{20 \times 21}{2} = 210 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 164 \\ 285 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \frac{285 \times 286}{2} = 40\,755 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 164 \\ 285 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2295 \\ 3976 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \frac{3976 \times 3977}{2} = 7906\,276 \\
\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2295 \\ 3976 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 31\,976 \\ 55\,385 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \frac{55\,385 \times 55\,386}{2} = 1533\,776\,805
\end{aligned}$$

Resposta: 1, 210, 40 755, 7906 276, 1533 776 805, ...

Exemplo 101 Determine os números octogonais que são quadrados.

Resolução

Número octogonal é um número da forma $\frac{(6n-4)n}{2}$. Então:

$$\begin{aligned}
(3n-2)n &= m^2 \iff 3n^2 - 2n = m^2 \iff 9n^2 - 6n + 1 = 3m^2 + 1 \\
&\iff (3n-1)^2 - 3m^2 = 1
\end{aligned}$$

Neste caso, temos de resolver a equação $x^2 - 3y^2 = 1$, equação esta que tem a solução fundamental $(2, 1)$.

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Então, $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2x_k + 3y_k \\ x_k + 2y_k \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 3n_{k+1} - 1 \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(3n_k - 1) + 3m_k \\ 3n_k - 1 + 2m_k \end{bmatrix} \\
&\implies \begin{bmatrix} 3n_{k+1} - 1 \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n_k + 3m_k - 2 \\ 3n_k + 2m_k - 1 \end{bmatrix} \\
&\implies \begin{bmatrix} n_{k+1} \\ m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n_k + m_k - \frac{1}{3} \\ 3n_k + 2m_k - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} n_{k+2} \\ m_{k+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2n_{k+1} + m_{k+1} - \frac{1}{3} \\ 3n_{k+1} + 2m_{k+1} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4n_k + 2m_k - \frac{2}{3} + 3n_k + 2m_k - 1 - \frac{1}{3} \\ 6n_k + 3m_k - 1 + 6n_k + 4m_k - 2 - 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 7n_k + 4m_k - 2 \\ 12n_k + 7m_k - 4 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \dots 15^2 = 225 \\
 \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 121 \\ 209 \end{bmatrix}, \quad \dots 209^2 = 43\,681 \\
 \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 121 \\ 209 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1681 \\ 2911 \end{bmatrix}, \quad \dots 2911^2 = 8\,473\,921 \\
 \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1681 \\ 2911 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 23\,409 \\ 40\,545 \end{bmatrix}, \quad \dots 40\,545^2 = 1\,643\,897\,025
 \end{aligned}$$

Exemplo 102 Determine os números pentagonais que são números decagonais.

Resolução

Número decagonal é um número da forma $\frac{(8m-6)m}{2}$, enquanto que um número pentagonal é da forma $\frac{(3n-1)n}{2}$. Então:

$$\begin{aligned}
 (3n-1)n &= (8m-6)m &\iff 3n^2 - n &= 8m^2 - 6m \\
 &&\iff 144n^2 - 48n &= 384m^2 - 288m \\
 &&\iff 144n^2 - 48n + 4 &= 384m^2 - 288m + 54 - 50 \\
 &&\iff (12n-2)^2 &= 6(64m^2 - 48m + 9) - 50 \\
 &&\iff (12n-2)^2 - 6(8m-3)^2 &= -50
 \end{aligned}$$

Uma maneira de obter soluções da equação anterior é resolver a equação $x^2 - 6y^2 = -2$ e multiplicar essas soluções por 5.

Neste caso, só interessam as soluções em que $12n-2$ e $8m-3$ sejam múltiplos de 5, correspondendo a m e n números inteiros positivos. Isto significa que $n = 5s + 1$ e $m = 5t + 1$, para certos inteiros s e t . Logo:

$$\begin{aligned}
 (60s + 12 - 2)^2 - 6(40t + 8 - 3)^2 &= -50 &\iff (60s + 10)^2 - 6(40t + 5)^2 &= -50 \\
 &&\iff (12s + 2)^2 - 6(8t + 1)^2 &= -2
 \end{aligned}$$

E obtivemos, assim, uma equação do tipo $x^2 - 6y^2 = -2$. Como resolvê-la?

É imediato verificar que a equação anterior admite a solução $(2, 1)$, pelo que a equação não é impossível. Por outro lado, a equação $x^2 - 6y^2 = 1$ admite a solução fundamental $(5, 2)$.

Consideremos as sucessões definidas por $\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_k + 12y_k \\ 2x_k + 5y_k \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vamos provar, por indução, que $x_n^2 - 6y_n^2 = -2, \forall n \in \mathbb{N}_0$:

Para $n = 0$, temos $2^2 - 6 \times 1^2 = -2$, o que é verdade.

Suponhamos que $x_n^2 - 6y_n^2 = -2$, para certo $n \in \mathbb{N}_0$. Então,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 6y_{n+1}^2 &= (5x_n + 12y_n)^2 - 6(2x_n + 5y_n)^2 \\ &= 25x_n^2 + 120x_ny_n + 144y_n^2 - 24x_n^2 - 120x_ny_n - 150y_n^2 = x_n^2 - 6y_n^2 = -2 \end{aligned}$$

Logo, $x_n^2 - 6y_n^2 = -2, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{bmatrix} 12s_{k+1} + 2 \\ 8t_{k+1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(12s_k + 2) + 12(8t_k + 1) \\ 2(12s_k + 2) + 5(8t_k + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60s_k + 96t_k + 22 \\ 24s_k + 40t_k + 9 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Então, } \begin{bmatrix} 12s_{k+1} \\ 8t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60s_k + 96t_k + 20 \\ 24s_k + 40t_k + 8 \end{bmatrix}, \text{ donde se conclui que } \begin{bmatrix} s_{k+1} \\ t_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5s_k + 8t_k + \frac{5}{3} \\ 3s_k + 5t_k + 1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_{k+2} \\ t_{k+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5s_{k+1} + 8t_{k+1} + \frac{5}{3} \\ 3s_{k+1} + 5t_{k+1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(5s_k + 8t_k + \frac{5}{3}) + 8(3s_k + 5t_k + 1) + \frac{5}{3} \\ 3(5s_k + 8t_k + \frac{5}{3}) + 5(3s_k + 5t_k + 1) + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 25s_k + 40t_k + \frac{25}{3} + 24s_k + 40t_k + 8 + \frac{5}{3} \\ 15s_k + 24t_k + 5 + 15s_k + 25t_k + 5 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49s_k + 80t_k + 18 \\ 30s_k + 49t_k + 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Partindo da solução $s_0 = t_0 = 0$, vem:

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies m(4m-3) = 1$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 80 \\ 30 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ m_1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 \\ 56 \end{bmatrix} \implies m(4m-3) = 12\,376$$

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 80 \\ 30 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1780 \\ 1090 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_2 \\ m_2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1780 \\ 1090 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8901 \\ 5451 \end{bmatrix} \implies m(4m-3) = 118\,837\,251$$

$$\begin{bmatrix} s_3 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 80 \\ 30 & 49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1780 \\ 1090 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 174\,438 \\ 106\,821 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n_3 \\ m_3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 174\,438 \\ 106\,821 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 872\,191 \\ 534\,106 \end{bmatrix} \implies m(4m-3) = 1141\,075\,274\,626$$

Então, 1, 12 376, 118 837 251, 1141 075 274 626 são alguns dos infinitos números que são, ao mesmo tempo, números pentagonais e números decagonais.

Mas pode colocar-se a questão: Não há outros números simultaneamente, pentagonais e decagonais?

Ou, de outro modo, todas as soluções da equação $x^2 - 6y^2 = -50$ resultam de multiplicar por 5 as soluções da equação $x^2 - 6y^2 = -2$? É claro que não, uma vez que $x = 2, y = 3$ satisfazem a condição $x^2 - 6y^2 = -50$. Logo, há infinitas soluções que não são múltiplos de 5. Mas, isto não significa que o problema tenha mais soluções, uma vez que é necessário que $n = \frac{x+2}{12}$ e $m = \frac{y+3}{8}$ sejam números inteiros.

$$\begin{bmatrix} n_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 12n_{k+1} - 2 \\ 8m_{k+1} - 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12n_k - 2 \\ 8m_k - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60n_k + 96m_k - 46 \\ 24n_k + 40m_k - 19 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 12n_{k+1} \\ 8m_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 60n_k + 96m_k - 44 \\ 24n_k + 40m_k - 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3n_{k+1} \\ 4m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15n_k + 24m_k - 11 \\ 12n_k + 20m_k - 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sejam $\begin{cases} a_k = 3n_k \\ b_k = 4m_k \end{cases}$, com $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 3 \end{cases}$. Então, $\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a_k + 6b_k - 11 \\ 4a_k + 5b_k - 8 \end{bmatrix}$, donde vem que a_k e b_k são números inteiros, para todo o valor natural de k . Além disso, temos que se b_k é ímpar, então $b_{k+1} = 4a_k + 5b_k - 8$ é ímpar, pelo que b_n é ímpar, para todo o número natural n , porque $b_0 = 3$. Então, $m_k = \frac{b_k}{4}$ nunca é um número natural.

Mas a questão colocada permanece sem resposta, uma vez que há outras soluções para a equação $x^2 - 6y^2 = -50$ que não resultam da solução $x = 2, y = 3$, (por exemplo, $x = 26, y = 11$).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_0 = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \\ m_0 = \frac{7}{4} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 12n_{k+1} - 2 \\ 8m_{k+1} - 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12n_k - 2 \\ 8m_k - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60n_k + 96m_k - 46 \\ 24n_k + 40m_k - 19 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 12n_{k+1} \\ 8m_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 60n_k + 96m_k - 44 \\ 24n_k + 40m_k - 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3n_{k+1} \\ 4m_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15n_k + 24m_k - 11 \\ 12n_k + 20m_k - 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sejam $\begin{cases} a_k = 3n_k \\ b_k = 4m_k \end{cases}$, com $\begin{cases} a_0 = 7 \\ b_0 = 7 \end{cases}$. Então, $\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5a_k + 6b_k - 11 \\ 4a_k + 5b_k - 8 \end{bmatrix}$, donde vem que a_k e b_k são números inteiros, para todo o valor natural de k . Além disso, temos que se b_k é ímpar, então $b_{k+1} = 4a_k + 5b_k - 8$ é ímpar, pelo que b_n é ímpar, para todo o número natural n , porque $b_0 = 7$. Então, $m_k = \frac{b_k}{4}$ nunca é um número natural. Logo, o problema dado não tem mais soluções, se não houver mais soluções da equação $x^2 - 6y^2 = -50$ que não resultem das anteriores.

Capítulo 9

A Travessia do Deserto

Consideremos o conhecido problema de atravessar um deserto de "comprimento" n , supondo que apenas podemos transportar mantimentos para três dias, mas que há abrigos que permitem guardar os mantimentos para serem utilizados numa data posterior. Esses abrigos estão dispostos ao longo do percurso e destinam-se a ser usados ao fim de cada jornada. Vamos considerar três hipóteses:

- 1 - Só ida
- 2 - Ida e volta, com uma única fonte de mantimentos
- 3 - Ida e volta, com duas fontes de mantimentos (à partida e à chegada)

Só ida

Comecemos por dizer que um deserto de "comprimento" n significa que, não havendo problemas de mantimentos, demoramos n dias a atravessar o deserto. Como atravessar um deserto de "comprimento"4? É preciso transportar mantimentos, do ponto de partida para o 1º abrigo, que dêem para 3 dias, pelo que são necessárias duas viagens do ponto de partida para o 1º abrigo (é preciso voltar atrás uma vez). Então, $u_4 = 6$.

Seja u_n o número mínimo de dias que se demora a atravessar um deserto de "comprimento" n .

Para $n \geq 3$, temos que para atravessar um deserto de "comprimento" $n + 1$, é preciso colocar no 1º abrigo mantimentos para u_n dias, pelo que são necessárias $u_n - 1$ viagens do ponto de partida para o abrigo 1. Então, para $n \geq 3$, temos $u_{n+1} = 3(u_n - 1) = 3u_n - 3$.

Então, a sucessão (u_n) é definida por recorrência do seguinte modo:
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 3 \iff n \geq 3 \end{cases} ,$$

ou por
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 3 \iff n \geq 2 \end{cases} .$$

Podemos encontrar o termo geral da sucessão, o qual, apenas, não é válido para $n = 1$: $u_n = c \times 3^n$ é a solução geral da equação homogênea $u_{n+1} - 3u_n = 0$. Como $A = 3A - 3 \iff A = \frac{3}{2}$, então a solução geral da equação com diferenças dada é $u_n = c \times 3^n + \frac{3}{2}$, com $n \geq 2$. Como $u_2 = 2$, temos $9c + \frac{3}{2} = 2$, donde se conclui que $c = \frac{1}{18}$.

Logo, $u_n = \frac{3^n}{18} + \frac{3}{2} = \frac{3^{n-2}+3}{2}$, para $n \geq 2$, tendo-se que $u_1 = 1$.

Eis alguns termos desta sucessão, omitindo os quatro primeiros:

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
u_n	15	42	123	366	1095	3282	9843	29526	88575	265722

n	15	16	17	18	19	20
u_n	797163	2391486	7174455	21523362	64570083	193710246

Ou seja, para atravessar um deserto de "comprimento" 20, gastamos 530713 anos, em vez dos 20 dias que gastaríamos se pudéssemos transportar mantimentos para os 20 dias.

Ida e volta, com uma única fonte de mantimentos

Este é um problema bastante fácil de resolver, mas com uma solução algo inesperada:

Neste caso, a sucessão que nos dá o número de dias gastos no percurso de ida e volta é definida por $\begin{cases} v_1 = 2, v_2 = 6 \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases} \iff n \geq 2$, isto é, trata-se duma progressão geométrica de primeiro termo 2 e razão 3.

Então, $v_n = 2 \times 3^{n-1}$.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	18	54	162	486	1458	4374	13122	39366	118098	354294

n	13	14	15	16	...	20
u_n	1062882	3188646	9565938	28697814	...	2324522934

Neste caso, para atravessar um deserto de "comprimento" 20, gastamos quase 6368556 anos, em vez dos 40 dias que gastaríamos, se houvesse mantimentos nos diversos abrigos ao longo do percurso, ou se pudéssemos transportar mantimentos para os 40 dias.

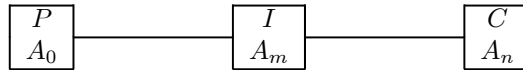
Ida e volta, com duas fontes de mantimentos (à partida e à chegada)

Neste caso, podemos considerar duas versões do problema:

1ª versão: Pretendemos chegar o mais cedo possível ao outro lado do deserto. Então basta-nos multiplicar por 2 o resultado do caso anterior.

2ª versão: Pretendemos regressar o mais cedo possível ao ponto de partida. Este problema é mais difícil do que os anteriores e, para a sua resolução, é necessário conhecer as regras de derivação e saber encontrar o mínimo duma função real de variável real.

Consideremos o seguinte esquema:



P é o ponto de partida (abrigo zero), I é o último abrigo onde são deixados mantimentos para o regresso (abrigo m) e C é o ponto de chegada, no outro lado do deserto (abrigo n). É claro que só nos interessa considerar o caso em que $n \geq 4$, pois os restantes casos são triviais.

De I até C , temos um deserto de comprimento $n - m$, atravessado sem deixar mantimentos para o regresso, pelo que o número de dias gastos, de I até C , é de $\frac{3^{n-m-2}+3}{2}$, se $n - m - 2 \geq 2$, isto é, se $n \geq m + 4$.

Assim, temos de colocar em I , mantimentos para $\frac{3^{n-m-2}+3}{2}$ dias, pelo que teremos de "levantar" em P , $3^m \times \frac{3^{n-m-2}+3}{2}$ mantimentos, sendo que este é o número de dias que gastaremos no percurso de ida.

Então o número total de dias gastos no percurso de ida e volta é dado por $3^m \times \frac{3^{n-m-2}+3}{2} + \frac{3^{n-m-2}+3}{2} = \frac{3^{n-2}+3^{m+1}+3^{n-m-2}+3}{2}$.

Então, o nosso primeiro objectivo é minimizar a função definida por $f_n(x) = 3^{n-2} + 3^{x+1} + 3^{n-x-2} + 3$.

Ora, $f'_n(x) = 3^{x+1} \ln 3 - 3^{n-x-2} \ln 3 = 3^{x+1} (1 - 3^{n-2x-3}) \ln 3$.

Como $3^{x+1} \ln 3 > 0$, então o sinal de $f'_n(x)$ é o sinal de $1 - 3^{n-2x-3}$, pelo que temos o seguinte quadro:

x	$-\infty$	$\frac{n-3}{2}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$
$f_n(x)$	\searrow	mín	\nearrow

Logo, a função tem um mínimo para $x = \frac{n-3}{2}$.

Mas falta-nos, ainda, resolver duas questões.

A primeira consiste em verificar qual o valor de m .

Se n for ímpar, então $m = \frac{n-3}{2}$.

Se n for par, então $n = 2t$, para certo $t \in \mathbb{N}$, pelo que a função $f_n(x)$ assume o valor mínimo para $x = \frac{2t-3}{2}$. Agora, temos de calcular $f_n(t-2)$ e $f_n(t-1)$, e verificar qual dos dois valores é menor.

Ora, $\begin{cases} f_n(t-2) = \frac{3^{2t-2} + 3^{t-2+1} + 3^{2t-t+2-2} + 3}{2} = \frac{3^{2t-2} + 3^{t-1} + 3^t + 3}{2} \\ f_n(t-1) = \frac{3^{2t-2} + 3^{t-1+1} + 3^{2t-t+1-2} + 3}{2} = \frac{3^{2t-2} + 3^{t-1} + 3^t + 3}{2} \end{cases}$, tendo-se que os dois valores são iguais.

Podemos, então, considerar que m é a parte inteira de $\frac{n-3}{2}$, quer n seja par ou ímpar, pelo que podemos escrever $m = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$.

Finalmente, vem $y_n = \frac{3^{n-2} + 3^{1+\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} + 3^{n-2-\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} + 3}{2}$.

Observe-se que esta fórmula é válida para $n - m \geq 4$, ou seja, para $n - \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor \geq 4$.

Se n é ímpar, temos $n - \frac{n-3}{2} \geq 4$, ou seja, $n \geq 5$.

Se n é par, temos $n - \frac{n-4}{2} \geq 4$, ou seja, $n \geq 4$.

Então, a fórmula apresentada é válida para qualquer $n \geq 4$.

Se efectuarmos os cálculos para $n \leq 3$, podemos verificar que a fórmula não é válida, apenas para $n = 1$.

Seguidamente, apresentamos alguns termos desta sucessão:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y_n	6	12	24	60	150	420	1176	3444	10086	30012	89304

n	14	15	16	17	18	19	20
y_n	267180	799350	2395860	7181016	21536484	64589766	193749612

Observe-se que, para $n = 20$, são necessários quase 530821 anos, para efectuar o percurso de ida e volta.

E se a capacidade de transporte passar para 4?

Só ida

Comecemos por observar que, no caso em que a capacidade de transporte do mensageiro é de mantimentos para três dias, quando o mesmo volta atrás para levar mais mantimentos, leva, sempre, mantimentos para três dias. Neste caso, quando o mensageiro for buscar mais mantimentos, pode levar mantimentos para três ou para quatro dias, conforme o que for estritamente necessário. Esta diferença complica os cálculos.

Observemos, ainda, que o número mínimo de dias que se demora a atravessar um deserto de "comprimento" n tem a mesma paridade de n , porque o voltar atrás não altera a paridade do número de dias.

Seja u_n o número mínimo de dias que se demora a atravessar um deserto de "comprimento" n . É claro que $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ e $u_4 = 4$, sendo os termos alternadamente ímpares e pares, conforme já havia sido referido.

Para calcular u_5 , basta notar que o mensageiro tem de colocar no primeiro abrigo mantimentos para quatro dias. Para isso, faz uma primeira viagem em que transporta mantimentos para quatro dias, deixa, no abrigo 1, mantimentos para dois dias e volta ao ponto de partida, fazendo uma segunda viagem em que transporta mantimentos para três dias, o que é suficiente para atravessar o deserto em sete dias. Logo, $u_5 = 7$.

Se o deserto tiver comprimento 6, o mensageiro tem de colocar, no primeiro abrigo, mantimentos para 7 dias. Para esse efeito, tem de fazer três viagens do ponto de partida para o primeiro abrigo, levando, de cada vez, mantimentos para quatro dias. Logo, $u_6 = 12$.

Vejamos, como obter u_{2n+1} , em função de u_{2n} , para $n \geq 2$:

O mensageiro tem de colocar, no primeiro abrigo, mantimentos para u_{2n} dias, sendo que este é um número par. Logo precisa de fazer metade de viagens do ponto de partida para o primeiro abrigo, sendo que na última viagem, apenas transporta mantimentos para três dias. Então, $u_{2n+1} = 4 \times \frac{1}{2}u_{2n} - 1 = 2u_{2n} - 1$, para $n \geq 2$.

De modo análogo se calcula $u_{2n+2} = 4 \times \left(\frac{u_{2n+1}-1}{2} \right) = 2u_{2n+1} - 2$.

Repare-se que para colocar $2m+1$ mantimentos num dado abrigo, precisamos fazer m viagens desde o abrigo anterior, uma vez que na última viagem ficamos com um "saldo" de três mantimentos.

Se relacionarmos u_{2n+3} com u_{2n+1} , obtemos $u_{2n+3} = 4u_{2n+1} - 5$.

Se relacionarmos u_{2n+2} com u_{2n} , obtemos $u_{2n+2} = 4u_{2n} - 4$.

Com alguns conhecimentos de equações com diferenças, obtemos $u_{2n} = \frac{2^{2n-1} + 4}{3}$ e $u_{2n+1} = \frac{2^{2n} + 5}{3}$, para $n \geq 1$.

Seguidamente, apresentamos alguns termos desta sucessão:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	1	2	3	4	7	12	23	44	87	172	343	684

n	13	14	15	16	17	18	19	20
u_n	1367	2732	5463	10924	21847	43692	87383	174764

Repare-se que, para atravessar um deserto de comprimento 10, são necessários quase 479 anos.

Ida e volta, com uma única fonte de mantimentos

É claro que $u_1 = 2$ e $u_2 = 4$. Para atravessar um deserto de comprimento 3, temos de colocar, no primeiro abrigo, mantimentos para cinco dias: quatro (para ir até ao destino e voltar) e um para voltar ao ponto de partida. Então, temos de fazer duas viagens do ponto de partida até ao primeiro abrigo, transportando o máximo. Logo, $u_3 = 8$. Repare-se que nunca voltamos ao abrigo anterior, para levar mantimentos para três dias, porque precisamos dum número par de mantimentos para avançar e de 1 para mais tarde voltar ao ponto de partida.

Suponhamos que, para atravessar, nos dois sentidos um deserto de comprimento n , são necessários u_n dias. Então, para atravessar um deserto de comprimento $n+1$, temos de colocar, no primeiro abrigo, mantimentos para u_n dias e mais um para o regresso ao ponto de partida. Logo, são necessárias $\frac{u_n}{2}$ viagens do ponto de partida ao primeiro abrigo. Então, $u_{n+1} = 4 \times \frac{u_n}{2} = 2u_n$, pelo que estamos em presença duma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 2. Logo, $u_n = 2^n$, pelo que $u_{20} = 2^{20} = 1048576$, o que corresponde a quase 2873 anos.

Capítulo 10

Construção do Polígono Regular de Dezassete Lados

É claro que construir um polígono regular de 17 lados, consiste em dividir uma circunferência em 17 partes iguais, ou seja, construir um ângulo de $\frac{2\pi}{17}$ radianos.

Este problema está, manifestamente, relacionado com a determinação das raízes de índice n da unidade, ou seja, com a resolução, em \mathbb{C} , da equação $z^n = 1$, cujas soluções são

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{17} + i \sin \frac{2k\pi}{17} = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{17} = e^{i\frac{2k\pi}{17}},$$

onde i representa a unidade imaginária e k é um número inteiro que varia de 0 a 16.

No que se segue, $\alpha = \frac{2\pi}{17}$, pelo que as igualdades onde aparece α referem-se a este caso particular ($\alpha = \frac{2\pi}{17}$) e não a um α qualquer. Por outro lado, refira-se que a equação $z^{17} - 1 = 0$ é equivalente à equação $(z - 1)(z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1) = 0$, sendo 1, uma das soluções da equação. As restantes soluções da equação anterior são as raízes do polinómio $z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1$.

Vamos, agora, referir algumas das propriedades dos números complexos, partindo do princípio que o leitor conhece a forma algébrica e a forma trigonométrica dum complexo, bem como as fórmulas de Moivre, para a multiplicação, divisão e potenciação. Depois, voltaremos à equação $z^{17} - 1 = 0$.

Proposição 103 *Seja n um número natural. Então, as raízes de índice n da unidade são dadas por $\operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}$, onde k assume os valores $0, 1, \dots, n - 1$.*

Proposição 104 *Sejam n um número natural maior ou igual a 2 e z um número complexo. Então, a soma das n raízes de índice n de z é zero.*

Demonstração

A afirmação é verdadeira para $z = 0$, porque todas as raízes são nulas. Se $z \neq 0$, então $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, com ρ um número real positivo e θ um número real que pode ser escolhido no intervalo

$[0, 2\pi[$. Determinar as raízes de índice n de z é resolver a equação $\omega^n = z$. Seja $\omega = r \operatorname{cis} \beta$, com r um número real positivo e β um número real.

Então, $\rho \operatorname{cis} \theta = r^n \operatorname{cis} (n\beta)$, donde se conclui que $r^n = \rho$ e $n\beta = \theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Daqui se conclui que $r = \sqrt[n]{\rho}$ e que $\beta = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, tendo-se que as soluções distintas são obtidas, atribuindo a k , n valores inteiros consecutivos (habitualmente $0, 1, \dots, n-1$).

Seja $\omega_k = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}$. Então,

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{\sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2(k+1)\pi}{n}}{\sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi + 2\pi - \theta - 2k\pi}{n} \right) = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}$$

Logo, a sucessão (ω_k) é uma progressão geométrica de razão $\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}$, pelo que

$$\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} = \omega_0 \times \frac{1 - \left(\operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}\right)^n}{1 - \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}} = \omega_0 \times \frac{1 - \operatorname{cis} (2\pi)}{1 - \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}} = 0$$

Em particular, se $n \geq 2$, a soma das raízes de índice n da unidade é zero.

Observe-se que do facto da soma das raízes de índice n de um complexo ser zero, concluímos que a soma das partes reais e a soma das partes imaginárias das raízes de índice n de um complexo são ambas iguais a zero.

Proposição 105 *Sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha = \frac{2\pi}{17}$. Então, $\operatorname{cis} (k\alpha) + \operatorname{cis} ((17-k)\alpha) = 2 \cos (k\alpha)$.*

Demonstração

$$\begin{aligned} \cos (k\alpha) + \cos ((17-k)\alpha) &= \cos \frac{2k\pi}{17} + \cos \frac{(17-k)2\pi}{17} = \cos \frac{2k\pi}{17} + \cos \left(2\pi - \frac{2k\pi}{17} \right) \\ &= \cos \frac{2k\pi}{17} + \cos \left(-\frac{2k\pi}{17} \right) = \cos \frac{2k\pi}{17} + \cos \frac{2k\pi}{17} = 2 \cos (k\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin (k\alpha) + \sin (17-k)\alpha &= \sin \frac{2k\pi}{17} + \sin \frac{(17-k)2\pi}{17} = \sin \frac{2k\pi}{17} + \sin \left(2\pi - \frac{2k\pi}{17} \right) \\ &= \sin \frac{2k\pi}{17} - \sin \frac{2k\pi}{17} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \operatorname{cis} (k\alpha) + \operatorname{cis} ((17-k)\alpha) = 2 \cos \frac{2k\pi}{17} = 2 \cos (k\alpha).$$

Proposição 106 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então, $\cos (a+b) + \cos (a-b) = 2 \cos a \cos b$.*

Demonstração

$$\cos (a+b) + \cos (a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2 \cos a \cos b$$

Alguns resultados preliminares

Como 17 é um número primo, existe raiz primitiva de 17. Uma das raízes primitivas de 17 é 3. Consideremos os números $3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^{14}, 3^{15}$. Estas 16 potências de 3, são congruentes, módulo 17 e por alguma ordem, com os números $1, 2, 3, \dots, 15, 16$. É isso que está indicado na seguinte tabela:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3^x	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6

Por exemplo, 2 não é raiz primitiva de 17, porque, ao construirmos uma tabela análoga à anterior, mas com potências de 2, não aparecem todos os números de 1 a 16, aparecendo alguns deles mais do que uma vez:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2^x	1	2	4	8	16	15	13	9	1	2	4	8	16	15	13	9

Sejam $z_k = \text{cis } \frac{2k\pi}{17} = \text{cis } (k\alpha)$, com $k = 0, 1, \dots, 15$, as 16 raízes de índice 17 da unidade que são diferentes de 1 (estes dezasseis números são as raízes da equação $z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0$). Sejam:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = z_1 + z_9 + z_{13} + z_{15} + z_{16} + z_8 + z_4 + z_2 = \sum_{m=0}^7 z_{3^{2m}} \\ x_2 = z_3 + z_{10} + z_5 + z_{11} + z_{14} + z_7 + z_{12} + z_6 = \sum_{m=0}^7 z_{3^{2m+1}} \\ y_1 = z_1 + z_{13} + z_{16} + z_4 = \sum_{m=0}^3 z_{3^{4m}}, y_2 = z_9 + z_{15} + z_8 + z_2 = \sum_{m=0}^3 z_{3^{4m+2}} \\ y_3 = z_3 + z_5 + z_{14} + z_{12} = \sum_{m=0}^3 z_{3^{4m+1}}, y_4 = z_{10} + z_{11} + z_7 + z_6 = \sum_{m=0}^3 z_{3^{4m+3}} \end{array} \right.$$

Proposição 107 Nas condições acima referidas, temos:

1. $x_1 = 2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (8\alpha)$
2. $x_2 = 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)$
3. $x_1 + x_2 = -1, x_1 x_2 = -4$
4. $y_1 = 2 \cos \alpha + 2 \cos (4\alpha)$
5. $y_2 = 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (8\alpha)$
6. $y_3 = 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha)$
7. $y_4 = 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)$
8. $y_1 + y_2 = x_1, y_1 y_2 = -1$
9. $y_3 + y_4 = x_2, y_3 y_4 = -1$
10. $y_3 = 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (3\alpha) = 4 \cos (4\alpha) + 2 \cos \alpha$

Demonstração

1.

$$\begin{aligned}
x_1 &= z_1 + z_9 + z_{13} + z_{15} + z_{16} + z_8 + z_4 + z_2 \\
&= (z_1 + z_{16}) + (z_2 + z_{15}) + (z_4 + z_{13}) + (z_8 + z_9) \\
&= 2 \cos \frac{2\pi}{17} + 2 \cos \frac{4\pi}{17} + 2 \cos \frac{8\pi}{17} + 2 \cos \frac{16\pi}{17} \\
&= 2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (8\alpha)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
x_2 &= z_3 + z_{10} + z_5 + z_{11} + z_{14} + z_7 + z_{12} + z_6 \\
&= (z_3 + z_{14}) + (z_5 + z_{12}) + (z_6 + z_{11}) + (z_7 + z_{10}) \\
&= 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)
\end{aligned}$$

3. Como a soma das 17 raízes de índice n da unidade é zero e uma dessas raízes é 1, então a soma das outras dezasseis raízes é -1 . Logo, $x_1 + x_2 = -1$. Esta última igualdade implica que a soma das partes reais das soluções da equação $z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0$ é -1 , ou seja,

$$\sum_{k=1}^{16} \cos(k\alpha) = -1.$$

Observação:

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Ora, $x_1 \times \frac{x_2}{2}$ é dado por

$$(2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (8\alpha)) (\cos (3\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (6\alpha) + \cos (7\alpha))$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 x_2}{2} &= 2 \cos \alpha \cos (3\alpha) + 2 \cos \alpha \cos (5\alpha) + 2 \cos \alpha \cos (6\alpha) + 2 \cos \alpha \cos (7\alpha) + \\
&\quad + 2 \cos (2\alpha) \cos (3\alpha) + 2 \cos (2\alpha) \cos (5\alpha) + 2 \cos (2\alpha) \cos (6\alpha) \\
&\quad + 2 \cos (2\alpha) \cos (7\alpha) + 2 \cos (4\alpha) \cos (3\alpha) + 2 \cos (4\alpha) \cos (5\alpha) \\
&\quad + 2 \cos (4\alpha) \cos (6\alpha) + 2 \cos (4\alpha) \cos (7\alpha) + 2 \cos (8\alpha) \cos (3\alpha) \\
&\quad + 2 \cos (8\alpha) \cos (5\alpha) + 2 \cos (8\alpha) \cos (6\alpha) + 2 \cos (8\alpha) \cos (7\alpha) \\
&= \cos (4\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (6\alpha) + \cos (4\alpha) + \cos (7\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (8\alpha) \\
&\quad + \cos (6\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos \alpha + \cos (7\alpha) + \cos (3\alpha) + \cos (8\alpha) + \cos (4\alpha) \\
&\quad + \cos (9\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (7\alpha) + \cos \alpha + \cos (9\alpha) + \cos \alpha + \cos (10\alpha) \\
&\quad + \cos (2\alpha) + \cos (11\alpha) + \cos (3\alpha) + \cos (11\alpha) + \cos (5\alpha) + \cos (13\alpha) \\
&\quad + \cos (3\alpha) + \cos (14\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (15\alpha) + \cos \alpha
\end{aligned}$$

Note-se que α não é um ângulo qualquer mas sim $\frac{2\pi}{17}$, pelo que há umas relações particulares. Por exemplo, $\cos (16\alpha) = \cos \alpha$.

Então,

$$\begin{aligned}\frac{x_1 x_2}{2} &= 2 \cos \alpha + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (6\alpha) \\ &\quad + 2 \cos (7\alpha) + 2 \cos (8\alpha) + 2 \cos (9\alpha) + 2 \cos (10\alpha) + 2 \cos (11\alpha) + 2 \cos (12\alpha) \\ &\quad + 2 \cos (13\alpha) + 2 \cos (14\alpha) + 2 \cos (15\alpha) + 2 \cos (16\alpha) \\ &= -2\end{aligned}$$

Logo, $x_1 x_2 = -4$, como se pretendia.

4.

$$y_1 = z_1 + z_{13} + z_{16} + z_4 = z_1 + z_{16} + z_4 + z_{13} = 2 \cos \alpha + 2 \cos (4\alpha)$$

5.

$$y_2 = z_9 + z_{15} + z_8 + z_2 = z_2 + z_{15} + z_8 + z_9 = 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (8\alpha)$$

6.

$$y_3 = z_3 + z_{14} + z_5 + z_{12} = 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha)$$

7.

$$y_4 = z_6 + z_{11} + z_7 + z_{10} = 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)$$

8.

$$\begin{aligned}y_1 + y_2 &= 2 \cos \alpha + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (8\alpha) = x_1 \\ y_1 y_2 &= (2 \cos \alpha + 2 \cos (4\alpha)) (2 \cos (2\alpha) + 2 \cos (8\alpha)) \\ &= 4 \cos \alpha \cos (2\alpha) + 4 \cos \alpha \cos (8\alpha) + 4 \cos (4\alpha) \cos (2\alpha) + 4 \cos (4\alpha) \cos (8\alpha) \\ &= 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos \alpha + 2 \cos (9\alpha) + 2 \cos (7\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (2\alpha) \\ &\quad + 2 \cos (12\alpha) + 2 \cos (4\alpha) \\ &= \cos (3\alpha) + \cos (14\alpha) + \cos \alpha + \cos (16\alpha) + \cos (8\alpha) + \cos (9\alpha) + \cos (7\alpha) \\ &\quad + \cos (10\alpha) + \cos (6\alpha) + \cos (11\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (15\alpha) + \cos (5\alpha) \\ &\quad + \cos (12\alpha) + \cos (4\alpha) + \cos (13\alpha) \\ &= -1\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}y_3 + y_4 &= 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha) + 2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha) = x_2 \\ y_3 y_4 &= (2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (5\alpha)) (2 \cos (6\alpha) + 2 \cos (7\alpha)) \\ &= 4 \cos (3\alpha) \cos (6\alpha) + 4 \cos (3\alpha) \cos (7\alpha) + 4 \cos (5\alpha) \cos (6\alpha) \\ &\quad + 4 \cos (5\alpha) \cos (7\alpha) \\ &= 2 \cos (9\alpha) + 2 \cos (3\alpha) + 2 \cos (10\alpha) + 2 \cos (4\alpha) + 2 \cos (11\alpha) \\ &\quad + 2 \cos \alpha + 2 \cos (12\alpha) + 2 \cos (2\alpha) \\ &= \cos (8\alpha) + \cos (9\alpha) + \cos (3\alpha) + \cos (14\alpha) + \cos (7\alpha) + \cos (10\alpha) \\ &\quad + \cos (4\alpha) + \cos (13\alpha) + \cos (6\alpha) + \cos (11\alpha) + \cos \alpha + \cos (16\alpha) \\ &\quad + \cos (5\alpha) + \cos (12\alpha) + \cos (2\alpha) + \cos (15\alpha) \\ &= -1\end{aligned}$$

10.

$$y_3 = 2 \cos(3\alpha) + 2 \cos(5\alpha) = 4 \cos(4\alpha) \cos \alpha$$

Lema 108 Nas condições anteriores, temos $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Demonstração

Como $x_1 + x_2 = -1$ e $x_1 x_2 = -4$, então x_1 e x_2 são as soluções (reais) da equação $x^2 + x - 4 = 0$, as quais são $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, faltando-nos descobrir o sinal de x_1 (ou o sinal de x_2), para sabermos quais os valores de x_1 e x_2 .

Como $0 < \alpha = \frac{2\pi}{17} < \frac{\pi}{4}$ e $0 < 2\alpha = \frac{4\pi}{17} < \frac{\pi}{4}$, vem

$$\cos \alpha + \cos(2\alpha) > \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Mas, $0 < 4\alpha = \frac{8\pi}{17} < \frac{\pi}{2}$, pelo que $\cos(4\alpha) > 0$.

É claro que $\cos(8\alpha) > -\sqrt{2}$. Então, $x_1 = \cos \alpha + \cos(2\alpha) + \cos(4\alpha) + \cos(8\alpha) > \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$.

Então, x_1 é a raiz positiva e x_2 é a raiz negativa.

Logo, $x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Observe-se que podemos construir, com régua e compasso, um segmento de recta de comprimento $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, ou se preferirmos, determinar, num eixo, os pontos de abcissa $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Lema 109 Nas condições anteriores, temos

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}, y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

Demonstração

Como $y_1 + y_2 = x_1$ e $y_1 y_2 = -1$, então y_1 e y_2 são as raízes (reais) da equação $y^2 - x_1 y - 1 = 0$, tendo-se $y_1 = 2 \cos(2\alpha) + 2 \cos(4\alpha) > 0$, pelo que $y_2 < 0$.

Então,

$$\begin{aligned} y^2 - x_1 y - 1 = 0 & \iff y = \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 4}}{2} \iff y = \frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\ & \iff y = \frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\frac{1+17-2\sqrt{17}}{4} + 4}}{2} \iff y = \frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \pm \sqrt{\frac{34-2\sqrt{17}}{4}}}{2} \\ & \iff y = \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \end{aligned}$$

Então,

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}, y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

Lema 110 Nas condições anteriores, temos:

$$y_3 = \frac{x_2 + \sqrt{4 + x_2^2}}{4}, y_4 = \frac{x_2 - \sqrt{4 + x_2^2}}{4}$$

Demonstração

Como $y_3 + y_4 = x_2$ e $y_3 y_4 = -1$, temos que y_3 e y_4 são as raízes da equação $y^2 - x_2 y - 1 = 0$.

Como $y_3 = 2 \cos(3\alpha) + 2 \cos(5\alpha) = 4 \cos(4\alpha) \cos \alpha > 0$, então $y_4 < 0$.

Então,

$$y_3 = \frac{x_2 + \sqrt{4 + x_2^2}}{4}, y_4 = \frac{x_2 - \sqrt{4 + x_2^2}}{4}$$

Lema 111 Nas condições anteriores, temos:

$$\cos \alpha = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{4}, \cos(4\alpha) = \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{4}$$

Demonstração

Como $2 \cos \alpha + 2 \cos(4\alpha) = y_1$ e $2 \cos(4\alpha) \times 2 \cos \alpha = 2 \cos(5\alpha) + 2 \cos(3\alpha) = y_3$, então $2 \cos \alpha$ e $2 \cos(4\alpha)$ são as raízes da equação $t^2 - y_1 t + y_3 = 0$.

Como $\cos \alpha > \cos(4\alpha)$, temos que

$$\cos \alpha = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{4}, \cos(4\alpha) = \frac{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_3}}{4}$$

Observe-se que aquilo que foi feito, até agora, significa que se pode obter $\cos \alpha$ com régua e compasso, sendo que o valor de $\cos \alpha$ envolve, apenas, as operações básicas e radicais quadráticos, embora não apresentemos aqui esse valor.

Construção geométrica do ângulo de $\frac{2\pi}{17}$ radianos:

Seja β o menor ângulo positivo tal que $\tan(4\beta) = 1$. Então, os ângulos β , 2β , e 4β são todos do primeiro quadrante.

Verifiquemos, agora, que as soluções da equação $x^2 + x - 4 = 0$ são $2 \tan(2\beta)$ e $-2 \cot(2\beta)$:

$$\begin{aligned} 2 \tan(2\beta) - 2 \cot(2\beta) &= \frac{2 \sin(2\beta)}{\cos(2\beta)} - \frac{2 \cos(2\beta)}{\sin(2\beta)} = \frac{2 \sin^2(2\beta) - 2 \cos^2(2\beta)}{\sin(2\beta) \cos(2\beta)} \\ &= \frac{-4 (\cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta))}{2 \sin(2\beta) \cos(2\beta)} = \frac{-4 \cos(4\beta)}{\sin(4\beta)} = -\cot(4\beta) = -1 \end{aligned}$$

Além disso, $2 \tan(2\beta) \times (-2 \cot(2\beta)) = -4$. Das duas igualdades anteriores vem que $2 \tan(2\beta)$ e $-2 \cot(2\beta)$ são as soluções da equação $x^2 + x - 4 = 0$.

Mas, já tínhamos visto que as soluções da equação $x^2 + x - 4 = 0$ eram x_1 e x_2 .

Como $x_1 > 0$ e $\tan(2\beta) > 0$, então $x_1 = 2 \tan(2\beta)$ e $x_2 = -2 \cot(2\beta)$.

De $y^2 - x_1 y - 1 = 0$, obtemos $y^2 - 2y \tan(2\beta) - 1 = 0$, donde vem:

$$y = \tan(2\beta) \pm \sqrt{\tan^2(2\beta) + 1} \iff y = \tan(2\beta) \pm \sec(2\beta)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \tan(2\beta) + \sec(2\beta) = \frac{\sin(2\beta)}{\cos(2\beta)} + \frac{1}{\cos(2\beta)} = \frac{1 + \sin(2\beta)}{\cos(2\beta)} \\
 &= \frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta}{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta} = \frac{(\cos \beta + \sin \beta)^2}{(\cos \beta + \sin \beta)(\cos \beta - \sin \beta)} = \frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} \\
 &= \frac{\sqrt{2} \cos(\beta - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \cos(\beta + \frac{\pi}{4})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \beta)}{\cos(\beta + \frac{\pi}{4})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \beta)}{\cos(\beta + \frac{\pi}{4})} = \tan\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Como o produto das raízes é -1 , então

$$y_2 = -\cot\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)$$

De $y^2 - x_2 y - 1 = 0$, vem $y^2 + 2y \cot(2\beta) - 1 = 0$. Então:

$$y = -\cot(2\beta) \pm \sqrt{1 + \cot^2(2\beta)} \iff y = -\cot(2\beta) \pm \csc(2\beta)$$

Então, y_3 e y_4 são dados pela expressão $y = -\cot(2\beta) \pm \csc(2\beta)$, faltando saber "qual é qual".

Como $y_3 > 0$, então $y_3 = -\cot(2\beta) + \csc(2\beta)$. Ora:

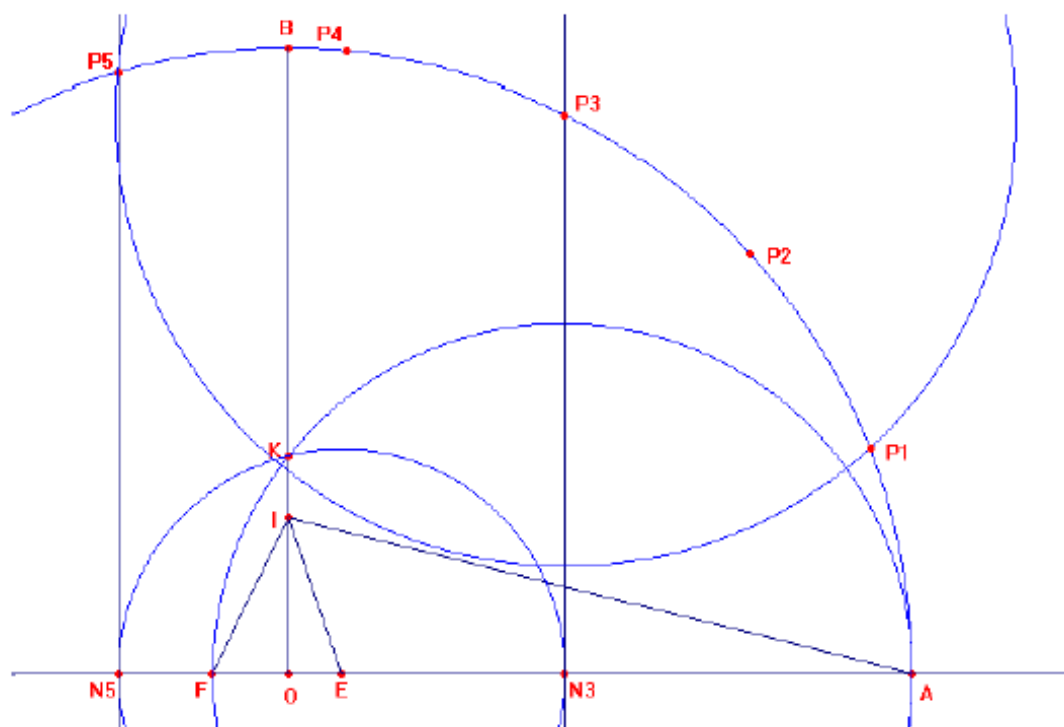
$$y_3 = -\cot(2\beta) + \csc(2\beta) = -\frac{\cos(2\beta)}{\sin(2\beta)} + \frac{1}{\sin(2\beta)} = \frac{1 - \cos(2\beta)}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{2 \sin^2 \beta}{2 \sin \beta \cos \beta} = \tan \beta$$

Como o produto das raízes é -1 , então $y_4 = -\cot \beta$.

E, finalmente:

$$\begin{cases} 2 \cos(3\alpha) + 2 \cos(5\alpha) = y_3 = \tan \beta \\ 2 \cos(3\alpha) \times 2 \cos(5\alpha) = 2 \cos(8\alpha) + 2 \cos(2\alpha) = y_2 = \tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Descrição da construção geométrica



1. Marcamos dois pontos O e A .
2. Desenhemos uma circunferência de centro O e que passa por A .
3. Construimos, pelo ponto O , uma perpendicular a OA .
4. Seja B , um dos pontos de intersecção da perpendicular anterior com a circunferência.
5. Divide-se o segmento OB em quatro partes iguais, obtendo-se o ponto I , de modo que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$.
6. Divide-se o ângulo OIA em quatro ângulos iguais, obtendo-se sobre OA , o ponto E , tal que $\angle OIE = \frac{1}{4}\angle OIA$.
7. Sobre a semi-recta AO (de origem em A), marca-se um ponto F , de modo que o ângulo OIF tenha uma amplitude de $\frac{\pi}{4}$.
8. Desenha-se uma circunferência de diâmetro $[AF]$, a qual intersecta o segmento de recta no ponto K .
9. Desenha-se uma circunferência de centro E e que passa por K . Esta circunferência intersecta a recta OA nos pontos N_3 e N_5 , sendo N_3 pertencente à semi-recta OA .

10. Por N_3 e N_5 , traçam-se perpendiculares à recta OA , as quais intersectam a circunferência inicial nos pontos P_3 e P_5 , respectivamente (ambos acima de OA).
11. O arco P_3P_5 mede 2α , enquanto que o arco P_3A mede 3α . Para obter P_1 , basta desenhar uma circunferência de centro P_3 e que passa por P_5 (ver figura).
12. E, agora, é fácil de obter os restantes vértices do polígono regular de 17 lados.

Justificação da construção

Seja $\angle OIE = \beta$. Então, $\angle OIA = 4\beta$. Além disso,

$$\begin{aligned}
 2 \cos \widehat{AOP_3} + 2 \cos \widehat{AOP_5} &= 2 \times \frac{\overline{ON_3} - \overline{ON_5}}{\overline{OA}} = 2 \times \frac{\overline{OE} + \overline{EN_3} - (\overline{EN_5} - \overline{OE})}{\overline{OA}} \\
 &= 2 \times \frac{\overline{OE} + \overline{EN_3} - \overline{EN_5} + \overline{OE}}{\overline{OA}} = 2 \times \frac{\overline{OE} + \overline{OE}}{\overline{OA}} \\
 &= 4 \times \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OI}} = \tan \beta
 \end{aligned}$$

e, ainda

$$\begin{aligned}
 2 \cos \widehat{AOP_3} \times 2 \cos \widehat{AOP_5} &= -4 \times \frac{\overline{ON_3} \times \overline{ON_5}}{\overline{OA}^2} = -4 \times \frac{\overline{OK}^2}{\overline{OA}^2} = -4 \times \frac{\overline{OF} \times \overline{OA}}{\overline{OA}^2} \\
 &= -4 \times \frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{OI}} = \tan \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Já vimos que $2 \cos(3\alpha) + 2 \cos(5\alpha) = \tan \beta$ e $2 \cos(3\alpha) \times 2 \cos(5\alpha) = \tan \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right)$.

Então, $\widehat{AOP_3} = 3\alpha$ e $\widehat{AOP_5} = 5\alpha$.

Então, achando a diferença, temos um ângulo de amplitude 2α , ângulo este que pode ser bissectado, originando um ângulo de amplitude α , ou seja, um ângulo de $\frac{2\pi}{17}$ radianos. Observe-se que todas estas construções podem ser feitas com régua e compasso.

Está, assim, resolvido o problema.

Capítulo 11

Sucessões de Números Reais

Definição 112 *Sucessão de números reais é uma aplicação de \mathbb{N} em \mathbb{R} .*

São sucessões as seguintes funções:

$$f(n) = n^2$$

$$f(n) = n^2 + 2n$$

$$f(n) = \frac{n^2+1}{2n+3}$$

$$f(n) = \sqrt{n+2}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$f(n) = 2^n - 1$$

$$f(n) = \frac{2^n+3^n}{3^{n+1}}$$

$$f(n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Com a definição apresentada, não são sucessões as seguintes funções:

$$f(n) = \sqrt{n-10}$$

$$f(n) = \sqrt{10-n}$$

$$f(n) = \frac{1}{n-4}$$

$$f(n) = \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n$$

Exemplo 113 *Estudo do sinal numa sucessão*

A) Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = n^2$. Então, $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

B) Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = n^2 - 16$. Então:

$$u_n > 0, \text{ se } n > 4; \quad u_n < 0, \text{ se } n < 4; \quad u_n = 0, \text{ se } n = 4$$

C) Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n-11}{3n-4}$.

Vamos começar por estudar o sinal da função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x-11}{3x-4}$:

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		$\frac{11}{2}$	$+\infty$
$2x-11$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x-4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$		$-$	0	$+$

Então, $u_n < 0$, para $1 < n \leq 5$ e $u_n > 0$, para $n \geq 6 \vee n = 1$.

Calculemos alguns termos desta sucessão:

$$u_1 = 9 > 0$$

$$u_2 = -\frac{7}{2} < 0$$

$$u_3 = -1 < 0$$

$$u_4 = -\frac{3}{8} < 0$$

$$u_5 = -\frac{1}{11} < 0$$

$$u_6 = \frac{1}{14} > 0$$

Exemplo 114 *Estudo da monotonia duma sucessão*

Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n-11}{3n-4}$. Então:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+2-11}{3n+3-4} - \frac{2n-11}{3n-4} = \frac{2n-9}{3n-1} - \frac{2n-11}{3n-4} \\ &= \frac{(2n-9)(3n-4) - (2n-11)(3n-1)}{(3n-1)(3n-4)} \\ &= \frac{6n^2 - 8n - 27n + 36 - 6n^2 + 2n + 33n - 11}{(3n-1)(3n-4)} = \frac{25}{(3n-1)(3n-4)} \end{aligned}$$

Agora, estudamos o sinal da função real de variável real, definida por $f(x) = \frac{25}{(3x-1)(3x-4)}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		$\frac{4}{3}$	$+\infty$
25	+	+	+	+	+
$3x-1$	-	0	+	+	+
$3x-4$	-	-	-	0	+
$f(x)$	+		-		+

Então, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, tendo-se $u_2 - u_1 < 0$.

Logo, a sucessão não é monótona!

Repare-se que a condição $u_{n+1} - u_n > 0$ não se verifica num único caso.

No entanto, como é lógico, a sucessão não é monótona (crescente).

11.1 Limite de uma sucessão

Exercício 115 *Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$.*

1. *Quais os termos da sucessão que pertencem ao intervalo $]2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100}[$?*
2. *Quais os termos da sucessão que pertencem ao intervalo $]2 - \frac{1}{1000}, 2 + \frac{1}{1000}[$?*
3. *Quais os termos da sucessão que pertencem ao intervalo $]2 - \delta, 2 + \delta[$, com $\delta > 0$?*

Resolução

Começamos por observar que $2 - \delta < u_n < 2 + \delta$ é equivalente a $|u_n - 2| < \delta$.

1.

$$\begin{aligned}
2 - \frac{1}{100} < u_n < 2 + \frac{1}{100} &\iff |u_n - 2| < \frac{1}{100} \iff \left| \frac{2n+5}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{100} \\
&\iff \left| \frac{2n+5-2n-2}{n+1} \right| < \frac{1}{100} \iff \left| \frac{3}{n+1} \right| < \frac{1}{100} \\
&\iff \frac{3}{n+1} < \frac{1}{100} \iff \frac{300}{100(n+1)} < \frac{n+1}{100(n+1)} \\
&\iff 300 < n+1 \iff n > 299
\end{aligned}$$

Os termos da sucessão que pertencem a $]2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100}[$ são os termos de ordem superior a 299. Então, no intervalo $]2 - \frac{1}{100}, 2 + \frac{1}{100}[$, há uma infinidade de termos, tendo-se que fora desse intervalo há um número finito de termos da sucessão.

2.

$$\begin{aligned}
2 - \frac{1}{1000} < u_n < 2 + \frac{1}{1000} &\iff |u_n - 2| < \frac{1}{1000} \iff \left| \frac{2n+5}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{1000} \\
&\iff \left| \frac{2n+5-2n-2}{n+1} \right| < \frac{1}{1000} \iff \left| \frac{3}{n+1} \right| < \frac{1}{1000} \\
&\iff \frac{3}{n+1} < \frac{1}{1000} \iff \frac{3000}{1000(n+1)} < \frac{n+1}{1000(n+1)} \\
&\iff 3000 < n+1 \iff n > 2999
\end{aligned}$$

Os termos da sucessão que pertencem a $]2 - \frac{1}{1000}, 2 + \frac{1}{1000}[$ são os termos de ordem superior a 2999.

3.

$$\begin{aligned}
2 - \delta < u_n < 2 + \delta &\iff |u_n - 2| < \delta \iff \left| \frac{2n+5}{n+1} - 2 \right| < \delta \\
&\iff \left| \frac{2n+5-2n-2}{n+1} \right| < \delta \iff \left| \frac{3}{n+1} \right| < \delta \\
&\iff \frac{3}{n+1} < \delta \iff 3 < n\delta + \delta \\
&\iff 3 - \delta < n\delta \iff \frac{3 - \delta}{\delta} < n \iff n > \frac{3 - \delta}{\delta}
\end{aligned}$$

Os termos da sucessão que pertencem a $]2 - \delta, 2 + \delta[$ são os termos de ordem superior a $\frac{3-\delta}{\delta}$.

Então, para a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$, podemos concluir que, para todo o número real positivo δ , existe uma ordem a partir da qual, todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $]2 - \delta, 2 + \delta[$.

Definição 116 Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e a um número real. Diz-se que u_n tende para a (ou que u_n converge para a ou que limite de u_n é a), se para todo o número real positivo δ , existir uma ordem (que dependerá de δ), a partir da qual, todos os termos da sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verificam a condição $a - \delta < u_n < a + \delta$.

Notation 117 Se u_n tende para a , escrevemos $u_n \rightarrow a$ ou $\lim u_n = a$.

Observação 118 Repare-se que a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$, segundo a definição anterior, tende para 2.

Proposição 119 Uma sucessão de números reais não pode tender para dois limites diferentes.

Prova. Suponhamos que havia uma sucessão u_n que tendia para dois limites a e b . Sem perda de generalidade, podemos supor que $a < b$. Seja $\delta = \frac{b-a}{2}$. Como $u_n \rightarrow a$, existe uma ordem p_1 tal que todos os termos da sucessão, de ordem superior a p_1 , verificam a condição $a - \delta < u_n < a + \delta$. E, como $u_n \rightarrow b$, existe uma ordem p_2 tal que todos os termos da sucessão, de ordem superior a p_2 , verificam a condição $b - \delta < u_n < b + \delta$. Então, a partir da maior das duas ordens p_1 e p_2 , todos os termos da sucessão verificam as duas condições $a - \delta < u_n < a + \delta$ e $b - \delta < u_n < b + \delta$. Então, tais termos verificam a condição $u_n \in]a - \delta, a + \delta[\cap]b - \delta, b + \delta[$. Mas, $a + \delta = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$ e $b - \delta = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$, pelo que $u_n \in]\frac{3a-b}{2}, \frac{a+b}{2}[\cap]\frac{a+b}{2}, \frac{3b-a}{2}[= \emptyset$.

E chegámos a uma conclusão manifestamente impossível, porque o conjunto vazio não tem elementos. Então, é absurdo supor que existe uma sucessão com dois limites diferentes. Então, uma sucessão de números reais não pode ter mais do que um limite. ■

Definição 120 Sucessão convergente é uma sucessão que tende para um número real. Uma sucessão que não tende para nenhum número real diz-se divergente. Note-se que estamos a considerar, apenas, sucessões de números reais.

Definição 121 Infinitésimo é uma sucessão que tende para zero.

Proposição 122 Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão tal que a partir de certa ordem p , todos os termos são iguais a k , com $k \in \mathbb{R}$. Então, u_n tende para k .

Prova. Seja $\delta > 0$. Para $n > p$, temos $k - \delta < k = u_n < k + \delta$, pelo que $\lim u_n = k$. ■

Observação 123 Em particular, se uma sucessão é constante, então a sucessão converge para esse valor constante (valor comum dos seus termos).

Proposição 124 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim (u_n + v_n) = a + b$.

Prova. Seja $\delta > 0$. Se $u_n \rightarrow a$, existe uma ordem p_1 tal que, para $n > p_1$, temos $a - \frac{\delta}{2} < u_n < a + \frac{\delta}{2}$. Se $v_n \rightarrow b$, existe uma ordem p_2 tal que, para $n > p_2$, temos $b - \frac{\delta}{2} < v_n < b + \frac{\delta}{2}$. Seja $p \geq \max\{p_1, p_2\}$. Então, para $n > p$, temos $a - \frac{\delta}{2} < u_n < a + \frac{\delta}{2} \wedge b - \frac{\delta}{2} < v_n < b + \frac{\delta}{2}$. Então, para $n > p$, temos $a - \frac{\delta}{2} + b - \frac{\delta}{2} < u_n + v_n < a + \frac{\delta}{2} + b + \frac{\delta}{2}$, ou seja, $a + b - \delta < u_n + v_n < a + b + \delta$. Então, $\lim (u_n + v_n) = a + b = \lim u_n + \lim v_n$. ■

Proposição 125 Seja $a \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, $\lim (-u_n) = -a$.

Prova. Seja $\delta > 0$. Se $u_n \rightarrow a$, existe uma ordem p tal que, para $n > p$, temos $a - \delta < u_n < a + \delta$. Então, para $n > p$, temos $-a + \delta > -u_n > -a - \delta$. Então, para $n > p$, temos $-a - \delta < -u_n < -a + \delta$. Então, $\lim (-u_n) = -a = -\lim u_n$. ■

Proposição 126 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim (u_n - v_n) = a - b$.*

Prova. Se $v_n \rightarrow b$, então $-v_n \rightarrow -b$. Mas, $u_n \rightarrow a$, pelo que $u_n + (-v_n)$ tende para $a + (-b) = a - b$. E, como $u_n + (-v_n) = u_n - v_n$, temos que $\lim (u_n - v_n) = a - b$. ■

Proposição 127 *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, $u_n - a$ tende para zero.*

Prova. Suponhamos que $u_n \rightarrow a$. Seja $v_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim v_n = a$, pelo que $\lim (u_n - a) = \lim (u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = a - a = 0$. ■

Definição 128 *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. A sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se existirem dois números reais m e M , tais que $m \leq u_n \leq M$, para todo o número natural.*

Proposição 129 *Toda a sucessão limitada e monótona é convergente.*

Prova. A demonstração desta proposição depende do seguinte axioma: Todo o subconjunto de \mathbb{R} , majorado e não vazio, tem supremo. ■

Proposição 130 *O produto dum infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.*

Prova. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão limitada. Então, existe um número positivo M , tal que $|u_n| \leq M$, para todo o número natural n . Suponhamos que $v_n \rightarrow 0$. Então, para qualquer número real positivo δ , existe um número natural p , tal que para qualquer $n > p$, temos $|v_n| < \frac{\delta}{M}$. Então, para $n > p$, temos $|u_n| \leq M$ e $|v_n| < \frac{\delta}{M}$, donde vem $|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| < M \times \frac{\delta}{M} = \delta$.

Logo, $\lim (u_n \times v_n) = 0$, pelo que $u_n \times v_n$ é um infinitésimo. ■

Definição 131 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B_r(a)$ definido por $B_r(a) =]a - r, a + r[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\}$.*

Proposição 132 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim (u_n \times v_n) = ab$.*

Prova. Seja $\delta > 0$. Queremos determinar $\varepsilon > 0$, de modo que, para $|u_n - a| < \varepsilon \wedge |v_n - b| < \varepsilon$, tenhamos $|u_n v_n - ab| < \delta$.

Note-se, que em vez de termos usado ε , na condição anterior, podíamos ter usado ε_1 e ε_2 , mas só teríamos mais trabalho. Como $\lim u_n = a$, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma ordem p_1 , tal que, para $n > p_1$, temos $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$.

E, como $\lim v_n = b$, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma ordem p_2 , tal que, para $n > p_2$, temos $b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon$.

Seja $p \geq \max \{p_1, p_2\}$. Então, para $n > p$, temos $a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \wedge b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon$.

Se escolhermos ε , de modo que $\varepsilon < a \wedge \varepsilon < b$, temos $0 < a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \wedge 0 < b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon$.

Então,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 0 < a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \\ 0 < b - \varepsilon < v_n < b + \varepsilon \end{array} \right. &\implies 0 < (a - \varepsilon)(b - \varepsilon) < u_n v_n < (a + \varepsilon)(b + \varepsilon) \\ &\implies 0 < ab - (a + b)\varepsilon + \varepsilon^2 < u_n v_n < ab + (a + b)\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &\implies ab - (a + b)\varepsilon - \varepsilon^2 < u_n v_n < ab + (a + b)\varepsilon + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

E, agora, vamos escolher ε , de modo que $(a+b)\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \delta$, isto é, de modo que $\varepsilon^2 + (a+b)\varepsilon - \delta \leq 0$.

Ora, para $\delta > 0$, a equação $\varepsilon^2 + (a+b)\varepsilon - \delta = 0$ tem duas raízes reais de sinais contrários:

$$\varepsilon^2 + (a+b)\varepsilon - \delta = 0 \iff \varepsilon = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 + 4\delta}}{2}$$

Então, de $(a+b)\varepsilon + \varepsilon^2 \leq \delta$, vem

$$\frac{-(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + 4\delta}}{2} < \varepsilon < \frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 4\delta}}{2}$$

Mas, devemos ter $0 < \varepsilon < \min\{a, b\}$, pelo que

$$0 < \varepsilon < \min\{a, b\} \wedge 0 < \varepsilon < \frac{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 4\delta}}{2}$$

Então,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > p \implies ab - \delta < u_n v_n < ab + \delta$$

Então, $\lim(u_n v_n) = ab$. ■

Proposição 133 *Toda a sucessão de números reais que seja convergente é limitada.*

Prova. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, existe uma ordem p , tal que todos os termos de ordem superior a p pertencem ao intervalo $]a-1, a+1[$.

Seja $X = \{u_1, u_2, \dots, u_p, a-1, a+1\}$. Como X é finito, X tem mínimo e máximo. Seja $m = \min X$ e $M = \max X$. Então, $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada. ■

Proposição 134 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim(u_n \times v_n) = ab$.*

Prova. Já vimos que a afirmação anterior é verdadeira para a e b positivos. Se $a = 0$, então $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um infinitésimo, porque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um infinitésimo e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada. Analogamente, se $b = 0$.

Suponhamos que $a > 0 \wedge b < 0$. Então, $\lim(-v_n) = -b > 0$.

Então, como vimos, $\lim(u_n \times (-v_n)) = a(-b) = -ab$. Logo, $\lim(-u_n \times v_n) = -ab$, pelo que $\lim(u_n \times v_n) = ab$.

Analogamente, se $a < 0 \wedge b > 0$.

Se $a < 0 \wedge b < 0$, temos que $\lim((-u_n)(-v_n)) = (-a) \times (-b) = ab$.

Então, $\lim((u_n)(v_n)) = \lim((-u_n)(-v_n)) = ab$. ■

Proposição 135 *Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$.*

Prova. Seja $\delta > 0$. Queremos determinar $\varepsilon > 0$, de modo que, para $|u_n - a| < \varepsilon$, seja $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{a} \right| < \delta$.

Seja $\varepsilon > 0$, tal que $\varepsilon < a$. Como $\lim u_n = a$, existe uma ordem p , tal que para $n > p$, temos $0 < a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$.

Então, para $n > p$, temos $\frac{1}{a-\varepsilon} > \frac{1}{u_n} > \frac{1}{a+\varepsilon}$.

Logo, para $n > p$, temos

$$\frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{a-\varepsilon}$$

Determinemos ε , de modo que $\varepsilon < a \wedge \frac{1}{a} - \delta \leq \frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{a-\varepsilon} \leq \frac{1}{a} + \delta$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \delta \leq \frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{a-\varepsilon} \leq \frac{1}{a} + \delta &\iff \frac{1}{a} - \delta \leq \frac{1}{a+\varepsilon} \wedge \frac{1}{a-\varepsilon} \leq \frac{1}{a} + \delta \\ &\iff a + \varepsilon - a(a + \varepsilon)\delta \leq a \wedge a - \varepsilon \geq \frac{1}{\frac{1}{a} + \delta} \\ &\iff \varepsilon - a^2\delta - a\varepsilon\delta \leq 0 \wedge -\varepsilon \geq -a + \frac{a}{1 + a\delta} \\ &\iff \varepsilon(1 - a\delta) \leq a^2\delta \wedge \varepsilon \leq a - \frac{a}{1 + a\delta} \\ &\iff \varepsilon(1 - a\delta) \leq a^2\delta \wedge \varepsilon \leq \frac{a + a^2\delta - a}{1 + a\delta} \\ &\iff \varepsilon(1 - a\delta) \leq a^2\delta \wedge \varepsilon \leq \frac{a^2\delta}{1 + a\delta} \iff \varepsilon \leq \frac{a^2\delta}{1 + a\delta} \end{aligned}$$

Logo qualquer que seja o número positivo δ , existe uma ordem p , tal que, para todo o $n > p$, temos $\frac{1}{a} - \delta < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{a} + \delta$. Logo, $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$. ■

Proposição 136 *Seja $a < 0$ e seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que tende para a . Então, $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$.*

Prova. Seja $v_n = -u_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim v_n = -a > 0$ e, pela proposição anterior, temos $\lim \left(\frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$.

Então, $\lim \left(\frac{1}{-u_n} \right) = -\frac{1}{a}$, donde se conclui que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{a}$. ■

Proposição 137 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sucessões que tendem para a e para b , respectivamente. Então, $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$.*

Prova. Ora, $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \left(u_n \times \frac{1}{v_n} \right) = \lim u_n \times \lim \frac{1}{v_n} = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. ■

Exercício 138 *Calcule o limite de cada uma das seguintes sucessões:*

1. $u_n = \frac{2n+1}{3n+5}$
2. $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+4n+2}$
3. $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{2n+5}$
4. $u_n = \frac{3n^2+2n+1}{\sqrt{n^4+1}}$
5. $u_n = \frac{\sin n}{n+5}$
6. $u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$

7. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
8. $u_n = \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2-n+1}$
9. $u_n = \sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+cn+d}$, com a, b, c, d números reais convenientes.
10. $u_n = \sqrt{an^2+bn+c} - \sqrt{an^2+dn+f}$, com b, c, d, f números reais convenientes e $a > 0$.
11. $u_n = \sqrt[3]{n^3+5n+1} - \sqrt[3]{n^3+5n+2}$
12. $u_n = \frac{3^n+5^n}{4^n+5^n}$
13. $u_n = \frac{3^{2n}+6^n}{3^{2n}+8^n}$

Resolução

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n(2+\frac{5}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{2+\frac{5}{n}} = \frac{(+\infty) \times (2+0+0)}{2+0} = +\infty$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n+1}{\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^4(1+\frac{1}{n^4})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = \frac{3}{1} = 3$
5. $\frac{\sin n}{n+5} = \frac{1}{n+5} \times \sin n$
 $\frac{1}{n+5}$ é um infinitésimo e $-1 \leq \sin n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n+5} = 0$.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n}) = \sqrt{+\infty} + \sqrt{+\infty} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0$
- 8.

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2-n+1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+2} + \sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+2} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+2 - n^2+n-1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})} + \sqrt{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} + n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1
 \end{aligned}$$

9. Começamos por referir que a, b, c, d devem ser tais que a expressão $\sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d}$ esteja definida para todo o número natural n , de acordo com a definição apresentada no início do Capítulo.

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d} \\
 &= \frac{(\sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d})(\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d})}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}} \\
 &= \frac{n^2 + an + b - n^2 - cn - d}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}} \\
 &= \frac{(a - c)n + b - d}{\sqrt{n^2 + an + b} + \sqrt{n^2 + cn + d}} \\
 &= \frac{(a - c)n + b - d}{n\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + n\sqrt{1 + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2}}} = \frac{a - c + \frac{b-d}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2}}}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim \left(\sqrt{n^2 + an + b} - \sqrt{n^2 + cn + d} \right) = \frac{a - c}{1 + 1} = \frac{a - c}{2}$$

10. Sejam $u_n = \sqrt{an^2 + bn + c}$ e $v_n = \sqrt{an^2 + dn + f}$. Então,

$$\begin{aligned}
 u_n - v_n &= \frac{(\sqrt{an^2 + bn + c} - \sqrt{an^2 + dn + f})(\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an^2 + dn + f})}{\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an^2 + dn + f}} \\
 &= \frac{an^2 + bn + c - an^2 - dn - f}{\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an^2 + dn + f}} \\
 &= \frac{(b - d)n + c - f}{\sqrt{an^2 + bn + c} + \sqrt{an^2 + dn + f}} \\
 &= \frac{(b - d)n + c - f}{n\sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}} + n\sqrt{a + \frac{d}{n} + \frac{f}{n^2}}} = \frac{b - d + \frac{c-f}{n}}{\sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}} + \sqrt{a + \frac{d}{n} + \frac{f}{n^2}}}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim \left(\sqrt{an^2 + bn + c} - \sqrt{an^2 + dn + f} \right) = \frac{b - d}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{b - d}{2\sqrt{a}}$$

11. Começemos por observar que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Então,

$$x - y = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$$

Utilizando a propriedade anterior, temos:

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt[3]{n^3 + 5n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 5n + 2} \\
&= \frac{(\sqrt[3]{n^3 + 5n + 1})^3 - (\sqrt[3]{n^3 + 5n + 2})^3}{(\sqrt[3]{n^3 + 5n + 1})^2 + \sqrt[3]{n^3 + 5n + 1}\sqrt[3]{n^3 + 5n + 2} + (\sqrt[3]{n^3 + 5n + 2})^2} \\
&= \frac{n^3 + 5n + 1 - n^3 - 5n - 2}{\left(n\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\right)^2 + n\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}n\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + \left(n\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}}\right)^2} \\
&= \frac{-1}{n^2\left(\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\right)^2 + n^2\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}} + n^2\left(\sqrt[3]{1 + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^3}}\right)^2}
\end{aligned}$$

Logo, $\lim (\sqrt[3]{n^3 + 5n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 5n + 2}) = \frac{-1}{+\infty} = 0$

12. $\lim \frac{3^n + 5^n}{4^n + 5^n} = \lim \frac{5^n \left(\frac{3^n}{5^n} + 1\right)}{5^n \left(\frac{4^n}{5^n} + 1\right)} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$

13. $\lim \frac{3^{2n} + 6^n}{3^{2n} + 8^n} = \lim \frac{9^n + 6^n}{9^n + 8^n} = \lim \frac{9^n \left(1 + \frac{6^n}{9^n}\right)}{9^n \left(1 + \frac{8^n}{9^n}\right)} = \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{8}{9}\right)^n} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

11.2 Progressões aritméticas

Definição 139 *Progressão aritmética, de razão r , é uma sucessão (u_n) em que cada termo é igual à soma do termo anterior com r .*

Então, $u_{n+1} = u_n + r$.

Por aplicação sucessiva da propriedade anterior, temos:

$$u_1 = u_1 + 0r, \quad u_2 = u_1 + r, \quad u_3 = u_1 + 2r, \quad u_4 = u_1 + 3r$$

Então,

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Da igualdade anterior resulta

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

Exemplo 140 *Determine o termo geral da sucessão em que o terceiro termo é 19 e o décimo termo é 40.*

Resolução

$$u_{10} = u_3 + 7r \implies 40 = 19 + 7r \implies 7r = 21 \implies r = 3$$

$$\text{Então, } u_n = u_3 + (n-3)3 = 19 + 3n - 9 = 3n - 10$$

Exemplo 141 *Determine a soma dos primeiros cinquenta termos da progressão aritmética cujo termo geral é $u_n = 3n + 10$.*

Resolução

$$\text{Seja } S_{50} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{49} + u_{50} = u_{50} + u_{49} + \cdots + u_2 + u_1$$

Então,

$$2S_{50} = (u_1 + u_{50}) + (u_2 + u_{49}) + \cdots + (u_{49} + u_2) + (u_{50} + u_1)$$

Mas, todas as cinquenta parcelas são iguais, pelo que vem:

$$S_{50} = \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 = (13 + 160) \times 25 = 173 \times 25 = 4325$$

No caso geral, temos, para a soma dos primeiros termos duma progressão aritmética:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

Exemplo 142 *Determine a soma dos primeiros cem números inteiros positivos.*

Resolução

$$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{1 + 100}{2} \times 100 = 101 \times 50 = 5050$$

Exemplo 143 *Determine a soma dos n primeiros números inteiros positivos.*

Resolução

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1 + n}{2} \times n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Exemplo 144 *Suponhamos que temos os números naturais de 1 a 100000, escritos ao lado uns dos outros e que colocamos o sinal de adição (+), entre todos os algarismos. Determine a soma obtida.*

Resolução

Suponhamos, para não complicar o raciocínio, que queríamos "somar os algarismos" dos números de 1 a 99. Podemos começar por considerar que começamos por zero em vez de 1 e que, em vez de 0, 1, 2, \dots , 9 escrevemos 00, 01, 02, \dots , 09. Assim, obtemos a seguinte lista (incompleta):

$$00, 01, 02, 03, \dots, 09, 10, 11, 12, 13, \dots, 19, \dots, 90, 91, 92, \dots, 99$$

Nesta lista, cada algarismo aparece dez vezes escrito em primeiro lugar e outras dez vezes escrito em segundo lugar.

Então, a soma de todos eles é $(0 + 1 + 2 + \dots + 8 + 9) \times 10 \times 2$, ou seja, $\frac{0+9}{2} \times 10 \times 10 \times 2 = 900$.

Imaginemos, agora, a lista dos números de 00000 até 99999. Cada algarismo aparece 10000 vezes em primeiro lugar, 10000 vezes em segundo lugar, etc..

Então, "a soma de todos os algarismos" dos números de 00000 até 99999 é

$$(0 + 1 + 2 + \dots + 8 + 9) \times 10000 \times 5 = 45 \times 50000 = 2250000$$

Como a soma pretendida inclui ainda os algarismos do número 100000, o qual contribui com uma unidade para a soma, temos que o valor procurado é de 2250001.

11.3 Progressões geométricas

Definição 145 *Progressão geométrica, de razão r , é uma sucessão (u_n) em que cada termo é igual ao produto do termo anterior por r .*

Então, $u_{n+1} = u_n \times r$.

Por aplicação sucessiva da propriedade anterior, temos:

$$u_2 = u_1 \times r, \quad u_3 = u_1 \times r^2, \quad u_4 = u_1 \times r^3, \dots$$

Então,

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Da igualdade anterior, caso $r \neq 0 \wedge u_1 \neq 0$, resulta que

$$u_n = u_k \times r^{n-k}$$

Suponhamos que pretendemos calcular a soma dos primeiros n termos duma progressão geométrica de razão r diferente de 1.

Seja $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n$. Então:

$$\begin{aligned} rS_n &= (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n) \times r \\ &= u_1 \times r + u_2 \times r + u_3 \times r + \dots + u_{n-1} \times r + u_n \times r = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + u_{n+1} \end{aligned}$$

Das igualdades anteriores, vem

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n - u_2 - u_3 - u_4 - \dots - u_n - u_{n+1} \\ &= u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1 \times r^n = u_1 (1 - r^n) \end{aligned}$$

Logo, $S_n (1 - r) = u_1 (1 - r^n)$.

Então,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Problema 146 *Maria e a apanha das maçãs*

Durante 8 dias, a Maria apanha maçãs duma macieira existente junto à sua casa, obedecendo, sempre, à mesma regra: em cada dia apanha metade das maçãs existentes na macieira e, ainda, mais meia maçã. Quantas maçãs havia na macieira, sabendo que, ao fim desses 8 dias, se esgotaram as maçãs. Evidentemente que estamos a considerar que mais ninguém apanhou maçãs, que não nascem maçãs entretanto, que não cai nenhuma maçã ao chão...

Resolução

1. Números bons e números maus

Suponhamos que, num dado dia, há quatro maçãs na macieira. Então, a Maria tem de apanhar duas maçãs e meia, ficando uma maçã e meia na macieira. Esta hipótese mostra-nos que os números pares são "maus", não servindo para solução do problema.

Quanto aos números ímpares, serão todos "bons"?

Os números 1 e 3 são "bons", mas 5 é "mau", porque se houver 5 maçãs, a Maria tem de apanhar 3 maçãs, deixando 2 maçãs e já sabemos que 2 é "mau".

Qual será a sequência dos números "bons"?

Como, em cada dia, Maria apanha pouco mais de metade das maçãs, no dia anterior deve haver pouco mais do dobro das maçãs (será o dobro mais uma?).

Sequência dos números "bons": 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, ...

Resposta: 255 maçãs

2. Se hoje há y maçãs, quantas maçãs havia ontem?

Suponhamos que hoje há y maçãs e que ontem havia x . Então, $x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = y$, equação esta que é equivalente a $x = 2y + 1$.

Dia	8	7	6	5	4	3	2	1
y	0	1	3	7	15	31	63	127
x	1	3	7	15	31	63	127	255

3. Quantas maçãs apanhou a Maria em cada dia?

Sejam x , y , z , o número de maçãs existentes no início de três dias consecutivos. Então, $x = 2y + 1$ e $y = 2z + 1$, pelo que $x = 4z + 3$. Então, no primeiro desses três dias havia $4z + 3$ maçãs, enquanto que ficaram para o dia seguinte $2z + 1$ maçãs. Logo, a Maria apanhou $2z + 2$ maçãs nesse dia. E no dia seguinte apanhou $z + 1$ maçãs. Logo, em cada dia, a Maria apanha o dobro das maçãs que apanhará no dia seguinte.

Como no último dia, a Maria apanha uma maçã, temos que o número total de maçãs apanhadas é

$$S_8 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$$

Então, $2S_8 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256$.

Subtraindo membro a membro as duas igualdades, obtemos $S_8 = 256 - 1 = 255$.

4. Bem no cimo da macieira, havia uma maçã escondida...

Suponhamos que a Maria, ao contar as maçãs não se apercebeu duma maçã escondida. Então, para nós que sabemos que há uma maçã a mais, a Maria apanha, em cada dia, metade das maçãs e, no fim, ainda há uma maçã. Então, partindo do fim, temos que o número de maçãs existente na macieira, no início de cada dia, é 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Logo, inicialmente, tínhamos 255 maçãs, porque não havia maçã escondida...

5. As maçãs e as sucessões

Seja n , o dia a contar do fim, isto é, 1 representa o último dia, 2 o penúltimo,...

Seja x_n o número de maçãs existentes no dia n , antes da apanha, e y_n o número de maçãs que ficam na macieira, depois da apanha.

Então, $x_{n+1} = 2y_{n+1} + 1$ e $x_n = y_n$. Repare-se que o número de maçãs que ficam num dia, depois da apanha, é o número de maçãs que a Maria encontra no dia seguinte.

Então, $x_{n+1} = 2x_n + 1$, partindo-se do valor inicial $x_1 = 1$.

Logo, $x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 15, x_5 = 31, x_6 = 63, x_7 = 127, x_8 = 255$

6. Sucessões que "ainda" não são progressões geométricas

Vamos considerar uma sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = ax_n + b, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

É claro, que a equação anterior só nos interessa, quando $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

Vejamos que podemos obter uma progressão geométrica de razão a , somando a x_n uma constante apropriada (β):

Seja $z_n = \beta + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$z_{n+1} = \beta + x_{n+1} = \beta + ax_n + b$$

De $z_n = \beta + x_n$, vem $ax_n = a\beta + ax_n$, pelo que, para obtermos uma progressão geométrica de razão a , devemos ter $z_{n+1} = az_n$.

Então, $\beta + ax_n + b = a\beta + ax_n$, donde se conclui que $\beta + b = a\beta$.

Então, $\beta(a-1) = b$, pelo que $\beta = \frac{b}{a-1}$. Então, $z_1 = \beta + x_1 = \frac{b}{a-1} + c$. Logo,

$$z_n = z_1 \times a^{n-1} = \left(\frac{b}{a-1} + c \right) a^{n-1}$$

Então,

$$x_n = z_n - \beta = \left(\frac{b}{a-1} + c \right) a^{n-1} - \frac{b}{a-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

No exemplo das maçãs, tínhamos $a = 2, b = 1, c = 1$.

Então,

$$x_n = \left(\frac{1}{2-1} + 1 \right) 2^{n-1} - \frac{1}{2-1}, \forall n \in \mathbb{N} = 2 \times 2^{n-1} - 1, \forall n \in \mathbb{N} = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $x_8 = 2^8 - 1 = 255$.

7. As maçãs e a calculadora

Começemos por digitar, numa calculadora gráfica o número 1, carregando-se a seguir na tecla ENTER (ou EXE).

Depois, escrevemos $2 \times \text{Ans} + 1$. Carregando sucessivamente na Tecla ENTER, obtemos:

1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, ...

F1 Tools	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrmID	F6 Clean Up
1					
2	1.				
3	2				
4	3.				
5	7.				
6	15.				
7	31.				
8	63.				
9	2ans(1)+1				
MAIN	RAD	APPROX	FUNC	6/7	

F1 Tools	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrmID	F6 Clean Up
2	31.				
3	63.				
4	127.				
5	255.				
6	511.				
7	1023.				
8	2047.				
9	2ans(1)+1				
MAIN	RAD	APPROX	FUNC	12/30	

F1 Tools	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 PrmID	F6 Clean Up
2	1023.				
3	2047.				
4	4095.				
5	8191.				
6	16383.				
7	32767.				
8	65535.				
9	2ans(1)+1				
MAIN	RAD	APPROX	FUNC	17/30	

Podemos, ainda construir uma tabela:

F1+ Tools	F2 Setup	F3 1st Round	F4 2nd Round	F5 3rd Round	F6 4th Round
×		41			
1.		1.			
2.		3.			
3.		7.			
4.		15.			
5.		31.			

$$\underline{x=5.}$$

MAIN		RAD APPRDX		FUNC	
F1: Tools	F2: Setup	F3: Data	F4: Header	F5: Print	F6: Exit
X	q1				
16.	65535.				
17.	1.31E5				
18.	2.62E5				
19.	5.24E5				
20.	1.05E6				

$$y_1(x) = 1048575.$$

MAIN	RAD APPROX	FUNC
------	------------	------

F1-Tools	F2-Setup	F3- F4- F5- F6- F7- F8- F9- F10-	F11- F12- F13- F14- F15- F16- F17- F18- F19- F20-	F21- F22- F23- F24- F25- F26- F27- F28- F29- F30-
x	u1			
6.	63.			
7.	127.			
8.	255.			
9.	511.			
10.	1023.			

$$x=10.$$

MAIN		RAD APPRFX		FUNC	
F1: Tools	F2: Setup	F3:	F4: Header	F5:	F6:
X	u1				
21.	2.1E6				
22.	4.19E6				
23.	8.39E6				
24.	1.68E7				
25.	3.36E7				

$$y_1(x) = 33554431.$$

MAIN	RAD APPROX	FUNC
------	------------	------

F1: Tools	F2: Setup	F3: Data	F4: Tools	F5: Help
x	y1			
11.	2047.			
12.	4095.			
13.	8191.			
14.	16383.			
15.	32767.			

 $x=15.$

MAIN		RAD AUTO		FUNC	
F1 Tools	F2 Setup	F3	F4 Header	F5	F6
x	y1				
26.	6.71e7				
27.	1.34e8				
28.	2.68e8				
29.	5.37e8				
30.	1.07e9				

y1(x)=1073741823.		

MAIN	RAD APPROX	FUNC
------	------------	------

Repare-se no número de maçãs, se em vez de 8 dias, tivéssemos 30 dias.

8. As maçãs e a base dois

Esta resolução destina-se, apenas, a quem conhece a base 2 (que é a base em que, internamente, trabalham os Computadores e as Calculadoras):

Consideremos a sucessão $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2x_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

Então, $x_1 = 1, x_2 = 11_{(2)}, x_3 = 111_{(2)}, \dots$

$$\text{Logo, } \begin{cases} x_1 = 10_{(2)} - 1 = 2 - 1 \\ x_2 = 100_{(2)} - 1 = 2^2 - 1 \\ x_3 = 1000_{(2)} - 1 = 2^3 - 1 \end{cases}$$

Então, $x_n = 2^n - 1$, pelo que $x_8 = 2^8 - 1 = 255$.

Problema 147 *O Xadrez e os grãos de trigo*

É bem conhecida a lenda do xadrez e dos grãos de trigo: O inventor do jogo pediu um grão pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos pela segunda e assim sucessivamente, duplicando o número de grãos por cada nova casa do tabuleiro. Sabendo que há 64 casas, no tabuleiro, quantos grãos de trigo pediu o inventor do xadrez?

Resolução

Embora não pareça, este problema resolve-se da mesma maneira que o problema das maçãs:

$$\begin{cases} S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63} \\ 2S_{64} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \dots + 2^{63} + 2^{64} \end{cases}$$

Então, $S_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

■ $2^{64} - 1$
18446744073709551615

O número anterior é extremamente elevado.

Para ter uma ideia da quantidade de trigo envolvida, resolvi contar grãos de arroz, porque o arroz está mais disponível do que o trigo, tendo verificado que 4000 grãos de arroz pesaram 78 g. Então, o peso de $2^{64} - 1$ grãos de arroz será de $\frac{2^{64} - 1}{4000} \times 78 \times 10^{-3}$ kg, ou seja, $3,597\,115\,094 \times 10^{11}$ toneladas. Este arroz corresponde a mais de 55 toneladas por habitante (humano) do planeta Terra, o que significa 5 caminhões com pouco mais de 11 toneladas de arroz, cada um. Para obter os resultados anteriores, utilizei o valor de $6,450 \times 10^9$ para a população mundial (valor estimado em Junho de 2005).

Então, seriam necessários $3,270\,104\,631 \times 10^{10}$ caminhões para transportar o arroz. Imaginando que cada caminhão tem 10 metros de comprimento, teríamos uma fila com mais de $3,270\,104\,631 \times 10^{11}$ m, isto é, com cerca de $3,27 \times 10^8$ quilômetros de comprimento.

Como o equador da Terra mede cerca de 40000 quilômetros, teríamos $\frac{3,27 \times 10^8}{40000}$ voltas à Terra, ou seja, cerca de 8175 voltas. Admitindo que cada caminhão tem 2,5 m de largura, seria necessária uma estrada, seguindo o equador, com mais de 20 quilômetros de largura! Estamos a supor que os caminhões estão parados e encostados uns aos outros.

Numa segunda oportunidade, pesei 673 grãos de trigo, tendo obtido o valor de 28 g. Então, o peso de $2^{64} - 1$ grãos de trigo será

$$\frac{2^{64} - 1}{673} \times 28 \text{ g} \approx 7,674\,722\,646 \times 10^{17} \text{ g} \approx 7,674\,722\,646 \times 10^{14} \text{ kg}$$

Obtém-se, então, $7,674\,722\,646 \times 10^{11}$ toneladas de trigo.

Procedendo-se da mesma maneira que no caso dos grãos de arroz, obtemos uma estrada, à volta do equador, com cerca de 43605 m de largura. Esta estrada permitia que se disputasse a prova da maratona (em atletismo) em linha recta e transversalmente, isto é, quem quisesse a travessar a estrada, teria de percorrer uma distância superior àquela que é percorrida por atletas profissionais em mais de duas horas.

Imaginemos uma prova da maratona disputada numa passadeira para peões existente numa estrada situada algures próximo do Equador.

Problema 148 *O Quebra-cabeças das Torres de Hanói*

Suponhamos que temos três hastes metálicas, numa das quais estão colocados n discos numerados de 1 até n . Pretendemos mudar todos os discos para uma (qualquer) das outras duas hastes, respeitando as seguintes regras:

1ª) Apenas podemos usar as três hastes referidas.

2ª) Quando retiramos um disco duma haste, temos de colocá-lo noutra haste.

3ª) Não podemos colocar um disco por cima de outro cujo número seja inferior.

Qual o número mínimo de movimentos, para mudar todos os discos duma haste para outra?

Resolução

Se tivermos um só disco, basta 1 movimento.

Se tivermos 2 discos, movemos o disco superior para uma das hastes, depois movemos o segundo disco para a terceira haste e, por fim, o primeiro disco para a terceira haste. São necessários 3 movimentos.

Se tivermos 3 discos, esquecemos o disco inferior, considerando 2 discos. Para mover esses 2 discos, são necessários 3 movimentos. A seguir, movemos o último disco para a haste vazia

(1 movimento) e, depois, movemos os dois discos para a haste que ficou com o último disco (3 movimentos). O número mínimo de movimentos, para mover 3 discos, é 7.

Suponhamos que, para mover n discos são necessários x_n movimentos. Então, para mover $n+1$ discos são necessários $x_n + 1 + x_n$ movimentos, ou seja, $2x_n + 1$ movimentos, obtendo-se a sucessão 1, 3, 7, 15, 31, ..., que é a sucessão do problema das maçãs.

Logo, $x_n = 2^n - 1$. Observe-se que, nesta sucessão, $x_{n+1} = 2x_n + 1$.

Este problema pode ser resolvido por crianças do primeiro ciclo do Ensino Básico, utilizando 4 ou 5 discos de diâmetros diferentes ou recipientes que caibam uns dentro dos outros. Essa experiência já foi realizada há cerca de quinze anos por uma professora que, nessa altura, era minha aluna de 12º Ano.

Problema 149 *Da Terra à Lua numa folha de papel A_4*

Se dobrarmos uma folha de papel, a espessura da folha dobrada passa para o dobro. Suponha que a espessura duma folha de papel é 0,1 mm. Qual o número mínimo de dobragens que devem ser feitas para que se obtenha uma espessura superior à distância da Terra à Lua?

Resolução

A distância da Terra à Lua é de, aproximadamente, 384400 km.

Consideremos a progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo $\frac{1}{10}$. O termo geral desta progressão é $x_n = \frac{2^{n-1}}{10}$. Calculemos alguns termos da progressão:

$$x_{20} = \frac{2^{19}}{10} \text{ mm} = 52428,8 \text{ mm} \approx 52 \text{ m}, \quad x_{30} = \frac{2^{29}}{10} \text{ mm} = 53687,0912 \text{ m} \approx 54 \text{ km}$$

$$x_{40} = \frac{2^{39}}{10} \text{ mm} \approx 54975581,39 \text{ m} \approx 54976 \text{ km}, \quad x_{45} = \frac{2^{44}}{10} \text{ mm} = 1759219 \text{ km}$$

$$x_{46} = \frac{2^{45}}{10} \text{ mm} = 3518437 \text{ km}, \quad x_{47} = \frac{2^{46}}{10} \text{ mm} = 7036874 \text{ km}$$

Logo, ao fim de 47 dobragens, ultrapassamos a distância da Terra à Lua.

Convém chamar a atenção para resultados inesperados que resultam do crescimento muito rápido de algumas sucessões e para alguns jogos (proibidos em Portugal) que prometem o enriquecimento rápido dos seus participantes, desde que arranjem 3 "vítimas" para entrar no jogo.

O problema está em que, mesmo se todos os habitantes (humanos) da Terra participassem no jogo, rapidamente chegaríamos à saturação.

Repare-se que neste tipo de jogos (jogos de soma zero), para alguém ganhar, alguém tem de perder. Note-se que nos jogos em referência, a soma é, mesmo, inferior a zero, porque a entidade organizadora do jogo faz-se pagar por aqueles que entram no jogo.

Exemplo 150 *Uma sucessão por recorrência, já nossa conhecida...*

Consideremos a sucessão definida por $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = bx_n + c, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, com $b \neq 0 \wedge b \neq 1$. Então, a sucessão (y_n) definida por $y_n = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, é uma progressão geométrica de razão b .

Resolução

$$y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} = (bx_{n+1} + c) - (bx_n + c) = bx_{n+1} - bx_n = b(x_{n+1} - x_n) = by_n$$

Logo, a sucessão (y_n) é uma progressão geométrica de razão b .

Vejamos um exemplo concreto:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Então, } y_1 = x_2 - x_1 = \frac{2}{3} \times 5 + 1 - 5 = -\frac{2}{3}$$

Logo,

$$y_n = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Mas, $y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{2}{3}x_n + 1 - x_n = 1 - \frac{1}{3}x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

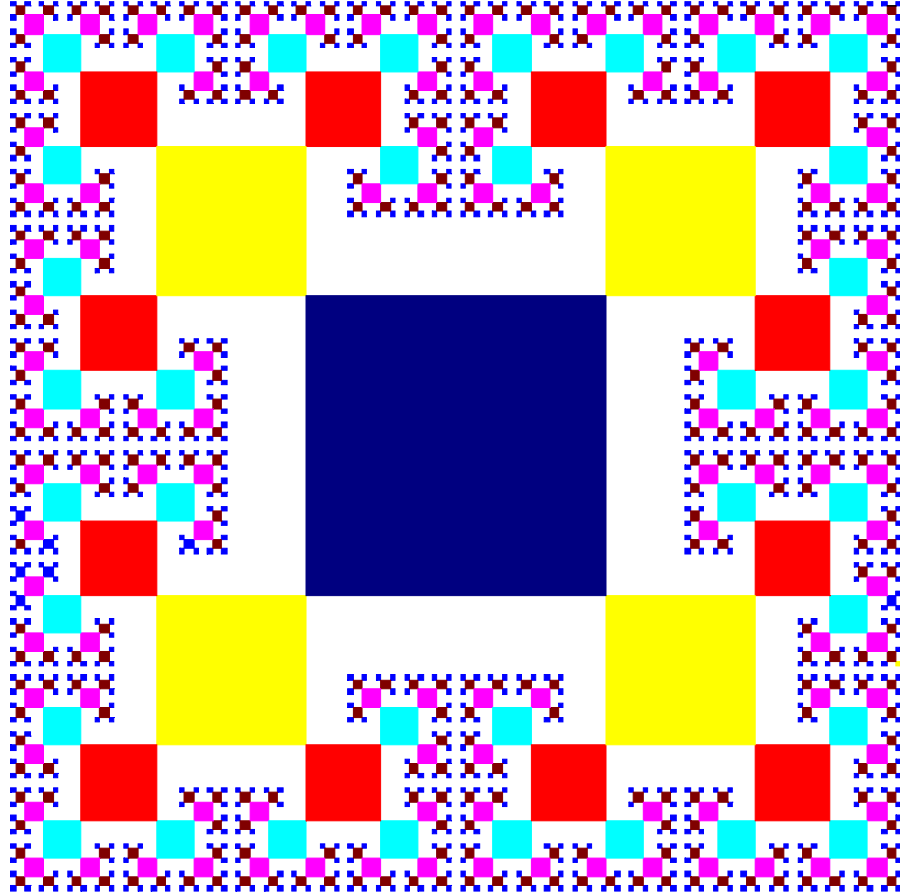
Então, $\frac{1}{3}x_n = 1 - y_n$, donde vem $x_n = 3 - 3y_n$.

Logo,

$$x_n = 3 + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 151 *Uma sucessão de quadrados*

Consideremos a figura seguinte, a qual é constituída por um quadrado central cujo lado se toma para unidade. Em cada vértice do quadrado inicial, construiu-se quatro quadrados de lado metade do lado do anterior. A partir daqui, em todos os quadrados do passo anterior e em cada um dos três vértices que não pertencem a esses quadrados, construímos um quadrado com metade do lado dos quadrados desse passo (anterior). E o processo continua...



Seja A_0 a área do quadrado inicial (de lado 1). Então, $A_0 = 1$.

Seja A_1 a área dos quatro quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{2}$). Então, $A_1 = 4 \times \frac{1}{4} = 1$.

Seja A_2 a área dos quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{4}$). Então, $A_2 = 4 \times 3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{4}$.

Seja A_3 a área dos quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{8}$). Então, $A_3 = 4 \times 3^2 \times \frac{1}{64} = \frac{9}{16}$.

Ao passarmos dum passo para o seguinte (com excepção do primeiro para o segundo) o número de quadrados triplica e a área de cada um deles passa para um quarto da área de cada quadrado do passo anterior. Então, estamos em presença duma progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$, excluindo-se o primeiro termo. Logo, $A_0 = 1$ e $A_n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, se $n \geq 1$.

Seja S_n a soma das áreas de todos os quadrados construídos até ao passo n , isto é, $S_n = \sum_{k=0}^n A_k$.

Então, $S_0 = 1$ e $S_n = 1 + 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = 5 - 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$, se $n \geq 1$.

Logo, $\lim S_n = \lim \left(5 - 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = 5$.

Vejam, agora, os perímetros dos quadrados, em vez das suas áreas.

Seja P_0 o perímetro do quadrado inicial (de lado 1). Então, $P_0 = 4$.

Seja P_1 o perímetro dos quatro quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{2}$). Então, $P_1 = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$.

Seja P_2 o perímetro dos quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{4}$). Então, $P_2 = 4 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{4} = 12$.

Seja P_3 o perímetro dos quadrados seguintes (de lado $\frac{1}{8}$). Então, $P_3 = 4 \times 3^2 \times 4 \times \frac{1}{8} = 18$.

Ao passarmos dum passo para o seguinte (com excepção do primeiro para o segundo) o número de quadrados triplica e o perímetro de cada um deles passa para metade do perímetro de cada quadrado do passo anterior. Então, estamos em presença duma progressão geométrica de razão $\frac{3}{2}$, excluindo-se o primeiro termo.

Então, $P_0 = 4$ e $P_n = 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, se $n \geq 1$.

Seja Y_n a soma dos perímetros de todos os quadrados construídos até ao passo n , isto é, $Y_n = \sum_{k=0}^n P_k$.

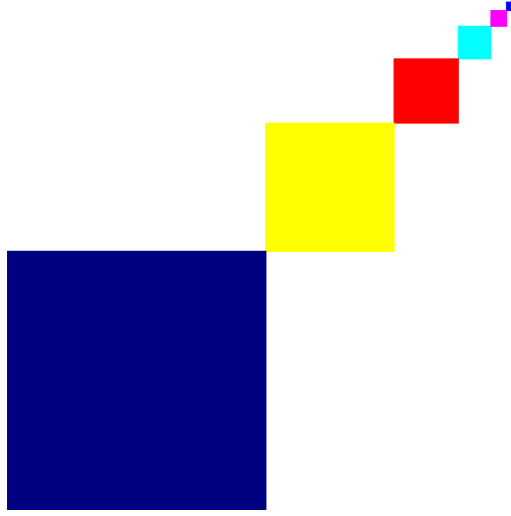
Então, $Y_0 = 4$ e $Y_n = 4 + 8 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 12$, se $n \geq 1$.

Então, $\lim Y_n = \lim \left(16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 12\right) = +\infty$.

Observação 152 *Convém chamar a atenção para um facto muito importante: será que os quadrados (abertos) são todos disjuntos?*

Exemplo 153 *Outra sucessão de quadrados*

Consideremos a seguinte figura em que o quadrado maior tem lado 1 e cada um dos quadrados seguintes tem metade do lado do quadrado anterior:



Sejam $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ as áreas dos quadrados de lados $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$, respectivamente.

Neste caso, temos $A_0 = 1$ e cada quadrado tem um quarto da área do quadrado anterior, pelo que $A_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

A soma das áreas dos quadrados é dada por

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Assim, por exemplo, $S_0 = A_0 = 1$ e $S_1 = A_0 + A_1 = \frac{5}{4}$.

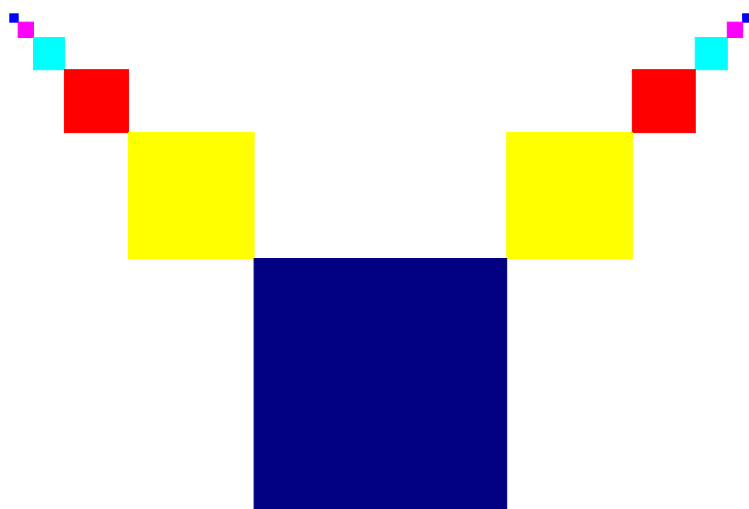
Sejam $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ os perímetros dos quadrados de lados $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$, respectivamente.

Então, $P_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_0$ e Y_n , a sucessão das somas dos perímetros, é dada por

$$Y_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 8 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Então, $\lim S_n = \lim \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{4}{3}$ e $\lim Y_n = \lim \left(8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) = 8$.

Exemplo 154 Ainda uma sucessão de quadrados



Suponhamos que o lado do quadrado maior é 1 e que os sucessivos quadrados (da mesma cor) têm um lado que é metade do lado do(s) quadrado(s) do passo anterior. Seja A'_0 a área do quadrado inicial, A'_1 a área dos dois quadrados seguintes e assim sucessivamente.

Então, $A'_0 = 1$ e cada quadrado seguinte tem um quarto da área do quadrado anterior, pelo que $A'_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Repare-se que não se trata duma progressão geométrica, porque $A'_1 = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}A'_0$, embora $A'_{n+2} = \frac{1}{4}A'_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

A soma das áreas dos quadrados é dada por

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=0}^n A'_k = A'_0 + \sum_{k=1}^n A'_k = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, $S'_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ e $S'_2 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{13}{8}$. É claro que $S'_0 = 1$.

Outra maneira consiste em verificar que $S'_0 = A'_0 = 1$ e que para $n \geq 1$, temos

$$S'_n = 2S_n - 1 = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

A igualdade anterior resulta de ter passado a haver o dobro dos quadrados do exemplo anterior, com exceção do quadrado inicial (de lado 1) que continua a ser único.

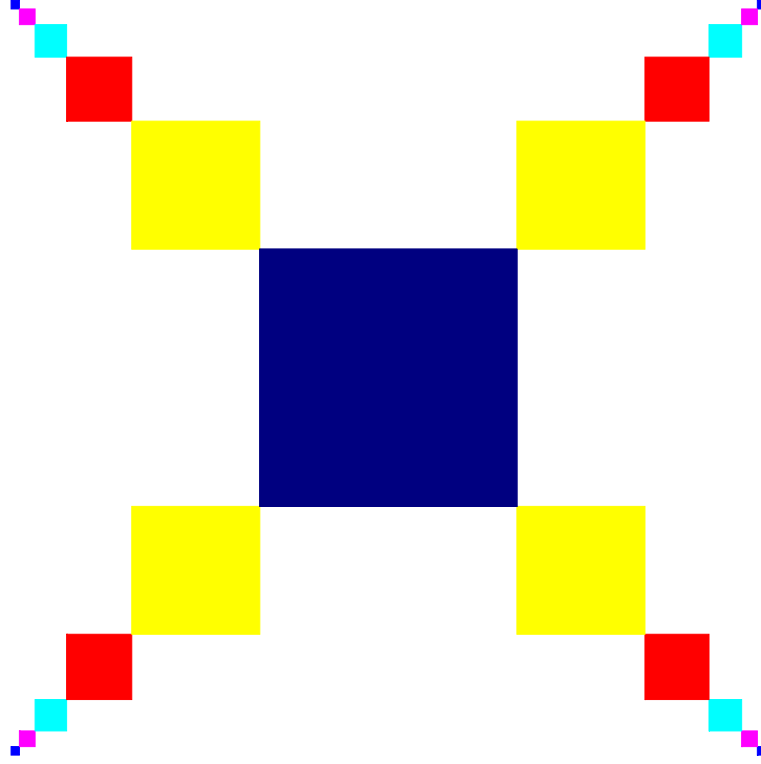
Quanto à sucessão dos perímetros, temos $P'_0 = 4$ e $P'_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ e Y'_n , a sucessão das somas dos perímetros, é dada por $Y'_n = 4 + 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 12 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\lim S'_n = \lim \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{5}{3}$ e $\lim Y'_n = \lim \left(12 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = 12$.

Os limites anteriores podiam ser calculados da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \lim S'_n = 2 \lim S_n - 1 = 2 \times \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3} \\ \lim Y'_n = 2 \lim Y_n - 4 = 2 \times 8 - 4 = 12 \end{cases}$$

Exemplo 155 *Mais uma sucessão de quadrados*



De modo análogo aos anteriores, temos $A_0'' = 1$ e $A_n'' = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned} S_n'' &= \sum_{k=0}^n A_k'' = A_0'' + \sum_{k=1}^n A_k'' = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 1 + \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

É claro que $S_0'' = 1$ e $\lim S_n'' = \frac{7}{3}$.

Por outro lado, temos $P_0'' = 4$ e $P_n'' = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Y_n'' , a sucessão das somas dos perímetros, é dada por

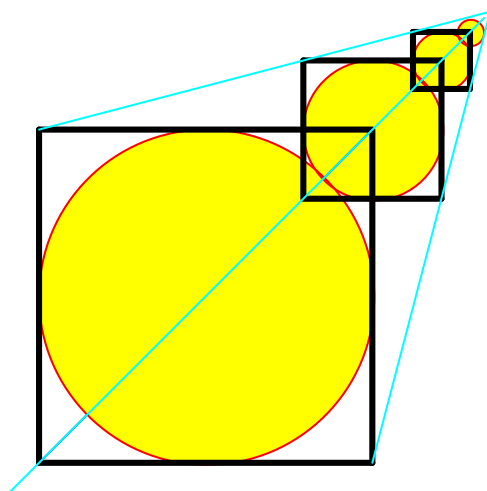
$$Y_n'' = 4 + 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 20 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então, $\lim S_n'' = \frac{7}{3}$ e $\lim Y_n'' = 20$.

Note-se que os limites anteriores podem ser calculados do seguinte modo:

$$\begin{cases} \lim S_n'' = 4 \lim S_n - 3 \times 1 = 4 \times \frac{4}{3} - 3 \times 1 = \frac{7}{3} \\ \lim Y_n'' = 4 \lim Y_n - 3 \times 4 = 4 \times 8 - 12 = 20 \end{cases}$$

Exemplo 156 *Uma sucessão de círculos*



Consideremos um quadrado de lado 1 e uma recta que contém uma diagonal do mesmo.

Começamos por desenhar uma circunferência tangente aos lados do quadrado.

Depois, com centro num dos vértices do quadrado inicial, desenhamos uma nova circunferência tangente à anterior e com raio menor.

Depois, voltamos a construir um quadrado com os lados tangentes à nova circunferência e paralelos aos lados do quadrado inicial.

E o processo continua indefinidamente, como na figura.

Como se relacionam os sucessivos raios?

Seja R_n o raio de uma circunferência. Então, o lado do quadrado envolvente é $2R_n$, enquanto que a diagonal é $2R_n\sqrt{2}$.

Então, o raio da circunferência seguinte é $R_n\sqrt{2} - R_n$, ou seja, $R_n(\sqrt{2} - 1)$.

Então, $R_{n+1} = R_n(\sqrt{2} - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Mas, $R_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pelo que $R_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} - 1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Então, $A_n = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (\sqrt{2} - 1)^{2n} = \frac{\pi}{2} (3 - 2\sqrt{2})^n$, pelo que as áreas dos círculos definem uma progressão geométrica de razão $3 - 2\sqrt{2}$.

Seja $S_n = \sum_{k=0}^n A_k, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Então,

$$\begin{aligned} S_n = A_0 \times \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1}}{1 - (3 - 2\sqrt{2})} &= \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2} - 2} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(\sqrt{2} + 1) (1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1})}{2(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{(\sqrt{2} + 1) (1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1})}{2}, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \lim S_n = \lim \frac{(\sqrt{2} + 1) (1 - (3 - 2\sqrt{2})^{n+1}) \pi}{2 \times 2} = \frac{\pi (1 + \sqrt{2})}{4}.$$

Calculemos a soma dos diâmetros:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^n R_k &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^n (\sqrt{2} - 1)^k = \sqrt{2} \times 1 \times \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{1 - (\sqrt{2} - 1)} \\ &= \sqrt{2} \times \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{2}) \sqrt{2}}{2} \times (1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}) \\ &= (1 + \sqrt{2}) \times (1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}) \end{aligned}$$

O limite da sucessão anterior é $1 + \sqrt{2}$.

Quanto a P_n , o comprimento de cada circunferência, temos

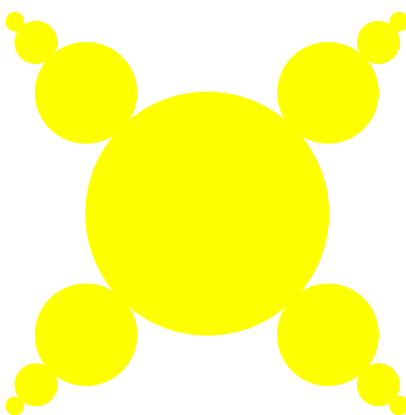
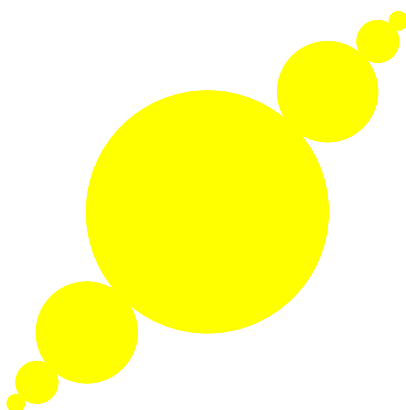
$$P_n = 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} - 1)^n = \pi\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

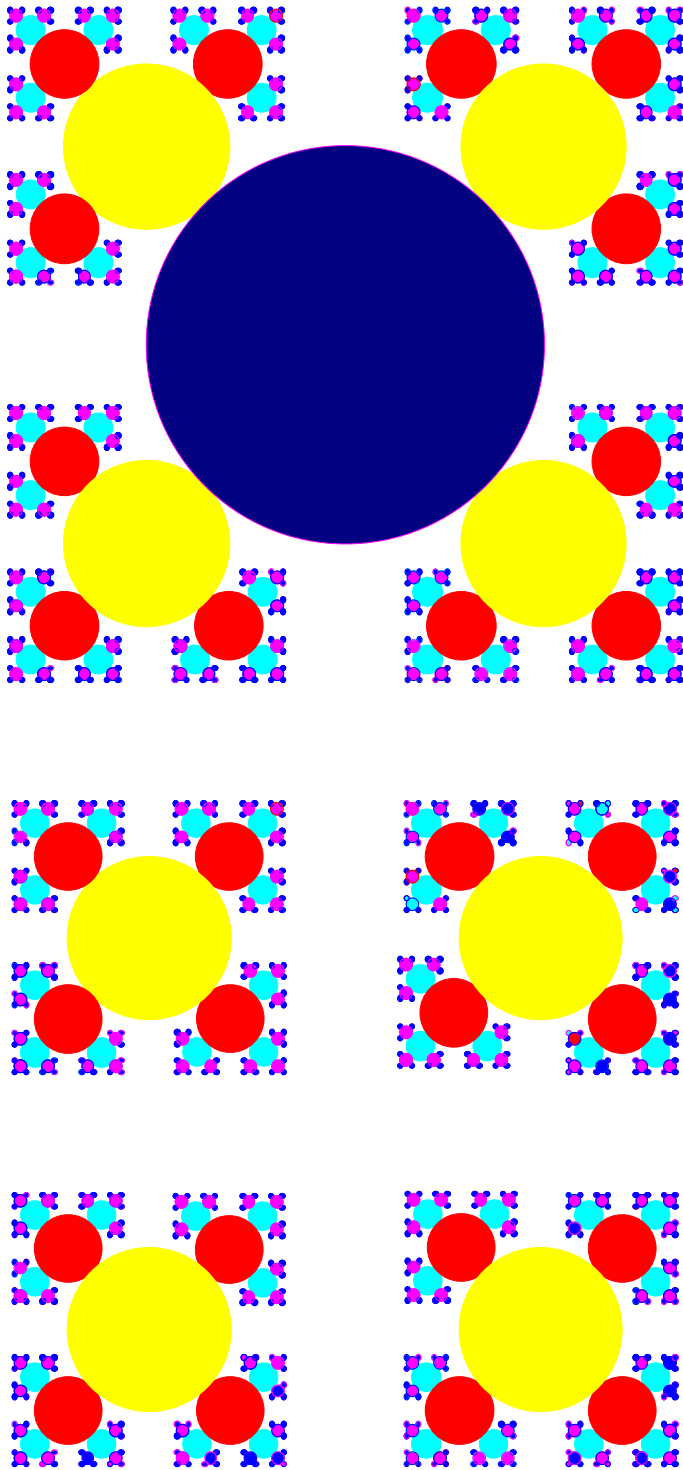
Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P_k &= \sum_{k=0}^n \pi\sqrt{2} (\sqrt{2} - 1)^k = \pi\sqrt{2} \sum_{k=0}^n (\sqrt{2} - 1)^k \\ &= \pi\sqrt{2} \times \frac{1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2 - \sqrt{2}} = \pi (1 + \sqrt{2}) \times (1 - (1 - \sqrt{2})^{n+1}) \end{aligned}$$

Então, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n P_k = \pi (1 + \sqrt{2})$, o que está de acordo com o facto que o comprimento duma circunferência é o produto de π pelo diâmetro.

Exemplo 157 *Seguem-se alguns exemplos de sucessões com outras figuras geométricas:*





Observação 158 *A exemplo do que fizemos para o caso dos quadrados, convém chamar a atenção para um facto muito importante: será que os círculos (abertos) são todos disjuntos?*

Exemplo 159 *A sucessão φ de Euler*

A sucessão de Euler é uma sucessão importantíssima em Teoria dos Números e pode ser definida do seguinte modo: $\varphi(n)$ é o número de elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ que são primos com n .

Recordamos que dois números inteiros são primos entre si (ou coprimos) se o máximo divisor comum entre os dois números é 1.

A sucessão anterior é mais conhecida por função φ de Euler e tem uma propriedade importante: se dois números naturais m e n são primos entre si, então $\varphi(m \times n) = \varphi(m) \times \varphi(n)$.

Além da propriedade anterior temos que, $\varphi(p) = p - 1$ e $\varphi(p^a) = p^{a-1}(p - 1)$, com a um número natural e p um número primo. Então:

$$\varphi(5) = 4; \quad \varphi(25) = \varphi(5^2) = 5 \times 4 = 20$$

$$\varphi(35) = \varphi(7 \times 5) = \varphi(7) \times \varphi(5) = 6 \times 4 = 24$$

Exemplo 160 *A sucessão $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$*

Consideremos a sucessão de termo geral $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Calculemos alguns termos desta sucessão, através do desenvolvimento do binómio:

$$u_1 = (1 + \frac{1}{1})^1 = 1 + 1, \quad u_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = 1 + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + 1 + \frac{1}{4}$$

$$u_3 = (1 + \frac{1}{3})^3 = 1 + 3 \times 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times 1 \times \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27}$$

$$u_4 = (1 + \frac{1}{4})^4 = 1 + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = 1 + 1 + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{256}$$

Vamos dar uma pequena ideia da demonstração da convergência desta sucessão.

Observando os desenvolvimentos anteriores, temos que:

1º) O número de parcelas aumenta uma unidade de termo para termo.

2º) Todas as parcelas são positivas

3º) Em todos os termos, as duas primeiras parcelas são iguais a 1.

4º) A terceira parcela aparece no segundo termo e seguintes e aumenta de um termo para outro, mantendo-se inferior a $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \dots < \frac{1}{2}$).

5º) A quarta parcela aparece no terceiro termo e seguintes e aumenta de um termo para outro, mantendo-se inferior a $\frac{1}{4}$ ($\frac{1}{27} < \frac{1}{16} < \dots < \frac{1}{4}$).

6º) As restantes parcelas comportam-se de modo análogo, sendo inferiores a sucessivas potências de $\frac{1}{2}$.

7º) Deste modo, a sucessão é estritamente crescente e é majorada pela "soma" das potências de $\frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots < 1$, temos que $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$.

8º) Como toda a sucessão limitada e monótona é convergente, temos que esta sucessão é convergente, tendo-se que $\lim u_n \leq 3$. O limite desta sucessão representa-se por e e é conhecido por constante de Neper. O seu valor é, aproximadamente, 2,71828182846.

■ e^1

2.71828182846

A constante de Neper é um dos números mais importantes da História da Matemática. Trata-se dum número irracional não algébrico. Como exemplo de número irracional algébrico, temos $\sqrt{2}$, número este que é uma raiz ou zero do polinómio de coeficientes inteiros $x^2 - 2$. O número e não é zero de nenhum polinómio de coeficientes inteiros.

Há outra sucessão interessante cujo limite é a constante de Neper:

$$v_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

A sucessão anterior tende para e , de modo muito mais rápido que a sucessão $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Repare-se no décimo termo de cada uma das sucessões e na boa aproximação de v_{10} :

$$\begin{aligned} u_{10} &= \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = \frac{25\,937\,424\,601}{10\,000\,000\,000} \approx 2,593\,742\,46 \\ v_{10} &= \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} = \frac{9864\,101}{3628\,800} \approx 2,718\,281\,801 \end{aligned}$$

Curiosamente, o número $e - 1$ é, duma certa maneira, mais interessante que o número e . O número $e - 1$ é o limite da sucessão

$$w_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Com uma Calculadora, podemos desenvolver o número e em fracção contínua (se não sabe o que é uma fracção contínua, passe adiante).

A sequência obtida, para e , é a seguinte:

$$2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \dots$$

E a sequência, para $e - 1$, é:

$$1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \dots$$

É claro que esta segunda sequência é mais interessante que a anterior.

Registe-se que a regularidade da sequência se mantém, aparecendo duas vezes o número 1, seguindo-se um número par que vai aumentando duas unidades, pelo que, na lista anterior, se seguem os números 1, 1, 14, 1, 1, 16, ...

Proposição 161 A sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é convergente.

Demonstração

É claro que $u_1 = 2$. Para $n \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! \times (n-k)! \times n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! \times n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

Seja $T_k = \frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$, para $2 \leq k \leq n$. É claro que estamos a supor $T_0 = T_1 = 1$.

Consideremos, agora, u_{n+1} . Então,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k! \times (n+1-k)! \times (n+1)^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n+2-k)}{k! \times (n+1)^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \right) \end{aligned}$$

Seja $T'_k = \frac{1}{k!} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$, para $2 \leq k \leq n$. É claro que estamos a supor $T'_0 = T'_1 = 1$.

Então, $T'_0 = T_0 = 1$ e $T'_1 = T_1 = 1$. A partir daqui, temos $T_k < T'_k$, porque T_k e T'_k têm o mesmo número de factores (positivos) e, com excepção de $\frac{1}{k!}$, todos os factores de T'_k são maiores que os correspondentes factores de T_k .

Então, para $2 \leq k \leq n$, temos $u_{n+1} > u_n$. Logo, a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é estritamente crescente.

$$\text{Mas, } T_2 = \frac{n(n-1)}{2n^2} < \frac{1}{2}, T_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} < \frac{1}{3!} < \frac{1}{4}, \dots, T_k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k! \times n^k} < \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Observe-se que para $k > 2$, temos $k! > 2^{k-1}$. Esta afirmação pode ser demonstrada (facilmente) por indução.

Então, $u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots < 1 + 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

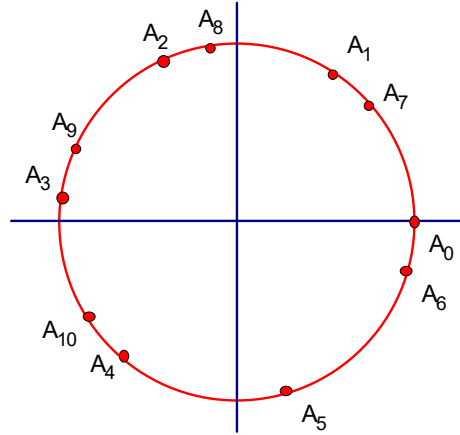
Mas, toda a sucessão limitada e monótona é convergente, pelo que a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, tendo-se $1 < \lim u_n \leq 3$.

Exemplo 162 A sucessão $u_n = \sin n$

Consideremos a sucessão definida por $u_n = \sin n$, com $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\text{Então, } \begin{cases} u_0 = \sin 0 = 0 \\ u_1 = \sin 1 \approx 0,841\,470\,984\,8 \\ u_2 = \sin 2 \approx 0,909\,297\,426\,8 \\ u_3 = \sin 3 \approx 0,141\,120\,008\,1 \\ u_4 = \sin 4 \approx -0,756\,802\,495\,3 \\ \dots \end{cases}$$

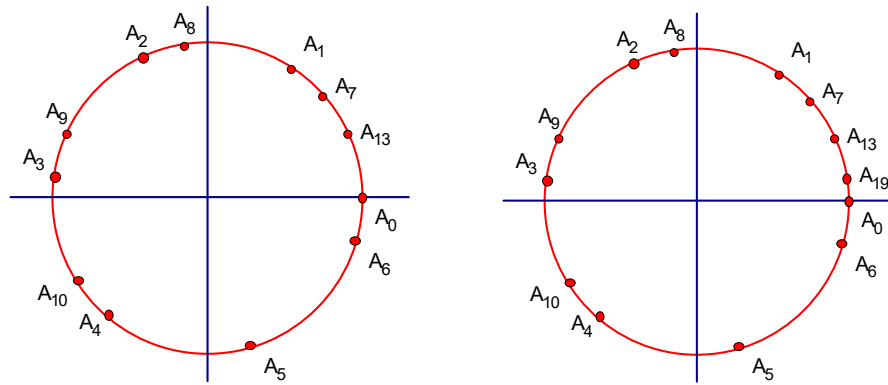
A sucessão $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma sucessão limitada, porque $-1 < \sin n < 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Será uma sucessão convergente? E que tipo de conjunto formam os seus termos?



Consideremos, numa circunferência de centro na origem dum referencial ortonormado e raio 1, os pontos A_n de coordenadas $(\cos n, \sin n)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, como na figura anterior. É fácil de provar que, para $n \neq m$, temos que A_n e A_m são pontos distintos:

Se A_n e A_m , com $n \neq m$, fossem o mesmo ponto, então $n = m + 2k\pi$, para certo $k \in \mathbb{Z}$, o que é impossível, pois só pode verificar-se $n - m = 2k\pi$, para $n = m \wedge k = 0$.

Na figura, o ponto A_i mais próximo de A_0 é A_6 , o qual pertence ao 4º quadrante; este ponto A_6 , quando marcado, forma com um dos pontos anteriores uma corda (e um arco) de comprimento mínimo. Refira-se que esse tal ponto anterior é sempre A_0 e que o outro ponto pode estar no 4º ou no 1º quadrante. Por exemplo, A_{13} fica no 1º quadrante e poderá ou não estar mais próximo de A_0 do que A_6 . Registe-se que a distância entre A_6 e A_0 é a mesma que entre A_7 e A_1 , etc..



Depois de marcarmos A_{13} , vemos que, afinal, era óbvio que o ponto A_6 continuaria a ser aquele que fica mais próximo de outro de outro dos pontos já marcados, pois os pontos A_1 , A_7 e A_{13} vão "recuando". Parece que A_{19} passará a ser o ponto que estará mais próximo de outro (que continuará a ser A_0).

É claro que a distância entre A_0 e A_{19} é a mesma que entre A_1 e A_{20} , etc..

E o processo continua até obtermos um ponto mais próximo de A_0 do que A_{19} . E assim por diante...

Como temos infinitos pontos A_n sobre a circunferência e todos distintos, a distância entre A_0 e os sucessivos pontos que ficam mais próximo de A_0 tende para zero. Logo, em qualquer vizinhança de A_0 , há infinitos pontos $A_k, k \in \mathbb{N}$. E o mesmo acontece com qualquer outro ponto. Por outro lado, dado um ponto da circunferência, então, em qualquer vizinhança desse ponto há um ponto $A_k, k \in \mathbb{N}$ (na verdade, há infinitos). Repare-se que a partir do "momento" em que temos um ponto muito próximo de A_0 , podemos marcar a partir de qualquer ponto A_k , já marcado, sucessivos pontos a essa distância. Por exemplo, partindo de A_0 , temos sucessivamente, $A_{19}, A_{38}, A_{57}, A_{76}, A_{95}, A_{114}$, etc..

A propriedade anterior significa que o conjunto $X = \{A_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ é um conjunto denso na circunferência, que a sucessão $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é divergente e que o conjunto dos sublimites da sucessão $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é $[-1, 1]$.

Assim, haverá uma subsucessão da sucessão dada que tende para -1 , por exemplo. O facto de haver uma tal subsucessão não significa que seja fácil ou possível defini-la duma forma explícita.

Exemplo 163 (A "minha" sucessão) Considere a sucessão definida por $u_{n+2} = \frac{4 + u_{n+1}^2}{u_n}$, com $u_0 = 1$ e $u_1 = 5$. Quais são os primeiros dez termos da sucessão?

É claro que $u_0 = 1$ e $u_1 = 5$. Quanto aos termos seguintes, vem:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{4 + u_1^2}{u_0} = \frac{4 + 5^2}{1} = 29, & u_3 &= \frac{4 + u_2^2}{u_1} = \frac{4 + 29^2}{5} = 169 \\ u_4 &= \frac{4 + u_3^2}{u_2} = \frac{4 + 169^2}{29} = \frac{4 + 28\,561}{29} = 985, & u_5 &= \frac{4 + u_4^2}{u_3} = \frac{4 + 985^2}{169} = 5741 \\ u_6 &= \frac{4 + u_5^2}{u_4} = \frac{4 + 5741^2}{985} = \frac{4 + 32\,959\,081}{985} = 33\,461, & u_7 &= \frac{4 + u_6^2}{u_5} = \frac{4 + 195\,025^2}{5741} = 195\,025 \\ u_8 &= \frac{4 + u_7^2}{u_6} = \frac{4 + 195\,025^2}{33\,461} = \frac{4 + 38\,034\,750\,625}{33\,461} = 1\,136\,689 \\ u_9 &= \frac{4 + u_8^2}{u_7} = \frac{4 + 1\,136\,689^2}{195\,025} = \frac{4 + 1292\,061\,882\,721}{195\,025} = 6625\,109 \end{aligned}$$

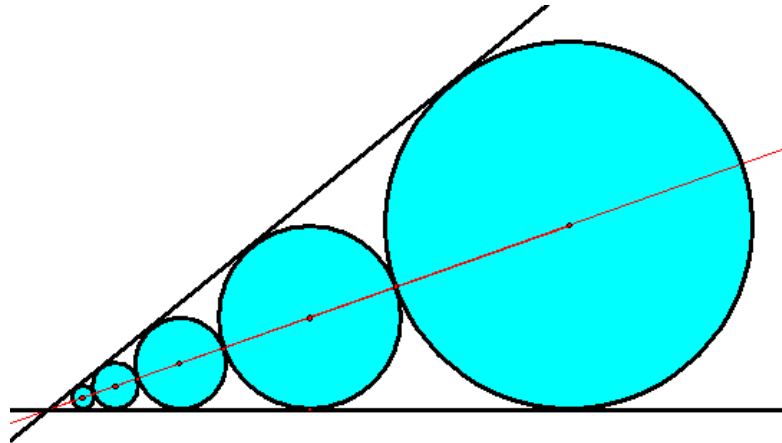
O interessante é que todos os termos que foram obtidos são números naturais. E impõe-se a pergunta "Será que todos os termos da sucessão são números naturais?" E, a ser verdadeira, como provar essa afirmação?

Esta sucessão está estudada no Capítulo intitulado "Equações de Pell-Fermat", pelo que, neste Capítulo, não adiantamos mais pormenores.

Exercício 164 Suponha que, na figura seguinte, os dois círculos maiores têm raios de 4 cm e 2 cm. Considere a sucessão das áreas dos círculos sugeridos pela figura.

1. Mostre que essa sucessão é uma progressão geométrica.

2. Determine a "soma" de todas essas áreas.



Resolução

Como cada círculo é tangente ao anterior e é tangente às duas rectas a preto, a razão de semelhança entre dois círculos consecutivos (do maior para o menor) é $\frac{1}{2}$. Esta afirmação pode parecer óbvia, mas será melhor justificá-la. A homotetia de centro no ponto de intersecção das três rectas desenhadas e de razão $\frac{1}{2}$ transforma o círculo de raio 4 cm no círculo de raio 2 cm, círculos estes que são tangentes. A mesma homotetia transforma estes dois círculos noutros dois que têm de ser tangentes entre si. Tais círculos são o 2º e o 3º (da direita para a esquerda).

Logo, a área de cada círculo é um quarto da área do círculo anterior. Logo, $A_1 = 16\pi \text{ cm}^2$, pelo que $A_n = 16\pi \times \frac{1}{2^{n-1}} \text{ cm}^2$, ou seja, $A_n = \frac{\pi}{2^{n-5}} \text{ cm}^2$. Então, em cm^2 , temos

$$S_n = \sum_{k=1}^n A_k = 16\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 16\pi \times \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{64}{3}\pi \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$\text{Logo, } \lim S_n = \frac{64}{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Exemplo 165 A sucessão de Fibonacci é definida por recorrência, tendo-se $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Os primeiros doze termos da sucessão de Fibonacci são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Há muitas propriedades importantes desta sucessão, cujo termo geral pode ser encontrado.

Uma das maneiras de encontrar o termo geral consiste em utilizar conhecimentos de equações com diferenças.

De $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, vem $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$. Daqui vem a equação $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, donde concluimos que

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Então, o termo geral de F_n é da forma $A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. As constantes A e B determinam-se a partir de $F_1 = F_2 = 1$.

Por acaso, os cálculos ficam mais fáceis, se considerarmos $F_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} A + B = 0 \\ A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} B = -A \\ A(1+\sqrt{5}) - A(1-\sqrt{5}) = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} B = -A \\ 2A\sqrt{5} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$F_n = A \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Embora tenhamos o termo geral, não é fácil calcular termos de ordem elevada como F_{100} . Vejamos uma propriedade curiosa de F_n :

$$\begin{cases} F_{2n+1} = (F_{n+1})^2 + (F_n)^2 = F_{n+1}^2 + F_n^2 \\ F_{2n+2} = (F_{n+2})^2 - (F_n)^2 = F_{n+2}^2 - F_n^2 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

A demonstração faz-se por indução.

Para $n = 1$, temos $\begin{cases} 2 = F_3 = F_2^2 + F_1^2 = 1^2 + 1^2 \\ 3 = F_4 = F_3^2 - F_1^2 = 2^2 - 1^2 \end{cases}$, pelo que as igualdades valem para $n = 1$.

Hipótese de indução: $\begin{cases} F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \\ F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2 \end{cases}$, para certo natural n .

Tese: $\begin{cases} F_{2n+3} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 \\ F_{2n+4} = F_{n+3}^2 - F_{n+1}^2 \end{cases}$

Ora, somando membro a membro as duas igualdades da hipótese de indução, temos

$$F_{2n+2} + F_{2n+1} = F_{n+2}^2 - F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2$$

Então, $F_{2n+3} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2$, para o número seguinte ao tal "certo natural n ".

A segunda parte da demonstração é mais complicada.

$$\begin{aligned} F_{2n+4} &= F_{2n+3} + F_{2n+2} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 - F_n^2 \\ &= F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 - (F_{n+2} - F_{n+1})^2 \\ &= F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 - F_{n+2}^2 + 2F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + 2F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+2} + F_{n+1})^2 - F_{n+1}^2 = F_{n+3}^2 - F_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Agora, e só agora, podemos concluir que as duas igualdades são válidas para todo o número natural n .

Vejamos como utilizar matrizes, no caso da sucessão de Fibonacci:

Ora, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ e $F_{n+1} = F_{n+1}$, o que nos permite escrever

$$\begin{bmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$$

Suponhamos que estamos a considerar que $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então,

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Agora, teremos $\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E estamos a andar a passo de caracol.

Calculemos $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Então,

$$\begin{bmatrix} F_{n+3} \\ F_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + 2F_{n+1} \\ F_n + F_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_7 \\ F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Deste modo, obtivemos dois termos de cada vez.

E se quisermos calcular F_{50} ? Como $\begin{bmatrix} F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{bmatrix} F_{51} \\ F_{50} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{25} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\,365\,011\,074 \\ 12\,586\,269\,025 \end{bmatrix}$$

Logo, $F_{50} = 12\,586\,269\,025$. Também podíamos ter calculado

$$\begin{bmatrix} F_{49} \\ F_{48} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{24} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7778\,742\,049 \\ 4807\,526\,976 \end{bmatrix}$$

$$F_{50} = 7778\,742\,049 + 4807\,526\,976 = 12\,586\,269\,025$$

Observação

A sucessão de Fibonacci pode ser "prolongada" para \mathbb{Z} : para isso, podemos calcular a inversa da matriz A ou a inversa da matriz A^2 .

Ora, $\det A^2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 1 = 1$.

Então, $A^{-2} = (A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{Partindo de } \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ temos } \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} F_{-1} \\ F_{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{-3} \\ F_{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{-5} \\ F_{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Ou seja, temos a seguinte "lista":

$$\dots, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} F_{-1} = F_1, F_{-3} = F_3, F_{-5} = F_5, \dots \\ F_{-2} = -F_2, F_{-4} = -F_4, F_{-6} = -F_6, \dots \end{cases}$$

Note-se que $0 = F_0 = -F_0$, pelo que podemos concluir que

$$\begin{cases} F_{-2n-1} = F_{2n+1} \\ F_{-2n} = -F_{2n} \end{cases}, \text{ para todo o número inteiro não negativo } n$$

Aliás, as duas igualdades anteriores são válidas para para qualquer inteiro.

Mais adiante, vamos retomar a sucessão de Fibonacci, relacionando-a com a Análise Combinatória.

Exemplo 166 A sucessão de Tribonacci define-se numa maneira semelhante à sucessão de Fibonacci, tendo-se $\begin{cases} T_1 = 1, T_2 = 1, T_3 = 2 \\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \end{cases}$, para todo o número natural n .

Utilizando matrizes, temos

$$\begin{bmatrix} T_{n+3} \\ T_{n+2} \\ T_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \\ T_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Como } \begin{bmatrix} T_3 \\ T_2 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ então } \begin{bmatrix} T_4 \\ T_3 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ donde se conclui que } T_4 = 4.$$

Do ponto de vista prático, é preferível calcular o cubo da matriz anterior

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, podemos calcular três termos de uma só vez:

$$\begin{bmatrix} T_{n+5} \\ T_{n+4} \\ T_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2T_n + 3T_{n+1} + 4T_{n+2} \\ T_n + 2T_{n+1} + 2T_{n+2} \\ T_n + T_{n+1} + T_{n+2} \end{bmatrix}$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} T_6 \\ T_5 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_3 \\ T_2 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} T_9 \\ T_8 \\ T_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_6 \\ T_5 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 44 \\ 24 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Observação

Pode ser mais interessante escrever os termos na matriz por ordem inversa.

$$\text{Assim, teremos } \begin{bmatrix} T_{n+1} \\ T_{n+2} \\ T_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n \\ T_{n+1} \\ T_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{n+1} \\ T_{n+2} \\ T_n + T_{n+1} + T_{n+2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Neste caso, teremos } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ pelo que}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 44 \\ 81 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Desta maneira, os termos aparecem ordenados de forma mais natural.

É claro que podemos considerar sucessões semelhantes a esta, mas com outras condições iniciais.

Por exemplo, podemos partir de $X_1 = X_2 = X_3 = 1$, mantendo $X_{n+3} = X_{n+2} + X_{n+1} + X_n$.

Neste caso, teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 31 \\ 57 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} T_{10} \\ T_{11} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 31 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 193 \\ 355 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Uma sucessão muito semelhante a esta será definida da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 1 \\ X_{n+4} = X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3} \end{array} \right., \text{ para todo o número natural } n$$

Então, matricialmente, temos

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ X_{n+3} \\ X_{n+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ X_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ X_{n+3} \\ X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3} \end{bmatrix}$$

Seja, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Então, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, pelo que virá

$$\begin{bmatrix} X_{n+4} \\ X_{n+5} \\ X_{n+6} \\ X_{n+7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n+1} \\ X_{n+2} \\ X_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3} \\ X_n + 2X_{n+1} + 2X_{n+2} + 2X_{n+3} \\ 2X_n + 3X_{n+1} + 4X_{n+2} + 4X_{n+3} \\ 4X_n + 6X_{n+1} + 7X_{n+2} + 8X_{n+3} \end{bmatrix}$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \\ 25 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \\ X_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 94 \\ 181 \\ 349 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

No caso geral, teremos os primeiros k termos iguais a 1, e a partir desta ordem k , cada termo é a soma dos k termos imediatamente anteriores.

Poderíamos chamar a tal sucessão, sucessão k -bonacci. Se $k = 2$, obtemos a sucessão de Fibonacci. Note-se que, para $k = 3$, **não obtemos** a sucessão de Tribonacci, porque o terceiro termo desta última é 2 e não 1.

Exemplo 167 Consideremos a família de sucessões definidas por $Y_{n+2} = PY_{n+1} - QY_n$, com P, Q números naturais, $Y_0 = 0$ e $Y_1 = 1$.

Assim, se $P = 1$ e $Q = -1$, obtemos a sucessão definida por $Y_{n+2} = Y_{n+1} + Y_n$, ou seja, a sucessão de Fibonacci.

Se $Q = -1$, ficamos com $Y_{n+2} = PY_{n+1} + Y_n$, $Y_0 = 0$ e $Y_1 = 1$.

Para $P = 2$ (e $Q = -1$), temos a sucessão $Y_{n+2} = 2Y_{n+1} + Y_n$, com $Y_0 = 0$ e $Y_1 = 1$.

Esta sucessão é conhecida por sucessão de Pell.

Qualquer sucessão desta grande família aqui referida é uma sucessão de Lucas.

Há dois tipos de sucessão de Lucas:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = 0 \\ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_0 = 2 \\ V_1 = P \\ V_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n \end{array} \right.$$

Vejamos alguns termos de ambas as sucessões, usando outra ordem para os termos:

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ U_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -Q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ PU_{n+1} - QU_n \end{bmatrix}$$

Então, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -Q & P \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -Q & P \\ -PQ & P^2 - Q \end{bmatrix}$, pelo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -Q & P \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & P \\ -PQ & P^2 - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P^2 - Q \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & P \\ -PQ & P^2 - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ P^2 - Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^3 - 2PQ \\ P^4 - 3P^2Q + Q^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & P \\ -PQ & P^2 - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^3 - 2PQ \\ P^4 - 3P^2Q + Q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^5 - 4P^3Q + 3PQ^2 \\ P^6 - 5P^4Q + 6P^2Q^2 - Q^3 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

No caso da sucessão (V_n) , temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -Q & P \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 2 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & P \\ -PQ & P^2 - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^2 - 2Q \\ P^3 - 3PQ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & P \\ -PQ & P^2 - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^2 \\ P^3 - PQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^4 - 4P^2Q + 2Q^2 \\ P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q & P \\ -PQ & P^2 - Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^3 - 2PQ \\ P^4 - 3P^2Q + Q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^6 - 6P^4Q + 9P^2Q^2 - 2Q^3 \\ P^7 - 7P^5Q + 14P^3Q^2 - 7PQ^3 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Capítulo 12

Polinómios numa variável

Definição 168 *Polinómio na indeterminada x é uma expressão do tipo $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com $n \in \mathbb{N}_0$ e $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ elementos dum anel.*

Neste capítulo, vamos considerar, apenas, polinómios numa indeterminada, pelo que escreveremos polinómios em vez de polinómios numa indeterminada (ou variável).

12.1 Divisão inteira de polinómios

Exemplo 169 *Calcule o quociente e o resto, na divisão do polinómio $3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 1$ por $x^2 - 2x + 2$*

Primeira Resolução (Algoritmo da divisão)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrrr}
 3x^5 & -2x^4 & +5x^3 & -7x^2 & +6x & -1 \\
 -3x^5 & +6x^4 & -6x^3 & & & \\
 \hline
 & 4x^4 & -x^3 & -7x^2 & +6x & -1 \\
 & -4x^4 & +8x^3 & -8x^2 & & \\
 \hline
 & & 7x^3 & -15x^2 & +6x & -1 \\
 & & -7x^3 & +14x^2 & -14x & \\
 \hline
 & & & -x^2 & -8x & -1 \\
 & & & x^2 & -2x & +2 \\
 \hline
 & & & & -10x & +1
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{rrr}
 x^2 & -2x & +2 \\
 3x^3 & +4x^2 & +7x & -1
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Quociente: $3x^3 + 4x^2 + 7x - 1$ Resto: $-10x + 1$

Se multiplicarmos o quociente pelo divisor e somarmos com o resto, obtemos o dividendo:

$$(x^2 - 2x + 2)(3x^3 + 4x^2 + 7x - 1) - 10x + 1 = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 1$$

Segunda Resolução (Algoritmo da divisão)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrrr}
 3 & -2 & 5 & -7 & 6 & -1 \\
 -3 & 6 & -6 & & & \\
 \hline
 & 4 & -1 & -7 & 6 & -1 \\
 & -4 & 8 & -8 & & \\
 \hline
 & & 7 & -15 & 6 & -1 \\
 & & -7 & 14 & -14 & \\
 \hline
 & & & -1 & -8 & -1 \\
 & & & 1 & -2 & 2 \\
 \hline
 & & & & -10 & 1
 \end{array}
 & \Bigg| &
 \begin{array}{rrr}
 1 & -2 & 2 \\
 3 & 4 & 7 & -1
 \end{array}
 \end{array}$$

Quociente: $3x^3 + 4x^2 + 7x - 1$ Resto: $-10x + 1$

Terceira Resolução (Método dos coeficientes indeterminados)

Quociente: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ Resto: $ex + f$

Então,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x^2 - 2x + 2) + ex + f \\
 &= 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 1
 \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x^2 - 2x + 2) + ex + f \\
 &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 - 2ax^4 - 2bx^3 - 2cx^2 - 2dx + \\
 &\quad + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d + ex + f \\
 &= ax^5 + (b - 2a)x^4 + (c - 2b + 2a)x^3 + (d - 2c + 2b)x^2 + \\
 &\quad + (e - 2d + 2c)x + 2d + f
 \end{aligned}$$

Logo, devemos ter

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b - 2a = -2 \\ c - 2b + 2a = 5 \\ d - 2c + 2b = -7 \\ e - 2d + 2c = 6 \\ 2d + f = -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -2 + 6 = 4 \\ c = 5 + 8 - 6 = 7 \\ d = -7 + 14 - 8 = -1 \\ e = 6 - 2 - 14 = -10 \\ f = -1 + 2 = 1 \end{array} \right.$$

Quociente: $3x^3 + 4x^2 + 7x - 1$ Resto: $-10x + 1$

Exemplo 170 Calcule o quociente e o resto, na divisão do polinómio $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ por $3x^2 - 2x + 1$.

Resolução (Algoritmo da divisão)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 2x^4 & +3x^3 & -4x^2 & +5x & -6 \\
 -2x^4 & +\frac{4}{3}x^3 & -\frac{2}{3}x^2 & & \\
 \hline
 & \frac{13}{3}x^3 & -\frac{14}{3}x^2 & +5x & -6 \\
 & -\frac{13}{3}x^3 & +\frac{26}{9}x^2 & -\frac{13}{9}x & \\
 \hline
 & & -\frac{16}{9}x^2 & +\frac{32}{9}x & -6 \\
 & & \frac{16}{9}x^2 & -\frac{32}{27}x & +\frac{16}{27} \\
 \hline
 & & & \frac{64}{27}x & -\frac{146}{27}
 \end{array}
 & \Bigg| &
 \begin{array}{rrr}
 3x^2 & -2x & +1 \\
 \frac{2}{3}x^2 & +\frac{13}{9}x & -\frac{16}{27}
 \end{array}
 \end{array}$$

Exemplo 171 Calcule o quociente e o resto, na divisão do polinómio $2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ por $x - 2$.

Primeira Resolução (Algoritmo da divisão)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 2x^4 & +3x^3 & -4x^2 & +5x & -6 \\
 -2x^4 & +4x^3 & & & \\
 \hline
 & 7x^3 & -4x^2 & +5x & -6 \\
 & -7x^3 & +14x^2 & & \\
 \hline
 & & 10x^2 & +5x & -6 \\
 & & -10x^2 & +20x & \\
 \hline
 & & & 25x & -6 \\
 & & & -25x & +50 \\
 \hline
 & & & & 44
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{rrrr}
 x & -2 & & \\
 2x^3 & +7x^2 & +10x & +25
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Quociente: $2x^3 + 7x^2 + 10x + 25$ Resto: 44

Segunda Resolução (Método dos coeficientes indeterminados)

Sejam $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $R = f$.

Então,

$$(x - 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + f = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

Logo,

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 2ax^3 - 2bx^2 - 2cx - 2d + f = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

Então,

$$ax^4 + (b - 2a)x^3 + (c - 2b)x^2 + (d - 2c)x + (f - 2d) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

Logo,

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = 3 \\ c - 2b = -4 \\ d - 2c = 5 \\ f - 2d = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \\ c = 10 \\ d = 25 \\ f = 44 \end{cases}$$

Então, $Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 25$ e $R = 44$.

Observação

Seja $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$. Então,

$$P(2) = 2 \times 2^4 + 3 \times 2^3 - 4 \times 2^2 + 5 \times 2 - 6 = 32 + 24 - 16 + 10 - 6 = 44 = R$$

O facto de termos $P(2) = 44 = R$ não é coincidência e pode ser explicado da seguinte maneira:

Como $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x - 2)Q(x) + R$, temos $P(2) = (2 - 2)Q(2) + R = R$.

Proposição 172 (Teorema do resto)

Na divisão de um polinómio $P(x)$ por $x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, o resto é $P(\alpha)$.

Demonstração

Suponhamos que $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$, onde R é um número real. Então, $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R = R$.

Corolário 173 Um polinómio $P(x)$ é divisível por $x - \alpha$ se e só se $P(\alpha) = 0$.

Demonstração

Este corolário é uma consequência imediata da proposição anterior.

Definição 174 Raiz dum polinómio $P(x)$ é todo o número α tal que $P(\alpha) = 0$.

Definição 175 Dado um polinómio $P(x)$, diz-se que a multiplicidade da raiz α é n , com $n \in \mathbb{N}$, se o polinómio $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)^n$ e não é divisível por $(x - \alpha)^{n+1}$.

Observação

Se α é raiz de multiplicidade n do polinómio $P(x)$, então verifica-se que $P(x) = (x - \alpha)^n Q(x)$, tendo-se que α não é raiz de $Q(x)$, ou seja, $Q(\alpha) \neq 0$.

Exemplo 176 Regra de Ruffini

Como vimos, dividir o polinómio $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ por $x - 2$ é encontrar dois polinómios $Q(x)$ e $R(x)$, tais que $P(x) = (x - 2)Q(x) + R(x)$, com o grau de $R(x)$ inferior a 1, ou seja, $R(x)$ é uma constante e . Além disso, já sabemos que essa constante é $P(2)$.

$$\text{E já vimos que } Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ tendo-se que } \begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = 3 \\ c - 2b = -4 \\ d - 2c = 5 \\ e - 2d = -6 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 + 2a \\ c = -4 + 2b \\ d = 5 + 2c \\ e = -6 + 2d \end{cases}.$$

Os valores de a, b, c, d, e podem ser determinados do seguinte modo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 3 & -4 & 5 & -6 \\ 2 & & 2a & 2b & 2c & 2d \\ \hline & a & b & c & d & e \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & & 2 & & 3 & & -4 & & 5 & & -6 \\ 2 & & & & 4 & & 14 & & 20 & & 50 \\ \hline & a = 2 & b = 3 + 4 & c = -4 + 14 & d = 5 + 20 & e = 44 \end{array}$$

Logo, $Q(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 25$ e $R = 44$.

Exercício 177 Determine o quociente e o resto na divisão inteira de $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 1$ por $x + 3$.

Resolução

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & -3 & 4 & 6 & -1 \\ -3 & & -3 & 9 & -18 & 42 & -144 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -14 & 48 & -145 \end{array}$$

Quociente: $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 14x + 48$

Resto: -145

Exercício 178 Determine o quociente e o resto na divisão inteira de $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 1$ por $2x + 6$.

Resolução

Já vimos que $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 1 = (x + 3)(x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 14x + 48) - 145$.

Então,

$$x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 1 = 2(x + 3) \times \frac{1}{2}(x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 14x + 48) - 145$$

Logo, na divisão inteira de $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 1$ o quociente é $\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - 7x + 24$ e o resto continua a ser -145 .

Note-se que, na divisão inteira de polinômios, os coeficientes dos polinômios envolvidos são números reais (não têm que ser números inteiros).

Teorema 179 (Regra de Ruffini) *Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$. Seja $\beta \in \mathbb{R}$. Então, na divisão inteira de $P(x)$ por $x - \beta$, o quociente é dado por $Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ e o resto por $R = \beta b_0 + a_0$, com $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = \beta b_{n-1} + a_{n-1}$, $b_{n-3} = \beta b_{n-2} + a_{n-2}, \dots$, $b_0 = \beta b_1 + a_1$.*

Demonstração

O quociente é um polinômio de grau $n - 1$, pelo que será $Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$. Seja R o resto.

Então, $P(x) = Q(x) + R$, donde vem

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= (x - \beta)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0) + R \\ &= b_{n-1} x^n + b_{n-2} x^{n-1} + \dots + b_1 x^2 + b_0 x - \beta b_{n-1} x^{n-1} - \beta b_{n-2} x^{n-2} - \dots \\ &\quad \dots - \beta b_1 x - \beta b_0 + R \\ &= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - \beta b_{n-1}) x^{n-1} + (b_{n-3} - \beta b_{n-2}) x^{n-2} + \dots \\ &\quad \dots + (b_0 - \beta b_1) x + R - \beta b_0 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} - \beta b_{n-1} = a_{n-1} \\ b_{n-3} - \beta b_{n-2} = a_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 - \beta b_1 = a_1 \\ R - \beta b_0 = a_0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = \beta b_{n-1} + a_{n-1} \\ b_{n-3} = \beta b_{n-2} + a_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 = \beta b_1 + a_1 \\ R = \beta b_0 + a_0 \end{cases}$$

Exercício 180 *Seja $P_a(x) = ax^2 - 7x + 6$, com $a \in \mathbb{R}$. Determine a , de modo que $P_a(x)$ seja divisível por $x - a$. Para os valores de a encontrados, estude o sinal de $P_a(x)$.*

Resolução

Devemos ter $P_a(a) = 0$, pelo que vem $a^3 - 7a + 6 = 0$.

É fácil verificar que 1 é solução da equação $a^3 - 7a + 6 = 0$.

Aplicando a regra de Ruffini, vem

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a^3 - 7a + 6 = 0 &\iff (a-1)(a^2 + a - 6) = 0 \iff a-1 = 0 \vee a^2 + a - 6 = 0 \\ &\iff a = 1 \vee a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \iff a = 1 \vee a = -3 \vee a = 2 \end{aligned}$$

Estudo do sinal:

$$P_1(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$$

x	$-\infty$	1		6	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+	+
$x-6$	-	-	-	0	+
$(x-1)(x-6)$	+	0	-	0	+

$$P_2(x) = 2x^2 - 7x + 6 = (x-2)(2x-3)$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+
$2x-3$	-	0	+	+	+
$(x-2)(2x-3)$	+	0	-	0	+

$$P_{-3}(x) = -3x^2 - 7x + 6 = (x+3)(-3x+2)$$

x	$-\infty$	-3		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+	+
$-3x+2$	+	+	+	0	-
$(x+3)(-3x+2)$	-	0	+	0	-

Exemplo 181 Determine um polinómio de 2º grau que admite as raízes 2 e 3.

Resolução

$$\begin{aligned} x = 2 \vee x = 3 &\iff x-2 = 0 \vee x-3 = 0 \iff (x-2)(x-3) = 0 \\ &\iff x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \end{aligned}$$

Logo, uma possível resposta é $P(x) = x^2 - 5x + 6$.

A resposta genérica é $P_a(x) = a(x^2 - 5x + 6)$, com $a \neq 0$.

Convém reparar que $2+3=5$ e que $2 \times 3 = 6$.

Exemplo 182 Determine um polinómio de 2º grau que admite as raízes α e β .

Resolução

$$\begin{aligned} x = \alpha \vee x = \beta &\iff x - \alpha = 0 \vee x - \beta = 0 \iff (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \\ &\iff x^2 - \beta x - \alpha x + \alpha\beta = 0 \iff x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \end{aligned}$$

Logo, uma possível resposta é $P(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$.

A resposta genérica é $P_k(x) = k(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)$, com $k \neq 0$.

Exemplo 183 Determine um polinómio de 3º grau que admite as raízes 1, 2 e 3.

Resolução

$$\begin{aligned}
 x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3 &\iff x - 1 = 0 \vee x - 2 = 0 \vee x - 3 = 0 \\
 &\iff (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \\
 &\iff (x - 1)(x^2 - 3x - 2x + 6) = 0 \\
 &\iff (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \\
 &\iff x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6 = 0 \\
 &\iff x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0
 \end{aligned}$$

Logo, uma possível resposta é $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

A resposta genérica é $P_a(x) = a(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$, com $a \neq 0$.

Exemplo 184 Determine um polinómio de 3º grau que admite as raízes α , β e γ .

Resolução

$$\begin{aligned}
 x = \alpha \vee x = \beta \vee x = \gamma &\iff x - \alpha = 0 \vee x - \beta = 0 \vee x - \gamma = 0 \\
 &\iff (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0 \\
 &\iff (x - \alpha)(x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma) = 0 \\
 &\iff x^3 - (\beta + \gamma)x^2 + \beta\gamma x - \alpha x^2 + \alpha(\beta + \gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0 \\
 &\iff x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma = 0
 \end{aligned}$$

Logo, uma possível resposta é

$$P(x) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

A resposta genérica é

$$P_k(x) = k(x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma), \text{ com } k \neq 0$$

Exemplo 185 Determine um polinómio de 4º grau que admite as raízes x_1 , x_2 , x_3 e x_4 .

Uma resposta

$$P(x) = x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4,$$

com

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \\ S_4 = x_1x_2x_3x_4 \end{cases}$$

Exemplo 186 Determine o polinómio de 4º grau que admite as raízes 1, 2, 3 e 4 e que dividido por $x + 2$ dá resto 3.

Resolução

Devemos ter $P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ e $P(-2) = 3$. Então,

$$a(-2-1)(-2-2)(-2-3)(-2-4) = 3 \iff 360a = 3 \iff a = \frac{1}{120}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \frac{1}{120}(x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) \\ &= \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{7}{24}x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

12.2 Funções polinomiais

Todo o polinómio define uma função polinomial de domínio \mathbb{R} (domínio que pode ser restringido).

Em determinadas circunstâncias (que ultrapassam o que pretendemos), polinómios diferentes podem definir a mesma função. Note-se que no conjunto $A = \{0, 1\}$, os polinómios (com um só termo) x, x^2, x^3, \dots , definem a mesma função polinomial, embora sejam polinómios distintos.

Mas, se considerarmos polinómios de coeficientes reais (numa indeterminada), polinómios diferentes definem funções polinomiais diferentes (de domínio \mathbb{R}).

12.2.1 Função afim

Função afim é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplo 187 $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Esta é uma função constante em \mathbb{R} , sendo, por isso, uma função não injectiva. O contradomínio é $\{1\}$.

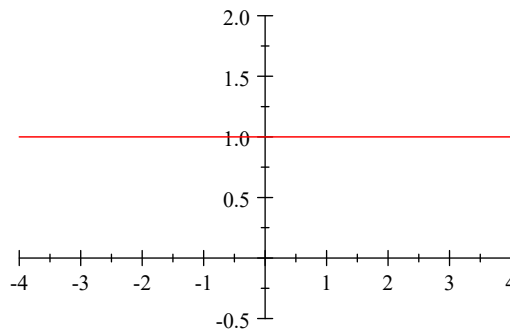
A função é positiva em todo o domínio, tendo-se que o máximo da função e o mínimo da função são iguais a 1.

Qualquer número real é, simultaneamente, maximizante e minimizante da função.

A função é crescente em sentido lato e decrescente em sentido lato.

É claro que a função não tem zeros.

Representação gráfica:



Note-se que a função não é injectiva, nem admite função inversa.

Contradomínio de f : $\{1\}$

Exemplo 188 $f(x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$

Esta é uma função constante em \mathbb{R} , sendo, por isso, uma função não injectiva. O contradomínio é $\{-1\}$.

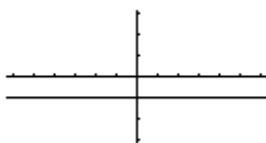
A função é negativa em todo o domínio, tendo-se que o máximo da função e o mínimo da função são iguais a -1 .

Qualquer número real é, simultaneamente, maximizante e minimizante da função.

A função é crescente em sentido lato e decrescente em sentido lato.

É claro que a função não tem zeros.

Representação gráfica:



A função não é injectiva, nem admite função inversa.

Contradomínio de f : $\{-1\}$

Exemplo 189 $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Esta é uma função constante em \mathbb{R} , sendo, por isso, uma função não injectiva. O contradomínio é $\{0\}$.

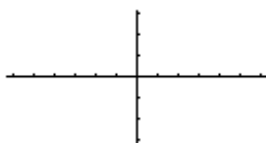
A função é negativa em todo o domínio, tendo-se que o máximo da função e o mínimo da função são iguais a 0.

Qualquer número real é, simultaneamente, maximizante e minimizante da função.

A função é crescente em sentido lato e decrescente em sentido lato.

É claro que a função tem uma infinidade de zeros.

Representação gráfica:



Neste caso, o gráfico coincide com o eixo das abcissas.

A função não é injectiva, nem admite função inversa.

Contradomínio de f : $\{0\}$

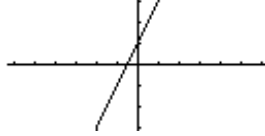
Exemplo 190 $f(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Zero da função: $f(x) = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$

Sinal da função: $\begin{cases} f(x) < 0 \iff 2x + 1 < 0 \iff 2x < -1 \iff x < -\frac{1}{2} \\ f(x) > 0 \iff 2x + 1 > 0 \iff 2x > -1 \iff x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$

Representação gráfica:



Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff 2x + 1 = y \iff 2x = y - 1 \iff x = \frac{y - 1}{2}$$

Logo, existe função inversa de f , tendo-se que $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Então, a função f é injectiva (apenas as funções injectivas admitem função inversa), tendo-se que o contradomínio de f é \mathbb{R} .

Note-se que

$$\begin{cases} f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2 \times \frac{x-1}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x \\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 1) = \frac{2x+1-1}{2} = \frac{2x}{2} = x \end{cases}$$

Por fim, registre-se que podemos provar diretamente a injectividade:

$$f(a) = f(b) \implies 2a + 1 = 2b + 1 \implies 2a = 2b \implies a = b$$

Logo, f é injectiva.

Exemplo 191 $f(x) = -2x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$

Zero da função:

$$f(x) = 0 \iff -2x + 3 = 0 \iff -2x = -3 \iff x = \frac{3}{2}$$

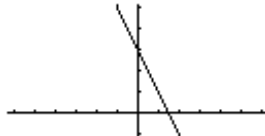
Sinal da função:

$$\begin{cases} f(x) < 0 \iff -2x + 3 < 0 \iff -2x < -3 \iff 2x > 3 \iff x > \frac{3}{2} \\ f(x) > 0 \iff -2x + 3 > 0 \iff -2x > -3 \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Em resumo:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x + 3$	$+$	0	$-$

Representação gráfica:



Contradomínio de f : \mathbb{R}

Resumo

Seja $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O gráfico de f é uma reta de declive a e ordenada na origem b .

Se $a = 0$, a função é constante; se $a > 0$, a função tem um único zero e é estritamente crescente; se $a < 0$, a função tem um único zero e é estritamente decrescente.

Exemplo 192 *Sabe-se que a zero graus Celsius correspondem 32 graus Fahrenheit e que 100 graus Celsius correspondem 212 graus Fahrenheit. Determine a relação existente entre a mesma temperatura expressa em graus Celsius (C) e em graus Fahrenheit (F).*

Resolução

A uma variação de 180°F corresponde uma variação de 100°C . Então, a uma temperatura C (acima de zero graus Celsius) corresponde uma temperatura x acima de 32°F . Então, $F = 32 + x$, tendo-se $\frac{180}{100} = \frac{x}{C}$.

Logo, $x = \frac{180}{100}C = \frac{9}{5}C$, pelo que $F = 32 + \frac{9}{5}C$.

Se pretendermos resolver a equação em ordem a C , temos $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Obtivemos, assim, duas funções afins. Podemos ser levados a pensar que o domínio das duas funções é \mathbb{R} , mas isso não corresponde à realidade.

Suponhamos que pretendemos calcular a temperatura, em graus Fahrenheit, correspondente a -300°C .

A primeira reacção é escrever $F = 32 + \frac{9}{5}(-300) = -508$.

Logo, a -300°C corresponde -508°F . Só que há um problema: fisicamente, não existe a temperatura de -300°C , devido à existência do chamado zero absoluto da Temperatura (aproximadamente, -273°C).

Logo, o domínio da função $F(C) = 32 + \frac{9}{5}C$ é $[-273, +\infty[$, embora se levante outra questão: não haverá um majorante para a temperatura?

Já agora, qual a temperatura em graus Fahrenheit, correspondente ao zero absoluto?

$$F(-273) = 32 + \frac{9}{5}(-273) = -\frac{2297}{5} = -459,4$$

Então, o zero absoluto é, aproximadamente, $-459,4^\circ\text{F}$.

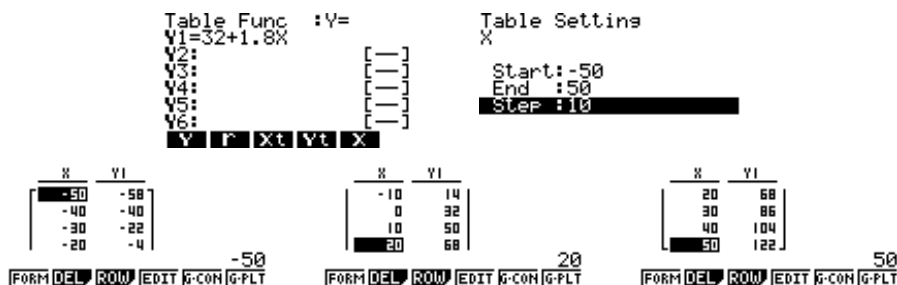
Finalizamos com uma outra escala de temperaturas: o zero absoluto corresponde a 0°K (zero graus Kelvin) e zero graus Celsius corresponde a 273°K .

$$\text{Então, } K = C + 273, \text{ pelo que } F = 32 + \frac{9}{5}C = 32 + \frac{9}{5}(K - 273) = \frac{9}{5}K - \frac{2297}{5}.$$

$$\text{Então, } 5F = 9K - 2297, \text{ pelo que } K = \frac{2297 + 5F}{9}.$$

Note-se que $C \geq -273$, $K \geq 0$ e $F \geq -459,4$.

Exemplos de temperaturas em graus Celsius e graus Fahrenheit:



12.2.2 Função quadrática

Função quadrática é uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplo 193 $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} . Neste caso, temos $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é uma função par.

Logo, f não é injectiva. Então, não existe função inversa de f .

Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff x^2 = y \iff x = \pm\sqrt{y}$$

É claro que devemos ter $y \geq 0$. Logo, o contradomínio de f é $[0, +\infty[$.

Zeros de $f(x)$:

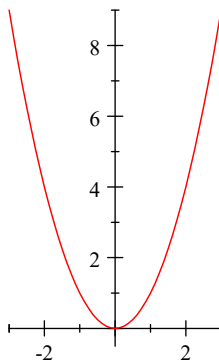
$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

Logo, f admite um único zero.

Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$

Representação gráfica de $f(x)$:



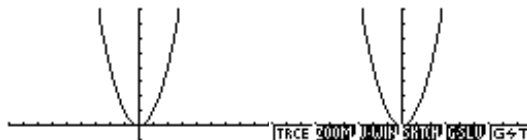
O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

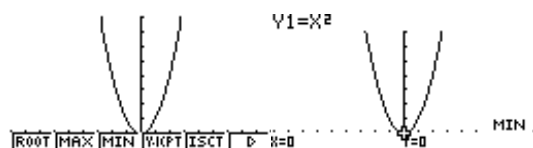
A função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

Então, no ponto $x = 0$, f admite um mínimo (mínimo absoluto). O mínimo da função é 0.

O ponto $(0, 0)$ é o vértice da parábola e a reta de equação $x = 0$ é o eixo de simetria da parábola.

Com a Calculadora gráfica:





Exemplo 194 $f(x) = -x^2$

O domínio da função é \mathbb{R} . Neste caso, temos $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é uma função par.

Logo, f não é injectiva. Então, não existe função inversa de f .

Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff -x^2 = y \iff x = \pm\sqrt{-y}$$

É claro que devemos ter $y \leq 0$. Logo, o contradomínio de f é $]-\infty, 0]$.

Zeros de $f(x)$:

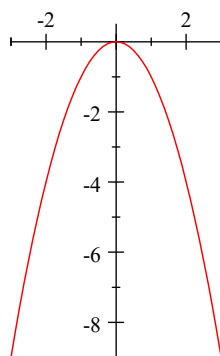
$$f(x) = 0 \iff -x^2 = 0 \iff x = 0$$

Logo, f admite um único zero.

Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x^2$	$-$	0	$-$

Representação gráfica de $f(x)$:



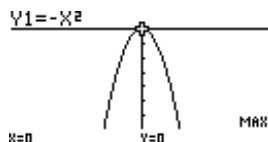
O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

A função é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.

Então, no ponto $x = 0$, f admite um máximo (máximo absoluto). O máximo da função é 0.

O ponto $(0, 0)$ é o vértice da parábola e a reta de equação $x = 0$ é o eixo de simetria da parábola.

Com a Calculadora gráfica:



Exemplo 195 $f(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} . Neste caso, temos $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é uma função par.

Logo, f não é injectiva. Então, não existe função inversa de f .

Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff x^2 + 1 = y \iff x^2 = y - 1 \iff x = \pm\sqrt{y - 1}$$

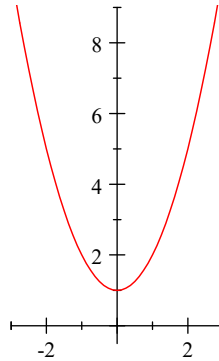
É claro que devemos ter $y \geq 1$. Logo, o contradomínio de f é $[1, +\infty[$.

A função $f(x)$ não admite zeros, porque zero não pertence ao contradomínio de f .

Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2	+ + +	

Representação gráfica da função:

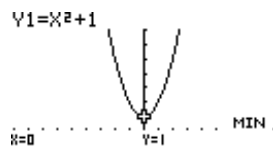


O gráfico desta função resulta duma translação do gráfico da função $g(x) = x^2$ (translação associada ao vector $(0, 1)$).

A função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

Então, no ponto $x = 0$, f admite um mínimo (mínimo absoluto). O mínimo da função é 1.

O ponto $(0, 1)$ é o vértice da parábola e a reta de equação $x = 0$ é o eixo de simetria da parábola.



Exemplo 196 $f(x) = x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} . Neste caso, temos $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é uma função par.

Logo, f não é injectiva. Então, não existe função inversa de f .

Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff x^2 - 1 = y \iff x^2 = y + 1 \iff x = \pm\sqrt{y+1}$$

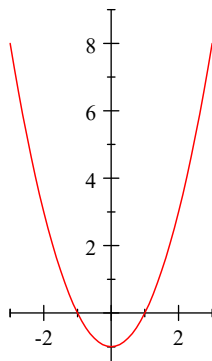
É claro que devemos ter $y \geq -1$. Logo, o contradomínio de f é $[-1, +\infty[$.

Zeros de $f(x)$:

$$f(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{0+1} \iff x = \pm 1$$

Logo, f admite dois zeros.

Representação gráfica da função:



O gráfico desta função resulta duma translação do gráfico da função $g(x) = x^2$ (translação associada ao vector $(0, -1)$).

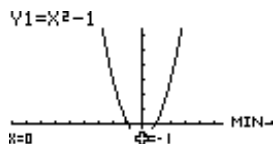
Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

A função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

Então, no ponto $x = 0$, f admite um mínimo (mínimo absoluto). O mínimo da função é -1 .

O ponto $(0, -1)$ é o vértice da parábola e a reta de equação $x = 0$ é o eixo de simetria da parábola.



Exemplo 197 $f(x) = x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Neste caso, temos $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f não é uma função par nem ímpar.

Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff x^2 + 2x - y = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2} \iff x = -1 \pm \sqrt{1 + y}$$

Como não existe função inversa, a função f não é injectiva.

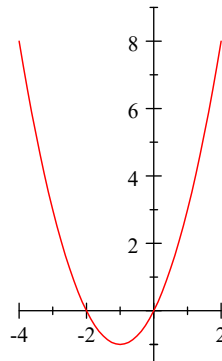
É claro que devemos ter $y \geq -1$. Logo, o contradomínio de f é $[-1, +\infty[$.

Para encontrar os zeros de $f(x)$, basta, na expressão que define a correspondência inversa, substituir y por zero.

$$f(x) = 0 \iff x = -1 \pm 1 \iff x = -2 \vee x = 0$$

Logo, f admite dois zeros.

Representação gráfica de $f(x)$:



Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

A função é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente crescente em $[-1, +\infty[$.

Então, no ponto $x = -1$, f admite um mínimo (mínimo absoluto). O mínimo da função é -1 .

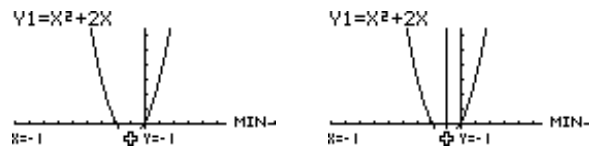
O ponto $(-1, -1)$ é o vértice da parábola e a reta de equação $x = -1$ é o eixo de simetria da parábola.

Vejamos, diretamente, que a reta de equação $x = -1$ é eixo de simetria:

$$f(-1 + h) = (-1 + h)^2 + 2(-1 + h) = 1 - 2h + h^2 - 2 + 2h = h^2 - 1$$

$$f(-1 - h) = (-1 - h)^2 + 2(-1 - h) = 1 + 2h + h^2 - 2 - 2h = h^2 - 1$$

Logo, $f(-1 + h) = f(-1 - h)$, $\forall h \in \mathbb{R}$. Então, a reta de equação $x = -1$ é eixo de simetria do gráfico da função.



Exemplo 198 $f(x) = -x^2 + 3x, \forall x \in \mathbb{R}$

Como $f(-x) = -(-x)^2 + 3(-x) = -x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$, a função não é par nem ímpar.
Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff -x^2 + 3x - y = 0 \iff x^2 - 3x + y = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4y}}{2}$$

Como não existe função inversa, a função f não é injectiva.

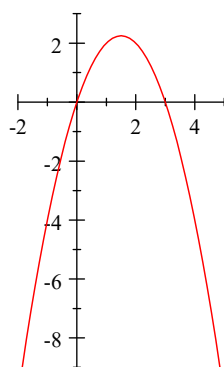
É claro que devemos ter $9 - 4y \geq 0$. Então, $y \leq \frac{9}{4}$. Logo, o contradomínio de f é $]-\infty, \frac{9}{4}]$.

Zeros de $f(x)$:

$$f(x) = 0 \iff -x^2 + 3x = 0 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x - 3) = 0 \iff x = 0 \vee x = 3$$

Logo, f admite dois zeros.

Representação gráfica de $f(x)$:



Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$-x^2 + 3x$	$-$	0	$+$	0	$-$

Note-se que

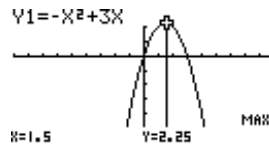
$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= -x^2 + 3x - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} \\ &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Então, o gráfico de f é obtido do gráfico da função $h(x) = -x^2$, deslocando-o $\frac{3}{2}$ para a direita e $\frac{9}{4}$ para cima.

A função é estritamente crescente em $]-\infty, \frac{3}{2}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Então, no ponto $x = \frac{3}{2}$, f admite um máximo (máximo absoluto). O máximo da função é $\frac{9}{4}$.

O ponto $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ é o vértice da parábola e a reta de equação $x = \frac{3}{2}$ é o eixo de simetria da parábola.



Exemplo 199 $f(x) = x^2 + 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$

Como $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 3 = x^2 - 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$, a função não é par nem ímpar.
Correspondência inversa:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x^2 + 2x - 3 = y \iff x^2 + 2x - 3 - y = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-3 - y)}}{2} \\ &\iff x = -1 \pm \sqrt{1 + 3 + y} \iff x = -1 - \sqrt{1 + 3 + y} \vee x = -1 + \sqrt{1 + 3 + y} \end{aligned}$$

Como não existe função inversa, a função f não é injectiva.

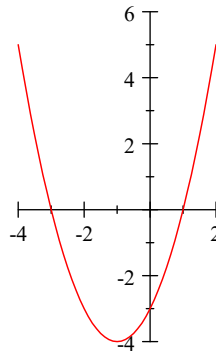
É claro que devemos ter $y + 4 \geq 0$. Então, $y \geq -4$. Logo, o contradomínio de f é $[-4, +\infty[$.

Zeros de $f(x)$:

$$f(x) = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1 + 3 + 0} \iff x = -1 - 2 \vee x = -1 + 2 \iff x = -3 \vee x = 1$$

Logo, f admite dois zeros.

Representação gráfica de $f(x)$:



Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

A função é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente crescente em $[-1, +\infty[$.

Então, no ponto $x = -1$, f admite um mínimo (mínimo absoluto). O mínimo da função é -4 .

O ponto $(-1, -4)$ é o vértice da parábola e a reta de equação $x = -1$ é o eixo de simetria da parábola.

Vejamos, diretamente, que a reta de equação $x = -1$ é eixo de simetria:

$$\begin{aligned} f(-1+h) &= (-1+h)^2 + 2(-1+h) - 3 = 1 - 2h + h^2 - 2 + 2h - 3 = h^2 - 4 \\ f(-1-h) &= (-1-h)^2 + 2(-1-h) - 3 = 1 + 2h + h^2 - 2 - 2h - 3 = h^2 - 4 \end{aligned}$$

Logo, $f(-1+h) = f(-1-h)$, $\forall h \in \mathbb{R}$. Então, a reta de equação $x = -1$ é eixo de simetria do gráfico da função.

Exemplo 200 $f(x) = -x^2 + 3x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Como $f(-x) = -(-x)^2 + 3(-x) + 2 = -x^2 - 3x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a função não é par nem ímpar. Correspondência inversa:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff -x^2 + 3x + 2 = y \iff x^2 - 3x - 2 + y = 0 \\ &\iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-2 + y)}}{2} \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{17 - 4y}}{2} \\ &\iff x = \frac{3 - \sqrt{17 - 4y}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{17 - 4y}}{2} \end{aligned}$$

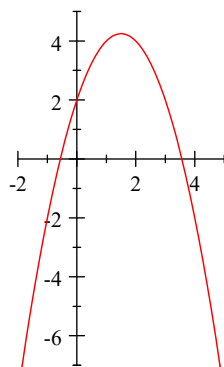
Como não existe função inversa, a função f não é injectiva.

É claro que devemos ter $17 - 4y \geq 0$. Então, $y \leq \frac{17}{4}$. Logo, o contradomínio de f é $]-\infty, \frac{17}{4}]$. Zeros de $f(x)$:

$$f(x) = 0 \iff x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

Logo, f admite dois zeros.

Representação gráfica de $f(x)$:



Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$-x^2 + 3x + 2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Note-se que

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x + 2 &= -x^2 + 3x - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 2 = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{17}{4} \\ &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}, (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Então, o gráfico de f é obtido do gráfico da função $h(x) = -x^2$, deslocando-o $\frac{3}{2}$ para a direita e $\frac{17}{4}$ para cima.

A função é estritamente crescente em $]-\infty, \frac{3}{2}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Então, no ponto $x = \frac{3}{2}$, f admite um máximo (máximo absoluto). O máximo da função é $\frac{17}{4}$.

O ponto $(\frac{3}{2}, \frac{17}{4})$ é o vértice da parábola e a reta de equação $x = \frac{3}{2}$ é o eixo de simetria da parábola.

Exemplo 201 $f(x) = 3x^2 + 4x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio de f é \mathbb{R} . O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

Vértice da parábola:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{4}{6}, -\frac{16-12}{12}\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Eixo de simetria: $x = -\frac{2}{3}$ Contradomínio: $[-\frac{1}{3}, +\infty[$

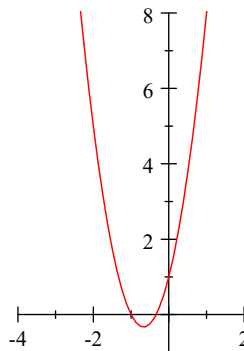
Zeros de f :

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} \iff x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}$$

Sinal de f :

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x^2 + 4x + 1$	+	0	-	0	+

Representação gráfica de $f(x)$:



Exemplo 202 $f(x) = -3x^2 + 4x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio de f é \mathbb{R} . O gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.
Vértice da parábola:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{4}{-6}, -\frac{16-12}{-12}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Eixo de simetria: $x = \frac{2}{3}$ Contradomínio: $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

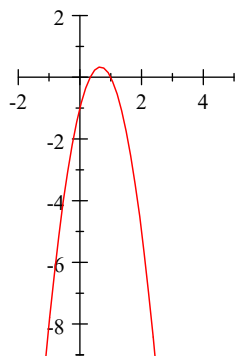
Zeros de f :

$$-3x^2 + 4x - 1 = 0 \iff 3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} \iff x = \frac{1}{3} \vee x = 1$$

Sinal de f :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$-3x^2 + 4x - 1$	$-$	0	$+$	0	$-$

Representação gráfica de $f(x)$:



Exemplo 203 $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

É claro que $f(0) = c$. Resolva-se a equação $f(x) = c$.

$$\begin{aligned} f(x) = c &\iff ax^2 + bx + c = c \iff ax^2 + bx = 0 \iff x(ax + b) = 0 \\ &\iff x = 0 \vee ax + b = 0 \iff x = 0 \vee x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Vejamos que a reta de equação $x = -\frac{b}{2a}$ é eixo de simetria do gráfico de f .

Ora,

$$\begin{aligned}
 f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) &= a\left(-\frac{b}{2a} + h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + h\right) + c \\
 &= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{bh}{a} + h\right) - \frac{b^2}{2a} + bh + c \\
 &= \frac{b^2}{4a} - bh + ah - \frac{b^2}{2a} + bh + c = -\frac{b^2}{4a} + ah + c \\
 f\left(-\frac{b}{2a} - h\right) &= a\left(-\frac{b}{2a} - h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} - h\right) + c \\
 &= a\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{bh}{a} + h\right) - \frac{b^2}{2a} - bh + c \\
 &= \frac{b^2}{4a} + bh + ah - \frac{b^2}{2a} - bh + c = -\frac{b^2}{4a} + ah + c
 \end{aligned}$$

Então, $f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - h\right)$, $\forall h \in \mathbb{R}$, pelo que a reta de equação $x = -\frac{b}{2a}$ é eixo de simetria do gráfico de f .

Para obter o vértice da parábola, basta fazer $h = 0$:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Vértice: $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Outra maneira de descobrir o vértice:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
 \end{aligned}$$

O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ obtém-se do gráfico da função $g(x) = ax^2$, por meio da translação associada ao vector $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Então, para $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima e, para $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Ainda outra maneira de descobrir o vértice:

Consideremos a função $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + h)^2 + k$, cujo gráfico é uma parábola de vértice $(-h, k)$.

Ora,

$$a(x + h)^2 + k = a(x^2 + 2hx + h^2) + k = ax^2 + 2ahx + ah^2 + k$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2ah = b \\ ah^2 + k = c \end{cases} &\iff \begin{cases} h = \frac{b}{2a} \\ a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + k = c \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} h = \frac{b}{2a} \\ a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + k = c \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} h = \frac{b}{2a} \\ k = c - \frac{b^2}{4a} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} h = \frac{b}{2a} \\ k = \frac{4ac - b^2}{4a} \end{cases} \iff \begin{cases} h = \frac{b}{2a} \\ k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Logo, o vértice da parábola é $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exercício 204 Considere a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x - 1$. Determine:

- A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa 2.
- A equação reduzida da reta que é tangente ao gráfico de f e é perpendicular à tangente da alínea anterior.

Resolução

- A reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa 2, é uma reta não vertical que intersecta a parábola (gráfico de f) num único ponto, neste caso, o ponto $(2, f(2))$. Ora, $f(2) = 4 - 12 - 1 = -9$.

Equação da reta de declive m que passa por $(2, -9)$:

$$y + 9 = m(x - 2) \iff y = mx - 2m - 9$$

Então, a equação $x^2 - 6x - 1 = mx - 2m - 9$ deve ter uma única solução. Ora,

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x - 1 = mx - 2m - 9 &\iff x^2 - 6x - 1 - mx + 2m + 9 = 0 \\
 &\iff x^2 - (m + 6)x + 2m + 8 = 0
 \end{aligned}$$

Então, $\Delta = (m + 6)^2 - 4(2m + 8) = 0$.

$$\begin{aligned}
 (m + 6)^2 - 4(2m + 8) = 0 &\iff m^2 + 12m + 36 - 8m - 32 = 0 \\
 &\iff m^2 + 4m + 4 = 0 \iff (m + 2)^2 = 0 \\
 &\iff m = -2
 \end{aligned}$$

Então, a reta tangente à parábola é definida por $y = -2x + 4 - 9$, ou seja, $y = -2x - 5$.

- A reta pretendida tem declive $\frac{1}{2}$, pelo que teremos $y = \frac{1}{2}x + b$. Então,

$$x^2 - 6x - 1 = \frac{1}{2}x + b \iff 2x^2 - 12x - x - 2 - 2b = 0 \iff 2x^2 - 13x - 2 - 2b = 0$$

Ora, $\Delta = 169 - 8(-2 - 2b) = 185 + 16b$. Então, devemos ter $\Delta = 0$, pelo que $b = -\frac{185}{16}$.

Logo, a equação pretendida é $y = \frac{1}{2}x - \frac{185}{16}$.

Resolução alternativa

Há uma propriedade característica da parábola que permite resolver esta questão: dada uma parábola de eixo vertical e uma reta que intersecte a parábola em dois pontos distintos A e B , a reta tangente à parábola e que é paralela à reta AB intersecta a parábola num ponto (o ponto de tangência) cuja abcissa é metade da soma das abcissas de A e B .

a) Ora, $f(2) = 4 - 12 - 1 = -9$, $f(1) = 1 - 6 - 1 = -6$ e $f(3) = 9 - 18 - 1 = -10$.

Então, o declive da tangente pretendida é dado por $m = \frac{-10+6}{3-1} = -2$. Logo, a reta tangente que pretendemos é definida por $y + 9 = -2(x - 2)$, donde vem $y = -2x - 5$.

b) As retas perpendiculares à reta definida por $y = -2x - 5$ têm declive $\frac{1}{2}$.

Consideremos um ponto da parábola, por exemplo, $A = (2, -9)$. Consideremos a reta de declive $\frac{1}{2}$ que passa por A e determinemos os pontos de intersecção dessa reta com a parábola:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y + 9 = \frac{1}{2}(x - 2) \\ y = x^2 - 6x - 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 10 \\ y = x^2 - 6x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 10 \\ x^2 - 6x - 1 = \frac{1}{2}x - 10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 10 \\ 2x^2 - 13x + 18 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 10 \\ x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{4} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 10 \\ x = \frac{13 \pm 5}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -9 \\ x = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{31}{4} \\ x = \frac{9}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, a abcissa do ponto de tangência é $\frac{2+\frac{9}{2}}{2}$, ou seja, $\frac{13}{4}$. Ora, $f\left(\frac{13}{4}\right) = \left(\frac{13}{4}\right)^2 - 6 \times \frac{13}{4} - 1 = -\frac{159}{16}$.

Então, a equação pretendida é

$$y + \frac{159}{16} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{13}{4}\right) \iff y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{8} - \frac{159}{16} \iff y = \frac{1}{2}x - \frac{185}{16}$$

Observação

A demonstração da propriedade acima referida pode ser feita recorrendo a derivadas (o que ultrapassa o âmbito deste Capítulo).

Vejamos uma interpretação intuitiva dessa propriedade.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Consideremos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$. Seja h um número real tal que $0 < h < \frac{x_2 - x_1}{2}$.

Sejam $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$. Declive da reta P_1P_2 :

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 - ax_1^2 - bx_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a(x_2 + x_1) + b \end{aligned}$$

Consideremos os pontos da parábola $Q_1 = (x_1 + h, f(x_1 + h))$ e $Q_2 = (x_2 - h, f(x_2 - h))$.

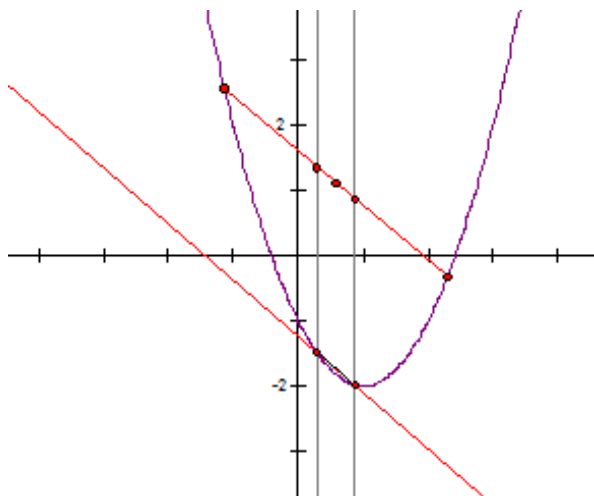
Ora,

$$\begin{cases} f(x_1 + h) = a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c = ax_1^2 + 2ax_1h + ah^2 + bx_1 + bh + c \\ f(x_2 - h) = a(x_2 - h)^2 + b(x_2 - h) + c = ax_2^2 - 2ax_2h + ah^2 + bx_2 - bh + c \end{cases}$$

Declive da reta Q_1Q_2 :

$$\begin{aligned} m' &= \frac{f(x_2 - h) - f(x_1 + h)}{x_2 - h - x_1 - h} = \frac{f(x_2 - h) - f(x_1 + h)}{x_2 - x_1 - 2h} \\ &= \frac{ax_2^2 - 2ax_2h + ah^2 + bx_2 - bh + c - ax_1^2 - 2ax_1h - ah^2 - bx_1 - bh - c}{x_2 - x_1 - 2h} \\ &= \frac{ax_2^2 - ax_1^2 - 2ax_1h - 2ax_2h - bx_1 + bx_2 - 2bh}{x_2 - x_1 - 2h} \\ &= \frac{ax_2^2 - ax_1^2 - 2ax_1h - 2ax_2h}{x_2 - x_1 - 2h} + \frac{bx_2 - bx_1 - 2bh}{x_2 - x_1 - 2h} \\ &= \frac{a(x_2^2 - x_1^2) - 2ah(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1 - 2h} + b \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2ah(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1 - 2h} + b \\ &= \frac{(x_2 + x_1)(ax_2 - ax_1 - 2ah)}{x_2 - x_1 - 2h} + b = a(x_2 + x_1) + b = m \end{aligned}$$

Logo, as retas P_1P_2 e Q_1Q_2 são paralelas. Quando h está muito próximo de $\frac{x_2 - x_1}{2}$, a reta Q_1Q_2 fica muito próxima da tangente à parábola no ponto de abscissa $\frac{x_2 + x_1}{2}$.



12.2.3 Função cúbica

Exemplo 205 $f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff x^3 = y \iff x = \sqrt[3]{y}$$

O último passo da equação anterior não é inteiramente óbvio, pois, de forma implícita, partimos do princípio que a função f é injectiva.

Provemos a injectividade da função f , começando por notar que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, como se pode verificar, efectuando os cálculos ou aplicando a regra de Ruffini.

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies a^3 = b^3 \implies a^3 - b^3 = 0 \implies (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ &\implies a = b \vee a^2 + ab + b^2 = 0 \implies a = b \vee a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2}}{2} \\ &\implies a = b \vee a = \frac{-b \pm \sqrt{-3b^2}}{2} \implies a = b \vee a = b = 0 \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Logo, a função f é injectiva, pelo que $x^3 = y$ é equivalente a $x = \sqrt[3]{y}$.

Logo, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}, \forall x \in \mathbb{R}$. O contradomínio de f é \mathbb{R} .

Outra maneira de provar a injectividade:

Suponhamos que $x \geq 0$ e que $h > 0$. Então,

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 > x^3 = f(x)$$

Logo, $f(x+h) > f(x)$, pelo que f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

Ora, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é uma função ímpar.

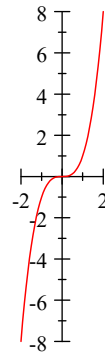
Logo, se f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$, então f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$.

Então, f é estritamente crescente em \mathbb{R} .

Sinal de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$

Representação gráfica de f :



Graficamente, podemos verificar que f é estritamente crescente e que tem um zero.

Exemplo 206 $f(x) = x^3 - x, \forall x \in \mathbb{R}$

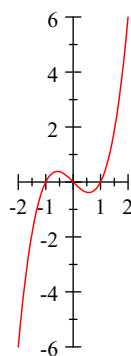
O domínio da função é \mathbb{R} . Não é nada fácil resolver a equação $x^3 - x = y$, em ordem a x , pelo que é complicado definir explicitamente a correspondência inversa de f .

Zeros da função:

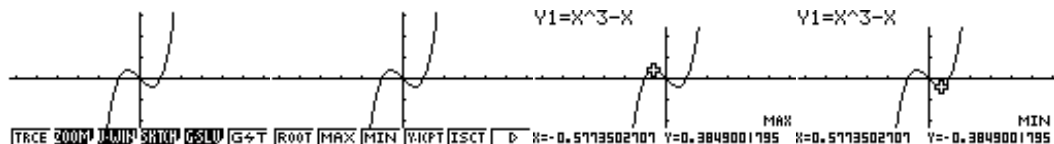
$$f(x) = 0 \iff x^3 - x = 0 \iff x(x^2 - 1) = 0 \iff x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

Logo, f não é injectiva, pelo que não existe função inversa de f .

Representação gráfica de f :



Como podemos verificar pelo gráfico, a função admite um máximo e um mínimo relativos, não sendo fácil obtê-los, sem recorrer a derivadas. No entanto, recorrendo à Calculadora gráfica, podemos obter valores aproximados dos extremos relativos.



O contradomínio da função é \mathbb{R} .

A função é estritamente crescente em $]-\infty, a]$, com $a \approx -0,57735$.

A função é estritamente decrescente em $[a, b]$, com $a \approx -0,57735$ e $b \approx 0,57735$.

A função é estritamente crescente em $[b, +\infty[$, com $b \approx 0,57735$.

O máximo relativo é, aproximadamente, 0,38490.

O mínimo relativo é, aproximadamente, -0,38490.

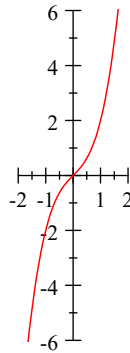
Exemplo 207 $f(x) = x^3 + x, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Zeros da função:

$$f(x) = 0 \iff x^3 + x = 0 \iff x(x^2 + 1) = 0 \iff x = 0 \vee x^2 + 1 = 0 \iff x = 0$$

Representação gráfica de f :

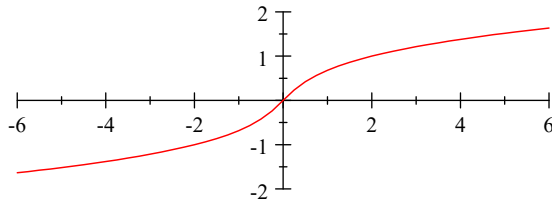


Como podemos verificar pelo gráfico, a função é estritamente crescente, pelo que é injectiva e admite função inversa, embora não seja fácil explicitá-la, isto é, não é fácil resolver, em ordem a x , a equação $x^3 + x - y = 0$.

Por curiosidade, aqui fica a resposta:

$$x = \frac{1}{6} \sqrt[3]{108y + 12\sqrt{12 + 81y^2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{108y + 12\sqrt{12 + 81y^2}}}$$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{1}{6} \sqrt[3]{108x + 12\sqrt{12 + 81x^2}} - \frac{2}{\sqrt[3]{108x + 12\sqrt{12 + 81x^2}}}$, cuja representação gráfica é a seguinte:



O contradomínio da função é \mathbb{R} .

Sinal de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$

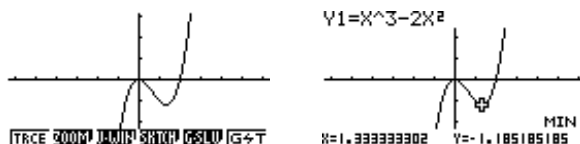
Exemplo 208 $f(x) = x^3 - 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Zeros da função:

$$f(x) = 0 \iff x^3 - 2x^2 = 0 \iff x^2(x - 2) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2 \iff x = 0$$

Representação gráfica de f :



A função é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$.

A função é estritamente decrescente em $[0, a]$, com $a \approx 1,3333$.

A função é estritamente crescente em $[a, +\infty[$.

O máximo relativo é zero.

O mínimo relativo é, aproximadamente, $-1,1852$.

O contradomínio da função é \mathbb{R} .

Sinal de f :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Note-se que zero é uma raiz dupla do polinómio $x^3 - 2x^2$.

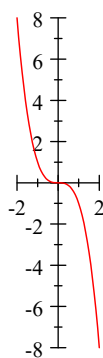
Exemplo 209 $f(x) = -x^3, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Zeros da função:

$$f(x) = 0 \iff x^3 = 0 \iff x = 0$$

Representação gráfica de f :



A função é estritamente crescente em \mathbb{R} . O contradomínio da função é \mathbb{R} .

Sinal de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$

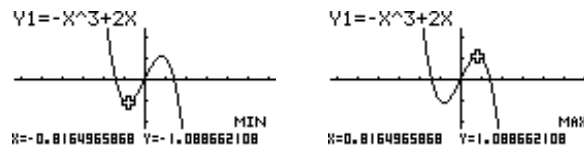
Exemplo 210 $f(x) = -x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Zeros da função:

$$f(x) = 0 \iff -x^3 + 2x = 0 \iff x(2 - x^2) = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

Representação gráfica de f :



A função é estritamente decrescente em $]-\infty, a]$, com $a \approx -0,8165$.

A função é estritamente crescente em $[a, b]$, com $a \approx -0,8165$ e $b \approx 0,8165$.

A função é estritamente crescente em $[b, +\infty[$, com $b \approx 0,8165$.

O mínimo relativo é, aproximadamente, $-1,0887$.

O máximo relativo é $1,0887$.

O contradomínio da função é \mathbb{R} .

Sinal de f :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2 - x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

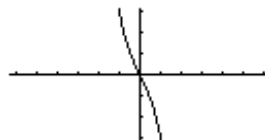
Exemplo 211 $f(x) = -x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Zeros da função:

$$f(x) = 0 \iff -x^3 - 2x = 0 \iff -x(x^2 + 2) = 0 \iff x = 0$$

Representação gráfica de f :



A função é estritamente decrescente em \mathbb{R} . Logo, f é injectiva, pelo que existe função inversa de f .

O contradomínio da função é \mathbb{R} .

Sinal de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$
$x^2 + 2$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Exemplo 212 $f(x) = -x^3 + 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

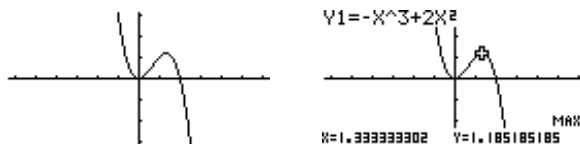
O domínio da função é \mathbb{R} .

Zeros da função:

$$f(x) = 0 \iff -x^3 + 2x^2 = 0 \iff -x^2(x - 2) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2$$

Zero é uma raiz dupla do polinómio $-x^3 + 2x^2$.

Representação gráfica de f :



A função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.

A função é estritamente crescente em $[0, a]$, com $a \approx 1,3333$.

A função é estritamente decrescente em $[a, +\infty[$.

O mínimo relativo é zero. O máximo relativo é, aproximadamente, 1,1852.

O contradomínio da função é \mathbb{R} .

Sinal de f :

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$-x^2$	$-$	0	$-$	$-$	$-$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

12.2.4 Função quártica

Exemplo 213 $f(x) = x^4, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} . Neste caso, temos $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é uma função par.

Logo, f não é injectiva. Então, não existe função inversa de f .

Correspondência inversa:

$$f(x) = y \iff x^4 = y \iff x = \pm \sqrt[4]{y}$$

É claro que devemos ter $y \geq 0$. Logo, o contradomínio de f é $[0, +\infty[$.

Zeros de $f(x)$:

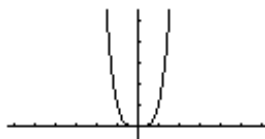
$$f(x) = 0 \iff x^4 = 0 \iff x = 0$$

Logo, f admite um único zero.

Sinal de $f(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^4	$+$	0	$+$

Representação gráfica de $f(x)$:



A função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

Então, no ponto $x = 0$, f admite um mínimo (mínimo absoluto). O mínimo da função é 0.

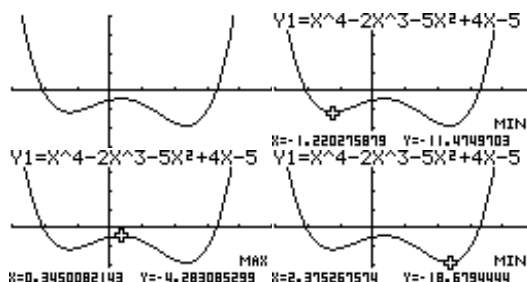
Convém referir que muitos alunos dizem que o gráfico desta função é uma parábola, o que é falso, pois as únicas funções polinomiais que definem uma parábola são as de segundo grau.

O gráfico desta função é uma curva com a concavidade voltada para cima, mas não se trata duma parábola!

Exemplo 214 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$

O domínio da função é \mathbb{R} . Neste caso, temos $f(-x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x - 5, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f não é uma função par nem ímpar.

Representação gráfica de f :



Monotonia:

A função é estritamente decrescente em $]-\infty, a]$, com $a \approx -1,2203$.

A função é estritamente crescente em $[a, b]$, com $a \approx -1,2203$ e $b \approx 0,3450$.

A função é estritamente decrescente em $[b, c]$, com $b \approx 0,3450$ e $c \approx 2,3753$.

A função é estritamente crescente em $[c, +\infty[$, com $c \approx 2,3753$.

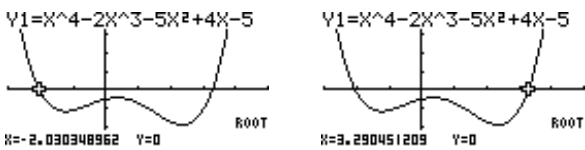
Máximo relativo: $-4,2831$

Mínimo relativo: $-11,4750$

Mínimo absoluto (e relativo): $-18,6794$

O contradomínio da função é $[d, +\infty[$, com $d \approx -18,6794$.

A função não é injectiva e admite dois zeros.



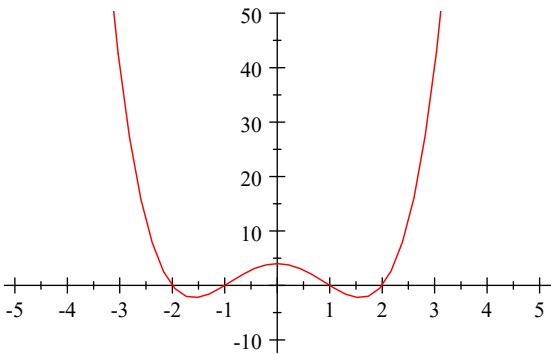
Sinal da função:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

com $x_1 \approx -2,0303$ e $x_2 \approx 3,2905$.

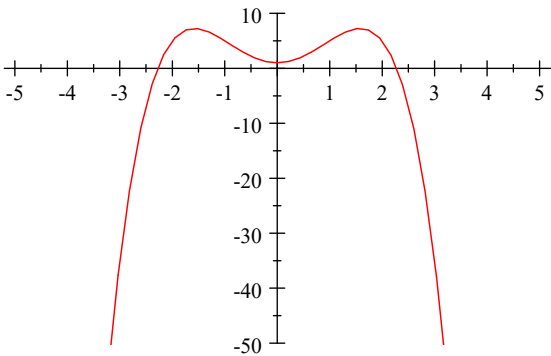
Exemplo 215 $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$

Representação gráfica:



Exemplo 216 $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Representação gráfica:



12.2.5 Outros exemplos

Gráfico da função $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

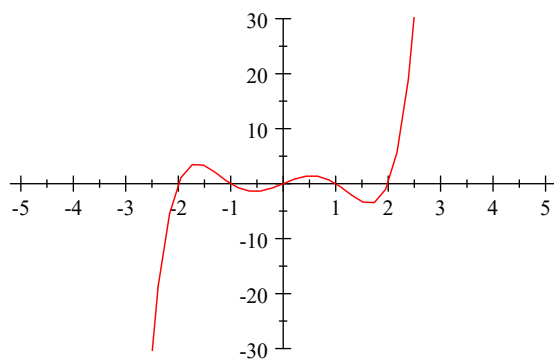


Gráfico da função $f(x) = -x^5 + x$

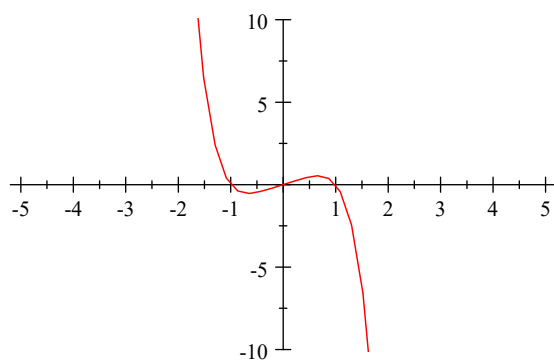
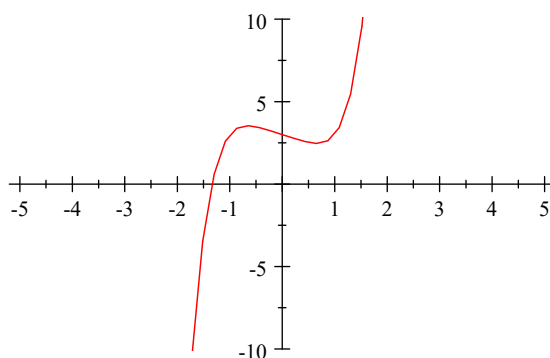
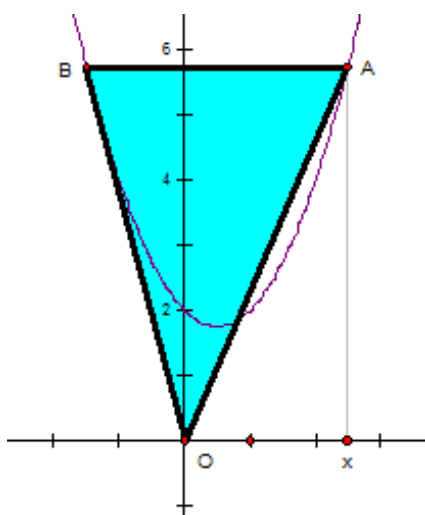


Gráfico da função $f(x) = x^5 - x + 3$



Exercício 217 Considere a função $f(x) = x^2 - x + 2$ e a figura seguinte, onde está representada graficamente a função. Determine a área do triângulo $[ABO]$, em função da abscissa x (do ponto A). É claro que os pontos A e B têm a mesma ordenada.



Resolução

$A = (x, x^2 - x + 2)$ e $B = (a, x^2 - x + 2)$. Ora,

$$\begin{aligned}
 f(a) = f(x) &\iff ax^2 - a + 2 = x^2 - x + 2 \iff a^2 - x^2 - a + x = 0 \\
 &\iff (a - x)(a + x) - (a - x) = 0 \iff (a - x)(a + x - 1) = 0 \\
 &\iff a = x \vee a = 1 - x
 \end{aligned}$$

Então, $A = (x, x^2 - x + 2)$ e $B = (1 - x, x^2 - x + 2)$.

Logo, a área do triângulo $[ABO]$ é $\frac{|x-1+x|(x^2-x+2)}{2}$, ou seja, $\frac{|2x-1|(x^2-x+2)}{2}$.

Note-se que, para $x = \frac{1}{2}$, o triângulo degenera num segmento de reta, cuja área é nula.

Note-se, ainda, que o eixo de simetria da parábola é a reta de equação $x = \frac{1}{2}$, pelo que a abcissa do ponto B é $1 - x$.

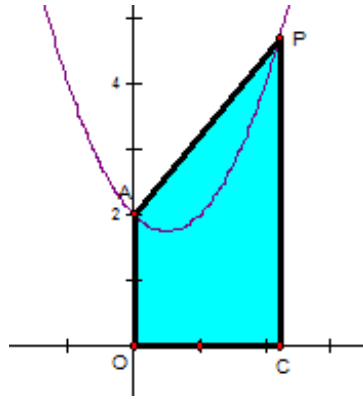
É claro que

$$f(1-x) = (1-x)^2 - (1-x) + 2 = 1 - 2x + x^2 - 1 + x + 2 = x^2 - x + 2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Registe-se, ainda, que o ponto A está à direita do ponto B , mas pode verificar-se o contrário. Se impusermos que o ponto A esteja à direita do ponto B , então devemos ter $x > \frac{1}{2}$ e a área do triângulo $[ABO]$ é $\frac{(2x-1)(x^2-x+2)}{2}$.

Exercício 218 Considere a função $f(x) = x^2 - x + 2$ e a figura seguinte, onde está representada graficamente a função. O ponto P pertence ao gráfico da função e $A = (0, 2)$.

1. Determine a área e o perímetro do trapézio $[APCO]$, em função da abcissa x (do ponto P).
2. Em que situação o trapézio se transforma num retângulo?



Resolução

$$1. \overline{OC} = |x|, \overline{OA} = 2, \overline{PC} = x^2 - x + 2$$

Então, a área do trapézio é dada por

$$A(x) = \frac{2 + x^2 - x + 2}{2} \times |x| = \frac{x^2 - x + 4}{2} \times |x|$$

Ora,

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{x^2 + (x^2 - x)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - 2x^3 + x^2} = \sqrt{x^4 - 2x^3 + 2x^2} \\ &= \sqrt{x^2(x^2 - 2x + 2)} = |x| \sqrt{x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

Então, o perímetro é dado por

$$P(x) = 2 + |x| + x^2 - x + 2 + |x| \sqrt{x^2 - 2x + 2} = |x| + x^2 - x + 4 + |x| \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

2. Para que o trapézio se transforme num retângulo, devemos ter $x^2 - x + 2 = 2$.

Logo, $x^2 - x = 0$. Então, $x(x - 1) = 0$, pelo que $x = 0 \vee x = 1$.

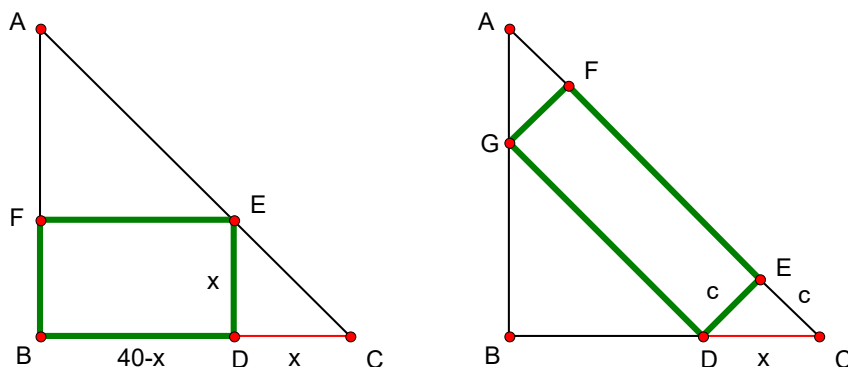
Então, $A(1) = \frac{1-1+4}{2} \times 1 = 2$ e $P(1) = 1 + 1 - 1 + 4 + \sqrt{1-2+2} = 6$.

Por outro lado, $A(0) = 0$ e $P(0) = 4$. Neste caso, o trapézio degenerou num segmento de reta (ou dois segmentos de reta sobrepostos, para sermos mais exactos).

Exercício 219 Determine a área máxima, o perímetro e as dimensões dum retângulo contido num triângulo retângulo isósceles em que cada cateto mede 40 cm.

Resolução

Consideremos as duas figuras seguintes, as quais mostram que há duas espécies de retângulos a considerar:



Na figura da esquerda, temos, em cm, $P(x) = 2x + 2(40 - x) = 2x + 80 - 2x = 80$, o que mostra que o perímetro é constante.

Quanto à área, temos, em cm^2 , $A(x) = x(40 - x)$, com $0 \leq x \leq 40$.

Ora, de $A(x) = 0$, vem $x(40 - x) = 0$, pelo que $x = 0$ ou $x = 40$.

O gráfico de $A(x)$ é uma parábola de eixo $x = 20$. Ora, $A(20) = 20 \times 20 = 400$.

Então, o valor máximo de $A(x)$ é 400. A área máxima do retângulo é 400 cm^2 . Tal acontece, quando os lados do retângulo são todos iguais, ou seja, trata-se dum quadrado com 20 cm de lado.

Na figura da direita, temos $0 \leq x \leq 40$. Ora, representando \overline{GC} por x , temos

$$x^2 = c^2 + c^2 \iff x^2 = 2c^2 \iff c = \pm \frac{x}{\sqrt{2}} \iff c = \pm \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Então, $c = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Logo, $\overline{ED} = 40\sqrt{2} - 2c = 40\sqrt{2} - x\sqrt{2} = (40 - x)\sqrt{2}$.

Então, $A(x) = (40 - x)\sqrt{2} \times \frac{x\sqrt{2}}{2} = (40 - x)x$.

Quanto ao perímetro, temos $P(x) = x\sqrt{2} + 2(40 - x)\sqrt{2} = (80 - x)\sqrt{2}$.

A área máxima continua a ser 400 cm^2 , correspondente a $x = 20$, tendo-se $\overline{ED} = 20\sqrt{2}$ e $\overline{GD} = 10\sqrt{2}$.

Embora os dois retângulos de área máxima tenham a mesma área, eles não têm o mesmo perímetro.

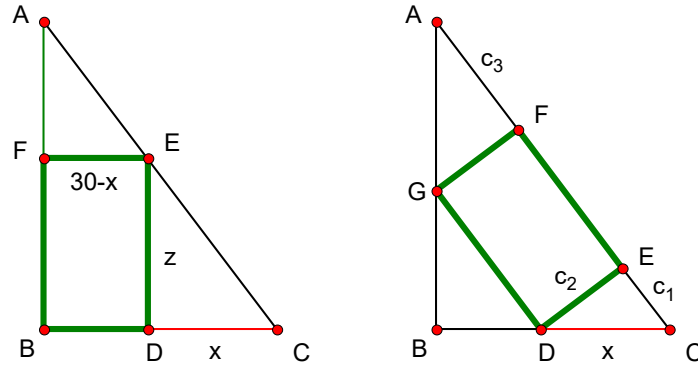
O perímetro do quadrado é 80 cm, enquanto que o perímetro do (outro) retângulo é $60\sqrt{2}$ cm.

Note-se que $60\sqrt{2} > 80$, o que está de acordo com o facto de que, entre os retângulos de igual perímetro, o quadrado é aquele que tem perímetro mínimo.

Exercício 220 Determine a área máxima, o perímetro e as dimensões dum retângulo contido num triângulo retângulo em que os catetos medem 40 cm e 30 cm.

Resolução

Consideremos as duas figuras seguintes, em que $\overline{AB} = 40$ cm e $\overline{BC} = 30$ cm:



É claro que, em ambas as situações, $0 \leq x \leq 30$.

Na figura da esquerda, temos

$$\frac{z}{40} = \frac{x}{30} \iff z = \frac{4}{3}x$$

Então, o perímetro do retângulo é dado por

$$P(x) = 2 \times \frac{4}{3}x + 2(30 - x) = 60 - 2x + \frac{8}{3}x = 60 + \frac{2}{3}x$$

E a área do retângulo é

$$A(x) = \frac{4}{3}x(30 - x)$$

Os zeros de $A(x)$ são 0 e 30, pelo que o eixo de simetria da parábola (gráfico de A) é a reta de equação $x = 15$.

Como a concavidade está voltada para baixo, a função tem um máximo para $x = 15$. Ora, $A(15) = \frac{4}{3} \times 15 \times 15 = 300$, pelo que a área máxima do retângulo é 300 cm^2 . Neste caso, o perímetro é 70 cm.

Na figura da direita, temos $\overline{AC} = 50$ cm, tendo-se que $[EDC]$, $[AGF]$, $[BDG]$ e $[ABC]$ são semelhantes.

Então, $c_1 = \frac{3}{5}x$, $c_2 = \frac{4}{5}x$ e $c_3 = \frac{4}{3}c_2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{5}x = \frac{16}{15}x$.

Logo, $\overline{EF} = (50 - \frac{16}{15}x - \frac{3}{5}x) \text{ cm} = (50 - \frac{5}{3}x) \text{ cm}$.

Então, a área de $[DEFG]$ é dada, em cm^2 , por

$$B(x) = \frac{4}{5}x \left(50 - \frac{5}{3}x \right) = 4x \left(10 - \frac{1}{3}x \right) = \frac{4}{3}x(30 - x) = A(x)$$

Logo, os dois retângulos têm a mesma área, pelo que a área máxima é a mesma nos dois casos. Quanto ao perímetro, temos, em cm,

$$Q(x) = 2 \left(50 - \frac{5}{3}x \right) + 2 \times \frac{4}{5}x = 100 - \frac{26}{15}x$$

Então, o perímetro do retângulo de área máxima é, em cm, $Q(15) = 100 - \frac{26}{15} \times 15 = 74$.

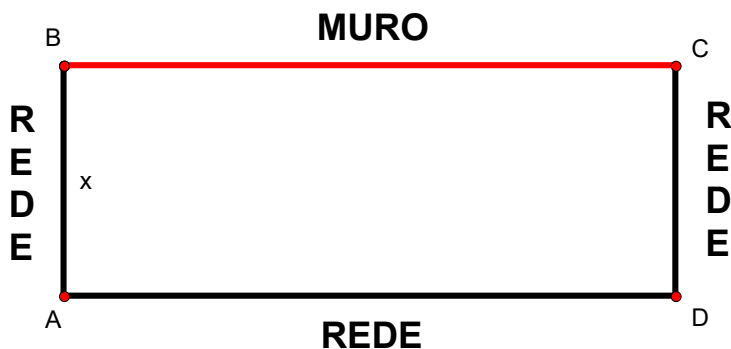
Logo, embora os dois retângulos tenham a mesma área máxima, os perímetros correspondentes são diferentes.

Resolvendo a equação $P(x) = Q(x)$, temos

$$60 + \frac{2}{3}x = 100 - \frac{26}{15}x \iff \frac{2}{3}x + \frac{26}{15}x = 40 \iff 10x + 26x = 600 \iff x = \frac{50}{3}$$

Logo, os dois retângulos são iguais, para $x = \frac{50}{3}$.

Exercício 221 Pretende-se vedar um recinto retangular. Um dos lados é um muro, pelo que são vedados, apenas, três dos lados. Determine a área máxima do retângulo, sabendo que se gastaram 120 metros de rede.



Resolução

$\overline{AB} = x = \overline{CD}$, $\overline{AD} = z$. Então, $x + z + x = 120$. Logo, $z = 120 - 2x$.

É claro que devemos ter $x > 0$ e $120 - 2x > 0$, ou seja, $0 < x < 60$.

Note-se que, muitas vezes, consideramos $0 \leq x \leq 60$, em vez de $0 < x < 60$.

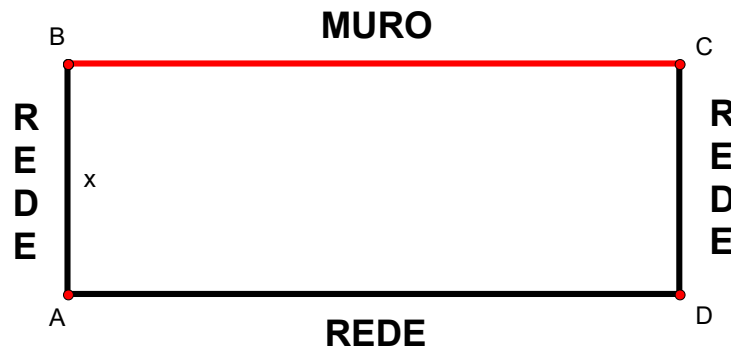
Então, $A(x)$, a área do retângulo é dada por

$$A(x) = x(120 - 2x) = 2x(60 - x)$$

Logo, V , o vértice da parábola é $V = (30, A(30)) = (30, 60 \times 30) = (30, 1800)$.

Então, a área máxima do retângulo é 1800 m^2 , correspondente ao caso em que os lados perpendiculares ao muro têm 30 metros de comprimento.

Exercício 222 Pretende-se vedar um recinto retangular. Um dos lados é um muro, pelo que são vedados, apenas, três dos lados. Nos dois lados perpendiculares ao muro, a vedação tem duas alturas, enquanto que no lado paralelo ao muro, a vedação tem uma altura. Determine a área máxima do retângulo, sabendo que se gastaram 120 metros de rede.



Resolução

$\overline{AB} = x = \overline{CD}$, $\overline{AD} = z$. Então, $2x + z + 2x = 120$. Logo, $z = 120 - 4x$.

É claro que devemos ter $x > 0$ e $120 - 4x > 0$, ou seja, $0 < x < 30$.

Note-se que, muitas vezes, consideramos $0 \leq x \leq 30$, em vez de $0 < x < 30$.

Então, $A(x)$, a área do retângulo é dada por

$$A(x) = x(120 - 4x) = 4x(30 - x)$$

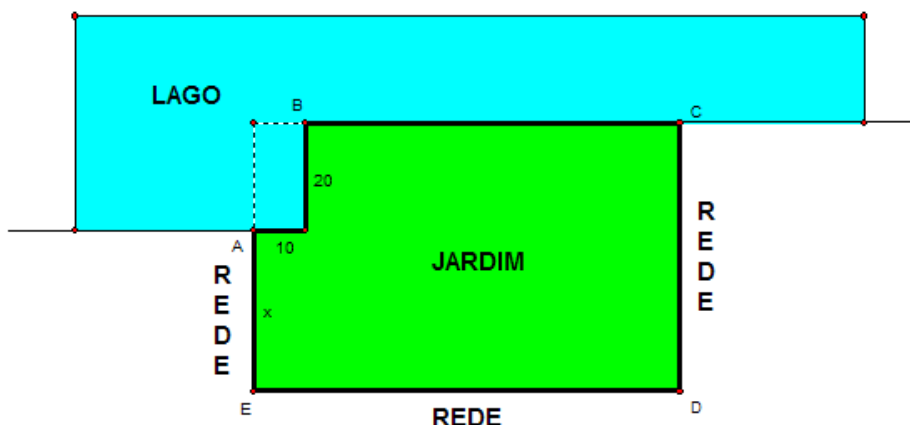
Logo, V , o vértice da parábola é $V = (15, A(15)) = (15, 60 \times 15) = (15, 900)$.

Então, a área máxima do retângulo é 900 m^2 , correspondente ao caso em que os lados perpendiculares ao muro têm 15 metros de comprimento.

Exercício 223 (Teste nacional intermédio de Matemática, 11º Ano, 2008)

Pretende-se construir um jardim, junto a um lago, conforme a figura ilustra. Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede. Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam perpendiculares. As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros. Como a figura mostra, x é a medida de um dos lados do jardim (com rede). Vão ser

utilizados, na sua totalidade, 120 metros de rede.



1. Mostre que a área do jardim, em m^2 , é dada, em função de x , por

$$A(x) = -2x^2 + 60x + 1800$$

2. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e determine essa área máxima.

Resolução

1. $\overline{AE} = x$, $\overline{CD} = x + 20$, $\overline{ED} = z$. Então, $x + z + x + 20 = 120$, pelo que $z = 100 - 2x$.

Logo, $A(x)$, a área do jardim, é dada por

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 20)(100 - 2x) - 200 = 100x - 2x^2 + 2000 - 40x - 200 \\ &= -2x^2 + 60x + 1800 \end{aligned}$$

2. As coordenadas do vértice V da parábola são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, com $a = -2$, $b = 60$ e $c = 1800$.

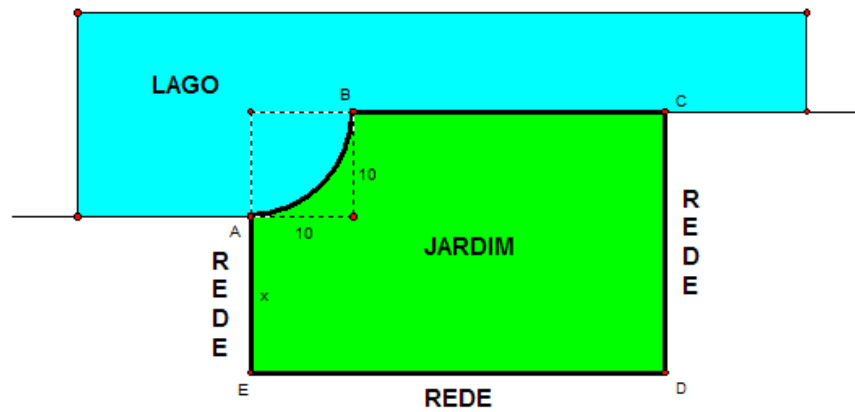
$$\text{Então, } V = \left(-\frac{60}{-2}, -\frac{3600 - 4 \times (-2) \times 1800}{4 \times (-2)}\right) = \left(15, \frac{3600 + 14400}{8}\right) = \left(15, \frac{18000}{8}\right) = (15, 2250).$$

Note-se que $A(15) = -2 \times 15^2 + 60 \times 15 + 1800 = 2250$.

Então, o valor máximo da área corresponde ao caso em que $x = 15$.

A área máxima do jardim é 2250 m^2 .

Exercício 224 Considere o seguinte esquema (que representa um lago e um parque). Uma parte do parque está a ser vedada, de modo a criar-se um jardim tropical. O jardim tropical é um retângulo ao qual foi retirado um quarto de círculo. Na vedação dos três lados do recinto, conforme se vê na figura, gastaram-se 120 metros de rede. Determine a área máxima do recinto.

**Resolução**

Ora,

$$x + z + x + 10 = 120 \iff z = 110 - 2x$$

Então,

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 10)(110 - 2x) - \frac{1}{4}\pi \times 10^2 = 110x - 2x^2 + 1100 - 20x - 25\pi \\ &= -2x^2 + 90x + 1100 - 25\pi \end{aligned}$$

Logo, $a = -2$, $b = 90$, $c = 1100 - 25\pi$.

Então, $-\frac{b}{2a} = -\frac{90}{-4} = \frac{45}{2}$ e $A\left(\frac{45}{2}\right) = -2\left(\frac{45}{2}\right)^2 + 90 \times \frac{45}{2} + 1100 - 25\pi$.

Logo, $A\left(\frac{45}{2}\right) = -\frac{2025}{2} + 2025 + 1100 - 25\pi = \frac{4225}{2} - 25\pi$.

Então, a área máxima do jardim é de $\left(\frac{4225}{2} - 25\pi\right) \text{ m}^2$.

Determinação do máximo, utilizando a Calculadora gráfica:



Teorema 225 *Um polinómio (numa indeterminada) de grau n não pode ter mais do que n raízes.*

Demonstração

Se $P(x) = a_1x + a_0$, então $P(x) = 0$ é equivalente a $x = -\frac{a_0}{a_1}$. Logo, um polinómio de grau 1 não pode ter mais do que uma raiz.

Suponhamos que um polinómio de grau n não pode ter mais do que n raízes.

Seja $P(x)$ um polinómio de grau $n + 1$.

Se $P(x)$ não admitir raízes, então $P(x)$ não admite mais do que $n + 1$ raízes.

Se $P(x)$ admitir a raiz α , então existe um polinómio $Q(x)$, de grau n , tal que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Então, $P(x) = 0$ é equivalente a $(x - \alpha)Q(x) = 0$, ou seja $x = \alpha$ ou $Q(x) = 0$.

Mas, $Q(x)$ não pode ter mais do que n raízes, pelo que $P(x)$ não pode ter mais do que $n + 1$ raízes.

Observação importante

Qual o grau do polinómio constante?

Algumas vezes, vê-se escrito (ou ouve-se) que o grau dum constante é zero. Se assim fosse, o Teorema anterior não era válido para polinómios de grau zero, pois o polinómio identicamente nulo tem infinitas raízes em \mathbb{R} . Nenhum mal viria ao mundo por causa disso.

Mas, há duas regras muito comuns sobre polinómios:

Primeira: A soma de dois polinómios tem grau menor ou igual ao maior dos graus das parcelas.

Segunda: O grau do produto de dois polinómios é a soma dos graus dos factores.

E aqui começa o problema. Se multiplicarmos um polinómio de grau 2 por uma constante, qual o grau do produto?

Assim, por exemplo, $2(x^2 - 3x + 4)$ é $2x^2 - 6x + 8$. E $0 + 2$ dá 2, pelo que o grau do produto é a soma dos graus dos factores.

Mas, se tivermos $0(x^2 - 3x + 4)$, o resultado é 0. Então, o grau de 0 não pode ser 0, a menos que não se pretenda manter a regra de que o grau do produto de dois polinómios é a soma dos graus dos factores. Para manter as duas regras referidas, considera-se que o grau do polinómio identicamente nulo é $-\infty$. Assim, no caso de $0(x^2 - 3x + 4)$ cujo resultado é 0, temos $(-\infty) + 2 = -\infty$.

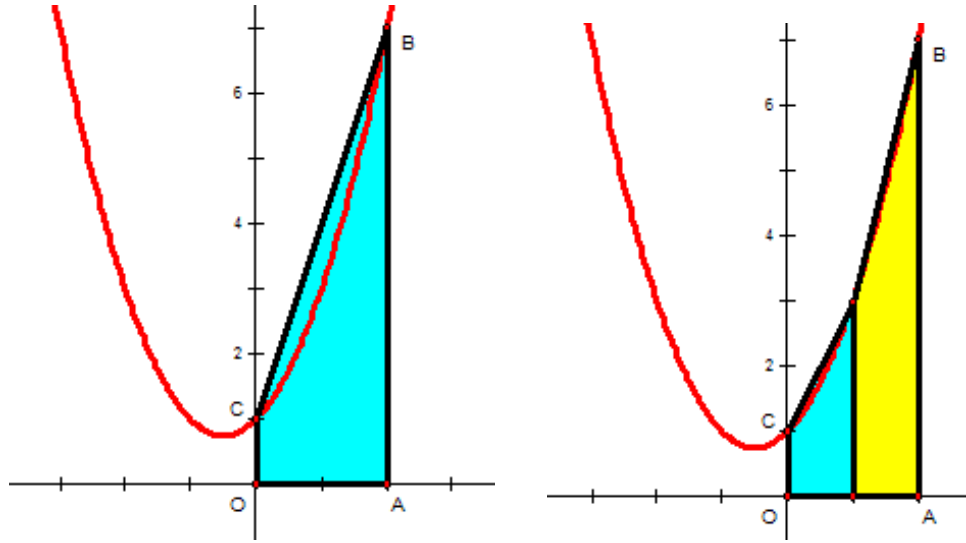
Então, o grau dum constante não nula é zero e o grau de zero é $-\infty$.

Exemplo 226 *Determine valores aproximados da área da região limitada pela parábola $y = x^2 + x + 1$ e pelas retas $x = 0$, $x = 2$ e $y = 0$, num referencial ortonormado.*

Resolução

Se substituirmos o arco de parábola pelo segmento de reta de extremos C e B , temos um trapézio cuja área é fácil de calcular.

Ora, $C = (0, 1)$ e $B = (2, 7)$, pelo que a área do trapézio $[OABC]$ é $2 \times \frac{1+7}{2}$, ou seja, 8 (unidades de área).



Se dividirmos o intervalo $[1, 2]$ em duas partes iguais, temos dois trapézios de áreas $1 \times \frac{1+3}{2}$ e $1 \times \frac{3+7}{2}$.

Logo, a área total dos dois trapézios é de 7 unidades de área.

Note-se que, sendo $f(x) = x^2 + x + 1$, temos que a soma das áreas dos dois trapézios é $\frac{1}{2} \times (f(0) + 2f(1) + f(2)) = 7$.

No caso geral, o intervalo $[1, 2]$ é dividido em n intervalos de igual comprimento, tendo-se que a área dos n trapézios é

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2}{n} \times \frac{1}{2} \times \left(f(0) + 2f\left(\frac{2}{n}\right) + 2f\left(\frac{4}{n}\right) + \cdots + 2f\left(2 - \frac{2}{n}\right) + f(2) \right) \\
 &= \frac{1}{n} \times \left(1 + 2\left(\frac{4}{n^2} + \frac{2}{n} + 1\right) + 2\left(\frac{16}{n^2} + \frac{4}{n} + 1\right) + \cdots + 2\left(\left(\frac{2n-2}{n}\right)^2 + \frac{2n-2}{n} + 1\right) + 7 \right) \\
 &= \frac{1}{n} \times 8 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{8}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4k^2}{n^2} + \frac{2k}{n} + 1\right) \\
 &= \frac{8}{n} + \frac{2(n-1)}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4k^2}{n^2} + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{n} = \frac{2n+6}{n} + \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \\
 &= 2 + \frac{6}{n} + \frac{8}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= 2 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n} + \frac{8}{n^2} \times \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n} \times \frac{n+1}{2}
 \end{aligned}$$

Então, $\lim A_n = \lim \left(2 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n} + \frac{8}{n^2} \times \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n} \times \frac{n+1}{2} \right) = \frac{20}{3}$, sendo este o valor exacto da área.

Capítulo 13

Funções Reais de Variável Real

Neste capítulo vamos estudar alguns tipos de funções reais de variável real, começando por recordar e completar o estudo das funções polinomiais, passando às funções racionais e, finalmente, às funções irracionais.

13.1 Estudo de funções reais de variável real

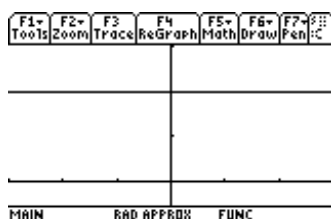
Exemplo 227 Estudo da função $f(x) = 2$

É claro que esta é uma função de domínio \mathbb{R} . A função é constante, logo crescente e decrescente em sentido lato. O contradomínio da função é $\{2\}$, sendo que o mínimo da função é igual a 2, que, também, é o máximo. A função não é injectiva, porque há objectos diferentes com imagens iguais (por exemplo 3 e 4 têm a mesma imagem). Então a função não admite função inversa.

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$, podemos considerar que a recta de equação $y = 2$ é uma assíptota ao gráfico da função.

Analogamente, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$, pelo que temos mais uma razão para que a recta $y = 2$ seja uma assíptota ao gráfico de f .

Claro que a representação gráfica da função é a seguinte:



Exemplo 228 Estudo da função $f(x) = 2x + 3$

O domínio da função é \mathbb{R} . Sejam x_1 e x_2 dois números reais com $x_1 < x_2$. Então:

$$x_1 < x_2 \implies 2x_1 < 2x_2 \implies 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Logo, a função é estritamente crescente em \mathbb{R} .

Daqui concluímos que a função f é injectiva, pelo que admite função inversa.

$$f(x) = y \iff 2x + 3 = y \iff x = \frac{y-3}{2}$$

Logo, $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$, ou de outro modo, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

Como o domínio da função inversa é \mathbb{R} , então o contradomínio de f também é \mathbb{R} .

Como $f(x) = 0 \iff 2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$, a função admite um único zero que é $-\frac{3}{2}$. Claro que podíamos ter chegado à mesma conclusão, calculando $f^{-1}(0) = -\frac{3}{2}$.

Sinal da função:

$$f(x) > 0 \iff 2x + 3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}; \quad f(x) < 0 \iff 2x + 3 < 0 \iff x < -\frac{3}{2}$$

Então:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

É claro que sabemos que a representação gráfica da função é uma recta de declive 2 e ordenada na origem 3. Como o declive é positivo, a função é estritamente crescente.

Além disso, podemos afirmar que existe uma assíntota que é a própria recta.

Para nos familiarizarmos com a determinação de assíntotas, vamos efectuar os cálculos para a sua determinação:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 3) = 2 \times (-\infty) + 3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) = 2 \times (+\infty) + 3 = +\infty \end{cases}$$

Em face dos resultados anteriores concluímos que, neste caso, não há assíntotas horizontais.

$$\begin{cases} m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2 + 0 = 2 \\ b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m_1 x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 3 - 2x) = 3 \end{cases}$$

Então, a recta de equação $y = 2x + 3$ é uma assíntota ao gráfico da função.

Analogamente, temos:

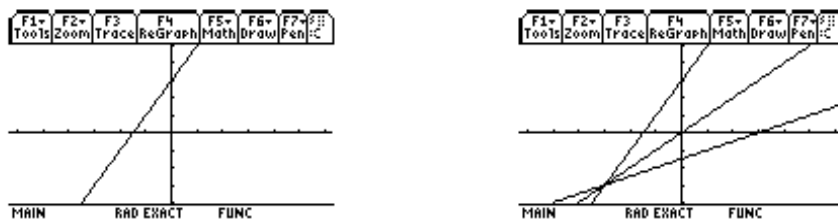
$$\begin{cases} m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2 + 0 = 2 \\ b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m_1 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3 - 2x) = 3 \end{cases}$$

Outra questão interessante é a taxa de variação média num intervalo I , limitado e fechado. Seja $I = [1, 4]$. Então, $t = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{11-5}{3} = 2$, que é o valor do declive.

Seja $I = [1, 4]$, com $a < b$. Então, $t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2b+3-2a-3}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$, que é o valor do declive.

Então, a taxa de variação média da função f , num intervalo I qualquer, é 2, o valor do declive.

Seguidamente, apresentamos a representação gráfica de f , isoladamente, e as representações gráficas de f , f^{-1} e a função $y = x$, em conjunto:



Repare-se no facto dos gráficos de f e f^{-1} serem simétricos em relação à recta $y = x$, quando se utiliza a opção ZoomSquare, o que resulta de termos um referencial ortonormado.

Exemplo 229 Estudo da função $f(x) = -2x + 3$

O domínio da função é \mathbb{R} . Sejam x_1 e x_2 dois números reais com $x_1 < x_2$. Então:

$$x_1 < x_2 \implies -2x_1 > -2x_2 \implies -2x_1 + 3 > -2x_2 + 3 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

Logo, a função é estritamente decrescente em \mathbb{R} .

Daqui concluímos que a função f é injectiva, pelo que admite função inversa.

$$f(x) = y \iff -2x + 3 = y \iff x = \frac{3-y}{2}$$

Logo, $f^{-1}(y) = \frac{3-y}{2}$, ou de outro modo, $f^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}$.

Como o domínio da função inversa é \mathbb{R} , então o contradomínio de f também é \mathbb{R} .

Como $f^{-1}(0) = \frac{3}{2}$, a função admite um único zero que é $\frac{3}{2}$.

Sinal da função:

$$f(x) > 0 \iff -2x + 3 > 0 \iff x < \frac{3}{2}; \quad f(x) < 0 \iff -2x + 3 < 0 \iff x > -\frac{3}{2}$$

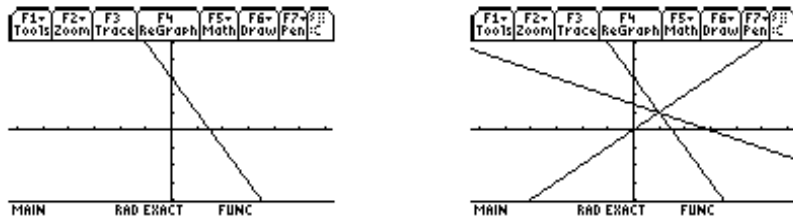
Então:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Taxa de variação média da função no intervalo $I = [a, b]$, com $a < b$:

$$t = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-2b+3+2a-3}{b-a} = \frac{-2b+2a}{b-a} = \frac{-2(b-a)}{b-a} = -2$$

Representação gráfica de f (à esquerda) e de f , f^{-1} e da recta $y = x$:



Registe-se mais um pormenor: Como $f(1) = 1$ e $f(-1) = 5$, a função f não é par nem ímpar.

Exemplo 230 Estudo da função $f(x) = x^2$

O domínio da função é \mathbb{R} .

$$f(x) = y \iff x^2 = y \iff x = \pm\sqrt{y}$$

Da igualdade $x = \pm\sqrt{y}$, concluímos que $y \geq 0$ e que a correspondência inversa de não é uma função (para $y = 4$, x assume dois valores).

Então, o contradomínio da função é $[0, +\infty[$, tendo-se que a função não é injectiva (-2 e 2 têm a mesma imagem).

Fazendo $y = 0$, temos $x = 0$, pelo que a função admite um zero. É claro que a função não assume valores negativos.

De $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, conclui-se que a função é par, o que significa que o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = (+\infty)^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = (-\infty)^2 = +\infty$$

Logo, o gráfico de não admite assíntotas horizontais.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Então, o gráfico de f não admite assíntotas não verticais.

Podemos, desde já, acrescentar que o gráfico duma função polinomial, de grau maior ou igual a 2, nunca admite assíntotas verticais, pelo que as únicas funções polinomiais que admitem assíntotas são as funções do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Para essas funções, a assíntota coincide com o gráfico da própria função.

Calculemos a taxa de variação média da função $f(x) = x^2$, nos intervalos $[1, 5]$ e $[2, 4]$:

$$t_{[1,5]} = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{25-1}{4} = 6, \quad t_{[2,4]} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{16-4}{2} = 6$$

Curiosamente, obtivemos o mesmo valor.

Calculemos a taxa de variação média da função, no intervalo $I = [1+h, 5-h]$, com $1+h < 5-h$, isto é, com $h < 2$:

$$\begin{aligned} t_{[1+h,5-h]} &= \frac{f(5-h) - f(1+h)}{5-h-1-h} = \frac{(5-h)^2 - (1+h)^2}{4-2h} \\ &= \frac{25 - 10h + h^2 - 1 - 2h - h^2}{4-2h} = \frac{24 - 12h}{4-2h} = 6 \end{aligned}$$

Sejam $a, b, h \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e $a+h < b-h$. Então, $h < \frac{b-a}{2}$.

Calculemos a taxa de variação média da função, nos intervalos $I = [a, b]$ e $J = [a+h, b-h]$:

$$\begin{aligned} t_{[a,b]} &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} = b+a \\ t_{[a+h,b-h]} &= \frac{f(b-h) - f(a+h)}{b-h-a-h} = \frac{(b-h)^2 - (a+h)^2}{b-a-2h} \\ &= \frac{(b-h+a+h)(b-h-a-h)}{b-a-2h} = \frac{(b+a)(b-a-2h)}{b-a-2h} = b+a \end{aligned}$$

E, como era de suspeitar, as duas taxas são iguais.

A taxa de variação média está relacionada com a derivada de uma função num ponto:

Derivada de uma função f no ponto a (a qual, se existir, se representa por $f'(a)$), é o limite da taxa de variação média. Mais exactamente,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

No caso da função $f(x) = x^2$, temos:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$$

Assim, temos que, por exemplo, $f'(3) = 6$, $f'(1) = 2$, $f'(-3) = 6$.

Repare-se que obtivemos uma nova função que é chamada função derivada de f , ou derivada da função f .

Neste caso, a expressão que define a derivada de f é $f'(x) = 2x$.

O conceito de derivada é muito importante em Matemática.

Interpretação geométrica:

Derivada de uma função f num ponto, se existir, é o declive da recta (ou semi-recta) tangente ao gráfico de f nesse ponto.

No caso que temos vindo a tratar ($f(x) = x^2$), temos $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$, pelo que podemos determinar a equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa 1: O declive m , da tangente, é dado por $m = f'(1) = 2$, pelo que uma equação da tangente é $y - f(1) = 2(x - 1)$, donde vem $y - 1 = 2(x - 1)$, ou seja, $y = 2x - 1$.

Outra aplicação da derivada, é o estudo da monotonia da função:

Se a derivada duma função é positiva num intervalo, então a função é estritamente crescente nesse intervalo e se a derivada duma função é negativa num intervalo, então a função é estritamente decrescente nesse intervalo.

Vamos, então, estudar a monotonia da função $f(x) = x^2$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	mínimo	\nearrow

A função tem um mínimo para $x = 0$, tendo-se que o valor do mínimo é zero, porque $f(0) = 0$.

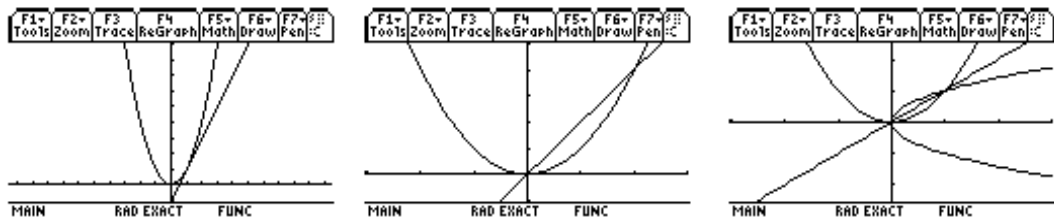
Recordemos que o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

Registe-se, também, que podemos achar (se existir) a derivada da derivada duma função (a segunda derivada da função) e que se a segunda derivada duma função é positiva num intervalo, então o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima, nesse intervalo; se a segunda derivada duma função é negativa num intervalo, então o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo, nesse intervalo.

No exemplo que estamos a estudar, temos $f'(x) = 2x$, pelo que $f''(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

Seguem-se alguns gráficos relacionados com o estudo feito:



Exemplo 231 Estudo da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Determinação da correspondência inversa:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &= y \iff x^2 - 2x - 3 - y = 0 \\ &\iff x = 1 \pm \sqrt{1 + 3 + y} \iff x = 1 \pm \sqrt{4 + y} \end{aligned}$$

Então, devemos ter $4 + y \geq 0$, ou seja, $y \geq -4$.

Logo, o contradomínio de f é $[-4, +\infty[$.

Outra conclusão que podemos tirar é que a função f não é injectiva, porque a correspondência inversa de f não é uma função.

Para achar os zeros da função, basta fazer $y = 0$, obtendo-se $x = 1 \pm \sqrt{4}$, donde vem $x = 1 \pm 2$ e, por fim, $x = -1 \vee x = 3$.

Como $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3$, a função não é par nem ímpar.

Estudo do sinal da função:

Como $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, temos:

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Devido à sua importância, lembramos que o sinal duma função quadrática obedece à seguinte regra:

Se não houver raízes, a função toma o sinal de a (coeficiente do termo de 2º grau).

Se houver raízes, a função assume o sinal de a , fora do intervalo das raízes e assume o sinal contrário ao de a , no intervalo das raízes.

Já sabemos que o gráfico da função não admite assíntotas, mas podemos calcular os seguintes limites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) \right] \\ &= (-\infty)^2 \times (1 - 0 - 0) = (+\infty) \times 1 = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) \right] \\ &= (+\infty)^2 \times (1 - 0 - 0) = (+\infty) \times 1 = +\infty\end{aligned}$$

Cálculo da derivada da função:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2x - 3 - (a^2 - 2a - 3)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2 - 2x + 2a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a) - 2(x - a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a - 2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a - 2) = 2a - 2\end{aligned}$$

Então, $f'(x) = 2x - 2 = g(x)$.

Cálculo da segunda derivada da função:

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x - 2 - (2a - 2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x - 2a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x - a)}{x - a} = 2$$

Então, $f''(x) = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

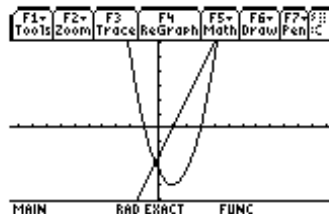
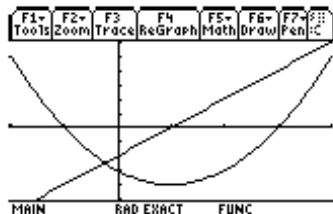
Logo, o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima.

Estudo da monotonia da função:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	mínimo	\nearrow

Como $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$, temos que o mínimo da função é -4 , o que está de acordo com o facto do contradomínio de f ser $[-4, +\infty[$.

Segue-se a representação gráfica da função e da sua derivada:



Como $f(-1) = 1 + 2 - 3 = -1$ e $f(1) = -4$, então f não é par nem ímpar, conforme se pode observar graficamente.

Fórmula resolvente simplificada da equação de 2º grau

Dada uma equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, sabemos que, no caso de termos $b^2 - 4ac \geq 0$, as soluções da equação são dadas pela fórmula resolvente $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Mas, acontece muitas vezes, que b é par ou $\frac{b}{2}$ é uma expressão mais simples que b ($b = 6$ ou $b = 2\sqrt{5}$, por exemplo). Nestes casos é mais útil aplicar uma fórmula simplificada.

Suponhamos que $b = 2k$, isto é, suponhamos que queremos resolver a equação $ax^2 + 2kx + c = 0$. Então:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

E em muitas equações temos $a = 1$. Se $a = 1$ e $b = 2k$, então a fórmula resolvente transforma-se em $x = k \pm \sqrt{k^2 - c}$.

Em resumo, temos as seguintes fórmulas, para resolver equações de segundo grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + 2kx + c = 0 \iff x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

$$x^2 + 2kx + c = 0 \iff x = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$$

Se quisermos resolver a equação de 2º grau, $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$, basta aplicar a última das fórmulas apresentadas, tendo-se:

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \iff x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3+1} \iff x = -\sqrt{3} \pm 2$$

Se aplicarmos a fórmula usual, iremos ter mais cálculos.

Exemplo 232 Estudo da função $f(x) = -x^2 - 2x - 3$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Correspondência inversa:

$$-x^2 - 2x - 3 = y \iff x^2 + 2x + 3 + y = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{1 - 3 - y} \iff x = -1 \pm \sqrt{-2 - y}$$

Então, devemos ter $-2 - y \geq 0$, ou seja, $y \leq -2$.

Logo, o contradomínio de f é $[-\infty, -2]$.

Como a correspondência inversa de f não é uma função, então a função f não é injectiva.

A função f não admite zeros, porque zero não pertence ao contradomínio da função. Como $a = -1$, então a função assume, apenas, valores negativos, isto é, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $f(-x) = -(-x)^2 - 2(-x) - 3 = -x^2 + 2x - 3$, a função não é par nem ímpar.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(-1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) \right] \\ &= (-\infty)^2 \times (-1 - 0 - 0) = (+\infty) \times (-1) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(-1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) \right] \\ &= (+\infty)^2 \times (-1 - 0 - 0) = (+\infty) \times (-1) = -\infty \end{aligned}$$

Como já dissemos em exemplos anteriores, o gráfico duma função polinomial de grau maior ou igual a 2 não admite assíntotas.

Derivadas da função:

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x^2 - 2x - 3 - (-a^2 - 2a - 3)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x^2 + a^2 - 2x + 2a}{x - a} = - \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2 + 2x - 2a}{x - a} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a) + 2(x - a)}{x - a} = - \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a + 2)}{x - a} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow a} (x + a + 2) = -2a + 2
 \end{aligned}$$

Então, $f'(x) = -2x + 2 = g(x)$.

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2x + 2 - (-2a + 2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2x + 2a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2(x - a)}{x - a} = -2$$

Então, $f''(x) = -2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo.

Estudo da monotonia da função:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	Máximo	\searrow

Como $f(-1) = -1 + 2 - 3 = -2$, temos que o máximo da função é -2 , o que está de acordo com o facto do contradomínio de f ser $[-\infty, -2]$.

Segue-se a representação gráfica da função e da sua derivada:



Exemplo 233 Estudo da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Neste caso, a correspondência inversa não é fácil de definir, uma vez que seria necessário resolver uma equação de terceiro grau.

Zeros da função:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \iff x(x^2 - 6x + 9) = 0 \iff x(x - 3)^2 = 0 \iff x = 0 \vee x = 3$$

Os zeros da função são 0 e 3.

Estudo do sinal da função:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$$

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

A função é negativa em $]-\infty, 0[$, nula nos pontos 0 e 3 e é positiva em $]0, 3[\cup]3, +\infty[$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} \right) \right] \\ &= (-\infty)^3 \times (1 - 0 + 0) = (-\infty) \times 1 = -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} \right) \right] \\ &= (+\infty)^3 \times (1 - 0 + 0) = (+\infty) \times (1) = +\infty\end{aligned}$$

As funções polinomiais são funções contínuas em \mathbb{R} . Logo, a função que estamos a estudar tem contradomínio \mathbb{R} , uma vez que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

O gráfico da função não admite assíntotas, porque se trata duma função polinomial de grau maior ou igual a 2.

Como $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x$, a função não é par nem ímpar.

Derivada da função:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - (a^3 - 6a^2 + 9a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x - a^3 + 6a^2 - 9a}{x - a}\end{aligned}$$

Podemos continuar, aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 9 & -a^3 + 6a^2 - 9a \\ a & & a & a^2 - 6a & a^3 - 6a^2 + 9a \\ \hline & 1 & a - 6 & a^2 - 6a + 9 & 0 \end{array}$$

Então:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + (a-6)x + a^2 - 6a + 9)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + (a-6)x + a^2 - 6a + 9) \\ &= a^2 + (a-6)a + a^2 - 6a + 9 \\ &= a^2 + a^2 - 6a + a^2 - 6a + 9 = 3a^2 - 12a + 9\end{aligned}$$

Então, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = g(x)$.

Cálculo da segunda derivada da função:

$$\begin{aligned}
 g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 12x + 9 - (3a^2 - 12a + 9)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 12x + 9 - 3a^2 + 12a - 9}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 3a^2 - 12x + 12a}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x^2 - a^2) - 12(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x - a)(x + a) - 12(x - a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(3x + 3a - 12)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (3x + 3a - 12) \\
 &= 3a + 3a - 12 = 6a - 12
 \end{aligned}$$

Estudo da monotonia da função:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{4 - 3} \iff x = 1 \vee x = 3$$

Logo, os zeros da derivada são 1 e 3.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	Máx. rel.	\searrow	mín. rel.	\nearrow

Como $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$, então o máximo relativo da função é 4.

Como $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$, então o mínimo relativo da função é 0.

Como $f''(x) = 6x - 12$, o sentido da concavidade do gráfico da função é o que está indicado no seguinte quadro:

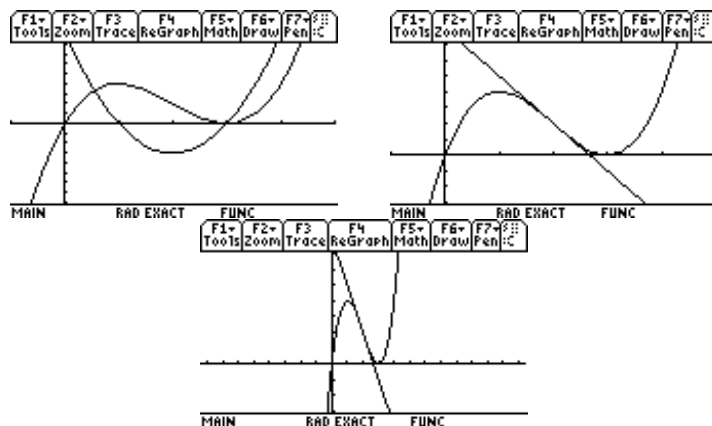
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	\frown	Ponto de Inflexão	\smile

$$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2; \quad f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$$

Equação da tangente ao gráfico de f , no ponto de inflexão:

$$y - 2 = -3(x - 2) \iff y = -3x + 8$$

Segue-se a representação gráfica da função e da sua derivada, bem como a tangente no ponto de inflexão.



Exemplo 234 *O que é uma função contínua?*

Seja f uma função real de variável real, de domínio D_f . Seja $a \in D_f$. Diz-se que f é contínua no ponto a , se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Há um teorema muito importante sobre funções contínuas, conhecido por Teorema do valor intermédio, de Bolzano, o qual afirma que uma função contínua num intervalo não passa de um valor a outro, sem passar por todos os valores intermédios.

Note-se que todas as funções polinomiais são funções contínuas em \mathbb{R} .

Consideremos a função $f(x) = x^2 - 8$, de domínio \mathbb{R} . Como $f(2) = -4$, $f(3) = 1$ e f é contínua no intervalo $[2, 3]$, então, dado um valor b , do intervalo $]-4, 1[$, existe um valor c pertencente ao intervalo $]2, 3[$, tal que $f(c) = b$. Em particular, existe pelo menos um zero de f , no intervalo $]2, 3[$. É claro que tal valor é $\sqrt{8}$, pois sabemos resolver a equação $x^2 - 8 = 0$.

Exemplo 235 *Zeros duma função polinomial*

Consideremos um polinómio de coeficientes inteiros, como por exemplo, $2x^3 - 3x^2 + 5x - 8$.

Este polinómio é de grau ímpar, pelo que tem, pelo menos um zero. Tal zero pode ser um número racional ou irracional. Se for um número racional, esse número pode ser descoberto facilmente:

Suponhamos que existe um número da forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, que é raiz de $2x^3 - 3x^2 + 5x - 8$. Então, m é um divisor de -8 (termo independente) e n é um divisor de 2 (coeficiente do termo de maior grau).

Os divisores de -8 são $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ e ± 8 , enquanto que os divisores de 2 são ± 1 e ± 2 .

Então, os únicos números racionais que podem ser zeros do polinómio são $\pm 8, \pm 4, \pm 2, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ pelo que nos basta calcular a imagem de cada um dos números anteriores e verificar se alguma delas é zero:

Seja $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 8$. Então:

$$f(8) = 864, \quad f(4) = 92, \quad f(2) = 6, \quad f(1) = -4, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -6$$

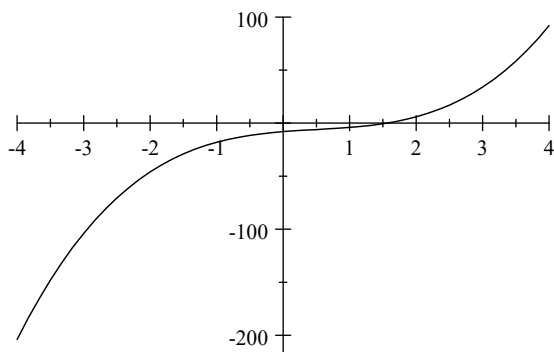
Se observarmos, com atenção, a expressão $2x^3 - 3x^2 + 5x - 8$, vemos que a imagem dum número negativo é um número negativo, pelo que podemos concluir que o polinómio dado não admite raízes racionais.

Como $f(1) = -4$ e $f(2) = 6$, então o polinómio admite um zero no intervalo $]1, 2[$, uma vez que f é contínua em \mathbb{R} . Então tal zero tem de ser um número irracional.

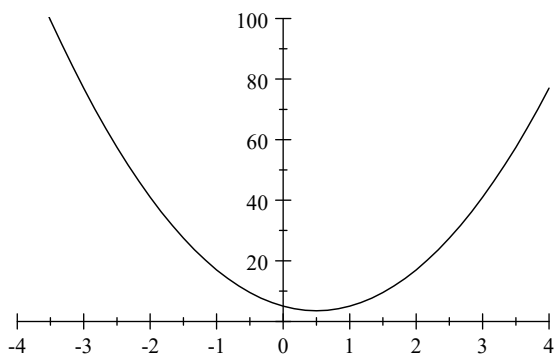
Note-se que a solução real da equação $2x^3 - 3x^2 + 5x - 8 = 0$ é $\frac{1}{6} \sqrt[3]{324 + 3\sqrt{12\,693}} - \frac{7}{2\sqrt[3]{324 + 3\sqrt{12\,693}}} + \frac{1}{2}$.

O valor anterior é aproximadamente 1,550 963 337.

E, como podemos ver pelos gráficos seguintes, a função f é estritamente crescente, pelo que não tem mais do que um zero.



$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 8$$



$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$$

Exemplo 236 Estudo da função $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Zeros da função:

Supondo que não conhecemos a maneira de resolver equações de 3º grau, para encontrarmos os zeros da função, precisamos de descobrir um deles.

Em muitos casos, há um ou mais zeros que se descobrem por tentativas.

Neste caso, calculemos a imagem de 1: $f(1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$. Então, um dos zeros da função é 1, pelo que podemos aplicar a regra de Ruffini, para decompor $f(x)$ num produto de dois polinômios, sendo um deles $x - 1$ e o outro um polinômio de segundo grau. Depois, podemos encontrar os outros zeros da função, aplicando a fórmula resolvente das equações de segundo grau.

Neste caso, podemos calcular as imagens de 2 e 3, obtendo-se $f(2) = -8 + 24 - 22 + 6 = 0$ e $f(3) = -27 + 54 - 33 + 6 = 0$, pelo que os zeros da função são 1, 2 e 3.

Também podemos aplicar o processo descrito anteriormente, obtendo-se:

Divisores de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Divisores de -1 : ± 1

Então, os valores a testar são $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Logo, basta calcular $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$, $f(3)$, $f(-6)$ e $f(6)$, para descobrirmos todas as soluções racionais da equação $-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = 0$.

Estudo do sinal da função: $-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = -(x - 1)(x - 2)(x - 3) = (1 - x)(x - 2)(x - 3)$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$1-x$	+	0	-	-	-	-	-
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

A função é negativa em $]1, 2[\cup]3, +\infty[$, nula nos pontos 1, 2 e 3 e é positiva em $] -\infty, 1[\cup]2, 3[$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 6x^2 - 11x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(-1 - \frac{6}{x} - \frac{11}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) \right] \\ &= (-\infty)^3 \times (-1 - 0 - 0 + 0) = (-\infty) \times (-1) = +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 6x^2 - 11x + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(-1 - \frac{6}{x} - \frac{11}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) \right] \\ &= (+\infty)^3 \times (-1 - 0 - 0 + 0) = (+\infty) \times (-1) = -\infty\end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e f é uma função contínua em \mathbb{R} , então o contradomínio de f é \mathbb{R} .

O gráfico da função não admite assíntotas, porque se trata duma função polinomial de grau maior ou igual a 2.

$$f(-x) = -(-x)^3 + 6(-x)^2 - 11(-x) + 6 = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

Logo, a função não é par nem ímpar.

Derivadas da função:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x^3 + 6x^2 - 11x + 6 + a^3 - 6a^2 + 11a - 6}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-x^3 + 6x^2 - 11x + a^3 - 6a^2 + 11a}{x - a}\end{aligned}$$

Podemos continuar, aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 6 & -11 & a^3 - 6a^2 + 11a \\ a & & -a & -a^2 + 6a & -a^3 + 6a^2 - 11a \\ \hline & -1 & -a + 6 & -a^2 + 6a - 11 & 0 \end{array}$$

Então:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(-x^2 + (6-a)x - a^2 + 6a - 11)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (-x^2 + (6-a)x - a^2 + 6a - 11) \\ &= -a^2 + 6a - a^2 - a^2 + 6a - 11 = -3a^2 + 12a - 11\end{aligned}$$

Então, $f'(x) = -3x^2 + 12x - 11 = g(x)$.

Cálculo da segunda derivada da função:

$$\begin{aligned}
 g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3x^2 + 12x - 11 - (-3a^2 + 12a - 11)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3x^2 + 3a^2 + 12x - 12a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3(x^2 - a^2) + 12(x - a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3(x - a)(x + a) + 12(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (-3(x + a) + 12) \\
 &= -3(a + a) + 12 = -6a + 12
 \end{aligned}$$

Estudo da monotonia da função:

$$-3x^2 + 12x - 11 = 0 \iff 3x^2 - 12x + 11 = 0 \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 33}}{3} \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Logo, os zeros da derivada são $\frac{6-\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{6+\sqrt{3}}{3}$.

A monotonia da função está indicada no quadro seguinte:

x	$-\infty$	$\frac{6-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{6+\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	mín. rel.	\nearrow	Máx. rel.	\searrow

E com alguma paciência, calculamos:

$$f\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}, \quad f\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

Então o mínimo relativo da função é $-\frac{2}{9}\sqrt{3}$, enquanto que o máximo relativo da função é $\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

Como $f''(x) = g'(x) = -6x + 12$, o sentido da concavidade do gráfico da função está indicado no seguinte quadro:

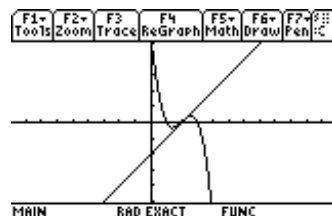
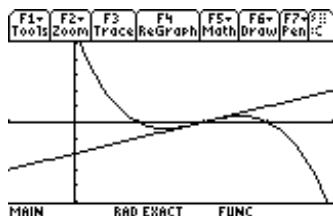
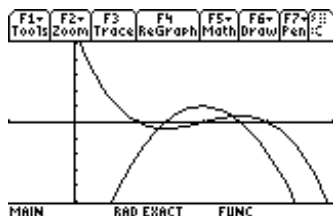
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\smile	Ponto de Inflexão	\frown

$$f(2) = -8 + 24 - 22 + 6 = 0, \quad f'(2) = -12 + 24 - 11 = 1$$

Equação da tangente ao gráfico de f , no ponto de inflexão:

$$y - 0 = 1(x - 2) \iff y = x - 2$$

Segue-se a representação gráfica da função e da sua derivada, bem como a tangente no ponto de inflexão.



Observação 237 No cálculo, por definição, da derivada duma função aparece muitas vezes expressões do tipo $x^{n+1} - a^{n+1}$, como $x^3 - a^3$, $x^4 - a^4$, etc. É claro que $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Se aplicarmos a regra de Ruffini, em casos particulares temos:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$$

Caso geral:

$$x^{n+1} - a^{n+1} = (x - a)(x^n + ax^{n-1} + \dots + a^{n-1}x + a^n)$$

Exemplo 238 Estudo da função $f(x) = 3x - x^3$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Zeros da função:

$$3x - x^3 = 0 \iff x(3 - x^2) = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$$

Estudo do sinal da função:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	-	-	-	0	+	+	+
$3 - x^2$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-

A função é negativa em $]-\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, nula nos pontos $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$ e é positiva em $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, \sqrt{3}[$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(-1 + \frac{3}{x^2} \right) \right] \\ &= (-\infty)^3 \times (-1 + 0) = (-\infty) \times (-1) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(-1 + \frac{3}{x^2} \right) \right] \\ &= (+\infty)^3 \times (-1 + 0) = (+\infty) \times (-1) = -\infty \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ e f é uma função contínua em \mathbb{R} , então o contradomínio de f é \mathbb{R} .

O gráfico da função não admite assíntotas, porque se trata duma função polinomial de grau maior ou igual a 2.

$$f(-x) = 3(-x) - (-x)^3 = -3x + x^3 = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, a função é ímpar, pelo que a primeira derivada é par e a segunda derivada volta a ser ímpar.

Derivadas da função:

Começemos por aplicar a regra de Ruffini, para factorizar $f(x) - f(a) = -x^3 + 3x + a^3 - 3a$:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 3 & a^3 - 3a \\ a & & -a & -a^2 & -a^3 + 3a \\ \hline & -1 & -a & -a^2 + 3 & 0 \end{array}$$

Então, $f(x) - f(a) = (x - a)(-x^2 - ax - a^2 + 3)$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(-x^2 - ax - a^2 + 3)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (-x^2 - ax - a^2 + 3) = -a^2 - a^2 - a^2 + 3 = -3a^2 + 3 \end{aligned}$$

Então, $f'(x) = -3x^2 + 3 = g(x)$

Cálculo da segunda derivada da função:

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3x^2 + 3 - (-3a^2 + 3)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3x^2 + 3a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3(x^2 - a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-3(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (-3(x + a)) = -3(a + a) = -6a \end{aligned}$$

Logo, $f''(x) = -6x$

Estudo da monotonia da função:

$$f'(x) = 0 \iff -3x^2 + 3 = 0 \iff x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	mín. rel.	\nearrow	Máx. rel.	\searrow

$$f(-1) = 1 - 3 = -2, \quad f(1) = 2$$

Então o mínimo relativo da função é -2 , enquanto que o máximo relativo da função é 2 .

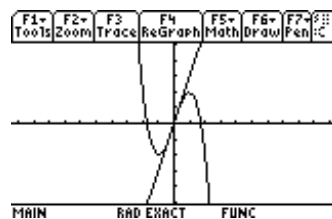
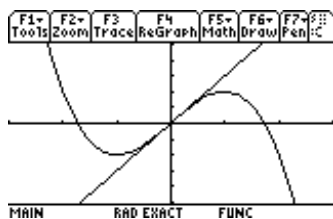
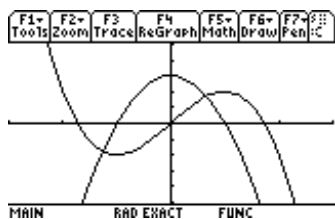
Como $f''(x) = -6x$, o sentido da concavidade do gráfico da função é o seguinte:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\cup	Ponto de Inflexão	\cap

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 3$$

Equação da tangente ao gráfico de , no ponto de inflexão: $y = 3x$

Segue-se a representação gráfica da função e da sua derivada, bem como a tangente no ponto de inflexão.



Exemplo 239 Estudo da função $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

$x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$. Então, o domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Correspondência inversa:

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \iff 2x+3 = yx-y \iff 2x-yx = -y-3 \iff (2-y)x = -y-3 \iff x = \frac{y+3}{y-2}$$

Então, existe função inversa de f , tendo-se que $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$, o que implica que $x \neq 2$. Logo, o contradomínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Como existe função inversa de f , podemos concluir que f é injectiva.

Estudo do sinal da função:

$$2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}, \quad x - 1 = 0 \iff x = 1$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1	$+\infty$
$2x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$		$+$

A função f é negativa em $]-\frac{3}{2}, 1[$, é nula no ponto $-\frac{3}{2}$ e é positiva em $] -\infty, -\frac{3}{2}[\cup]1, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+3}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, existe uma única assíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x+3}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2+3}{1^+ - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x+3}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2+3}{1^- - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Então, a recta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical.

Como 1 não pertence ao domínio de f e -1 pertence, não interessa estudar a paridade da função.

Derivadas da função:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{2x+3}{x-1} - \frac{2a+3}{a-1}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{2ax - 2x + 3a - 3 - 2ax + 2a - 3x + 3}{(x-1)(a-1)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-5x + 5a}{(x-1)(a-1)(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-5(x-a)}{(x-1)(a-1)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-5}{(x-1)(a-1)} = \frac{-5}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Então, } f'(x) = -\frac{5}{(x-1)^2}$$

Seja $g(x) = f'(x) = -\frac{5}{(x-1)^2}$. Então:

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{5}{(x-1)^2} + \frac{5}{(a-1)^2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-5(a-1)^2 + 5(x-1)^2}{(x-1)^2(a-1)^2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-5(a-1)^2 + 5(x-1)^2}{(x-1)^2(a-1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{5((x-1)^2 - (a-1)^2)}{(x-1)^2(a-1)^2(x-a)} = 5 \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1+a-1)(x-1-a+1)}{(x-1)^2(a-1)^2(x-a)} \\ &= 5 \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a-2)(x-a)}{(x-1)^2(a-1)^2(x-a)} = 5 \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a-2)}{(x-1)^2(a-1)^2} \\ &= \frac{5(2a-2)}{(a-1)^4} = \frac{10(a-1)}{(a-1)^4} = \frac{10}{(a-1)^3} \end{aligned}$$

Logo, $f''(x) = \frac{10}{(x-1)^3}$.

Estudo da monotonia da função:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
-5	-	-	-
$(x-1)^2$	+	0	+
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	\searrow		\searrow

A função não tem extremos locais; é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 1[$ e volta a ser estritamente decrescente no intervalo $]1, +\infty[$. Observe-se que a afirmação anterior não significa que a função seja estritamente decrescente em $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

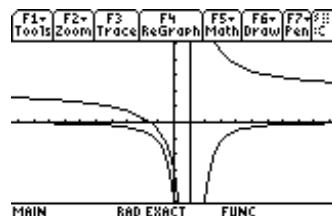
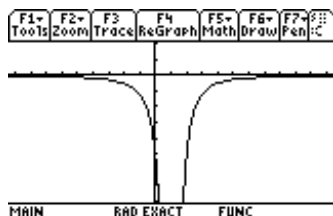
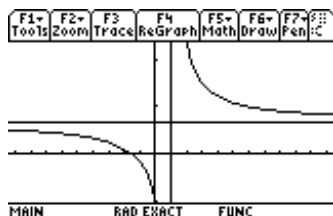
Note-se que esta última afirmação (f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$) é falsa!

Como $f''(x) = g'(x) = \frac{10}{(x-1)^3}$, o sentido da concavidade do gráfico da função é o que está indicado no seguinte quadro:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
10	+	+	+
$(x-1)^3$	-	0	+
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	\cap		\cup

Refira-se que o gráfico da função não tem pontos de inflexão, pois não está definida no ponto $x = 1$.

Segue-se a representação gráfica da função e da sua derivada:



Exemplo 240 Estudo da função $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x-1}$

$x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$. Então, o domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Correspondência inversa:

$$\begin{aligned} y = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1} &\iff 2x^2 + 3x - 2 = yx - y \iff 2x^2 + (3 - y)x + y - 2 = 0 \\ &\iff x = \frac{y - 3 \pm \sqrt{y^2 - 6y + 9 - 8(y - 2)}}{4} \\ &\iff x = \frac{y - 3 \pm \sqrt{y^2 - 14y + 25}}{4} \end{aligned}$$

Então, não existe função inversa de f , pelo que f não é injectiva.

$$y^2 - 14y + 25 = 0 \iff y = 7 \pm \sqrt{49 - 25} \iff y = 7 \pm \sqrt{24} \iff y = 7 \pm 2\sqrt{6}$$

$$\text{Então, } y^2 - 14y + 25 \geq 0 \iff y \leq 7 - 2\sqrt{6} \vee y \geq 7 + 2\sqrt{6}$$

Logo, o contradomínio da função é $]-\infty, 7 - 2\sqrt{6}] \cup [7 + 2\sqrt{6}, +\infty[$.

Substituindo na expressão $x = \frac{y-3 \pm \sqrt{y^2-14y+25}}{4}$ y por 0, obtemos os zeros da função:

$$f(x) = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \iff x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$$

Sinal da função:

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$2x^2 + 3x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$

A função é negativa em $]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, 1[$, é nula nos pontos -2 e $\frac{1}{2}$, e é positiva em $]-2, \frac{1}{2}[$.

Agora, vamos dividir $2x^2 + 3x - 2$ por $x - 1$, aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 3 & -2 \\ 1 & & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

Então, $\frac{2x^2+3x-2}{x-1} = 2x + 5 + \frac{3}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 5 + \frac{3}{x-1} \right) = 2 \times (-\infty) + 5 + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 5 + \frac{3}{x-1} \right) = 2 \times (+\infty) + 5 + 0 = +\infty$$

Embora $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, não podemos concluir que o contradomínio da função seja \mathbb{R} , porque a função não é contínua em \mathbb{R} .

Dos limites anteriores conclui-se que não há assíntotas horizontais. Verifiquemos se há assíntotas oblíquas:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2+3x-2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-x} = 2 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 5 + \frac{3}{x-1} - 2x \right) = 5 \end{aligned}$$

Então, a recta de equação $y = 2x + 5$ é uma assíntota oblíqua.

Os limites, quando x tende para $+\infty$, são exactamente iguais aos anteriores. Então, existe uma única assíntota oblíqua. Observe-se que existe uma regra fácil para obter o limite, quando x tende para ∞ , dum quociente entre duas funções polinomiais:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1} \right) = \frac{2 + 3 - 2}{1^+ - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1} \right) = \frac{2 + 3 - 2}{1^- - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Então, a recta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical.

Como 1 não pertence ao domínio de f e -1 pertence, não interessa estudar a paridade da função.

Derivadas da função:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x + 5 + \frac{3}{x-1} - 2a - 5 - \frac{3}{a-1}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x - 2a + \frac{3}{x-1} - \frac{3}{a-1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a) + \frac{3a-3-3x+3}{(x-1)(a-1)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a) + \frac{3a-3x}{(x-1)(a-1)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a) - \frac{3(x-a)}{(x-1)(a-1)}}{x - a} \\ &= 2 - \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x-a)}{(x-1)(a-1)(x-a)} = 2 - \lim_{x \rightarrow a} \frac{3}{(x-1)(a-1)} = 2 - \frac{3}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Então, } f'(x) = 2 - \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1)^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) - 3}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}.$$

Seja $g(x) = f'(x) = 2 - \frac{3}{(x-1)^2}$. Então:

$$\begin{aligned}
 g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 - \frac{3}{(x-1)^2} - 2 + \frac{3}{(a-1)^2}}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{3}{(a-1)^2} - \frac{3}{(x-1)^2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x-1)^2 - 3(a-1)^2}{(x-1)^2(a-1)^2(x-a)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{3((x-1)^2 - (a-1)^2)}{(x-1)^2(a-1)^2(x-a)} = 3 \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1+a-1)(x-1-a+1)}{(x-1)^2(a-1)^2(x-a)} \\
 &= 3 \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a-2)(x-a)}{(x-1)^2(a-1)^2(x-a)} = 3 \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a-2)}{(x-1)^2(a-1)^2} \\
 &= \frac{3(2a-2)}{(a-1)^4} = \frac{6(a-1)}{(a-1)^4} = \frac{6}{(a-1)^3}
 \end{aligned}$$

Logo, $f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$.

Estudo da monotonia da função:

$$2x^2 - 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{4+2}}{2} \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{6}}{2}$		1		$\frac{2+\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 4x - 1$	+	0	-	-	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow		\searrow	mín	\nearrow

Sentido da concavidade:

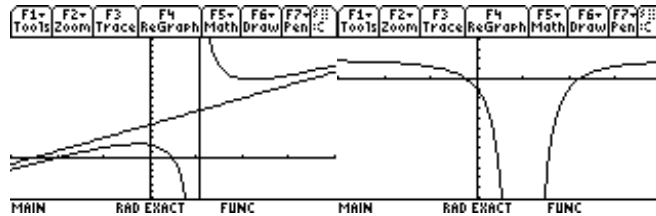
x	$-\infty$	1	$+\infty$
6	+	+	+
$(x-1)^3$	-	0	+
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	\cap		\cup

Extremos relativos:

$$f\left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right) = 7 - 2\sqrt{6}; \quad f\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right) = 7 + 2\sqrt{6}$$

O contradomínio da função é $]-\infty, 7 - 2\sqrt{6}] \cup [7 + 2\sqrt{6}, +\infty[$.

Segue-se a representação gráfica da função f , com as assíntotas, e da sua derivada:



Exemplo 241 Estudo da função $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$$x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq -1 \wedge x \neq 1$$

Logo, o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{1}{x^2-1} = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \text{ pelo que a função } f \text{ é par.}$$

Correspondência inversa:

$$y = \frac{1}{x^2-1} \iff x^2 - 1 = \frac{1}{y} \iff x^2 = 1 + \frac{1}{y} \iff x = \pm \sqrt{\frac{y+1}{y}}$$

Como não existe função inversa, a função f não é injectiva. À mesma conclusão podemos chegar, observando que a função é par.

Determinação do contradomínio da função:

y	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$y+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{y+1}{y}$	$+$	0	$-$		$+$

Então, $D'_f =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$.

Sinal da função:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{1}{x^2-1}$	$+$		$-$		$+$

A função é positiva em $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ e negativa em $]-1, 1[$, não tendo zeros.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(-\infty)^2-1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(+\infty)^2-1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função, o qual fica acima da recta, para valores convenientes de x .

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(1^-)^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(1^+)^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Então, a recta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f . Como a função é par, o mesmo acontece com a recta $x = -1$.

Derivadas da função:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{a^2-1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a^2-1-x^2+1}{(x^2-1)(a^2-1)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-(x^2-a^2)}{(x^2-1)(a^2-1)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x-a)(x+a)}{(x^2-1)(a^2-1)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x+a)}{(x^2-1)(a^2-1)} = \frac{-2a}{(a^2-1)^2} \end{aligned}$$

Então, $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Seja $g(x) = f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Então:

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-2x}{(x^2-1)^2} + \frac{2a}{(a^2-1)^2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-2x(a^2-1)^2 + 2a(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2a(x^4 - 2x^2 + 1) - 2x(a^4 - 2a^2 + 1)}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax^4 - 4ax^2 + 2a - 2a^4x + 4a^2x - 2x}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax^4 - 2a^4x + 2a - 2x - 4ax(x-a)}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax(x^3 - a^3) - 2(x-a) - 4ax(x-a)}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax(x^2 + ax + a^2)(x-a) - 2(x-a) - 4ax(x-a)}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax(x^2 + ax + a^2) - 2 - 4ax}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2} = \frac{2a^2(a^2 + a^2 + a^2) - 2 - 4a^2}{(a^2-1)^2(a^2-1)^2} \\ &= \frac{6a^4 - 4a^2 - 2}{(a^2-1)^4} = \frac{2(3a^4 - 2a^2 - 1)}{(a^2-1)^4} = \frac{2(3a^2 + 1)(a^2-1)}{(a^2-1)^4} \\ &= \frac{6a^2 + 2}{(a^2-1)^3} \end{aligned}$$

Então, $f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$.

Monotonia da função:

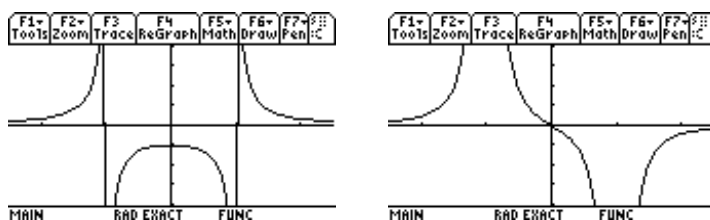
x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(x^2-1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$
$f(x)$	\nearrow		\nearrow	Máx	\searrow		\searrow

Como $f(0) = -1$, o máximo relativo da função é -1 .

Sentido da concavidade:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$6x^2 + 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	\cup		\cap		\cup

Segue-se a representação gráfica da função e da sua derivada, em separado:



Exemplo 242 Estudo da função $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

$$x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq -1 \wedge x \neq 1$$

Logo, o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \text{ pelo que a função } f \text{ é ímpar.}$$

Correspondência inversa:

$$y = \frac{x}{x^2-1} \iff yx^2 - y = x \iff yx^2 - x - y = 0$$

Temos dois casos a considerar, consoante $y = 0$ ou $y \neq 0$.

Se $y = 0$, então $x = 0$.

$$\text{Se } y \neq 0, \text{ então } x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y}.$$

Como nesta última expressão pode assumir qualquer valor diferente de zero, valor esse que, no entanto é assumido, quando x é zero, então o contradomínio da função é \mathbb{R} .

Podemos, desde já, afirmar que a função não é injectiva, porque não existe função inversa de f .

Sinal da função:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{1}{x^2-1}$	$-$		$+$	0	$-$		$+$

A função é positiva em $] -1, 0[\cup] 1, +\infty[$, negativa em $] -\infty, -1[\cup] 0, 1[$ e nula no ponto $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função.

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{(1^-)^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(1^+)^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Então, a recta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f . Como a função é ímpar, o mesmo acontece com a recta $x = -1$. No entanto, pode ser conveniente determinar os limites laterais no

ponto $x = -1$, por causa da representação gráfica.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-1}{x^2 - 1} = \frac{-1}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty\end{aligned}$$

Derivadas da função:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{a}{a^2 - 1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a^2 x - x - ax^2 + a}{(x^2 - 1)(a^2 - 1)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-ax(x-a) - (x-a)}{(x^2 - 1)(a^2 - 1)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x-a)(ax+1)}{(x^2 - 1)(a^2 - 1)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(ax+1)}{(x^2 - 1)(a^2 - 1)} = \frac{-a^2 - 1}{(a^2 - 1)^2} = -\frac{a^2 + 1}{(a^2 - 1)^2}\end{aligned}$$

Então, $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. Seja $g(x) = f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. Então:

$$\begin{aligned}g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} + \frac{a^2+1}{(a^2-1)^2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{(a^2+1)(x^2-1)^2 - (x^2+1)(a^2-1)^2}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a^2+1)(x^4 - 2x^2 + 1) - (x^2+1)(a^4 - 2a^2 + 1)}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2x^4 - 2a^2x^2 + a^2 + x^4 - 2x^2 + 1 - a^4x^2 + 2a^2x^2 - x^2 - a^4 + 2a^2 - 1}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2x^4 - a^4x^2 + 3a^2 - 3x^2 + x^4 - a^4}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a^2+1)x^4 - (a^4+3)x^2 - a^4 + 3a^2}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2(x-a)}\end{aligned}$$

Aplicando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} a & a^2+1 & 0 & -a^4-3 & 0 & -a^4+3a^2 \\ & & a^3+a & a^4+a^2 & a^3-3a & a^4-3a^2 \\ \hline & a^2+1 & a^3+a & a^2-3 & a^3-3a & 0 \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned}g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a^2+1)x^3 + (a^3+a)x^2 + (a^2-3)x + a^3-3a}{(x^2-1)^2(a^2-1)^2} \\ &= \frac{(a^2+1)a^3 + (a^3+a)a^2 + (a^2-3)a + a^3-3a}{(a^2-1)^4} \\ &= \frac{a^5 + a^3 + a^5 + a^3 + a^3 - 3a + a^3 - 3a}{(a^2-1)^4} = \frac{2a^5 + 4a^3 - 6a}{(a^2-1)^4} \\ &= \frac{2a(a^4 + 2a^2 - 3)}{(a^2-1)^4} = \frac{2a(a^2+3)(a^2-1)}{(a^2-1)^4} = \frac{2a(a^2+3)}{(a^2-1)^3}\end{aligned}$$

Então, $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

Monotonia da função:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-(x^2 + 1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x^2 - 1)^2$	$+$	0	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$
$f(x)$	\searrow		\searrow		\searrow

A função não admite extremos relativos.

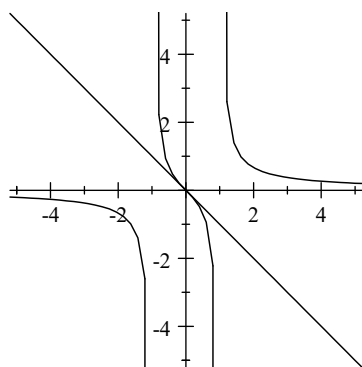
Mais uma vez se chama a atenção para o facto da função ser estritamente decrescente em cada um dos três intervalos referenciados no quadro anterior, mas não ser monótona.

Sentido da concavidade:

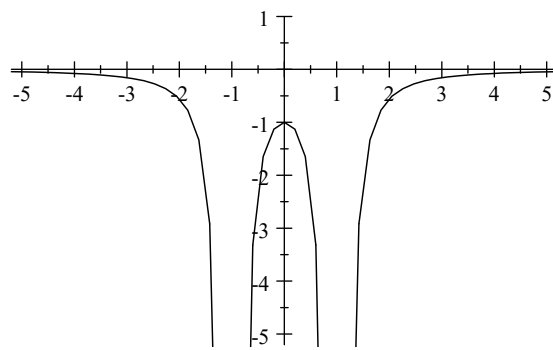
x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 + 3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2 - 1)^3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	\cap		\cup	P Inf	\cap		\cup

Existe um ponto de inflexão ($x = 0$). Como $f(0) = 0$ e $f'(0) = -1$, a equação da tangente no ponto $x = 0$ é $y = -x$.

Segue-se a representação gráfica da função (incluindo a tangente no ponto de inflexão) e da sua derivada:



$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad y = -x$$



$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

Exemplo 243 Estudo da função $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a função é par, razão pela qual a função não é injectiva, nem existe função inversa de f . Acrescente-se, também, que do facto da função ser par se conclui que a primeira derivada é ímpar e que a segunda derivada é par.

Correspondência inversa:

$$y = \frac{1}{x^2+1} \iff x^2+1 = \frac{1}{y} \iff x^2 = \frac{1}{y} - 1 \iff x = \pm \sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

Logo, $\frac{1-y}{y} \geq 0$.

y	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$1-y$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-y}{y}$	$-$		$+$	0	$-$

Logo, o contradomínio da função é $]0, 1]$, o que mostra que a função tem um máximo absoluto e não tem mínimo absoluto.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{(-\infty)^2 + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{(+\infty)^2 + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+\end{aligned}$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f . A função é contínua em \mathbb{R} , pelo que não admite assíntotas verticais.

Derivadas da função:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{a^2+1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a^2+1-x^2-1}{(a^2+1)(x^2+1)}}{x - a} \\ &= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{(a^2+1)(x^2+1)(x-a)} = - \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a)(x-a)}{(a^2+1)(x^2+1)(x-a)} \\ &= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{x+a}{(a^2+1)(x^2+1)} = - \frac{2a}{(a^2+1)^2}\end{aligned}$$

Seja $g(x) = f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Então:

$$\begin{aligned}g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2a}{(a^2+1)^2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-2x(a^2+1)^2 + 2a(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2a(x^4 + 2x^2 + 1) - 2x(a^4 + 2a^2 + 1)}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax^4 + 4ax^2 + 2a - 2a^4x - 4a^2x - 2x}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax(x^3 - a^3) + 4ax(x-a) - 2(x-a)}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax(x-a)(x^2+ax+a^2) + 4ax(x-a) - 2(x-a)}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2ax(x^2+ax+a^2) + 4ax - 2}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2} = \frac{2a^2(a^2+a^2+a^2) + 4a^2 - 2}{(a^2+1)^4} \\ &= \frac{6a^4 + 4a^2 - 2}{(a^2+1)^4} = \frac{2(a^2+1)(3a^2-1)}{(a^2+1)^4} = \frac{6a^2-2}{(a^2+1)^3}\end{aligned}$$

Então, $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ e $f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$.

Monotonia da função:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	0	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow

Então, $f(0) = 1$ que é o máximo da função.

Sentido da concavidade:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$6x^2-2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x^2+1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\smile	PI	\frown	PI	\smile

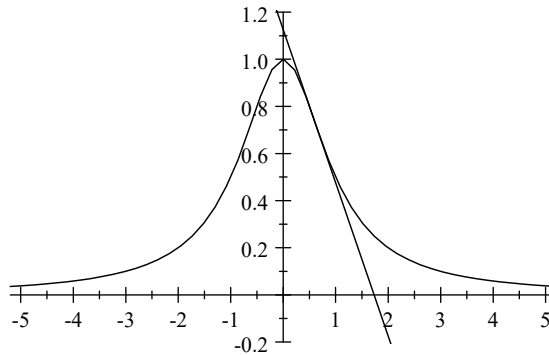
O gráfico da função tem dois pontos de inflexão.

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{4}; \quad f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$$

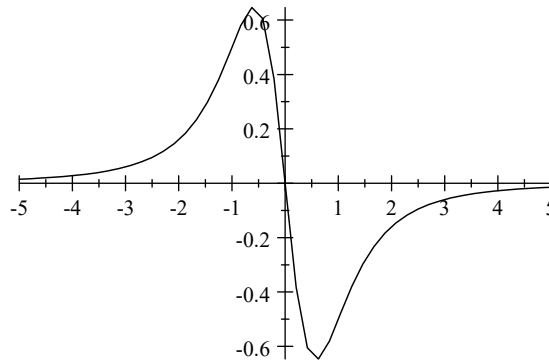
Então, uma equação da tangente ao gráfico de f , no ponto $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, é:

$$y - \frac{3}{4} = -\frac{3}{8}\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \iff y = -\frac{3}{8}\sqrt{3}x + \frac{9}{8}$$

Segue-se a representação gráfica da função, incluindo a tangente no ponto de inflexão, e da sua derivada:



$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$



$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Exemplo 244 Estudo da função $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a função é ímpar, donde se conclui que a primeira derivada é par e que a segunda derivada é ímpar.

Correspondência inversa:

$$y = \frac{x}{x^2+1} \iff yx^2 - x + y = 0$$

Se $y = 0$, então $x = 0$, donde vem que zero pertence ao contradomínio da função.

$$\text{Se } y \neq 0, \text{ então } x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Logo, $1 - 4y^2 \geq 0$, sem impormos $y \neq 0$, pelo que se disse anteriormente.

Logo, $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$, pelo que o contradomínio de f é $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, o que mostra que a função tem máximo e mínimo absolutos.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f . A função é contínua em \mathbb{R} , pelo que não admite assíntotas verticais.

Sinal da função:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$-$
$x^2 + 1$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$-$

Derivadas da função:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x}{x^2+1} - \frac{a}{a^2+1}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a^2x + x - ax^2 - a}{(x^2+1)(a^2+1)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{-ax(x-a) + x-a}{(a^2+1)(x^2+1)}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1-ax)(x-a)}{(a^2+1)(x^2+1)(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1-ax}{(a^2+1)(x^2+1)} = \frac{1-a^2}{(a^2+1)^2} \end{aligned}$$

Então, $f'(x) = -\frac{1}{(x^2+1)^2}x^2 + \frac{1}{(x^2+1)^2}$

Seja $g(x) = f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Então:

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{1-a^2}{(a^2+1)^2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{(1-x^2)(a^2+1)^2 - (1-a^2)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1-x^2)(a^4+2a^2+1) - (1-a^2)(x^4+2x^2+1)}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^4+2a^2+1 - a^4x^2 - 2a^2x^2 - x^2 - x^4 - 2x^2 - 1 + a^2x^4 + 2a^2x^2 + a^2}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^4+3a^2-a^4x^2-x^4-3x^2+a^2x^4}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2x^2(x^2-a^2) - 3(x^2-a^2) - (x^2-a^2)(x^2+a^2)}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2x^2(x-a)(x+a) - 3(x-a)(x+a) - (x-a)(x+a)(x^2+a^2)}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2x^2(x+a) - 3(x+a) - (x+a)(x^2+a^2)}{(x^2+1)^2(a^2+1)^2(x-a)} \\ &= \frac{a^4 \times 2a - 6a - 2a \times 2a^2}{(a^2+1)^4} = \frac{2a^5 - 4a^3 - 6a}{(a^2+1)^4} \\ &= \frac{2a(a^4 - 2a^2 - 3)}{(a^2+1)^4} = \frac{2a(a^2+1)(a^2-3)}{(a^2+1)^4} = \frac{2a(a^2-3)}{(a^2+1)^3} \end{aligned}$$

Então, $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ e $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Monotonia da função:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2 + 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow	mín	\nearrow	Máx	\searrow

$$f(-1) = -\frac{1}{2}, f(1) = \frac{1}{2}.$$

Sentido da concavidade:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x^2 + 1)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\cap	PI	\cup	PI	\cap	PI	\cup

O gráfico da função tem três pontos de inflexão.

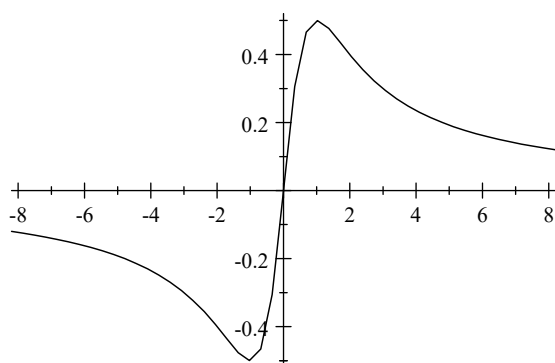
$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad f(\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\sqrt{3}, \quad f(0) = 0$$

$$; f'(\sqrt{3}) = \frac{1-3}{4^2} = -\frac{1}{8}$$

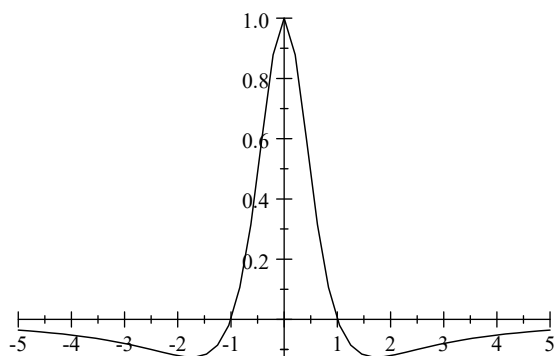
Então, uma equação da tangente ao gráfico de f , no ponto $x = \sqrt{3}$, é:

$$y - \frac{1}{4}\sqrt{3} = -\frac{1}{8}(x - \sqrt{3}) \iff y = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\sqrt{3}$$

Representação gráfica da função e da derivada:



$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$



$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Exemplo 245 Estudo da função $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$

O domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f(-x) = \frac{-x}{((-x)^2-1)^2} = -\frac{x}{(x^2-1)^2} = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

A função f é ímpar, a primeira derivada é par e a segunda derivada é ímpar.

A correspondência inversa não é fácil de obter, porque teremos uma equação de quarto grau.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^4 - x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(-\infty)^3} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+, \text{ porque a função é ímpar}$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

Sinal da função:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x^2 - 1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$

Assíntotas verticais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-1}{(0^-)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-1}{(0^+)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty\end{aligned}$$

O gráfico da função tem duas assíntotas verticais (as rectas de equação $x = \pm 1$).
Derivadas da função:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\frac{x}{(x^2-1)^2} - \frac{a}{(a^2-1)^2}}{x - a} = \frac{(a^4 - 2a^2 + 1)x - a(x^4 - 2x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2 (a^2 - 1)^2 (x - a)} \\ &= \frac{a^4x - 2a^2x + x - ax^4 + 2ax^2 - a}{(x^2 - 1)^2 (a^2 - 1)^2 (x - a)} \\ &= \frac{-ax(x^3 - a^3) + 2ax(x - a) + x - a}{(x^2 - 1)^2 (a^2 - 1)^2 (x - a)} \\ &= \frac{-ax(x - a)(x^2 + ax + a^2) + (x - a)(1 + 2ax)}{(x^2 - 1)^2 (a^2 - 1)^2 (x - a)} \\ &= \frac{-ax(x^2 + ax + a^2) + (1 + 2ax)}{(x^2 - 1)^2 (a^2 - 1)^2}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-ax(x^2 + ax + a^2) + (1 + 2ax)}{(x^2 - 1)^2 (a^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-a^2(a^2 + a^2 + a^2) + (1 + 2a^2)}{(a^2 - 1)^4} \\ &= \frac{-3a^4 + 2a^2 + 1}{(a^2 - 1)^4} = \frac{(a^2 - 1)(-3a^2 - 1)}{(a^2 - 1)^4} = -\frac{3a^2 + 1}{(a^2 - 1)^3}\end{aligned}$$

Então, $f'(x) = -\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} = g(x)$.

Não apresentamos os cálculos para a segunda derivada.

Todos estes cálculos "horrorosos" são desnecessários, se soubermos as chamadas regras de derivação.

Regras de derivação das funções básicas

Proposição 246 *Sejam u, v, w funções diferenciáveis. Então:*

$$1. (ax + b)' = a, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u', \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $(u+v)' = u' + v'$
5. $(u-v)' = u' - v'$
6. $(uv)' = u'v + uv'$
7. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
8. $(\alpha u)' = \alpha u', \forall \alpha \in \mathbb{R}$
9. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
10. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}$
11. $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}$

Demonstração (de algumas das regras)

1. Seja $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$. Então,

$$f'(k) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{(ax + b) - (ak + b)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{ax + b - ak - b}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{a(x - k)}{x - k} = a$$

4. Seja $h(x) = f(x) + g(x)$, com f e g diferenciáveis no ponto $x = a$.

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

6. Seja $h(x) = f(x) \times g(x)$, com f e g diferenciáveis no ponto $x = a$.

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(g(x) - g(a))}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g(x) - g(a))}{x - a} + g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \end{aligned}$$

Saliente-se que na fórmula anterior (e nas restantes) estamos a supor que as funções envolvidas (neste caso, f e g) têm derivada finita.

8. Seja $g(x) = \alpha f(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(a)}{x - a} = \alpha \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha f'(a)$$

Exemplo 247 Determinemos as derivadas das funções anteriormente estudadas, aplicando as regras de derivação:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2, \forall x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= 2x + 3, \forall x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R} \implies f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= -2x + 3, \forall x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = -2, \forall x \in \mathbb{R} \implies f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2, \forall x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R} \implies f''(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 - 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 2x - 2, \forall x \in \mathbb{R} \implies f''(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= -x^2 - 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = -2x - 2, \forall x \in \mathbb{R} \implies f''(x) = -2, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \implies f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \implies f''(x) = 6x - 12 \\ f(x) &= -x^3 + 6x^2 - 11x + 6 \implies f'(x) = -3x^2 + 12x - 11 \implies f''(x) = -6x + 12 \\ f(x) &= 3x - x^3 \implies f'(x) = 3 - 3x^2 \implies f''(x) = -6x \\ f(x) &= \frac{2x+3}{x-1} \implies \begin{cases} f'(x) = \frac{2(x-1)-1(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2} \\ f''(x) = \frac{0+5 \times 2(x-1) \times 1}{((x-1)^2)^2} = \frac{10(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{10}{(x-1)^3} \end{cases} \\ f(x) &= \frac{2x^2+3x-2}{x-1} \\ \begin{cases} f'(x) = \frac{(4x+3)(x-1)-(2x^2+3x-2)1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-4x+3x-3-2x^2-3x+2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2} \\ f''(x) = \frac{(4x-4)(x-1)^2-(2x^2-4x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(4x-4)(x-1)-(2x^2-4x-1)2}{(x-1)^3} \\ = \frac{4x^2-4x-4x+4-4x^2+8x+2}{(x-1)^3} = \frac{6}{(x-1)^3} \end{cases} \\ f(x) &= \frac{1}{x^2-1} \\ \begin{cases} f'(x) = \frac{0-2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \\ f''(x) = -\frac{2(x^2-1)^2-2x \times 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = -\frac{2(x^2-1)-2x \times 2 \times 2x}{(x^2-1)^3} \\ = -\frac{2x^2-2-8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} \end{cases} \\ f(x) &= \frac{x}{x^2-1} \\ \begin{cases} f'(x) = \frac{1 \times (x^2-1) - x \times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} \\ f''(x) = -\frac{2x(x^2-1)^2 - (x^2+1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)4x}{(x^2-1)^3} \\ = -\frac{2x^3-2x-4x^3-4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} \end{cases} \\ f(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ \begin{cases} f'(x) = \frac{0-1 \times 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \\ f''(x) = -\frac{2(x^2+1)^2 - 2x \times 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = -\frac{2(x^2+1) - 2x \times 2 \times 2x}{(x^2+1)^3} \\ = -\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} \end{cases} \\ f(x) &= \frac{x}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
f'(x) = \frac{1(x^2+1)-x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\
f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)-(1-x^2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1)-(1-x^2)4x}{(x^2+1)^3} \\
\quad = \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} \\
f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} \\
\begin{cases}
f'(x) = \frac{1(x^2-1)^2-x(2(x^2-1)2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{(x^2-1)-x(4x)}{(x^2-1)^3} = \frac{x^2-1-4x^2}{(x^2-1)^3} = -\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3} \\
f''(x) = -\frac{6x(x^2-1)^3-(3x^2+1)3(x^2-1)^2 2x}{(x^2-1)^6} = -\frac{6x(x^2-1)-(3x^2+1)6x}{(x^2-1)^4} = -\frac{6x^3-6x-18x^3-6x}{(x^2-1)^4} \\
\quad = \frac{12x^3+12x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}
\end{cases}
\end{cases}$$

Exemplo 248 Estudo da função $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Correspondência inversa:

$$y = \sqrt{x^2+4} \iff y \geq 0 \wedge y^2 = x^2+4 \iff y \geq 0 \wedge x = \pm\sqrt{y^2-4}$$

A função f não é injectiva, porque não tem função inversa.

De $y \geq 0 \wedge y^2-4 \geq 0$, vem $y \geq 2$, pelo que o contradomínio de f é $[2, +\infty[$.

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2+4} = \sqrt{x^2+4} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que a função f é par.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}, \quad f''(x) = \frac{1\sqrt{x^2+4}-x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}(x^2+4)}$$

Como $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

Como $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ e o denominador é positivo, então o sinal de $f'(x)$ é o sinal de x . Logo, f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Logo, a função tem um mínimo absoluto no ponto $x = 0$, sendo que o valor do mínimo é 2.

Como a função é contínua em \mathbb{R} , o gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

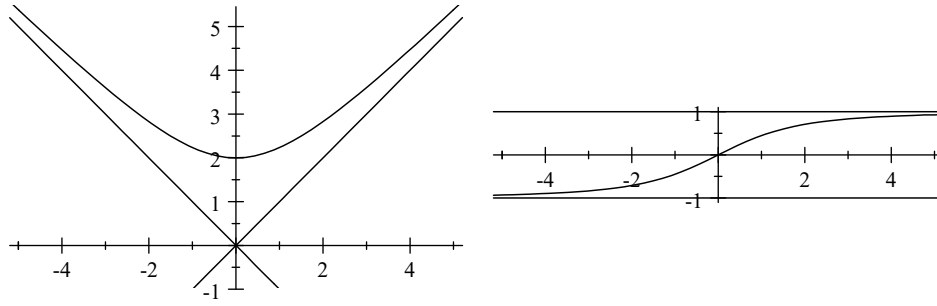
$$\begin{aligned}
m_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+4}} = 1 \\
b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{4}{\sqrt{(+\infty)^2+4}+(+\infty)} = \frac{4}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Logo, uma das assíntotas ao gráfico de f é a recta de equação $y = x$.

Como a função é par, a equação da outra assíntota é $y = -x$ (recta com a mesma ordenada na origem e declive simétrico, relativamente à outra assíntota).

Registe-se que, no caso duma função ímpar, as assíntotas não verticais (se existirem) têm declives iguais e ordenadas na origem simétricas.

Segue-se a representação gráfica da função e da primeira derivada, incluindo as assíntotas em ambos os casos:



$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Exemplo 249 Estudo da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

Correspondência inversa:

$$y = \sqrt{x^2 - 4} \iff y \geq 0 \wedge y^2 = x^2 - 4 \iff y \geq 0 \wedge x = \pm\sqrt{y^2 + 4}$$

A função não é injectiva, porque não tem função inversa.

De $y \geq 0 \wedge x = \pm\sqrt{y^2 + 4}$, vem $y \geq 0$, pelo que o contradomínio de f é $[0, +\infty[$.

Fazendo $y = 0$, temos $x = \pm 2$, pelo que a função admite dois zeros.

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 4} = f(x)$, $\forall x \in D_f$, pelo que a função é par.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}; \quad f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}}{(\sqrt{x^2 - 4})^2} = \frac{x^2 - 4 - x^2}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{-4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}}$$

Como $f''(x) < 0$, $\forall x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

Como o denominador de $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ é positivo, então o sinal de $f'(x)$ é o sinal de x . Logo, f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2[$ e é estritamente crescente em $]2, +\infty[$. Como f se anula nos pontos -2 e 2 e é positiva nos restantes pontos do domínio, podemos afirmar que f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e é estritamente crescente em $[2, +\infty[$.

Como f é uma função par, tem um mínimo absoluto nos pontos $x = -2$ e $x = 2$, sendo que o valor do mínimo é zero.

Como a função é contínua em $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

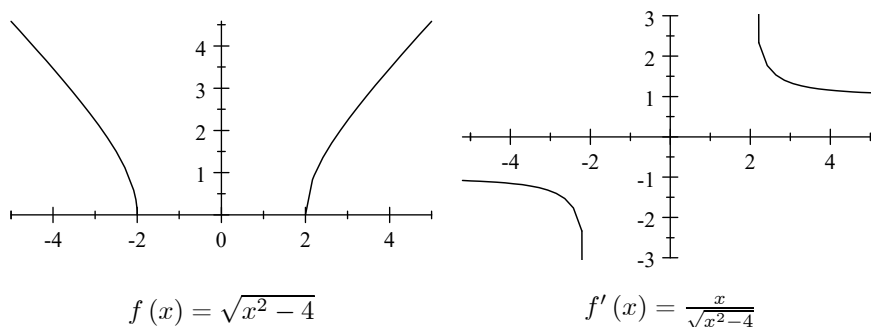
Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 4}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4}} = 1 \\ b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4} - x)(\sqrt{x^2 - 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 4} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \frac{-4}{+\infty} = 0^- \end{aligned}$$

Logo, uma das assíntotas ao gráfico de f é a recta de equação $y = x$.

Como a função é par, a equação da outra assíntota é $y = -x$ (recta com a mesma ordenada na origem e declive simétrico, relativamente à outra assíntota).

Segue-se a representação gráfica da função e da primeira derivada:

**Exemplo 250** Estudo da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\} = [-2, 2]$

Correspondência inversa:

$$y = \sqrt{4 - x^2} \iff y \geq 0 \wedge y^2 = 4 - x^2 \iff y \geq 0 \wedge x = \pm \sqrt{4 - y^2}$$

A função não é injectiva, porque não tem função inversa.

De $y \geq 0 \wedge x = \pm \sqrt{4 - y^2}$, vem $0 \leq y \leq 2$, pelo que o contradomínio de f é $[0, 2]$.

Fazendo $y = 0$, temos $x = \pm 2$, pelo que a função admite dois zeros.

$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$, $\forall x \in D_f$, pelo que a função é par.

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}; \quad f''(x) = -\frac{\sqrt{4-x^2} - x \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2} = -\frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{-4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

Como $f''(x) < 0$, $\forall x \in]-2, 2[$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

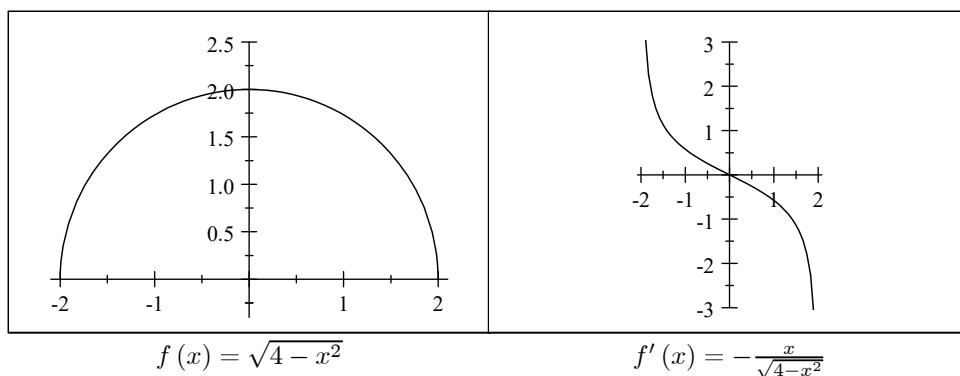
Como o denominador de $\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ é positivo, então o sinal de $f'(x)$ é o sinal de $-x$. Logo, f é estritamente crescente em $]-2, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, 2[$. Como f se anula nos pontos -2 e 2 e é positiva nos restantes pontos do domínio, podemos afirmar que f é estritamente crescente em $[-2, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, 2]$.

Como f é uma função par, tem um máximo absoluto nos pontos $x = 0$, sendo que o valor do máximo é 2 . A função admite um mínimo absoluto nos pontos $x = -2$ e $x = 2$. O valor do mínimo é zero.

Como a função é contínua em $[-2, 2]$, o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

Como o domínio da função é $[-2, 2]$, não pode haver assíntotas não verticais:

Segue-se a representação gráfica da função e da primeira derivada:



Os referenciais são monométricos, pelo que o primeiro gráfico é uma semicircunferência (incompleta, na imagem apresentada).

Exemplo 251 *Discussão do número de zeros da função $f(x) = x^3 - 3x + c$*

Uma função polinomial de terceiro grau não pode ter mais do que três zeros, mas pode ter menos (um ou dois).

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow

A função tem um máximo relativo no ponto $x = -1$ e um mínimo relativo no ponto $x = 1$.

$$f(-1) = -1 + 3 + c = c + 2; \quad f(1) = 1 - 3 + c = c - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + c) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 (1 - \frac{3}{x^2} + \frac{c}{x^3})) = -\infty$$

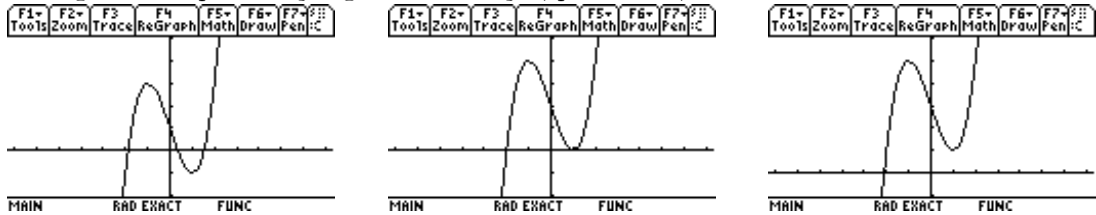
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + c) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 (1 - \frac{3}{x^2} + \frac{c}{x^3})) = +\infty$$

Logo, a função tem, pelo menos, um zero, o que, de resto, acontece com todas as funções polinomiais de grau ímpar.

Se o valor do máximo for positivo e o valor do mínimo negativo, a função terá três zeros. Se o máximo for zero ou o mínimo for zero, então a função terá dois zeros. Nos restantes casos a função tem, apenas, um zero.

Se $c + 2 > 0 \wedge c - 2 < 0$, isto é, se $-2 < c < 2$, a função admite três zeros; se $c = \pm 2$, a função tem dois zeros; se $c < -2 \vee c > 2$, a função tem um só zero.

Segue-se a representação gráfica da função, para $c = 1$, $c = 2$ e $c = 3$.



Como podemos verificar graficamente, no primeiro caso, a função admite três zeros, no segundo caso, dois zeros e, no terceiro caso, um zero.

Exemplo 252 *Estudo da função $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$*

O domínio da função é \mathbb{R} .

Correspondência inversa:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 = y &\iff x^4 - 5x^2 + 4 - y = 0 \iff x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(4 - y)}}{2} \\ &\iff x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{9 + 4y}}{2}} \end{aligned}$$

Como não existe função inversa, f não é injectiva.

Como $9+4y$ tem de ser não negativo, então $y \geq -\frac{9}{4}$, pelo que o contradomínio de f é $[-\frac{9}{4}, +\infty[$.

Fazendo $y = 0$, em $x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{9+4y}}{2}}$, temos $x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 3}{2}}$, ou seja, $x = \pm 1 \vee x = \pm 2$. Então, ± 1 e ± 2 são os zeros da função.

$$f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, f é uma função par.

$$f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$$

$$f'(x) = 0 \iff 2x(2x^2 - 5) = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Monotonia da função:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$2x^2 - 5$	+	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\searrow	mín	\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow

$$f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^4 - 5\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 + 4 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = \frac{25-50+16}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$f(0) = 4$$

$$f''(x) = 12x^2 - 10 = 2(6x^2 - 5)$$

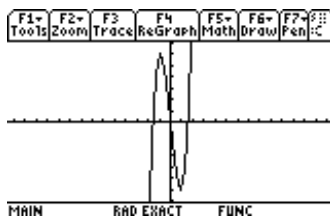
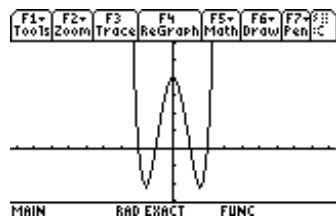
$$f''(x) = 0 \iff 2(6x^2 - 5) = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

Sentido da concavidade:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$+\infty$
$12x^2 - 10$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\cup	PI	\cap	PI	\cup

$$f\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = \left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^4 - 5\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2 + 4 = \frac{25}{36} - \frac{25}{6} + 4 = \frac{25-150+144}{36} = \frac{19}{36}$$

Representação gráfica da função e da derivada:



Exercício 253 Seja g uma função real de domínio \mathbb{R}^+ tal que $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ e a recta de equação $y = 2x - 3$ é uma assíntota ao gráfico de g . Determine a equação reduzida da assíntota não vertical ao gráfico da função f definida por $f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$.

Resolução

Como a recta de equação $y = 2x - 3$ é uma assíntota ao gráfico de g , então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = -3$. Ora,

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(x)} = \frac{1}{2} \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - xg(x)}{2g(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(2x - g(x))}{2g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2g(x)} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - g(x)) = \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Logo, a equação reduzida da assíntota pretendida é $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

Note-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - g(x)) = 3$, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = -3$.

Exercício 254 Seja f uma função real ímpar, contínua em \mathbb{R} , estritamente crescente e cujo gráfico admite a assíntota (à direita) de equação $y = 2x + 3$. Seja g a função definida por $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{f(x)}$.

1. Calcule $f(0)$. Justifique.
2. Determine as assíntotas ao gráfico de f .
3. Determine as assíntotas ao gráfico de g .

Resolução

1. Como f é ímpar e o domínio de f é \mathbb{R} , temos que $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Então, $f(0) = -f(0)$, donde vem $2f(0) = 0$ e, por isso, temos $f(0) = 0$.
2. Como f é contínua em \mathbb{R} , não há assíntotas verticais. Como $y = 2x + 3$ é assíntota à direita, temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 3) = 0$. Então, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-f(x)}{-x} = 2$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(-x) - 2(-x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x) + 2x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -3$.

Então, a recta de equação $y = 2x - 3$ é assíntota ao gráfico de f . Logo, o gráfico de f admite duas únicas assíntotas ($y = 2x \pm 3$).

3. Como f é estritamente crescente e $f(0) = 0$, então o domínio de g é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como f é contínua em \mathbb{R} e $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{f(x)}$, podemos concluir que g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que o gráfico de g pode admitir, quando muito, uma assíntota vertical.

Ora, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + 1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Analogamente, temos $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$. Logo, a recta $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g . Quanto às assíntotas não

verticais, temos

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+x+1}{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2+x+1)}{x^2f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \\
 b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{f(x)} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+2x+2-xf(x)}{2f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x+2-f(x))}{2f(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2-f(x)}{2} + 0 \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(-\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-2x-2}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3-2}{2} \right) = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Então, temos que a recta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ é assíntota ao gráfico de g . Falta-nos a outra assíntota:

$$\begin{aligned}
 m_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+x+1}{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2+x+1)}{x^2f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2} \\
 b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(g(x) + \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{f(x)} + \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x+2+xf(x)}{2f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2x+2+f(x))}{2f(x)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2+f(x)}{2} + 0 \\
 &= -\frac{1}{2} \times \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)-2x-2}{2} \right) = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3+2}{2} \right) = -\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Então, temos que a recta $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ é assíntota ao gráfico de g .

Estão, assim, encontradas todas as assíntotas ao gráfico de g .

Exercício 255 Seja f uma função real par, contínua em \mathbb{R} , com um único zero e cujo gráfico admite a assíntota (à direita) de equação $y = 2x + 3$. Seja g a função definida por $g(x) = \frac{x^2+x+1}{f(x)}$.

1. Calcule $f(0)$. Justifique.
2. Determine as assíntotas ao gráfico de f .
3. Determine as assíntotas ao gráfico de g .

Resolução

1. Existe um número real a tal que $f(a) = 0$. Como f é par, então, $f(-a) = 0$. Como o zero da função é único, tem de ser $a = -a$, donde vem $a = 0$.

2. Como $y = 2x + 3$ é assíntota à direita, temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3$.

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{-x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2.$$

$$\text{E } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(-x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3.$$

Então, as assíntotas não verticais são as rectas de equação $y = \pm 2x + 3$. Como f é contínua em \mathbb{R} , não há assíntotas verticais.

3. Começemos por observar que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 3$, o que significa que devemos ter $f(x) > 2x > 0$, para certo valor positivo x . Como a função é contínua, não pode haver um valor positivo a , tal que $f(a) < 0$, pois, nesse caso, a função f teria um zero positivo (pelo Teorema de Bolzano). Então, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Como f é par, então $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Então, g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por ser um quociente entre duas funções contínuas, tendo-se que o denominador apenas se anula no ponto $x = 0$.

$$\text{Ora, } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + 1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty. \text{ Como } f \text{ é par, } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Quanto às assíntotas não verticais, temos

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2+x+1}{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2+x+1)}{x^2f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \\ b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{f(x)} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+2x+2 - xf(x)}{2f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2x+2-f(x))}{2f(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2-f(x)}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 2x - 2}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \left(- \frac{3-2}{2} \right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Então, temos que a recta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ é assíntota ao gráfico de g . Falta-nos a outra assíntota:

$$\begin{aligned} m_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+x+1}{f(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2+x+1)}{x^2f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \\ b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{f(x)} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x+2 - xf(x)}{2f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2x+2-f(x))}{2f(x)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2-f(x)}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2} \times \left(-\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-2x-2}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{-3-2}{2} \right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Exercício 256 Na vedação dum recinto rectangular, gastaram-se 80m de rede. Sabendo que um dos lados do rectângulo não foi vedado (devido à existência dum muro) e que a área do recinto é a máxima possível, determine as dimensões do recinto e o comprimento do muro.

Resolução

Seja x o comprimento dos lados perpendiculares ao muro e b o comprimento do muro (em metro).

Então, $2x + b = 80$, donde vem $b = 80 - 2x$.

Então, a área do rectângulo é $A(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$, com $0 < x < 40$.

Logo, $A'(x) = 80 - 4x$

x	0		20		40
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	

A função tem um máximo para $x = 20$, pelo que o recinto tem 20m de largura por 40m de comprimento.

O muro tem 40m de comprimento.

Exercício 257 Na vedação dum recinto rectangular, gastaram-se 160m de rede com 2m de largura. Sabendo que um dos lados do rectângulo não foi vedado (devido à existência dum muro), que a área do recinto é a máxima possível e que a vedação tem 4m de altura, determine as dimensões do recinto e indique o comprimento do muro.

Resolução

Seja x o comprimento dos lados perpendiculares ao muro e b o comprimento do muro (em metro).

Então, $2(2x + b) = 160$, donde vem $2x + b = 80$. E obtivemos a mesma função do exercício anterior.

Então, como no exemplo anterior, dois lados consecutivos do rectângulo medem 20m e 40m. O muro tem 40m de comprimento.

Exercício 258 Na vedação dum recinto desportivo, gastaram-se 160m de rede com 2m de largura. Sabendo que um dos lados do rectângulo não foi vedado (devido à existência dum muro), que a área do recinto é a máxima possível, que a vedação, junto às balizas, tem 4m de altura e que, no lado oposto ao muro, tem 2m de altura, determine as dimensões do recinto e o comprimento do muro.

Resolução

Seja x o comprimento dos lados perpendiculares ao muro e b o comprimento do muro (em metro).

Então, $4x + b = 160$, donde vem $b = 160 - 4x$, pelo que a área do rectângulo é $A(x) = x(160 - 4x)$, ou seja, $A(x) = 160x - 4x^2$, com $0 < x < 40$.

Então, $A'(x) = 160 - 8x$.

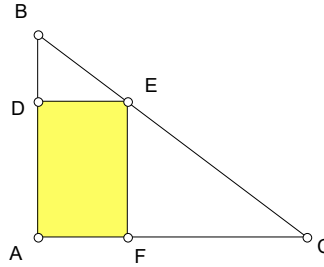
x	0		20		40
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$		↗	Máx	↘	

A função tem um máximo para $x = 20$, pelo que o recinto tem 20 m de largura por 80 m de comprimento ($b = 160 - 80$). O muro tem 80 m de comprimento.

Exercício 259 Considere um triângulo rectângulo em que os lados medem 3 cm, 4 cm e 5 cm. Qual a área máxima do rectângulo que pode ser "inscrito" no triângulo?

Resolução

Suponhamos que dois dos lados do rectângulo estão sobre os catetos do triângulo, conforme a figura seguinte (que não pretende traduzir a solução exacta do problema):



Sejam $\overline{BD} = x$ cm e $\overline{DE} = y$ cm. Como os triângulos $[BDE]$ e $[ABC]$ são semelhantes, temos $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, pelo que $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, ou seja, $y = \frac{4}{3}x$.

Então, a área do rectângulo (em cm^2) é dada por

$$(3 - x)y = \frac{4}{3}x(3 - x)$$

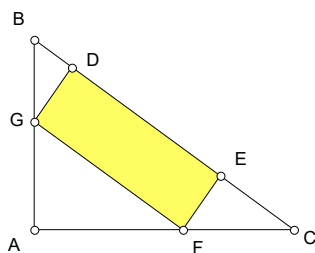
Estudemos a função $A(x) = \frac{4}{3}x(3 - x) = 4x - \frac{4}{3}x^2$, com $0 < x < 3$:

Como $A'(x) = 4 - \frac{8}{3}x$, temos $A'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$. Então:

x	0		$\frac{3}{2}$		3
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$		↗	Máx	↘	

Como $A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \left(3 - \frac{3}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$, então, a área máxima do rectângulo é 3 cm^2 , tendo-se um rectângulo com $\overline{AD} = \frac{3}{2} \text{ cm}$ e $\overline{DE} = 2 \text{ cm}$.

No entanto, há outra possibilidade de "inscrever" um rectângulo no triângulo dado: $5 - \frac{28}{9}x = 0$,
Solution is: $\{x = \frac{45}{28}\}$



Sejam $\overline{BD} = x$ cm, $\overline{DG} = y$ cm, $\overline{DE} = w$ cm e $\overline{EC} = z$ cm. Então, $w = 5 - x - z$.

De $\tan B = \frac{4}{3} = \frac{y}{x}$, vem $y = \frac{4}{3}x$. De $\tan C = \frac{3}{4} = \frac{y}{z}$, vem $z = \frac{4}{3}y = \frac{16}{9}x$.

Então, $w = 5 - x - z = 5 - x - \frac{16}{9}x = 5 - \frac{25}{9}x$.

Logo, a área do rectângulo é dada por

$$A(x) = \frac{4}{3}x \left(5 - \frac{25}{9}x \right) = \frac{20}{3}x - \frac{100}{27}x^2$$

Na expressão anterior, devemos ter $0 < x < \frac{9}{5}$, ou $0 \leq x \leq \frac{9}{5}$, se aceitarmos rectângulos de área nula.

$$A(x) = \frac{20}{3}x - \frac{100}{27}x^2 \implies A'(x) = \frac{20}{3} - \frac{200}{27}x, \quad A'(x) = 0 \iff x = \frac{9}{10}$$

x	0		$\frac{9}{10}$		$\frac{9}{5}$
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	

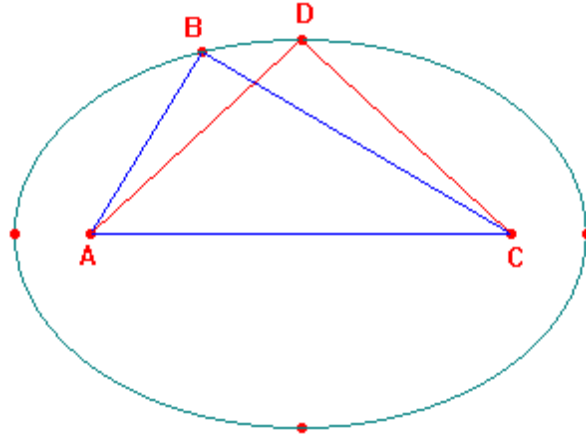
Como $A\left(\frac{9}{10}\right) = 3$, a área máxima do rectângulo "inscrito", da forma anterior no triângulo, é 3 cm^2 , valor este que é igual ao máximo obtido anteriormente.

Exercício 260 Entre os triângulos de perímetro 30 cm, determine aquele(s) que têm área máxima.

Resolução

Começemos por verificar que o triângulo de perímetro 30 cm e área máxima não pode ser escaleno.

Como se pode verificar na figura seguinte, o triângulo $[ABC]$, que estamos a supor escaleno, pode ser substituído por outro com o mesmo perímetro, que é isósceles e que tem maior área. Logo, o triângulo escaleno não pode ser o triângulo de área máxima.



Então, o triângulo de área máxima tem de ser isósceles (o que inclui a hipótese de ser equilátero).

O problema inicial foi substituído por outro mais simples que consiste em determinar os triângulos isósceles de perímetro 30 cm que têm área máxima.

Se fizermos $\overline{AD} = \overline{DC} = x$, então $\overline{AC} = 30 - 2x$.

Se aplicarmos a fórmula de Heron, temos para a área do triângulo $[ADC]$:

$$A(x) = \sqrt{15(15-x)(15-x)(15-(30-2x))} = \sqrt{15(15-x)^2(2x-15)}$$

De passagem, observe-se que $2x > 30 - 2x$, porque a soma de dois lados dum triângulo é maior do que o outro lado. Logo, $\frac{15}{2} < x < 15$

Se não aplicarmos a referida fórmula de Heron, podemos determinar h , a altura do triângulo relativa ao vértice D , recorrendo ao Teorema de Pitágoras: $h^2 + (15-x)^2 = x^2$.

Então, $h = \sqrt{30x - 225} = \sqrt{15(2x - 15)}$.

Logo, $A(x) = (15-x) \sqrt{15(2x-15)}$, com $\frac{15}{2} < x < 15$.

Note-se que maximizar a função $A(x) = \sqrt{15(15-x)^2(2x-15)}$ equivale a maximizar a função definida por $B(x) = (15-x)^2(2x-15)$ e com o mesmo domínio de $A(x)$, ou seja, $]\frac{15}{2}, 15[$.

É claro que é mais fácil calcular e estudar a derivada da função $B(x)$ do que calcular e estudar a derivada da função $A(x)$, pelo que vamos calcular a derivada da função $B(x)$:

$$B(x) = (15-x)^2(2x-15) = (225 - 30x + x^2)(2x-15) = 2x^3 - 75x^2 + 900x - 3375$$

$$B'(x) = 6x^2 - 150x + 900 = 6(x^2 - 25x + 150)$$

$$B'(x) = 0 \iff x^2 - 25x + 150 = 0 \iff x = 5 \vee x = 10$$

Então:

x	$\frac{15}{2}$		10		15
$B'(x)$		+	0	-	
$B(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	
$A(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	

Para $x = 10$, temos que todos os lados do triângulo são iguais, pelo que o triângulo de área máxima é equilátero.

Como $A(10) = \sqrt{15 \times 5^2 \times 5} = 25\sqrt{3}$, então o valor máximo da área do triângulo é $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Exercício 261 Considere o gráfico da função definida por $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

- Determine a derivada da função.
- Estude a existência de assíntotas ao gráfico da função.
- Determine uma equação da recta tangente ao gráfico da função nos pontos de abcissa zero e -1 . Determine o ponto de intersecção da tangente com cada uma das assíntotas e o ponto de intersecção das duas assíntotas. Calcule a área do triângulo definido pelos três pontos anteriores.
- Mostre que a área do triângulo definido pelas assíntotas e pela tangente à hipérbole, num ponto da mesma, é constante, isto é, não depende do ponto considerado.

Resolução

$$\text{a) } f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Logo, a recta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

Logo, a recta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota oblíqua.

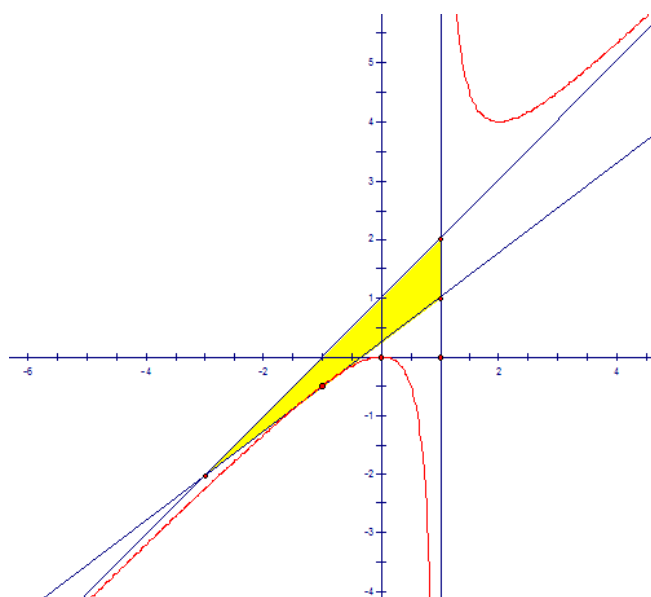
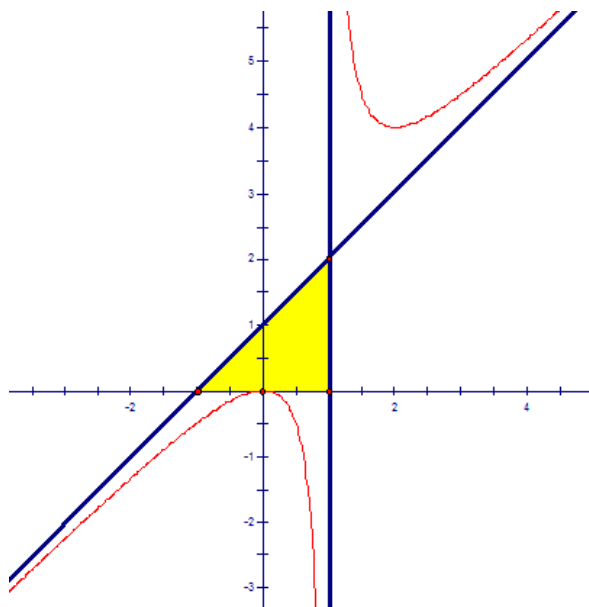
- c) $m_1 = f'(0) = 0$; $f(0) = 0$ A equação da recta tangente, no ponto de abcissa zero, é $y = 0$.

$$m_2 = f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \frac{3}{4}; \quad f(-1) = -\frac{1}{2}; \quad T = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x+1) \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4 = 3x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$



No primeiro caso, os vértices do triângulo são $A = (1, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (-1, 0)$ e a área do triângulo é $\frac{2 \times 2}{2} = 2$.

No segundo caso, os vértices do triângulo são $D = (-3, -2)$, $B = (1, 2)$, $E = (1, 1)$ e a área do triângulo é $\frac{4 \times 1}{2} = 2$.

d) Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Então,
$$\begin{cases} f'(a) = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} \\ f(a) = \frac{a^2}{a-1} \end{cases}, \text{ donde vem}$$

$$y - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} (x - a)$$

Para $x = 1$, temos

$$y - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} (1 - a) \iff y = \frac{a^2}{a-1} - \frac{a^2 - 2a}{a-1} \iff y = \frac{2a}{a-1}$$

Já temos dois vértices do triângulo: $A = \left(1, \frac{2a}{a-1}\right)$, $B = (1, 2)$

A distância entre os dois pontos A e B é $\left| \frac{2a}{a-1} - 2 \right| = \left| \frac{2}{a-1} \right| = \frac{2}{|a-1|}$.

C , o terceiro vértice, é a intersecção da recta de equação $y = x + 1$ com a recta definida por

$$y - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} (x - a).$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} (x - a) \\ y = x + 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 1 - \frac{a^2}{a-1} = \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} (x - a) \\ y = x + 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (a-1)^2 (x+1) - a^2 (a-1) = (a^2 - 2a) (x - a) \\ y = x + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $\begin{cases} (a^2 - 2a + 1)x + a^2 - 2a + 1 - a^3 + a^2 = (a^2 - 2a)x - a^3 + 2a^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$.

Então, $\begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = 2a \end{cases}$.

Logo, $C = (2a - 1, 2a)$. A base do triângulo é $\frac{2}{|a-1|}$, e a altura é $|2a - 1 - 1| = |2a - 2|$.

Logo, a área do triângulo é $\frac{1}{2} \times \frac{2}{|a-1|} \times |2a - 2| = \frac{1}{|a-1|} \times 2|a-1| = 2$.

Exercício 262 Considere a hipérbole definida por $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. Mostre que a área do triângulo definido pelas assíntotas e pela tangente à hipérbole, num ponto da mesma, é constante, isto é, não depende do ponto considerado.

Resolução

Começemos por observar que uma hipérbole tem centro de simetria e dois eixos de simetria, pelo que basta verificar o que se passa, quando o ponto de tangência pertence ao primeiro quadrante.

Seja k um número real positivo. Ora:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \iff y^2 = \frac{9x^2}{16} + 9 \iff y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{x^2 + 16}$$

Consideremos a função definida por $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x^2+16}$, cujo gráfico é um dos ramos da hipérbole.

Então, $f'(x) = \frac{3}{4} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{3x}{4\sqrt{x^2+16}}$. Logo, $f'(k) = \frac{3k}{4\sqrt{k^2+16}}$.

Por outro lado, temos $f(k) = \frac{3}{4}\sqrt{k^2+16}$, pelo que a tangente ao gráfico de f , no ponto $x = k$, é definida por

$$y - \frac{3}{4}\sqrt{k^2+16} = \frac{3k}{4\sqrt{k^2+16}}(x - k)$$

Então, $y = \frac{3}{4}\sqrt{k^2+16} + \frac{3k}{4\sqrt{k^2+16}}(x - k)$

Logo, $y(0) = \frac{3}{4}\sqrt{k^2+16} - \frac{3k^2}{4\sqrt{k^2+16}} = \frac{3(k^2+16)-3k^2}{4\sqrt{k^2+16}} = \frac{48}{4\sqrt{k^2+16}} = \frac{12}{\sqrt{k^2+16}}$.

As assíntotas à hipérbole são as rectas definidas por $y = \pm \frac{3}{4}x$.

Intersecção da tangente com a assíntota de equação $y = \frac{3}{4}x$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\sqrt{k^2+16} + \frac{3k}{4\sqrt{k^2+16}}(x - k) &= \frac{3}{4}x &\iff \frac{3k^2+48+3kx-3k^2}{4\sqrt{k^2+16}} &= \frac{3}{4}x \\ &\iff \frac{48+3kx}{4\sqrt{k^2+16}} = \frac{3}{4}x &\iff 48+3kx &= 3x\sqrt{k^2+16} \\ &\iff 3x(\sqrt{k^2+16}-k) = 48 &\iff x &= \frac{16}{\sqrt{k^2+16}-k} \end{aligned}$$

Logo, $y = \frac{3}{4} \times \frac{16}{\sqrt{k^2+16}-k} = \frac{12}{\sqrt{k^2+16}-k}$.

E o ponto de intersecção é $\left(\frac{16}{\sqrt{k^2+16}-k}, \frac{12}{\sqrt{k^2+16}-k}\right)$.

Intersecção da tangente com a assíntota de equação $y = -\frac{3}{4}x$:

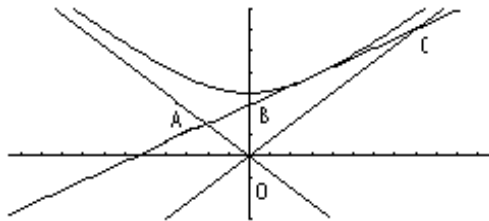
$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\sqrt{k^2+16} + \frac{3k}{4\sqrt{k^2+16}}(x - k) &= -\frac{3}{4}x &\iff \frac{3k^2+48+3kx-3k^2}{4\sqrt{k^2+16}} &= -\frac{3}{4}x \\ &\iff \frac{48+3kx}{4\sqrt{k^2+16}} = -\frac{3}{4}x &\iff 48+3kx &= -3x\sqrt{k^2+16} \\ &\iff -3x(\sqrt{k^2+16}+k) = 48 &\iff x &= -\frac{16}{\sqrt{k^2+16}+k} \end{aligned}$$

Logo, $y = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{16}{\sqrt{k^2+16}+k}\right) = \frac{12}{\sqrt{k^2+16}+k}$.

O ponto de intersecção é $\left(-\frac{16}{\sqrt{k^2+16}+k}, \frac{12}{\sqrt{k^2+16}+k}\right)$.

Os vértices do triângulo definido pelas assíntotas e tangente à hipérbole são os pontos $O = (0, 0)$, $A = \left(-\frac{16}{\sqrt{k^2+16}+k}, \frac{12}{\sqrt{k^2+16}+k}\right)$ e $C = \left(\frac{16}{\sqrt{k^2+16}-k}, \frac{12}{\sqrt{k^2+16}-k}\right)$.

Este triângulo pode ser dividido em dois triângulos, cujas áreas são de cálculo imediato:



Vértices do primeiro triângulo:

$$A = \left(-\frac{16}{\sqrt{k^2+16+k}}, \frac{12}{\sqrt{k^2+16+k}} \right), B = \left(0, \frac{12}{\sqrt{k^2+16}} \right) \text{ e } O = (0, 0).$$

A área deste triângulo é $A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{12}{\sqrt{k^2+16}} \times \frac{16}{\sqrt{k^2+16+k}}$, donde vem $A_1 = \frac{96}{\sqrt{k^2+16}(\sqrt{k^2+16+k})}$.

Vértices do segundo triângulo: $C = \left(\frac{16}{\sqrt{k^2+16-k}}, \frac{12}{\sqrt{k^2+16-k}} \right)$, $B = \left(0, \frac{12}{\sqrt{k^2+16}} \right)$ e $O = (0, 0)$.

Então, a área deste triângulo é $A_2 = \frac{1}{2} \times \frac{12}{\sqrt{k^2+16}} \times \frac{16}{\sqrt{k^2+16-k}} = \frac{96}{\sqrt{k^2+16}(\sqrt{k^2+16-k})}$.

Logo, a área do triângulo inicial é:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{96}{\sqrt{k^2+16}(\sqrt{k^2+16+k})} + \frac{96}{\sqrt{k^2+16}(\sqrt{k^2+16-k})} \\ &= \frac{96(\sqrt{k^2+16-k}) + 96(\sqrt{k^2+16+k})}{\sqrt{k^2+16}(\sqrt{k^2+16+k})(\sqrt{k^2+16-k})} \\ &= \frac{96\sqrt{k^2+16} - 96k + 96\sqrt{k^2+16} + 96k}{(k^2+16-k^2)\sqrt{k^2+16}} = \frac{192\sqrt{k^2+16}}{16\sqrt{k^2+16}} = 12 \end{aligned}$$

Exercício 263 Considere a hipérbole definida por $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, com a e b números reais positivos. Mostre que a área do triângulo definido pelas assíntotas e pela tangente à hipérbole num ponto da mesma é constante, isto é, não depende do ponto considerado.

Resolução

Seja k um número real positivo. Ora:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \iff \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 + a^2}{a^2} \iff y^2 = \frac{b^2(x^2 + a^2)}{a^2}$$

Então, $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + a^2}$.

Consideremos a função definida por $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + a^2}$, cujo gráfico é um dos ramos da hipérbole. Então, $f'(x) = \frac{2bx}{2a\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{bx}{a\sqrt{x^2+a^2}}$.

Por outro lado, temos $f(k) = \frac{b}{a} \sqrt{k^2 + a^2}$, pelo que a tangente ao gráfico de f , no ponto $(k, \frac{b}{a} \sqrt{k^2 + a^2})$, é definida por $y - \frac{b}{a} \sqrt{k^2 + a^2} = \frac{bk}{a\sqrt{k^2+a^2}}(x - k)$.

Então,

$$\begin{aligned} y &= \frac{b}{a} \sqrt{k^2 + a^2} + \frac{bk}{a\sqrt{k^2 + a^2}}(x - k) = \frac{b(k^2 + a^2) + b k x - b k^2}{a\sqrt{k^2 + a^2}} \\ &= \frac{b k^2 + b a^2 + b k x - b k^2}{a\sqrt{k^2 + a^2}} = \frac{b(a^2 + kx)}{a\sqrt{k^2 + a^2}} \end{aligned}$$

As assíntotas à hipérbole são as rectas definidas por $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Intersecção da tangente com o eixo das ordenadas:

$$\begin{aligned} y - \frac{b}{a}\sqrt{k^2 + a^2} &= \frac{bk}{a\sqrt{k^2 + a^2}}(0 - k) \iff y = \frac{b}{a}\sqrt{k^2 + a^2} - \frac{bk^2}{a\sqrt{k^2 + a^2}} \\ &\iff y = \frac{b(k^2 + a^2) - bk^2}{a\sqrt{k^2 + a^2}} \iff y = \frac{ba^2}{a\sqrt{k^2 + a^2}} \end{aligned}$$

O ponto pretendido é $\left(0, \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2}}\right)$.

Intersecção da tangente com a assíntota de equação $y = \frac{b}{a}x$:

$$\frac{b(a^2 + kx)}{a\sqrt{k^2 + a^2}} = \frac{bx}{a} \iff a^2 + kx = x\sqrt{k^2 + a^2} \iff x(\sqrt{k^2 + a^2} - k) = a^2 \iff x = \frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} - k}$$

Logo, $y = \frac{b}{a} \times \frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} - k} = \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2} - k}$.

O ponto pretendido é $\left(\frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} - k}, \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2} - k}\right)$.

Note-se que as coordenadas do ponto anterior são ambas positivas.

Intersecção da tangente com a assíntota de equação $y = -\frac{b}{a}x$:

$$\begin{aligned} \frac{b(a^2 + kx)}{a\sqrt{k^2 + a^2}} &= -\frac{bx}{a} \iff a^2 + kx = -x\sqrt{k^2 + a^2} \iff x(\sqrt{k^2 + a^2} + k) = -a^2 \\ &\iff x = -\frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} + k} \end{aligned}$$

Logo, $y = -\frac{b}{a} \times \frac{-a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} + k} = \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2} + k}$.

O ponto pretendido é $\left(-\frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} + k}, \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2} + k}\right)$.

Note-se que o ponto anterior tem abcissa negativa e ordenada positiva.

Então, os vértices do triângulo definido pelas duas assíntotas e pela tangente à hipérbole são os três pontos $O = (0, 0)$, $C = \left(\frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} - k}, \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2} - k}\right)$ e $A = \left(-\frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} + k}, \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2} + k}\right)$.

O triângulo $[OAC]$ pode ser dividido em dois, considerando o ponto $B = \left(0, \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2}}\right)$, obtido anteriormente, pelo que a área do triângulo inicial é a soma da área do triângulo $[OAB]$ com a área do triângulo de $[OBC]$, cujas áreas, A_1 e A_2 , são de cálculo imediato:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} \times \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2}} \times \frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} + k} = \frac{a^3 b}{2\sqrt{k^2 + a^2}(\sqrt{k^2 + a^2} + k)} \\ A_2 = \frac{1}{2} \times \frac{ab}{\sqrt{k^2 + a^2}} \times \frac{a^2}{\sqrt{k^2 + a^2} - k} = \frac{a^3 b}{2\sqrt{k^2 + a^2}(\sqrt{k^2 + a^2} - k)} \end{cases}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 A_1 + A_2 &= \frac{a^3b}{2\sqrt{k^2+a^2}(\sqrt{k^2+a^2}+k)} + \frac{a^3b}{2\sqrt{k^2+a^2}(\sqrt{k^2+a^2}-k)} \\
 &= \frac{a^3b}{2\sqrt{k^2+a^2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{k^2+a^2}+k} + \frac{1}{\sqrt{k^2+a^2}-k} \right) \\
 &= \frac{a^3b}{2\sqrt{k^2+a^2}} \times \frac{\sqrt{k^2+a^2}-k + \sqrt{k^2+a^2}+k}{(\sqrt{k^2+a^2}+k)(\sqrt{k^2+a^2}-k)} \\
 &= \frac{a^3b}{2\sqrt{k^2+a^2}} \times \frac{2\sqrt{k^2+a^2}}{k^2+a^2-k^2} = \frac{a^3b}{a^2} = ab
 \end{aligned}$$

Repare-se que, no exercício anterior, tínhamos $a = 4$ e $b = 3$, tendo-se obtido para a área do triângulo $3 \times 4 = 12$ unidades de área.

Exercício 264 Considere a função definida por $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-2}$. Mostre que a área do triângulo definido pelas assíntotas e pela tangente à hipérbole num ponto da mesma é constante, isto é, não depende do ponto considerado.

Resolução

Seja k um número real tal que $k > 2$. Então, $f(k) = 2k + 1 + \frac{1}{k-2}$, pelo que $T = \left(k, 2k + 1 + \frac{1}{k-2}\right)$.

Por outro lado, temos $f'(x) = 2 - \frac{1}{(x-2)^2}$, pelo que $m = f'(k) = 2 - \frac{1}{(k-2)^2}$.

Uma equação da tangente ao gráfico de f , no ponto $x = k$, é

$$y - 2k - 1 - \frac{1}{k-2} = \left(2 - \frac{1}{(k-2)^2}\right)(x - k)$$

Então,

$$y = 2k + 1 + \frac{1}{k-2} + 2x - 2k - \frac{x}{(k-2)^2} + \frac{k}{(k-2)^2} = \left(2 - \frac{1}{(k-2)^2}\right)x + 1 + \frac{1}{k-2} + \frac{k}{(k-2)^2}$$

Assíntotas: $y = 2x + 1$ e $x = 2$.

Intersecção da tangente com a recta $x = 2$:

$$\begin{aligned}
 y &= 2\left(2 - \frac{1}{(k-2)^2}\right) + 1 + \frac{1}{k-2} + \frac{k}{(k-2)^2} = 4 - \frac{2}{(k-2)^2} + 1 + \frac{1}{k-2} + \frac{k}{(k-2)^2} \\
 &= 5 + \frac{k + k - 2 - 2}{(k-2)^2} = 5 + \frac{2k - 4}{(k-2)^2} = 5 + \frac{2}{k-2}
 \end{aligned}$$

Logo, o ponto de intersecção é $A = \left(2, 5 + \frac{2}{k-2}\right)$.

Intersecção da tangente com a recta de equação $y = 2x + 1$:

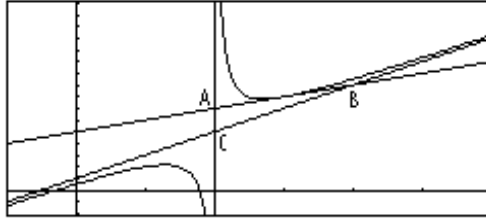
$$\begin{aligned}
 \left(2 - \frac{1}{(k-2)^2}\right)x + 1 + \frac{1}{k-2} + \frac{k}{(k-2)^2} &= 2x + 1 &\iff & -\frac{x}{(k-2)^2} + \frac{1}{k-2} + \frac{k}{(k-2)^2} = 0 \\
 &&\iff & \frac{x}{(k-2)^2} = \frac{1}{k-2} + \frac{k}{(k-2)^2} \\
 &&\iff & x = k - 2 + k \iff x = 2k - 2
 \end{aligned}$$

Logo, $y = 4k - 3$.

Então, o ponto de intersecção é $B = (2k - 2, 4k - 3)$.

Intersecção das assíptotas: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

Então, o ponto de intersecção é $C = (2, 5)$.



A área do triângulo $[ABC]$ é

$$A_t = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{2}{k-2} - 5 \right) (2k - 2 - 2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{k-2} \times (2k - 4) = \frac{2(k-2)}{k-2} = 2$$

Exercício 265 Seja $f(x) = ax^2 + bx$, com $a, b \in \mathbb{R}$, uma função quadrática. Mostre que existe um e um só ponto do gráfico da função onde a tangente ao gráfico é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares. E se pretendemos que as rectas sejam estritamente paralelas?

Resolução

Começemos por observar que em vez de $f(x) = ax^2 + bx$, devíamos escrever $f_{(a,b)}(x) = ax^2 + bx$, o que, entre outras coisas, permite distinguir umas funções das outras. Uma observação importante é que $a \neq 0$, pois, caso $a = 0$, tínhamos $f(x) = bx$, que não é uma função quadrática.

Finalmente, observe-se que o declive da recta tangente ao gráfico duma função num ponto é a derivada da função nesse ponto, que a bissetriz dos quadrantes ímpares é a recta de equação $y = x$ e que rectas paralelas (não verticais) têm o mesmo declive (finito). É claro que estamos a supor que o referencial é ortonormado.

Posto isto, passemos à resolução propriamente dita:

Como $f'(x) = 2ax + b$, temos de resolver a equação $2ax + b = 1$, a qual é equivalente a $x = \frac{1-b}{2a}$. Então, no ponto de abcissa $\frac{1-b}{2a}$, a tangente ao gráfico tem declive 1, pelo que é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Quanto à segunda parte da questão, temos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1-b}{2a}\right) &= a\left(\frac{1-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{1-b}{2a}\right) = \frac{a(1-2b+b^2)}{4a^2} + \frac{b-b^2}{2a} \\ &= \frac{1-2b+b^2}{4a} + \frac{2b-2b^2}{4a} = \frac{1-b^2}{4a} \end{aligned}$$

Então, o ponto de tangência é $T = \left(\frac{1-b}{2a}, \frac{1-b^2}{4a}\right)$, sendo que este ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, se $\frac{1-b}{2a} = \frac{1-b^2}{4a}$.

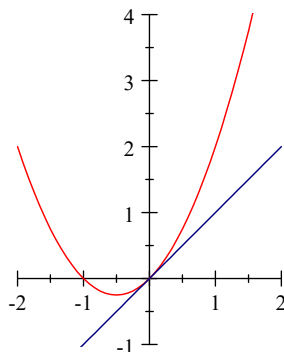
Ora,

$$\frac{1-b}{2a} = \frac{1-b^2}{4a} \iff \frac{2-2b}{4a} = \frac{1-b^2}{4a} \iff \frac{b^2-2b+1}{4a} = 0 \iff b=1$$

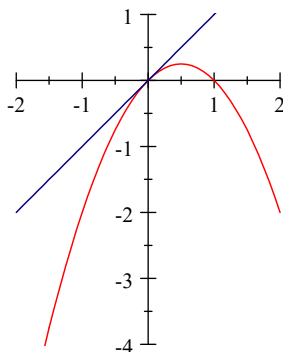
Se $b=1$, então $T=(0,0)$ e a função $f(x)=ax^2+x$ tem derivada 1, no ponto $x=0$, tendo-se que a tangente ao gráfico é a recta de equação $y=x$.

Vejamos dois exemplos:

1. Se $a=1$, temos $f(x)=x^2+x$, o que nos conduz ao seguinte gráfico:



2. Se $a=-1$, temos $f(x)=-x^2+x$, o que nos conduz ao seguinte gráfico:



Uma maneira fácil e interessante de verificar em que condições a recta de equação $y=x$ é tangente ao gráfico da função quadrática $f(x)=ax^2+bx$ é ver em que condições o sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = x \end{cases} \text{ tem uma solução única:}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = x \end{cases} &\iff \begin{cases} ax^2 + bx = x \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} ax^2 + (b-1)x = 0 \\ y = x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (ax + (b-1))x = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \vee x = \frac{1-b}{a} \\ y = x \end{cases} \end{aligned}$$

Para que haja uma solução única, devemos ter $b = 1$.

Registe-se que as únicas rectas (do plano) que intersectam uma parábola num ponto são as tangentes e as rectas paralelas ao eixo de simetria da parábola, as quais, neste caso, são as rectas verticais. Logo, a recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico.

Se tivéssemos $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a abcissa do ponto do gráfico, onde a tangente é paralela à recta de equação $y = x$, continua a ser $\frac{1-b}{2a}$, mas a ordenada do ponto de tangência passa a ser $\frac{1-b^2}{4a} + c$, ou seja, $T = \left(\frac{1-b}{2a}, \frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$.

A recta de equação $y = x$ é tangente ao gráfico da função, se e só se $\frac{1-b}{2a} = \frac{1-b^2+4ac}{4a}$, isto é, se e só se $2 - 2b = 1 - b^2 + 4ac$, equação esta que é equivalente a $b^2 - 2b - 4ac + 1 = 0$.

Resolvendo a equação anterior em ordem a c , vem

$$c = \frac{(b-1)^2}{4a}$$

Na questão inicial, tínhamos $c = 0$, pelo que tem de ser $b = 1$.

13.2 Composição de funções

Nesta secção, vamos determinar a expressão analítica que define a função composta, bem como o contradomínio e a transformação de gráficos de funções em casos simples.

Exemplo 266 Consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, $C = \{11, 13, 15, 17\}$. Consideremos as aplicações f e g definidas do seguinte modo:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 33 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Então, a aplicação $g \circ f$ é definida da seguinte maneira:

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 11 & 33 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Neste caso, não está definida a aplicação $f \circ g$.

Exemplo 267 Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x + 2$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e respectivos domínios.

Resolução

Começamos por notar que $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Além disso, $D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \mathbb{R}$.

Analogamente, $D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \mathbb{R}$. Então, neste exemplo, podemos afirmar que $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Quanto às expressões que definem $f \circ g$ e $g \circ f$, temos:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 1 = 6x + 5 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = 3(2x + 1) + 2 = 6x + 5 \end{cases}$$

Neste caso, temos $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que se diz que as duas funções dadas são permutáveis (para a composição de aplicações).

Exemplo 268 Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x + 1$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e respectivos domínios.

Resolução

Começamos por notar que $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Além disso, temos que $D_{f \circ g} = \{x: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$. Analogamente, $D_{g \circ f} = \{x: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$. Então, $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$.

Quanto às expressões que definem $f \circ g$ e $g \circ f$, temos:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = 2(3x + 1) + 1 = 6x + 3 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = 3(2x + 1) + 1 = 6x + 4 \end{cases}$$

Neste caso, as funções não são permutáveis. Tal significa que o exemplo anterior, onde as duas funções permutavam, foi um mero acaso (ou resultou dum trabalho prévio).

Note-se que dadas as duas funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 3x + a$, temos o seguinte:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(3x + a) = 2(3x + a) + 1 = 6x + 2a + 1 \\ (g \circ f)(x) = g(2x + 1) = 3(2x + 1) + a = 6x + 3 + a \end{cases}$$

Então, as duas funções permutam (para a composição) se $2a + 1 = a + 3$. Logo, devemos ter $a = 2$.

Observemos que a composição de funções goza duma importante propriedade: é associativa. No entanto, como vimos, a composição de aplicações, em geral, não é comutativa.

Exemplo 269 Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ e $g(x) = \frac{3x+1}{x-1}$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e respectivos domínios.

Resolução

Começamos por notar que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Então,

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = \{x: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \left\{x: x \neq 1 \wedge \frac{3x+1}{x-1} \neq 2\right\} \\ D_{g \circ f} = \{x: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \left\{x: x \neq 2 \wedge \frac{2x+1}{x-2} \neq 1\right\} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = \left\{x: x \neq 1 \wedge \frac{3x+1-2x+2}{x-1} \neq 0\right\} = \left\{x: x \neq 1 \wedge \frac{x+3}{x-1} \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \\ D_{g \circ f} = \left\{x: x \neq 2 \wedge \frac{2x+1-x+2}{x-2} \neq 0\right\} = \left\{x: x \neq 2 \wedge \frac{x+3}{x-2} \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} \end{cases}$$

Note-se que é costume começar por determinar as expressões que definem as funções compostas e, só depois, determinar o contradomínio. Ora,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) + 1}{\frac{3x+1}{x-1} - 2} = \frac{\frac{6x+2+x-1}{x-1}}{\frac{3x+1-2x+2}{x-1}} = \frac{7x+1}{x+3}$$

E, agora, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = \frac{3\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) + 1}{\frac{2x+1}{x-2} - 1} = \frac{\frac{6x+3+x-2}{x-2}}{\frac{2x+1-x+2}{x-1}} = \frac{7x+1}{x+3}$$

E, muito curiosamente, chegámos à mesma expressão, em ambos os casos. No entanto, não podemos garantir que as funções $g \circ f$ são iguais, porque os domínios são diferentes!

Exemplo 270 Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 1$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e respectivos domínios.

Resolução

Como $D_f = D_g = \mathbb{R}$, então $D_{f \circ g} = D_{g \circ f} = \mathbb{R}$. E, agora, temos

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) + 1 = 2x^2 + 3 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 2 \end{cases}$$

Exemplo 271 Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ e $g(x) = x^2 + 1$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e respectivos domínios.

Resolução

Então,

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{2(x^2 + 1) - 4} = \sqrt{2x^2 + 2 - 4} = \sqrt{2x^2 - 2} \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2x - 4}) = (\sqrt{2x - 4})^2 + 1 = 2x - 4 + 1 = 2x - 3 \end{cases}$$

Quanto aos domínios, temos $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty[$ e $D_g = \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 \geq 2\} \\ D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{x : x \geq 2 \wedge \sqrt{2x - 4} \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ D_{g \circ f} = \{x : x \geq 2 \wedge x \geq 2\} = \{x : x \geq 2\} = [2, +\infty[\end{cases}$$

Se acompanharmos o cálculo de $(f \circ g)(x)$, temos $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : 2(x^2 + 1) - 4 \geq 0\}$.

Então, $2x^2 - 2 \geq 0$, donde vem $x^2 - 1 \geq 0$. Logo, $D_{f \circ g} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Se acompanharmos o cálculo de $(g \circ f)(x)$, temos $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$.

Então, $D_{g \circ f} = [2, +\infty[$.

Exemplo 272 Considere as funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x^2 + 1$, com $D_f = [3, +\infty[$ e $D_g =]-\infty, 10]$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e respectivos domínios.

Resolução

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10 \end{cases}$$

Quanto aos domínios, não nos serve de nada acompanhar os cálculos anteriores.

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} = \{x : x \leq 10 \wedge x^2 + 1 \geq 3\} \\ D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \{x : x \geq 3 \wedge 2x - 3 \leq 10\} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} D_{f \circ g} = \{x : x \leq 10 \wedge x^2 - 2 \geq 0\} =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 10] \\ D_{g \circ f} = \{x : x \geq 3 \wedge x \leq \frac{13}{2}\} = [3, \frac{13}{2}] \end{cases}$$

Exercício 273 Sejam f e g duas funções crescentes, de domínio \mathbb{R} . Prove que $g \circ f$ é uma função crescente em \mathbb{R} .

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$. Então, $f(a) \leq f(b)$, porque f é crescente.

E, agora, vem $g(f(a)) \leq g(f(b))$, porque g é crescente.

Então, se $a < b$, temos $(g \circ f)(a) \leq (g \circ f)(b)$. Logo, $g \circ f$ é crescente.

Exercício 274 Sejam f e g duas funções crescentes, de domínio \mathbb{R} . Prove que $g \circ f$ é uma função crescente em \mathbb{R} .

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$. Então, $f(a) \geq f(b)$, porque f é decrescente.

E, agora, vem $g(f(a)) \leq g(f(b))$, porque g é decrescente.

Então, se $a < b$, temos $(g \circ f)(a) \leq (g \circ f)(b)$. Logo, $g \circ f$ é crescente.

Exercício 275 Sejam f e g duas funções de domínio \mathbb{R} , sendo f crescente e g decrescente. Prove que $g \circ f$ é uma função decrescente em \mathbb{R} .

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$. Então, $f(a) \leq f(b)$, porque f é crescente.

E, agora, vem $g(f(a)) \geq g(f(b))$, porque g é decrescente.

Então, se $a < b$, temos $(g \circ f)(a) \geq (g \circ f)(b)$. Logo, $g \circ f$ é decrescente.

Exercício 276 Sejam f e g duas funções injectivas, de domínio \mathbb{R} . Prove que $g \circ f$ é uma função injectiva em \mathbb{R} .

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a \neq b$. Então, $f(a) \neq f(b)$, porque f é injectiva.

E, agora, vem $g(f(a)) \neq g(f(b))$, porque g é injectiva.

Então, se $a \neq b$, temos $(g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(b)$. Logo, $g \circ f$ é injectiva.

Exercício 277 Sejam f e g duas funções pares, de domínio \mathbb{R} . Prove que $g \circ f$ é uma função par em \mathbb{R} .

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Seja $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque f é par.

E, agora, vem $g(f(-x)) = g(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Então, $(g \circ f)(-x) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $g \circ f$ é par.

Exercício 278 Sejam f e g duas funções, de domínio \mathbb{R} , tais que f é ímpar e g é par. Prove que $g \circ f$ é uma função par em \mathbb{R} .

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Seja $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque f é ímpar.

E, agora, vem $g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque g é par.

Então, $(g \circ f)(-x) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $g \circ f$ é par.

Exercício 279 Sejam f e g duas funções, de domínio \mathbb{R} , tais que f é par e g é ímpar. Prove que $g \circ f$ é uma função par em \mathbb{R} .

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Seja $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque f é par.

E, agora, vem $g(f(-x)) = g(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque f é par.

Então, $(g \circ f)(-x) = (g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $g \circ f$ é par.

Exercício 280 Sejam f e g duas funções ímpares, de domínio \mathbb{R} . Prove que $g \circ f$ é uma função ímpar em \mathbb{R} .

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Seja $x \in \mathbb{R}$. Então, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque f é ímpar.

E, agora, vem $g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$, porque f é ímpar.

Então, $(g \circ f)(-x) = -(g \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $g \circ f$ é ímpar.

Exercício 281 Sejam f e g duas funções deriváveis em \mathbb{R} , sendo f injectiva.

Prove que $(g \circ f)'(x) = (g)'(f(x)) \times f'(x)$.

Resolução

O domínio de $g \circ f$ é \mathbb{R} . Seja $a \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{f(x) \rightarrow f(a)} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times f'(a) = (g)'(f(a)) \times f'(a) \end{aligned}$$

Como a pode ser qualquer, temos $(g \circ f)'(a) = (g)'(f(a)) \times f'(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

E, agora, basta substituir a por x , para termos o pretendido.

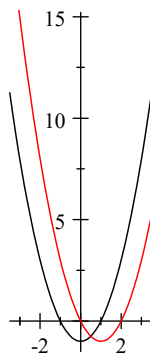
Registe-se que a injectividade de f é necessária para termos a certeza que $f(x) - f(a) \neq 0$ e, assim, podermos calcular $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)}$.

De qualquer modo, não é necessário exigir que a função seja injectiva em todo o domínio, mas, apenas, numa vizinhança do ponto a .

13.2.1 Composição de funções e transformações de gráficos

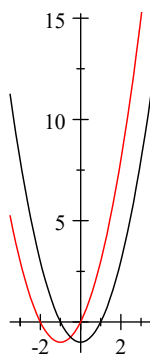
Vamos, agora, verificar alguns gráficos de funções compostas simples e a sua relação com o gráfico da função *inicial*. Vamos considerar a função $f(x) = x^2 - 1$, mas as conclusões dizem respeito a qualquer função.

1. $g(x) = f(x - 1)$



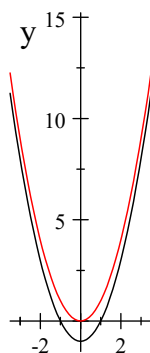
O gráfico da função g obtém-se, deslocando o gráfico de f uma unidade para a direita.

2. $g(x) = f(x + 1)$



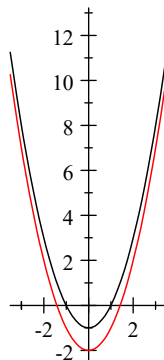
O gráfico da função g obtém-se, deslocando o gráfico de f uma unidade para a esquerda.

3. $g(x) = 1 + f(x)$



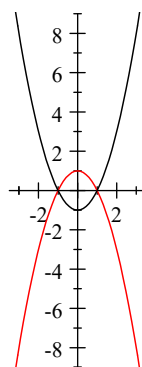
O gráfico da função g obtém-se, deslocando o gráfico de f uma unidade para cima.

4. $g(x) = f(x) - 1$



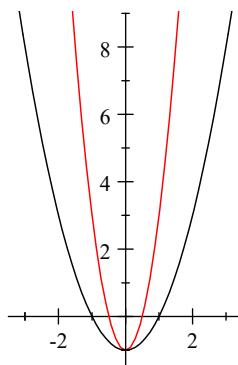
O gráfico da função g obtém-se, deslocando o gráfico de f uma unidade para baixo.

5. $g(x) = -f(x)$



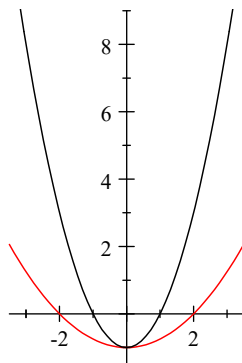
Os gráficos de g e f são simétricos, em relação ao eixo das abscissas.

6. $g(x) = f(2x)$



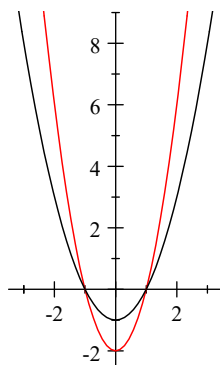
Obtém-se o gráfico da função g , comprimindo o gráfico da função f , paralelamente ao eixo das abscissas, de modo que a distância de cada ponto do gráfico ao eixo das ordenadas passe a metade da distância inicial.

7. $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$



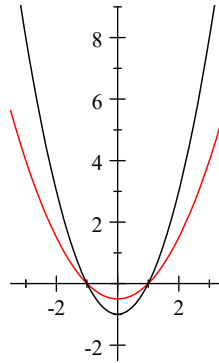
Obtém-se o gráfico da função g , dilatando o gráfico da função f , paralelamente ao eixo das abscissas, de modo que a distância de cada ponto do gráfico ao eixo das ordenadas passe ao dobro da distância inicial.

8. $g(x) = 2f(x)$



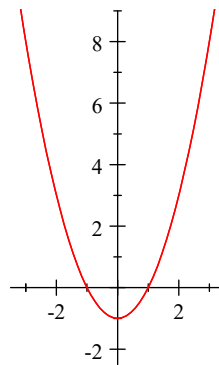
O gráfico de g é obtido do gráfico de f , dilatando-o, na direcção do eixo das ordenadas, de modo que cada ponto mantenha a abscissa e duplique a ordenada.

9. $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$



O gráfico de g é obtido do gráfico de f , comprimindo-o, na direção do eixo das ordenadas, de modo que cada ponto mantenha a abscissa e reduza a ordenada para metade.

10. $g(x) = f(|x|)$

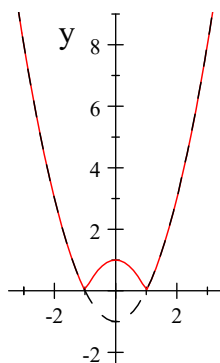


O gráfico da função g é obtido do gráfico de f , mantendo a parte do gráfico à direita do eixo das ordenadas (incluindo a imagem de zero), sendo que os pontos de abscissa negativa são substituídos por outros, de modo que o gráfico se torne simétrico relativamente ao eixo das ordenadas. Em qualquer caso, a função g é uma função par. No caso da função considerada, os dois gráficos coincidem, porque a função f é par.

11. $g(x) = f(-|x|)$

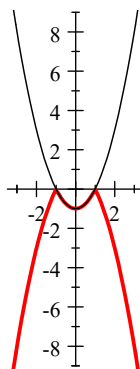
O gráfico da função g é obtido do gráfico de f , mantendo a parte do gráfico à esquerda do eixo das ordenadas (incluindo a imagem de zero), sendo que os pontos de abscissa positiva são substituídos por outros, de modo que o gráfico se torne simétrico relativamente ao eixo das ordenadas. A função g é uma função par. Também, neste caso, os dois gráficos coincidem.

12. $g(x) = |f(x)|$



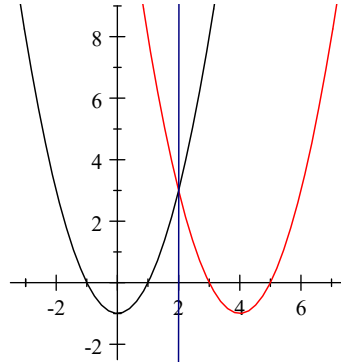
Mantêm-se os pontos do gráfico de que tenham ordenada não negativa. Os pontos do gráfico de que tenham ordenada negativa são substituídos pelos seus simétricos em relação ao eixo das abcissas.

13. $g(x) = -|f(x)|$



Mantêm-se os pontos do gráfico de que tenham ordenada não positiva. Os pontos do gráfico de que tenham ordenada positiva são substituídos pelos seus simétricos em relação ao eixo das abcissas.

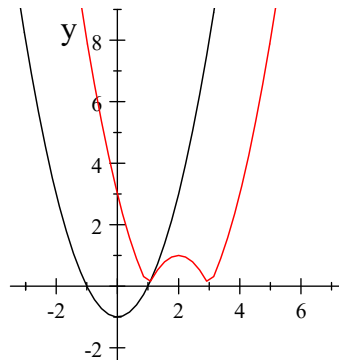
14. $g(x) = f(4 - x)$



O ponto de abscissa 2 mantém-se, enquanto que os restantes pontos são substituídos pelos seus simétricos em relação à recta de equação $x = 2$.

15. $g(x) = |f(x - 2)|$

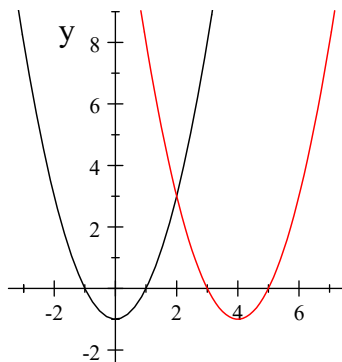
Seja $h(x) = f(x - 2)$. O gráfico da função h obtém-se, deslocando o gráfico de f duas unidades para a direita. O gráfico da função g obtém-se do gráfico de h , mantendo os pontos de ordenada maior ou igual a zero e substituindo os pontos de ordenada negativa pelos seus simétricos em relação ao eixo das abcissas.



16. $g(x) = f(|4 - x|) = f(|x - 4|)$

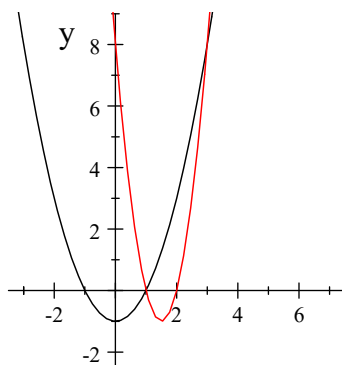
Seja $h(x) = f(|x|)$. O gráfico de h é obtido do gráfico de f , mantendo os pontos de abscissa maior ou igual a zero e substituindo os pontos de abscissa negativa, de modo a tornar a função par (neste exemplo a função já era par, pelo que não há alteração neste passo). O gráfico de g é obtido do gráfico de h , por simetria em relação à recta de equação $x = 2$ ou deslocando o

gráfico de h quatro unidades para a direita, devido ao facto do gráfico ser simétrico.



17. $g(x) = f(2x - 3) = f\left(2\left(x - \frac{3}{2}\right)\right)$

Neste caso, o gráfico desloca-se três meias unidades para a direita e sofre uma contracção ao longo do eixo das abcissas, mantendo-se fixo o ponto $x = \frac{3}{2}$ (na segunda transformação).



Capítulo 14

Funções Definidas por Ramos

Neste capítulo vamos estudar funções reais de variável real definidas por mais do que uma expressão.

Vamos começar pelos exemplos mais correntes e terminaremos com dois casos especiais: consumo da água de uso doméstico e o imposto da Sisa (agora, IMT).

Nesta primeira parte, vamos dar exemplos comuns e outros exemplos menos habituais. Entre estes exemplos menos habituais está o prolongamento de uma função de modo que a mesma seja diferenciável (e, por isso, também contínua).

14.1 Funções por ramos

Exemplo 282 Consideremos a função $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \Leftarrow x < -1 \\ x & \Leftarrow -1 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & \Leftarrow x \geq 1 \end{cases}$

O domínio desta função é \mathbb{R} . Segue-se o cálculo de alguns limites importantes no estudo da função:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x + 1) = -2 + 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1$$

$$f(-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$$

$$f(1) = 2 - 1 = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, dizemos que, no ponto $x = -1$, os limites laterais são iguais, pelo que existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, sendo -1 , o valor do limite da função f no ponto $x = -1$.

Como temos $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 = f(-1)$, então a função f é contínua no ponto $x = -1$.

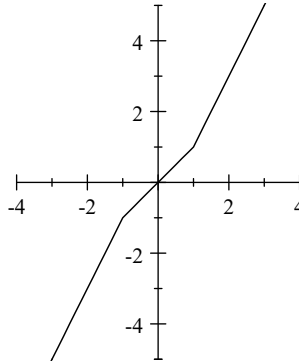
Por outro lado, temos $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, pelo que existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Mas, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$, pelo que a função f é contínua no ponto $x = 1$.

Como as expressões $2x + 1$, x e $2x - 1$ são polinómios, então f é contínua em qualquer ponto diferente de -1 e de 1 . Então, a função f é contínua em \mathbb{R} .

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e f é contínua em \mathbb{R} , então o contradomínio de f é \mathbb{R} .

Como os declives são positivos e a função é contínua em \mathbb{R} , então f é estritamente crescente, pelo que é injectiva.

Representação gráfica da função:



Duma maneira semelhante ao cálculo dos limites laterais, também podemos calcular as derivadas laterais nos pontos $x = -1$ e $x = 1$:

Cálculo da derivada à esquerda, no ponto $x = -1$ (e não à esquerda do ponto $x = -1$):

$$f'_e(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 1 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2(x + 1)}{x + 1} = 2$$

Quanto à derivada à direita, no ponto $x = -1$, temos:

$$f'_d(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1}{x + 1} = 1$$

Como as derivadas laterais, no ponto $x = -1$, são diferentes, não existe derivada de f neste ponto.

Observe-se que é costume escrever-se $f'(-1^+)$, em vez de $f'_d(-1)$, embora essa notação seja responsável por algumas confusões (por exemplo, derivada à direita do ponto).

Analogamente, temos:

$$f'_e(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

Então, não existe derivada de f no ponto $x = 1$.

Cálculo dos zeros da função:

$$2x + 1 = 0 \wedge x \leq -1 \iff x = -\frac{1}{2} \wedge x \leq -1 \iff x \in \emptyset$$

$$x = 0 \wedge -1 \leq x < 1 \iff x = 0$$

$$2x - 1 = 0 \wedge x \geq 1 \iff x = \frac{1}{2} \wedge x \geq 1 \iff x \in \emptyset$$

Logo, a função tem um único zero (que é zero).

Observe-se que, neste caso, podemos definir a função do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \iff x \leq -1 \\ x & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \iff x \geq 1 \end{cases}$$

Quanto à derivada da função, temos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \Leftarrow x < -1 \\ 1 & \Leftarrow -1 < x < 1 \\ 2 & \Leftarrow x > 1 \end{cases}, \text{ ou seja, } f'(x) = \begin{cases} 2 & \Leftarrow x < -1 \vee x > 1 \\ 1 & \Leftarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

Exemplo 283 Estudo da função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \Leftarrow x < -1 \\ 1 - 2x & \Leftarrow -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 2 & \Leftarrow x \geq 1 \end{cases}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Cálculo de alguns limites importantes no estudo da função:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - 2x) = 1 + 2 = 3$$

$$f(-1) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - 2x) = 1 - 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2) = 1 - 2 = -1$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, sendo 3 o valor do limite.

Como temos $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 = f(-1)$, então a função é contínua no ponto $x = -1$.

Por outro lado, temos $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, pelo que existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Além disso, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 = f(1)$, pelo que a função é contínua no ponto $x = 1$.

Como as expressões $x^2 + 2$, $1 - 2x$ e $x^2 - 2$ são polinómios, então f é contínua em qualquer ponto diferente de -1 e de 1 . Então, a função f é contínua em \mathbb{R} .

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, não podemos, para já, determinar o contradomínio de f . Mas podemos adiantar que é um intervalo da forma $[k, +\infty[$.

Cálculo das derivadas laterais nos pontos $x = -1$ e $x = 1$:

$$f'_e(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2 - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-1) = -2$$

$$f'_d(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-2(x+1)}{x+1} = -2$$

$$f'_e(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 - 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2(x-1)}{x-1} = -2$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

Então, existe derivada de f , no ponto $x = -1$, mas não existe derivada de f , no ponto $x = 1$.

Suponhamos que $a < -1$. Então:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2 - a^2 - 2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2a$$

Se $-1 < a < 1$, temos:

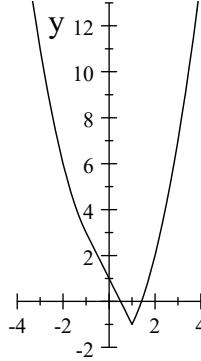
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - 2x - 1 + 2a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2x + 2a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2(x-a)}{x-a} = -2$$

Se $a > 1$, vem:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2 - a^2 + 2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2a$$

$$\text{Então, } f'(x) = \begin{cases} 2x & \Leftarrow & x < -1 \\ -2 & \Leftarrow & -1 \leq x < 1 \\ 2x & \Leftarrow & x > 1 \end{cases}$$

Representação gráfica da função:



Analisando o gráfico da função, vemos que o contradomínio de f é $[-1, +\infty[$, que a função é estritamente decrescente em $]-\infty - 1]$ e estritamente crescente em $[1, +\infty[$, pelo que a função tem um mínimo absoluto no ponto $x = 1$.

Exemplo 284 Estudo da função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x} & \Leftarrow & x < -1 \\ 2x-1 & \Leftarrow & -1 \leq x < 1 \\ x^2 & \Leftarrow & x \geq 1 \end{cases}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Cálculo de alguns limites importantes no estudo da função:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^2+2}{x} \right) = \frac{1+2}{-1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x-1) = -2-1 = -3$$

$$f(-1) = -2-1 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-1) = 2-1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2) = 1$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, sendo -3 o valor do limite.

Como temos $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3 = f(-1)$, então a função é contínua no ponto $x = -1$.

Por outro lado, temos $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, pelo que existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Além disso, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$, pelo que a função é contínua no ponto $x = 1$.

Como as expressões $2x-1$ e x^2 são polinómios, então f é contínua em qualquer ponto x , tal que $x > -1 \wedge x \neq 1$.

Como $\frac{x^2+2}{x}$ é um quociente entre duas funções polinomiais e o denominador só se anula para $x = 0$, a função f é contínua em $]-\infty, -1[$.

Então, a função é contínua em \mathbb{R} .

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e f é contínua em \mathbb{R} , então o contradomínio de f é \mathbb{R} .

Cálculo das derivadas laterais nos pontos $x = -1$ e $x = 1$:

$$f'_e(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{x^2+2}{x} + 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{x^2+3x+2}{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2}{x} = -1$$

$$f'_d(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1+3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$$

$$f'_e(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

Então, existe derivada de f , no ponto $x = 1$, mas não existe derivada de f , no ponto $x = -1$.

Suponhamos que $a < -1$. Então:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x^2+2}{x} - \frac{a^2+2}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{ax^2+2a-a^2x-2x}{ax}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^2 + 2a - a^2x - 2x}{ax(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax(x-a) - 2(x-a)}{ax(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax-2}{ax} = \frac{a^2-2}{a^2} \end{aligned}$$

Se $-1 < a < 1$, temos:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x-1-2a+1}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a)}{x-a} = 2$$

Se $a > 1$, vem $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2a$.

$$\text{Então, } f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{x^2} & \Leftarrow x < -1 \\ 2 & \Leftarrow -1 < x \leq 1 \\ 2x & \Leftarrow x > 1 \end{cases}$$

Monotonia da função:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		-1		1	$+\infty$
x^2-2	+	0	-				
x^2	+	+	+				
$\frac{x^2-2}{x^2}$	+	0	-				
2					+	+	
$2x$							+
$f'(x)$	+	0	-		+	+	+
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow		

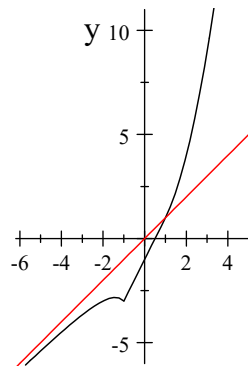
Assíntotas:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Logo, a única assíntota ao gráfico da função é a recta de equação $y = x$.

Representação gráfica da função, incluindo a assíntota:



Exercício 285 Seja $f(x) = \begin{cases} x & \Leftarrow x \leq -1 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \Leftarrow -1 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & \Leftarrow x \geq 1 \end{cases}$. Determine os números reais a, b, c, d de modo que f seja uma função diferenciável em \mathbb{R} .

Resolução

Uma função é diferenciável num ponto se tiver derivada finita nesse ponto.

Sabe-se que toda a função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto.

Então, a função dada tem de ser contínua nos pontos $x = -1$ e $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -a + b - c + d$$

Então, $-a + b - c + d = -1 = f(-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = a + b + c + d$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$$

Então, $a + b + c + d = 3 = f(1)$

Suponhamos que $-1 < k < 1$.

$$\begin{aligned} f'(k) &= \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d - ak^3 - bk^2 - ck - d}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k} \frac{a(x^3 - k^3) + b(x^2 - k^2) + c(x - k)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k} \frac{a(x - k)(x^2 + kx + k^2) + b(x - k)(x + k) + c(x - k)}{x - k} \\ &= \lim_{x \rightarrow k} (a(x^2 + kx + k^2) + b(x + k) + c) = 3ak^2 + 2bk + c \end{aligned}$$

Se a função é diferenciável em \mathbb{R} , então devemos ter:

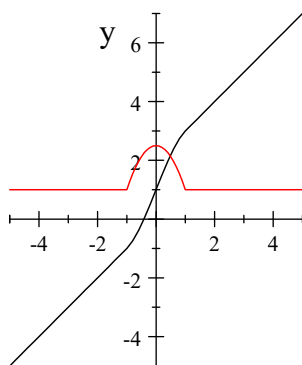
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow x \leq -1 \\ 3ax^2 + 2bx + c & \Leftarrow -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \Leftarrow x \geq 1 \end{cases}$$

Então, $3a - 2b + c = 1 \wedge 3a + 2b + c = 1$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -a + b - c + d = -1 \\ a + b + c + d = 3 \\ 3a - 2b + c = 1 \\ 3a + 2b + c = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} -a + b - c + d = -1 \\ a + b + c + d = 3 \\ 4b = 0 \\ c = 1 - 3a - 2b \end{cases} &\iff \begin{cases} -a - 1 + 3a + d = -1 \\ a + 1 - 3a + d = 3 \\ b = 0 \\ c = 1 - 3a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = -2a \\ a - 3a - 2a = 2 \\ b = 0 \\ c = 1 - 3a \end{cases} &\iff \begin{cases} d = -2a \\ -4a = 2 \\ b = 0 \\ c = 1 - 3a \end{cases} &\iff \begin{cases} d = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 1 + \frac{3}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{5}{2} \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} x & \iff x \leq -1 \\ -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x + 1 & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & \iff x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \iff x \leq -1 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2} & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \iff x \geq 1 \end{cases}$$



Este problema pode ser interpretado como um desvio entre dois carris paralelos, como existe nas estações ferroviárias.

Exercício 286 Seja $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \iff x \leq -1 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ x & \iff x \geq 1 \end{cases}$ Determine os números reais a, b, c, d de modo que f seja uma função diferenciável em \mathbb{R} .

Os valores que se obtêm substituindo x por -1 , nas expressões $x + 2$ e $ax^3 + bx^2 + cx + d$, têm de ser iguais. Logo, $-a + b - c + d = 1$.

Analogamente, $a + b + c + d = 1$. Suponhamos que $-1 < x < 1$. Então, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Se a função f é diferenciável em \mathbb{R} , então devemos ter:

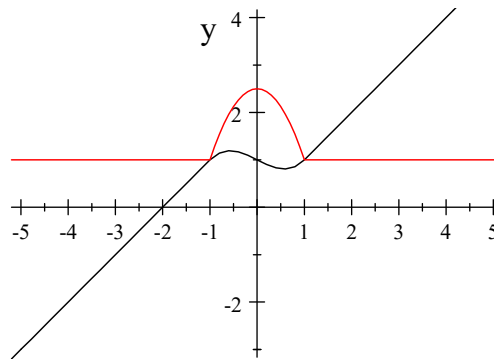
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \iff x \leq -1 \\ 3ax^2 + 2bx + c & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \iff x \geq 1 \end{cases}$$

Então, $3a - 2b + c = 1 \wedge 3a + 2b + c = 1$. Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -a + b - c + d = 1 \\ a + b + c + d = 1 \\ 3a - 2b + c = 1 \\ 3a + 2b + c = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2b + 2d = 2 \\ 2a + 2c = 0 \\ 4b = 0 \\ c = 1 - 3a - 2b \end{cases} \iff \begin{cases} d = 1 \\ c = -a \\ b = 0 \\ c = 1 - 3a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} d = 1 \\ b = 0 \\ c = -a \\ -a + 3a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \iff x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x + 1 & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ x & \iff x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \iff x \leq -1 \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2} & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \iff x \geq 1 \end{cases}$$



Neste caso, o desvio é quase perpendicular aos carris, o que significa que o intervalo onde a função é definida por uma cúbica devia ser aumentado. Outro aspecto a salientar é o facto das imagens de -1 e 1 serem iguais, quando devíamos ter a imagem de 1 superior à imagem de -1 , para que a curva fosse mais suave.

Exercício 287 Seja $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \iff x \leq -3 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \iff -3 \leq x \leq 3 \\ x & \iff x \geq 3 \end{cases}$. Determine os números reais a, b, c, d de modo que f seja uma função diferenciável em \mathbb{R} .

Os valores que se obtêm substituindo x por -3 , nas expressões $x + 2$ e $ax^3 + bx^2 + cx + d$, têm de ser iguais. Logo, $-27a + 9b - 3c + d = -1$.

Analogamente, $27a + 9b + 3c + d = 3$. Suponhamos que $-1 < x < 1$. Então, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

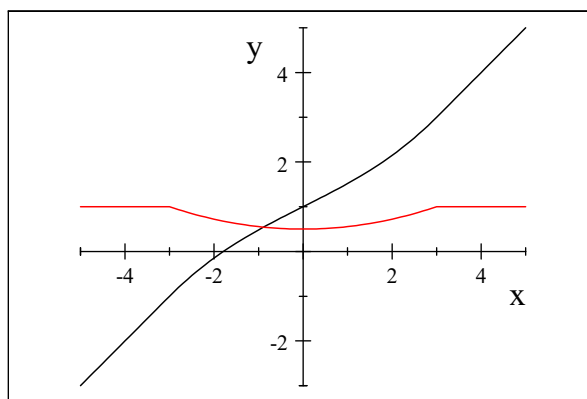
Para que f seja diferenciável em \mathbb{R} , deve ser $f'(x) = \begin{cases} 1 & \iff x \leq -3 \\ 3ax^2 + 2bx + c & \iff -3 \leq x \leq 3 \\ 1 & \iff x \geq 3 \end{cases}$

Então, $27a - 6b + c = 1 \wedge 27a + 6b + c = 1$. Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -27a + 9b - 3c + d = -1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 3 \\ 27a - 6b + c = 1 \\ 27a + 6b + c = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 54a + 6c = 4 \\ 18b + 2d = 2 \\ 12b = 0 \\ 54a + 2c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 54a + 6 - 162a = 4 \\ d = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 - 27a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -108a = -2 \\ d = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 - 27a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{54} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \iff x \leq -3 \\ \frac{1}{54}x^3 + \frac{1}{2}x + 1 & \iff -3 \leq x \leq 3 \\ x & \iff x \geq 3 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \iff x \leq -3 \\ \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{2} & \iff -3 \leq x \leq 3 \\ 1 & \iff x \geq 3 \end{cases}$$



Neste exemplo, a curva já é mais suave.

Exercício 288 Seja $f(x) = \begin{cases} 2x & \iff x \leq -1 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & \iff x \geq 1 \end{cases}$. Determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, de modo que f seja uma função diferenciável em \mathbb{R} .

Resolução

Este exercício é análogo aos anteriores, com a diferença das semi-rectas não serem paralelas.

Os valores que se obtêm substituindo x por -1 , nas expressões $2x$ e $ax^3 + bx^2 + cx + d$, têm de ser iguais.

Logo, $-a + b - c + d = -2$. Analogamente, $a + b + c + d = 3$.

Suponhamos que $-1 < x < 1$. Então $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

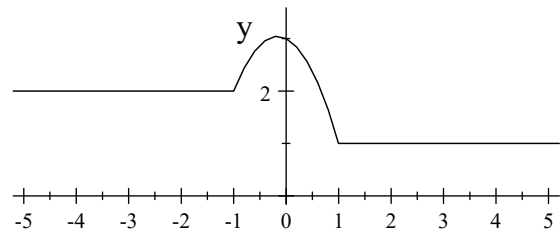
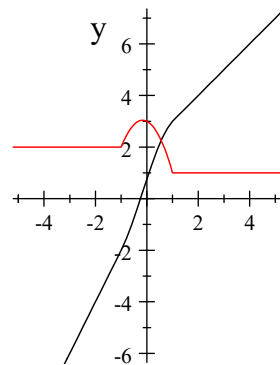
Para que f seja diferenciável em \mathbb{R} , deve ser $f'(x) = \begin{cases} 2 & \iff x \leq -1 \\ 3ax^2 + 2bx + c & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \iff x \geq 1 \end{cases}$

Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -a + b - c + d = -2 \\ a + b + c + d = 3 \\ 3a - 2b + c = 2 \\ 3a + 2b + c = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a + 2c = 5 \\ 2b + 2d = 1 \\ 4b = -1 \\ 6a + 2c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2c = 5 \\ 2d = 1 + \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \\ 4a = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -1 + 2c = 5 \\ d = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = 3 \\ d = \frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 2x & \iff x \leq -1 \\ -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x + \frac{3}{4} & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ x + 2 & \iff x \geq 1 \end{cases} \\ f'(x) &= \begin{cases} 2 & \iff x \leq -1 \\ -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 & \iff -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \iff x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$



Como podemos verificar pelo gráfico de f , em referencial ortonormado, a transição da curva para a semi-recta é algo brusca, pelo que não será muito aconselhável para um carril.

Podemos aumentar o intervalo onde a função é definida por uma cúbica para $[-2, 2]$, obtendo-se o seguinte exercício:

Exercício 289 Seja $f(x) = \begin{cases} 2x & \iff x \leq -2 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \iff -2 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & \iff x \geq 2 \end{cases}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Determine a, b, c, d de modo que f seja uma função diferenciável em \mathbb{R} .

Resolução

Os valores que se obtêm substituindo x por -2 , nas expressões $2x$ e $ax^3 + bx^2 + cx + d$, têm de ser iguais. Logo, $-8a + 4b - 2c + d = -4$.

Analogamente, $8a + 4b + 2c + d = 4$.

Suponhamos que $-2 < x < 2$. Então, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Se a função é diferenciável em \mathbb{R} , então devemos ter

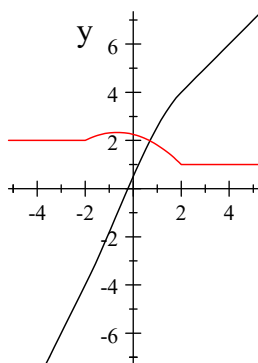
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \Leftarrow x \leq -2 \\ 3ax^2 + 2bx + c & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases}$$

Então, $12a - 4b + c = 2 \wedge 12a + 4b + c = 1$. Então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = -4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \\ 12a - 4b + c = 2 \\ 12a + 4b + c = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 16a + 4c = 8 \\ 8b + 2d = 0 \\ 24a + 2c = 3 \\ 8b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - 4a \\ d = -4b \\ 24a + 4 - 8a = 3 \\ b = -\frac{1}{8} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 + \frac{1}{4} \\ d = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{16} \\ b = -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ d = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{16} \\ b = -\frac{1}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 2x & \Leftarrow x \leq -2 \\ -\frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{2} & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases} \\ f'(x) &= \begin{cases} 2 & \Leftarrow x \leq -2 \\ -\frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$



Exercício 290 Seja $f(x) = \begin{cases} 2x & \Leftarrow x \leq -2 \\ ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases}$. Determine os números reais a, b, c, d de modo que f seja uma função diferenciável em \mathbb{R} .

Resolução

Os valores que se obtêm substituindo x por -2 , nas expressões $2x$ e $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k$, têm de ser iguais. Logo, $16a - 8b + 4c - 2d + k = -4$. Analogamente, $16a + 8b + 4c + 2d + k = 4$.

Somando as duas equações, membro a membro, obtemos $32a + 8c + 2k = 0$, donde vem $k = -16a - 4c$.

Subtraindo as duas equações, membro a membro, obtemos $16b + 4d = 8$, donde vem $d = 2 - 4b$.

Suponhamos que $-2 < x < 2$. Então, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Se a função é diferenciável em \mathbb{R} , então devemos ter:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \Leftarrow x \leq -2 \\ 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases}$$

Então, $-32a + 12b - 4c + d = 2 \wedge 32a + 12b + 4c + d = 1$.

Somando e subtraindo as duas equações, membro a membro, obtemos $\begin{cases} 24b + 2d = 3 \\ 64a + 8c = -1 \end{cases}$

Então:

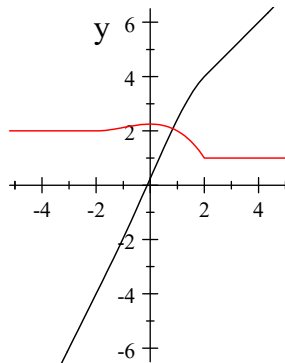
$$\begin{cases} k = -16a - 4c \\ d = 2 - 4b \\ 24b + 2d = 3 \\ 64a + 8c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -16a + 32a + \frac{1}{2} \\ d = 2 - 4b \\ 24b + 4 - 8b = 3 \\ c = -8a - \frac{1}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} k = 16a + \frac{1}{2} \\ d = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \\ b = -\frac{1}{16} \\ c = -8a - \frac{1}{8} \end{cases}$$

O sistema anterior é indeterminado, pois a pode assumir qualquer valor, pelo que há infinitas funções que satisfazem as condições pretendidas. Façamos $a = -\frac{1}{64}$. Então, $b = -\frac{1}{16}$, $c = 0$, $d = \frac{9}{4}$, $k = \frac{1}{4}$.

Logo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \Leftarrow x \leq -2 \\ -\frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{4} & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \Leftarrow x \leq -2 \\ \frac{9}{4} - \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{16}x^2 & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases}$$



Exercício 291 Defina uma função f , contínua e diferenciável em \mathbb{R} , utilizando segmentos de recta e arcos de circunferência e que seja um prolongamento da função $g(x) = \begin{cases} 2x & \Leftarrow x \leq -2 \\ x + 2 & \Leftarrow x \geq 4 \end{cases}$.

Resolução

Consideremos as rectas definidas por $y = 2x$ e $y = x + 2$. É imediato concluir que as duas rectas se intersectam no ponto $I = (2, 4)$.

Sejam $A = (-2, -4)$ e $B = (4, 6)$. Então, $\overrightarrow{AI} = I - A = (4, 8)$ e $\overrightarrow{BI} = I - B = (-2, -2)$.

Logo, $\|\overrightarrow{AI}\| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ e $\|\overrightarrow{BI}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Vamos determinar, sobre a semi-recta definida por $y = 2x$, com $x \leq 2$, o ponto C , tal que $\|\overrightarrow{CI}\| = \|\overrightarrow{BI}\| = 2\sqrt{2}$. Refira-se que pretendemos que a abcissa do ponto C seja inferior à abcissa do ponto I .

O ponto C pertence à circunferência de centro I e raio $2\sqrt{2}$, pelo que pode ser determinado através das equações da recta $y = 2x$ e da circunferência $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 8$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + (2x - 4)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 + 4(x - 2)^2 = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ (x - 2)^2 = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 2 \pm \sqrt{\frac{8}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \pm \frac{4\sqrt{10}}{5} \\ x = 2 \pm \frac{2\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $C = \left(2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}, 4 - \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$.

Seguidamente consideramos as rectas que passam por B e C e são perpendiculares às rectas BI e CI , respectivamente. Essas duas rectas intersectam-se num ponto D , equidistante de B e C , pelo que o ponto D pertence à mediatriz do segmento de recta BC .

Equação da recta que passa por B e é perpendicular a \overrightarrow{BI} :

$$y - 6 = -(x - 4) \iff y = -x + 10$$

Ora, $\overrightarrow{CI} = I - C = (2, 4) - \left(2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}, 4 - \frac{4\sqrt{10}}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\sqrt{10}, \frac{4}{5}\sqrt{10}\right)$.

Equação da recta que passa por C e é perpendicular a \overrightarrow{CI} :

$$y - 4 + \frac{4\sqrt{10}}{5} = -\frac{1}{2} \left(x - 2 + \frac{2\sqrt{10}}{5}\right) \iff y = -\frac{1}{2}x + 5 - \sqrt{10}$$

Determinação do ponto D :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -x + 10 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 - \sqrt{10} \end{cases} &\iff \begin{cases} y = -x + 10 \\ -x + 10 = -\frac{1}{2}x + 5 - \sqrt{10} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -x + 10 \\ -2x + x = -10 - 2\sqrt{10} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2\sqrt{10} \\ x = 10 + 2\sqrt{10} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $D = (10 + 2\sqrt{10}, -2\sqrt{10})$.

Então, $\overrightarrow{BD} = D - B = (10 + 2\sqrt{10}, -2\sqrt{10}) - (4, 6) = (6 + 2\sqrt{10}, -6 - 2\sqrt{10})$.

Logo, $\|\overrightarrow{BD}\| = (6 + 2\sqrt{10}) \|(1, 1)\| = (6 + 2\sqrt{10}) \sqrt{2} = r$

Equação da circunferência de centro D e raio $(6 + 2\sqrt{10}) \sqrt{2}$:

$$(x - 10 - 2\sqrt{10})^2 + (y + 2\sqrt{10})^2 = 2(6 + 2\sqrt{10})^2$$

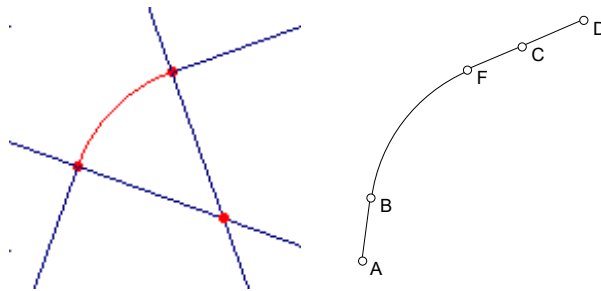
Da equação anterior vem:

$$y = -2\sqrt{10} \pm \sqrt{152 + 48\sqrt{10} - (x - 10 - 2\sqrt{10})^2}$$

Logo, $y = -2\sqrt{10} + \sqrt{152 + 48\sqrt{10} - (x - 10 - 2\sqrt{10})^2}$, com $\frac{10-2\sqrt{10}}{5} \leq x \leq 4$, pelo que temos a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \Longleftarrow x \leq \frac{10-2\sqrt{10}}{5} \\ -2\sqrt{10} + \sqrt{152 + 48\sqrt{10} - (x - 10 - 2\sqrt{10})^2} & \Longleftarrow \frac{10-2\sqrt{10}}{5} \leq x \leq 4 \\ x + 2 & \Longleftarrow x \geq 4 \end{cases}$$

Exemplos de construções geométricas, sem a preocupação de representar a situação do problema concreto:



Uma questão pertinente é a de saber em que condições é que o problema tem solução. Esta questão fica ao cuidado do leitor.

Exercício 292 Considere as semi-rectas definidas por $x = -2 \wedge y \leq -3$ e $x = 2 \wedge y \geq 3$. Pretende-se encontrar um "desvio" entre as duas semi-rectas, tipo "desvio entre carris paralelos", formado por dois arcos de elipse. Como proceder?

Resolução

Sejam $A = (-2, -3)$ e $B = (2, 3)$, as origens das duas semi-rectas. Consideremos, ainda, os pontos $C = (-2, 3)$ e $D = (2, -3)$.

O ponto médio do segmento de recta definido por A e B é o ponto $(0, 0)$, o qual será o ponto de inflexão da curva pretendida.

Agora, consideramos a elipse de centro $(0, -3)$ e em que três dos seus vértices são os pontos $(-2, -3)$, $(0, 0)$ e $(2, -3)$.

Uma equação da elipse anterior é

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1 \iff \frac{(y+3)^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{4} \iff (y+3)^2 = \frac{36-9x^2}{4} \iff y = -3 \pm \sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}$$

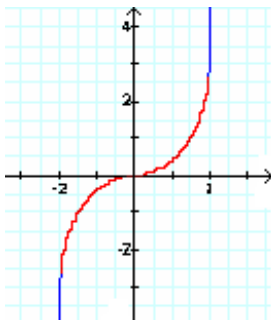
Neste caso, pretendemos obter metade da semi-elipse superior, pelo que a equação pretendida é $y = -3 + \sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}$, com $-2 \leq x \leq 0$.

E, agora, é fácil verificar que o outro arco pretendido satisfaz a condição $y = 3 - \sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}$, com $0 \leq x \leq 2$.

Então, a curva pretendida é o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} -3 + \sqrt{\frac{36-9x^2}{4}} & \Leftarrow -2 \leq x \leq 0 \\ 3 - \sqrt{\frac{36-9x^2}{4}} & \Leftarrow 0 \leq x \leq 2 \end{cases},$$

cujas representação gráfica, incluindo, a azul, as semi-rectas dadas, é a seguinte:



Registe-se que, para conseguir um quarto de elipse, foi necessário um pequeno truque, o qual consistiu em multiplicar a função $y = -3 + \sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}$, definida no intervalo $[-2, 2]$, por $\frac{x - |x|}{x - |x|}$, obtendo-se, na mesma, a função $y = -3 + \sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}$, mas definida em $[-2, 0[$, o que em termos práticos, é o mesmo que $[-2, 0]$. E, para o outro ramo, procedeu-se do mesmo modo, multiplicando a função $y = 3 - \sqrt{\frac{36-9x^2}{4}}$ por $\frac{x + |x|}{x + |x|}$. Registe-se que este truque pode não funcionar nalgum programa.

Exercício 293 Considere as semi-rectas definidas pelas condições $x = -2 \wedge y \leq -2$ e $y = x \wedge x \geq 3$. Pretende-se encontrar um "desvio" entre as duas semi-rectas, tipo "desvio entre carris não paralelos", formado por dois arcos de elipse. Como proceder?

Resolução

Consideremos a circunferência de centro no eixo das ordenadas, que passa pelo ponto $A = (3, 3)$ e que é tangente à recta de equação $y = x$.

A recta que passa por A e é perpendicular à recta de equação $y = x$ tem declive -1 , pelo que é definida pela equação $y - 3 = -(x - 3)$, donde se conclui que $y = 6 - x$.

Então, o centro da circunferência é o ponto $C = (0, 6)$, donde vem que $\overrightarrow{CA} = A - C = (3, 3) - (0, 6) = (3, -3)$ e $\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = r$.

Consideremos, sobre a circunferência anterior, um arco de 45° de amplitude, marcado a partir do ponto $(3, -3)$ e no sentido dos ponteiros do relógio. Este arco termina no ponto $B = (0, 6) - (0, 3\sqrt{2}) = (0, 6 - 3\sqrt{2})$, sendo que neste ponto a tangente à circunferência é uma recta horizontal.

Agora, basta desenhar um quarto de elipse cujas extremidades sejam os pontos $B = (0, 6 - 3\sqrt{2})$ e $D = (-2, -2)$, pontos estes que são dois dos vértices da elipse (a qual tem centro $(0, -2)$).

Equação da elipse:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{(8-3\sqrt{2})^2} = 1$$

Equação da circunferência:

$$x^2 + (y-6)^2 = 18$$

Agora, com alguma paciência, definimos os arcos apropriados:

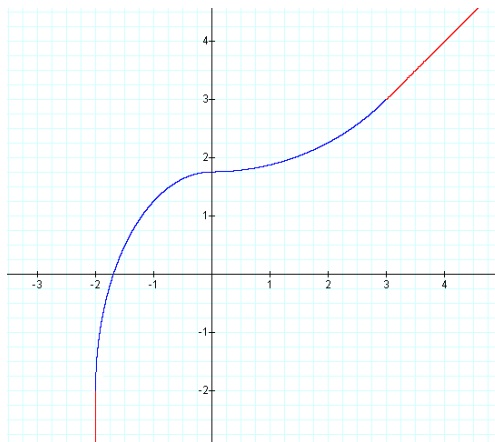
Arco de elipse:

$$y = -2 + \frac{8-3\sqrt{2}}{2} \sqrt{4-x^2} \wedge -2 \leq x \leq 0$$

Arco de circunferência:

$$y = 6 - \sqrt{18-x^2} \wedge 0 \leq x \leq 3$$

Representação gráfica:



Exercício 294 Considere as semi-rectas definidas pelas condições $x = -2 \wedge y \leq -2$ e $y = 2x \wedge x \geq 3$. Pretende-se encontrar um desvio entre as duas semi-rectas, tipo curva e contracurva, formado por um arco de elipse e um arco de circunferência. Como proceder?

Resolução

Consideremos a circunferência de centro no eixo das ordenadas, que passa pelo ponto $A = (3, 6)$ e que é tangente à recta de equação $y = 2x$.

Então, a recta que passa por A e é perpendicular à recta de equação $y = 2x$ tem declive $-\frac{1}{2}$, pelo que é definida pela equação $y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 3)$, donde se conclui que $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$. Então, o centro da circunferência é o ponto $C = (0, \frac{15}{2})$.

Logo, $\overrightarrow{CA} = A - C = (3, 6) - (0, \frac{15}{2}) = (3, -\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}(6, -3)$.

Então, $\|\overrightarrow{CA}\| = \frac{1}{2}\sqrt{36+9} = \frac{1}{2}\sqrt{45} = \frac{3}{2}\sqrt{5} = r$.

Logo, uma equação da circunferência é

$$x^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a y , temos $y = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{45}{4} - x^2}$, pelo que uma equação da semicircunferência inferior é $y = \frac{15}{2} - \sqrt{\frac{45}{4} - x^2}$.

Então, o arco pretendido é definido por $y = \frac{15}{2} - \sqrt{\frac{45}{4} - x^2} \wedge 0 \leq x \leq 3$. O arco anterior começa no ponto $B = (0, \frac{15}{2}) - (0, \frac{3}{2}\sqrt{5}) = (0, \frac{15-3\sqrt{5}}{2})$, sendo que neste ponto a tangente à circunferência é uma recta horizontal.

E, agora, basta desenhar um quarto de elipse que passe pelos pontos $B = (0, \frac{15-3\sqrt{5}}{2})$ e $D = (-2, -2)$, pontos estes que são dois dos vértices da elipse, a qual tem centro $(0, -2)$.

Equação da elipse:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{\left(\frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1$$

Agora, com alguma paciência, definimos os arcos apropriados:

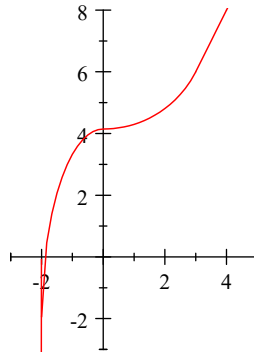
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{\left(\frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1 &\iff \left(\frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 + 4(y+2)^2 = 4\left(\frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &\iff 4(y+2)^2 = 4\left(\frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 \\ &\iff 4(y+2)^2 = \left(\frac{19-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 (4-x^2) \\ &\iff (y+2)^2 = \left(\frac{19-3\sqrt{5}}{4}\right)^2 (4-x^2) \\ &\iff y+2 = \pm \left(\frac{19-3\sqrt{5}}{4}\right) \sqrt{4-x^2} \\ &\iff y = -2 \pm \left(\frac{19-3\sqrt{5}}{4}\right) \sqrt{4-x^2} \end{aligned}$$

Arco de elipse:

$$y = -2 + \left(\frac{19-3\sqrt{5}}{4}\right) \sqrt{4-x^2} \wedge -2 \leq x \leq 0$$

Arco de circunferência:

$$y = \frac{15}{2} - \sqrt{\frac{45}{4} - x^2} \wedge 0 \leq x \leq 3$$



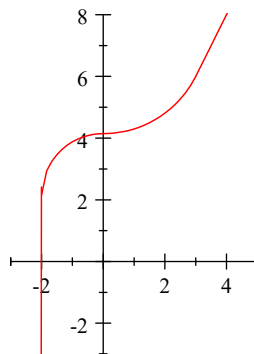
Observe-se que, devido ao facto da elipse ter os focos na vertical, podemos substituir o arco de elipse por uma arco de circunferência, caso se prolongue a semi-recta vertical até um ponto conveniente.

É claro que o raio da circunferência tem de ser 2 e a circunferência tem de passar pelo ponto $B = \left(0, \frac{15-3\sqrt{5}}{2}\right)$. Então, o centro é o ponto $E = \left(0, \frac{11-3\sqrt{5}}{2}\right)$, pelo que uma equação da circunferência é

$$x^2 + \left(y - \frac{11-3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 4$$

, donde se obtém $y = \frac{11-3\sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{4-x^2}$.

Mas, só nos interessa $y = \frac{11-3\sqrt{5}}{2} + \sqrt{4-x^2}$. Gráfico:



Exercício 295 Estude a função definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} & \Leftarrow x \leq -2 \\ -\sqrt{4-x^2} & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases}$

Resolução

A função está bem definida, porque as duas primeiras expressões anulam-se para $x = -2$, enquanto que as duas últimas se anulam para $x = 2$, pelo que não há um objecto com duas imagens.

O domínio da função é \mathbb{R} . A função é contínua em \mathbb{R} .

A função não é par nem ímpar, porque $f(-3) = \sqrt{5}$ e $f(3) = 1$.

É fácil verificar que os zeros da função são -2 e 2 . Então, a função não é injectiva, pelo que não existe função inversa de f .

Também é fácil verificar que a função é negativa em $]-2, 2[$, sendo positiva em $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

Derivada da função:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} & \Leftarrow x < -2 \\ \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} & \Leftarrow -2 < x < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-2}} & \Leftarrow x > 2 \end{cases}$$

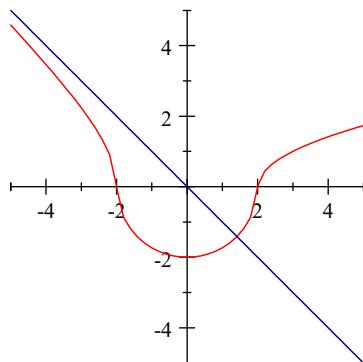
A derivada é negativa em $]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$, sendo positiva em $]0, 2[\cup]2, +\infty[$.

Então, como f é contínua em \mathbb{R} , f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

Assíntotas:

$$\begin{cases} m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = 0 \\ b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} = +\infty \\ m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-4}} = -1 \\ b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-4} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}-x} = 0 \end{cases}$$

Logo, a recta de equação $y = -x$ é a única assíntota ao gráfico da função.



Exercício 296 Estude a função definida por $s(x) = \begin{cases} -1 & \Leftarrow x < 0 \\ 0 & \Leftarrow x = 0 \\ 1 & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$

Resolução

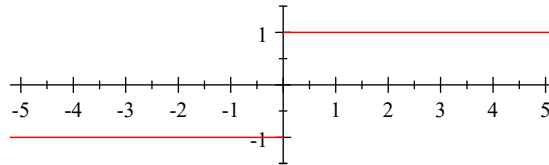
O domínio da função é \mathbb{R} .

A função não é contínua no ponto $x = 0$, sendo contínua em qualquer outro ponto. O contra-domínio da função é $\{-1, 0, 1\}$.

Note-se que esta função pode ser obtida para obter a função módulo:

$$|x| = xs(x) = \begin{cases} -x & \Leftarrow x < 0 \\ 0 & \Leftarrow x = 0 \\ x & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$$

À função $s(x)$ é costume chamar função sinal.
Representação gráfica de $s(x)$:



Observe-se que o gráfico não está totalmente correcto: faltam "bolas abertas" nos pontos $(0, -1)$ e $(0, 1)$ e uma "bola fechada" na origem.

Exercício 297 Estude a função definida por $f_n(x) = \begin{cases} -1 & \Leftarrow x < -n \\ \frac{x}{n} & \Leftarrow -n \leq x \leq n \\ 1 & \Leftarrow x > n \end{cases}$

Resolução

Consideremos a função $f_1(x) = \begin{cases} -1 & \Leftarrow x < -1 \\ x & \Leftarrow -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \Leftarrow x > 1 \end{cases}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1; \quad f_1(1) = 1$$

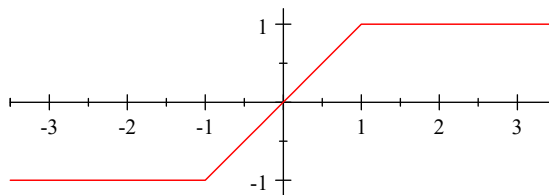
Então, a função f_1 é contínua no ponto $x = 1$.

Analogamente, a função f_1 é contínua no ponto $x = -1$.

Logo, a função f_1 é contínua em \mathbb{R} , pois é contínua nos restantes pontos.

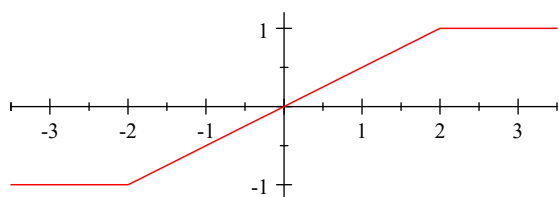
A derivada da função é $f'_1(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x < -1 \vee x > 1 \\ 1 & \Leftarrow -1 < x < 1 \end{cases}$

A representação gráfica da função $f_1(x)$ é a seguinte:

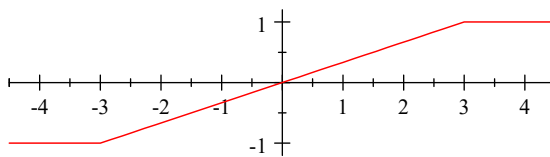


Apresentamos, agora, as representações gráficas de $f_2(x)$ e de $f_3(x)$.

$$\text{Ora, } f_2(x) = \begin{cases} -1 & \Leftarrow x < -2 \\ \frac{x}{2} & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ 1 & \Leftarrow x > 2 \end{cases} \text{ e } f_3(x) = \begin{cases} -1 & \Leftarrow x < -3 \\ \frac{x}{3} & \Leftarrow -3 \leq x \leq 3 \\ 1 & \Leftarrow x > 3 \end{cases}.$$



$y = f_2(x)$



$y = f_3(x)$

Para a função $f_n(x)$, temos que a derivada da função é dada por

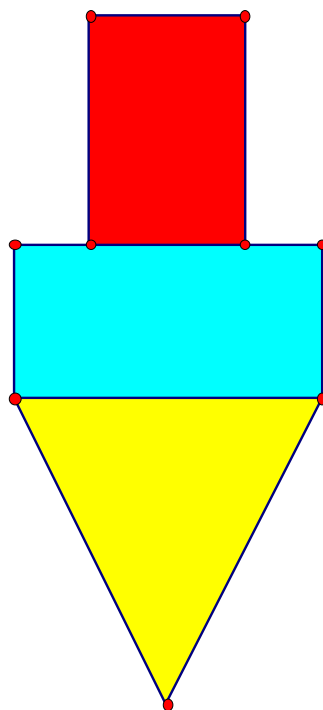
$$f'_n(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow x < -n \vee x > n \\ 1 & \Leftarrow -n < x < n \end{cases}$$

.

A função é contínua em \mathbb{R} , mas não tem derivada nos pontos $x = -n$ e $x = n$.

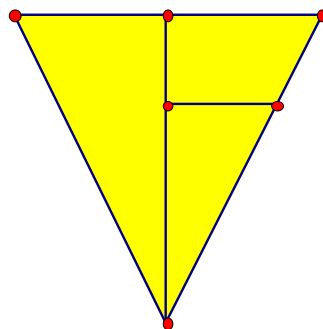
O contradomínio é $[-1, 1]$.

Exercício 298 Considere um recipiente constituído por um cone e por dois cilindros de revolução, de acordo com a figura abaixo: O cone de revolução tem 5 cm de altura e 2 cm de raio. O cilindro que assenta no cone tem 2 cm de raio e 2 cm de altura. O segundo cilindro tem 1 cm de raio e 3 cm de altura. Suponha que deitamos um líquido no recipiente. Determine o volume do líquido em função da altura do mesmo.

**Resolução**

Vamos considerar que as medidas referidas são interiores (ou que a espessura do recipiente pode ser desprezada).

Suponhamos que h , a altura do líquido, está entre 0 cm e 5 cm.



Então r , o raio do círculo que limita o líquido, é dado por $r = \frac{2}{5}h$
Logo, V , o volume do líquido, é dado por

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{5}h\right)^2 h = \frac{4}{75}\pi h^3, 0 \leq h \leq 5$$

Observe-se que o volume do cone (cheio) é $V(5) = \frac{4}{75}\pi 5^3 = \frac{20}{3}\pi$.

Para valores de h entre 5 cm e 7 cm, o volume do líquido é o volume do cone somado com o volume do cilindro de altura $(h-5)$ cm e cuja base tem 2 cm de raio.

Ora, o volume deste cilindro é $\pi \times 2^2 (h-5) = 4\pi (h-5)$.

Então, V , o volume do líquido, é dado por

$$V(h) = \frac{20}{3}\pi + 4\pi(h-5) = 4\pi h - \frac{40}{3}\pi, 5 \leq h \leq 7$$

Logo, $V(7) = 28\pi - \frac{40}{3}\pi = \frac{44}{3}\pi$.

Finalmente, para valores de h entre 7 cm e 10 cm, o volume do líquido é a soma de $\frac{44}{3}\pi$ com $\pi \times 1^2 h$. Logo,

$$V(h) = \frac{44}{3}\pi + \pi(h-7) = \frac{23}{3}\pi + \pi h, 7 \leq h \leq 10$$

Então,

$$V(h) = \begin{cases} \frac{4}{75}\pi h^3 & \Leftarrow 0 \leq h \leq 5 \\ 4\pi h - \frac{40}{3}\pi & \Leftarrow 5 \leq h \leq 7 \\ \frac{23}{3}\pi + \pi h & \Leftarrow 7 \leq h \leq 10 \end{cases}$$

Exemplo 299 Considere a função, de domínio $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, definida por $f(x) = |x|$. Utilizando um arco de hipérbole, prolongue a função a \mathbb{R} , de modo que a nova função seja diferenciável (logo contínua) em \mathbb{R} .

Resolução

É claro que pretendemos obter uma função $f_p(x)$, definida da seguinte maneira

$$f_p(x) = \begin{cases} -x & \Leftarrow x \leq -2 \\ g(x) & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x & \Leftarrow x \end{cases}$$

Mas, pretendemos que o gráfico de $g(x)$ seja um arco de hipérbole, além de que a função tem de ser contínua e diferenciável em \mathbb{R} .

É conveniente que $g(x)$ seja uma função par e que tenha um ponto de declive 1 (e outro de declive -1).

Consideremos a função $h(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$, cujo gráfico é um ramo de hipérbole. Ora, $h'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

Logo, $h'(2) = \frac{2 \times 2}{\sqrt{2 \times 2^2 + 1}} = \frac{4}{3}$.

Então, basta-nos considerar uma nova função que resulta da anterior multiplicada por $\frac{3}{4}$, ou seja, $H(x) = \frac{3}{4}\sqrt{2x^2 + 1}$.

Como podemos verificar, temos $H'(x) = \frac{3}{4} \times \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{3x}{2\sqrt{2x^2+1}}$, pelo que $H'(2) = \frac{3 \times 2}{2\sqrt{2 \times 2^2 + 1}} = 1$.

Como $H(x)$ é uma função par, temos que a derivada é uma função ímpar, pelo que $H'(2) = -1$.

Ora, $H(2) = \frac{3}{4}\sqrt{2 \times 2^2 + 1} = \frac{9}{4}$. Aqui, temos um ligeiro problema, pois $f(x) = 2 \neq \frac{9}{4}$.

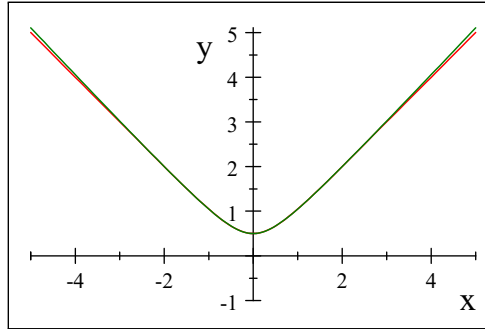
Então, basta-nos "tirar" $\frac{1}{4}$, para que tudo funcione bem.

Ou seja, vamos considerar a função $H(x) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{2x^2 + 1}$, para a qual continuamos a ter $H'(2) = \frac{3 \times 2}{2\sqrt{2 \times 2^2 + 1}} = 1$ e em que $H(2) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{2 \times 2^2 + 1} = 2$.

Então,

$$f_p(x) = \begin{cases} -x & \Leftarrow x \leq -2 \\ -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{2x^2+1} & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases}$$

Representação gráfica de $f_p(x)$ e de $H(x) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{2x^2+1}$ (de domínio \mathbb{R}):



Os dois gráficos confundem-se, mas são diferentes, embora tenham uma parte comum.

Será que existe solução no caso de pretendermos um arco de parábola?

Exemplo 300 Considere a função, de domínio $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, definida por $f(x) = |x|$. Utilizando um arco de parábola, prolongue a função a \mathbb{R} , de modo que a nova função seja diferenciável (logo contínua) em \mathbb{R} .

Resolução

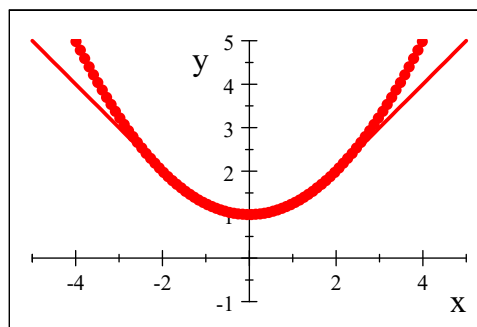
Consideremos a função $g(x) = kx^2$. Então, $g'(x) = 2kx$, pelo que $g'(2) = 4k$. Então, pretendemos que $4k = 1$, donde vem $k = \frac{1}{4}$. Então, $g(x) = \frac{1}{4}x^2$, donde se conclui que $g(2) = 1 \neq 2$.

Então, vamos considerar a função $h(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Agora, é fácil verificar que a função definida

por $f_p(x) = \begin{cases} -x & \Leftarrow x \leq -2 \\ \frac{1}{4}x^2 + 1 & \Leftarrow -2 \leq x \leq 2 \\ x & \Leftarrow x \geq 2 \end{cases}$ é contínua no ponto $x = -2$ e no ponto $x = 2$, sendo

contínua à esquerda e à direita em ambos os pontos. Também se mostra que nesses dois pontos as derivadas laterais são iguais (em cada ponto), pelo que a função é contínua e diferenciável em \mathbb{R} .

Representação gráfica das funções h e f_p :



14.2 Mais Funções Definidas por Ramos

Neste capítulo, vamos centrar a nossa atenção em duas questões: o cálculo do valor a pagar pela água de consumo doméstico e o novo imposto da sisa. Recordamos que 2003 foi o Ano Internacional da Água Doce.

Exemplo 301 Suponhamos que, num certo concelho da RAM, o preço da água (consumo doméstico) é calculado do seguinte modo: O consumidor paga uma taxa fixa mensal de Euro, sendo que o preço do m de água é de Euro. Calcule o preço total a pagar por um consumo mensal de:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) 8 m^3 | c) 20 m^3 | e) 38 m^3 |
| b) 12 m^3 | d) 30 m^3 | f) 50 m^3 |

Resolução

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) $8 \times 0,25 + 3,50 = 5,50$ | d) $30 \times 0,25 + 3,50 = 11,00$ |
| b) $12 \times 0,25 + 3,50 = 6,50$ | e) $38 \times 0,25 + 3,50 = 13,00$ |
| c) $20 \times 0,25 + 3,50 = 8,50$ | f) $50 \times 0,25 + 3,50 = 16,00$ |

Se pretendermos o valor a pagar pelo consumo de $n \text{ m}^3$ de água, temos

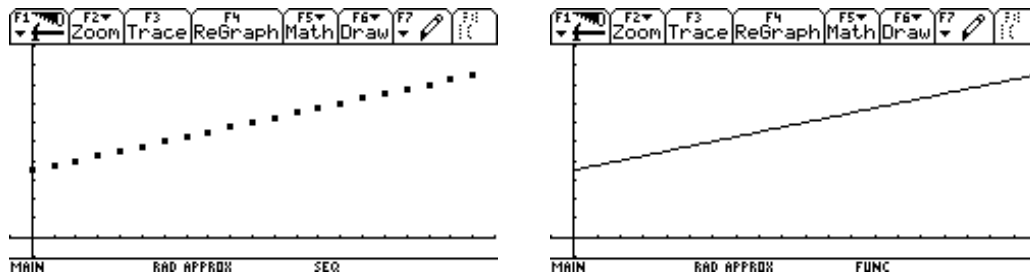
$$f(n) = 0,25n + 3,50$$

Se admitirmos que o consumo pode ser qualquer número real não negativo x , temos

$$g(x) = 0,25x + 3,50$$

No primeiro caso estamos a supor que n é um número natural, pelo que a função é uma sucessão. No segundo caso, trata-se duma função real de variável real de domínio $[0, +\infty[$.

Representação gráfica:



Exemplo 302 Suponhamos que, num certo concelho da RAM, o preço da água (consumo doméstico) é calculado do seguinte modo: O consumidor paga uma taxa fixa mensal de 3,50 Euros, sendo que o preço do m^3 de água depende do consumo. Se o consumo for menor ou igual a 10 m^3 , cada m^3 de água consumida custa 0,25 Euro; se o consumo for superior a 10 m^3 e inferior a 25 m^3 , cada m^3 de água consumida custa 0,35 Euro; se o consumo for superior a 25 m^3 , cada m^3 de água consumida custa 0,50 Euro. Calcule o preço total a pagar por um consumo mensal de:

a) 8 m^3

c) 20 m^3

e) 38 m^3

b) 12 m^3

d) 30 m^3

f) 50 m^3

Resolução

a) $8 \times 0,25 + 3,50 = 5,50$

d) $30 \times 0,50 + 3,50 = 18,50$

b) $12 \times 0,35 + 3,50 = 7,70$

e) $38 \times 0,50 + 3,50 = 22,50$

c) $20 \times 0,35 + 3,50 = 10,50$

f) $50 \times 0,50 + 3,50 = 28,50$

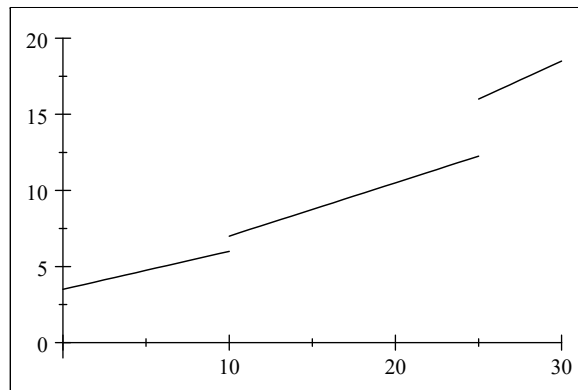
Se pretendermos o valor a pagar pelo consumo de $n \text{ m}^3$, temos

$$f(n) = \begin{cases} 0,25n + 3,50 & \Leftarrow 0 \leq n \leq 10 \\ 0,35n + 3,50 & \Leftarrow 11 \leq n \leq 25 \\ 0,50n + 3,50 & \Leftarrow 26 \leq n \end{cases}$$

Se admitirmos que o consumo pode ser qualquer número real não negativo x , temos

$$g(x) = \begin{cases} 0,25x + 3,50 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 10 \\ 0,35x + 3,50 & \Leftarrow 10 < x \leq 25 \\ 0,50x + 3,50 & \Leftarrow 25 < x \end{cases}$$

Representação gráfica de $g(x)$:



No primeiro caso estamos a supor que n é um número natural, pelo que a representação gráfica é um conjunto de pontos isolados, sobre o gráfico de $g(x)$. É claro que a função $g(x)$ admite pontos de descontinuidade.

Exemplo 303 Suponhamos que, num certo concelho da RAM, o preço da água (consumo doméstico) é calculado do seguinte modo: O consumidor paga uma taxa fixa mensal de 3,50 Euros, sendo que o preço do m^3 de água depende do consumo. Se o consumo for menor ou igual a 10 m^3 , cada m^3 de água consumida custa 0,25 Euro; se o consumo for superior a 10 m^3 e inferior a 25 m^3 , o consumidor paga 10 m^3 a 0,25 Euro e o excedente paga a 0,35 Euro cada m^3 ; se o consumo for superior a 25 m^3 , o consumidor paga 10 m^3 a 0,25 Euro, 15 m^3 a 0,35 Euro e o excedente paga a 0,50 Euro cada m^3 . Calcule o preço total a pagar por um consumo mensal de:

- a) 8 m^3 c) 20 m^3 e) 38 m^3
 b) 12 m^3 d) 30 m^3 f) 50 m^3

Resolução

- a) $8 \times 0,25 + 3,50 = 5,50$
 b) $10 \times 0,25 + 2 \times 0,35 + 3,50 = 6,70$
 c) $10 \times 0,25 + 15 \times 0,35 + 3,50 = 6,70$
 d) $30 \times 0,50 + 3,50 = 18,50$
 e) $38 \times 0,50 + 3,50 = 22,50$
 f) $50 \times 0,50 + 3,50 = 28,50$

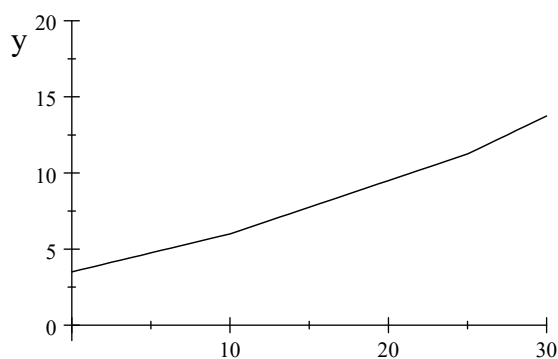
Se pretendermos o valor a pagar pelo consumo de $n \text{ m}^3$, temos

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \begin{cases} 0,25n + 3,50 & \Leftarrow 0 \leq n \leq 10 \\ 0,25 \times 10 + 0,35(n - 10) + 3,50 & \Leftarrow 11 \leq n \leq 25 \\ 0,25 \times 10 + 0,35 \times 15 + 0,50(n - 25) + 3,50 & \Leftarrow 26 \leq n \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0,25n + 3,50 & \Leftarrow 0 \leq n \leq 10 \\ 0,35n + 2,50 & \Leftarrow 11 \leq n \leq 25 \\ 0,50n - 1,25 & \Leftarrow 26 \leq n \end{cases}
 \end{aligned}$$

Se admitirmos que o consumo pode ser qualquer número real não negativo x , temos

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \begin{cases} 0,25x + 3,50 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 10 \\ 0,25 \times 10 + 0,35(x - 10) + 3,50 & \Leftarrow 10 < x \leq 25 \\ 0,25 \times 10 + 0,35 \times 15 + 0,50(x - 25) + 3,50 & \Leftarrow 25 < x \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0,25x + 3,50 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 10 \\ 0,35x + 2,50 & \Leftarrow 10 < x \leq 25 \\ 0,50x - 1,25 & \Leftarrow 25 < x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Representação gráfica de $g(x)$:



É claro que podemos interrogar-nos sobre quais serão as razões que levam os responsáveis a optar por um dos sistemas de pagamento. Registe-se que o método utilizado no exemplo 2 é injusto devido aos "saltos" que o gráfico apresenta.

A propósito deste exercício, relembramos que 2003 foi o Ano Internacional da Água Doce e que este pode ser um Tema a ser desenvolvido pelos alunos, na disciplina de Matemática, isoladamente, ou em conjunto com outras disciplinas e em vários anos de escolaridade.

Exemplo 304 *O novo Imposto da Sisa*

A partir de 3 de Junho de 2003, o valor a pagar, pelo imposto da Sisa, nas Regiões Autónomas da Madeira e dos Açores, calcula-se do seguinte modo:

Valor sobre que incide a Sisa (em Euro)	Taxa a aplicar	Parcela a abater (em Euro)
Até 100000	0 %	0
De mais de 100000 até 137500	2 %	2000
De mais de 137500 até 187500	5 %	6125
De mais de 187500 até 312500	7 %	9875
De mais de 312500 até 625000	8 %	13000
Superior a 625000	Taxa única de 6 %	

Exemplo 305 *Calcule o imposto a pagar pela compra dum apartamento que custa:*

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) 85000 Euros | c) 130000 Euros | e) 160000 Euros | g) 400000 Euros |
| b) 120000 Euros | d) 150000 Euros | f) 192500 Euros | h) 640000 Euros |

Resolução

- a) 0
- b) $120000 \times 0,02 - 2000 = 2400 - 2000 = 400$
- c) $130000 \times 0,02 - 2000 = 2600 - 2000 = 600$
- d) $150000 \times 0,05 - 6125 = 7500 - 6125 = 1375$
- e) $160000 \times 0,05 - 6125 = 8000 - 6125 = 1875$
- f) $192500 \times 0,07 - 9875 = 13475 - 9875 = 3600$
- g) $400000 \times 0,08 - 13000 = 32000 - 13000 = 19000$
- h) $640000 \times 0,06 = 38400$

Para os valores anteriores, podemos calcular a taxa média do imposto pago. Assim, temos:

- a) 0%
- b) $\frac{400}{120000} \times 100\% = \frac{1}{3}\% \approx 0,333\%$
- c) $\frac{600}{130000} \times 100\% = \frac{6}{13}\% \approx 0,462\%$
- d) $\frac{1375}{150000} \times 100\% = \frac{11}{12}\% \approx 0,917\%$

- e) $\frac{1875}{160000} \times 100\% = \frac{75}{64}\% = 1,172\%$
 f) $\frac{3600}{192500} \times 100\% = \frac{144}{77}\% = 1,870\%$
 g) $\frac{19000}{400000} \times 100\% = \frac{19}{4}\% = 4,750\%$
 h) 6%

Com os valores obtidos, podemos formar a seguinte tabela:

Valor sobre que incide a Sisa (em Euro)	Imposto a pagar (em Euro)	Taxa média
85000	0	0%
120000	400	0,333%
130000	600	0,462%
150000	1375	0,917%
160000	1875	1,172%
192500	3600	1,870%
400000	19000	4,750%
640000	38400	6,000%

Se não existisse a tabela dada no início do exercício, o cálculo da sisa podia ser feito do seguinte modo:

- a) 0
 b) $100000 \times 0 + 20000 \times 0,02 = 400$
 c) $100000 \times 0 + 30000 \times 0,02 = 600$
 d) $37500 \times 0,02 + 12500 \times 0,05 = 750 + 625 = 1375$
 e) $37500 \times 0,02 + 22500 \times 0,05 = 750 + 1125 = 1875$
 f) $37500 \times 0,02 + 50000 \times 0,05 + 5000 \times 0,07 = 750 + 2500 + 350 = 3600$
 g) $37500 \times 0,02 + 50000 \times 0,05 + 125000 \times 0,07 + 87500 \times 0,08 = 750 + 2500 + 8750 + 7000 = 19000$
 h) $640000 \times 0,06 = 38400$

E os valores obtidos, por este processo, foram os mesmos que tínhamos obtido anteriormente, por aplicação da tabela que nos indicava a taxa e a parcela a abater.

Vamos, agora, ver como se obtém a referida tabela:

Para um valor do 2º escalão (entre 100000 e 137500 Euros), a aplicação da taxa bruta de 2% provoca um erro, pois 100000 Euros estão isentos do pagamento do imposto. Então, temos de descontar 2% de 100000 Euros, ou seja 2000 Euros.

Para um valor do 3º escalão, a aplicação da taxa bruta de 5% provoca dois erros, pois 100000 Euros estão isentos do pagamento do imposto, enquanto que 37500 Euros estão sujeitos à taxa de 2%.

Então, temos de descontar 5% de 100000 Euros e 3% de 37500 Euros, ou seja, temos de descontar uma parcela de 5000 Euros e outra de 1125 Euros. Logo, o valor a abater é de 6125 Euros.

Para um valor do 4º escalão, a aplicação da taxa bruta de 8% provoca três erros.

Então, temos de descontar 7% de 100000 Euros, 5% de 37500 Euros e 2% de 50000 Euros, ou seja, temos de descontar uma parcela de 7000 Euros, outra de 1875 Euros e uma terceira de 1000 Euros. Logo, o valor a abater é de 9875 Euros.

Finalmente, para um valor do 5º escalão, a aplicação da taxa bruta de 8% provoca quatro erros.

Então, temos de descontar 8% de 100000 Euros, 6% de 37500 Euros, 3% de 50000 Euros e 1% de 125000 Euros, ou seja, temos de descontar uma parcela de 8000 Euros, uma de 2250 Euros, uma de 1500 Euros e outra de 1250 Euros. Logo, o valor a abater é de 13000 Euros. O cálculo da parcela a abater pode ser efectuado, utilizando a seguinte função real de variável real, a qual dá o imposto a pagar:

$$\begin{aligned}
 i(x) &= \begin{cases} 0 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ \frac{2}{100}(x - 100000) & \Leftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ 750 + \frac{5}{100}(x - 137500) & \Leftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ 750 + 2500 + \frac{7}{100}(x - 187500) & \Leftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ 750 + 2500 + 8750 + \frac{8}{100}(x - 312500) & \Leftarrow 312500 < x \leq 625000 \\ \frac{6}{100}x & \Leftarrow x > 625000 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ \frac{2}{100}x - 2000 & \Leftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ \frac{5}{100}x + 750 - 6875 & \Leftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ \frac{7}{100}x + 750 + 2500 - 13125 & \Leftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ \frac{8}{100}x + 750 + 2500 + 8750 - 25000 & \Leftarrow 312500 < x \leq 625000 \\ \frac{6}{100}x & \Leftarrow x > 625000 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ \frac{2}{100}x - 2000 & \Leftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ \frac{5}{100}x - 6125 & \Leftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ \frac{7}{100}x - 13125 & \Leftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ \frac{8}{100}x - 13000 & \Leftarrow 312500 < x \leq 625000 \\ \frac{6}{100}x & \Leftarrow x > 625000 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Outra questão que pode ser colocada é a de saber qual a taxa média do imposto a pagar, para um valor x do prédio:

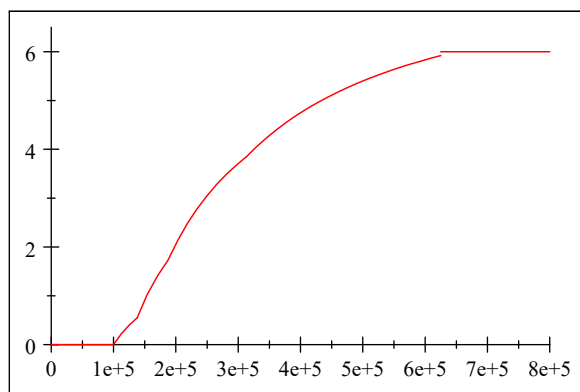
$$t(x) = \begin{cases} 0\% & \Leftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ \frac{\frac{2}{100}x - 2000}{x} \times 100\% & \Leftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ \frac{\frac{5}{100}x - 6125}{x} \times 100\% & \Leftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ \frac{\frac{7}{100}x - 13125}{x} \times 100\% & \Leftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ \frac{\frac{8}{100}x - 13000}{x} \times 100\% & \Leftarrow 312500 < x \leq 625000 \\ 6\% & \Leftarrow x > 625000 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0\% & \Leftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ \left(2 - \frac{200000}{x}\right)\% & \Leftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ \left(5 - \frac{612500}{x}\right)\% & \Leftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ \left(7 - \frac{987500}{x}\right)\% & \Leftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ \left(8 - \frac{1300000}{x}\right)\% & \Leftarrow 312500 < x \leq 625000 \\ 6\% & \Leftarrow x > 625000 \end{cases}$$

Podemos, então, considerar a função real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ 2 - \frac{200000}{x} & \Leftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ 5 - \frac{612500}{x} & \Leftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ 7 - \frac{987500}{x} & \Leftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ 8 - \frac{1300000}{x} & \Leftarrow 312500 < x \leq 625000 \\ 6 & \Leftarrow x > 625000 \end{cases}$$

Esta função tem a seguinte representação gráfica:



O gráfico anterior é formado por um segmento de recta sobre o eixo das abcissas, por vários arcos de hipérbole e, finalmente por outro segmento de recta (ou semi-recta, se não admitirmos um valor máximo para o prédio a comprar) sobre a recta de equação $y = 6$. A função anterior é crescente em sentido lato (parece ser, pelo gráfico) e, ainda pelo gráfico, parece não ser uma função contínua, devido à imprecisão que aparece, no início do segmento de ordenada 6.

A maneira de tirarmos a dúvida é calcularmos os limites laterais da função $f(x)$, ou da função $i(x)$, no ponto $x = 625000$.

No caso de $i(x)$, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 625000^+} i(x) &= \lim_{x \rightarrow 625000^+} \left(\frac{6}{100}x \right) = 37500 \\ \lim_{x \rightarrow 625000^-} i(x) &= \lim_{x \rightarrow 625000^-} \left(\frac{8}{100}x - 13000 \right) = 37000 \\ i(625000) &= \frac{8}{100} \times 625000 - 13000 = 37000\end{aligned}$$

Logo, a função é descontínua à direita, no ponto $x = 625000$.

Então, a fórmula que dá o valor do imposto a pagar, na compra de propriedades urbanas de valor superior a 625000 Euros, está mal!

Imaginemos que duas pessoas comprem duas moradias, no mesmo local, sendo o preço de uma, 625000 Euros e o preço da outra, 625001 Euros. A primeira paga, de sisa, 37000 Euros, enquanto que a segunda paga 37500,06 Euros. Algo está mal...

Como podemos corrigir esta situação?

Uma das maneiras, é aumentar o valor de transição do penúltimo para o último escalão, de modo a tornar a função contínua, mantendo a taxa única de 6%. Seja k esse valor. Então,

$$i(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ \frac{2}{100}x - 2000 & \Leftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ \frac{5}{100}x - 6125 & \Leftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ \frac{7}{100}x - 13125 & \Leftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ \frac{8}{100}x - 13000 & \Leftarrow 312500 < x \leq k \\ \frac{6}{100}x & \Leftarrow x > k \end{cases}$$

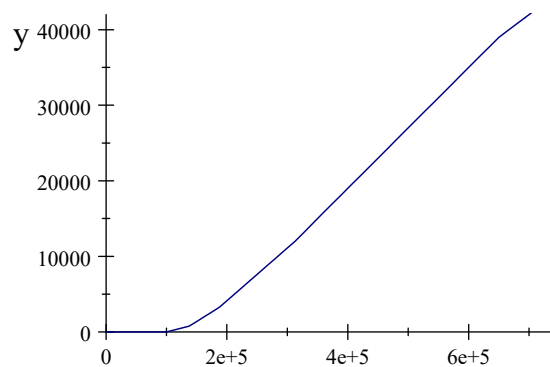
Logo,

$$\begin{cases} i(k) = \frac{2}{25}k - 13000 \\ \lim_{x \rightarrow k^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} \left(\frac{2}{25}x - 13000 \right) = \frac{2}{25}k - 13000 \\ \lim_{x \rightarrow k^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} \left(\frac{3}{50}x \right) = \frac{3}{50}k \end{cases}$$

Então:

$$\frac{2}{25}k - 13000 = \frac{3}{50}k \iff 4k - 650000 = 3k \iff k = 650000$$

Logo, na tabela do imposto da sisa, o valor de 625000 Euros deve ser substituído por 650000 Euros, passando o gráfico do imposto a ter o seguinte aspecto:



A função que daria o imposto é:

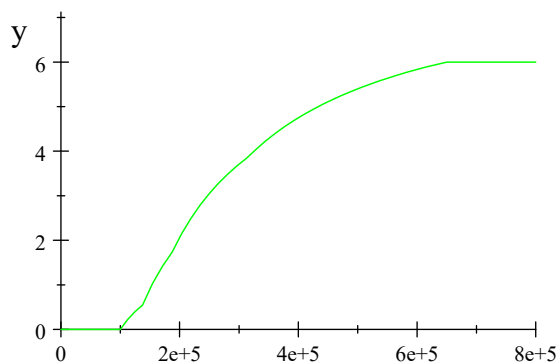
$$i(x) = \begin{cases} 0 & \Longleftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ \frac{2}{100}x - 2000 & \Longleftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ \frac{5}{100}x - 6125 & \Longleftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ \frac{7}{100}x - 9875 & \Longleftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ \frac{8}{100}x - 13000 & \Longleftarrow 312500 < x \leq 650000 \\ \frac{6}{100}x & \Longleftarrow x > 650000 \end{cases}$$

Parece que o mais razoável é alterar o valor de mudança do 5º escalão para o 6º de 625000 Euros para 650000 Euros. Podemos, sempre, alegar que se tratou dum erro tipográfico...

Vamos, agora, ver a evolução da taxa, com o valor corrigido:

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \Longleftarrow 0 \leq x \leq 100000 \\ 2 - \frac{200000}{x} & \Longleftarrow 100000 < x \leq 137500 \\ 5 - \frac{612500}{x} & \Longleftarrow 137500 < x \leq 187500 \\ 7 - \frac{987500}{x} & \Longleftarrow 187500 < x \leq 312500 \\ 8 - \frac{1300000}{x} & \Longleftarrow 312500 < x \leq 650000 \\ 6 & \Longleftarrow x > 650000 \end{cases}$$

A representação gráfica da função anterior é:



Uma outra questão que podemos colocar é a de sabermos qual o valor do prédio, para que a taxa média a pagar seja de 1% (ou outra).

Podemos resolver esta questão de várias maneiras. Numa primeira abordagem, podemos tentar resolver o problema graficamente: a solução parece ser de, aproximadamente, 160000 Euros, o que significa que estamos no terceiro escalão, o qual corresponde a uma taxa de 5% (havendo, ainda uma parcela a abater). Seja o valor da compra (em Euros). A taxa média é dada por:

$$t = \frac{0,05x - 6125}{x} = 0,01$$

Logo:

$$0,05x - 6125 = 0,01x \iff 0,04x = 6125 \iff x = \frac{6125}{0,04} \iff x = 153125$$

Então, um prédio no valor de 153125 Euros paga 1531,25 Euros de imposto de sisa.

Outra maneira de resolver esta questão era descobrir o escalão, por tentativas:

Se o preço de compra estiver no segundo escalão, a taxa é dada por:

$$t = \frac{0,02x - 2000}{x}$$

Então, $\frac{0,02x-2000}{x} = 0,01$. Resolvendo a equação, obtemos $x = 200000$, valor este que não está no segundo escalão. Logo, passamos ao escalão seguinte, até atingirmos a solução.

Um processo, mais interessante do que este, consiste em calcular a taxa média para os valores de transição de escalão:

Para 100000 Euros, temos uma taxa de 0%.

Para 137500 Euros, temos

$$t = \frac{137500 \times 0,02 - 2000}{137500} = \frac{2750 - 2000}{137500} = \frac{750}{137500} = \frac{3}{550} \approx 0,00545$$

Para 187500 Euros, temos

$$t = \frac{187500 \times 0,05 - 6125}{187500} = \frac{9375 - 6125}{187500} = \frac{3250}{187500} = \frac{13}{750} = 0,01733$$

Para 312500 Euros, temos

$$t = \frac{312500 \times 0,07 - 9875}{312500} = \frac{21875 - 9875}{312500} = \frac{12000}{312500} = \frac{24}{625} = 0,0384$$

Para 625000 Euros, temos

$$t = \frac{625000 \times 0,08 - 13000}{625000} = \frac{50000 - 13000}{625000} = \frac{37000}{625000} = \frac{37}{625} = 0,0592$$

E, mais uma vez, descobrimos o erro, pois devíamos ter obtido 0,06!

De qualquer modo, esta é uma situação interessante, do ponto de vista do Ensino da Matemática nas Escolas Secundárias.

Mas voltemos à questão colocada:

Para descobrirmos qual o valor dum prédio que paga uma taxa média de 1%, podemos ver que esse valor está no escalão de 137500 Euros a 187500 Euros. Então, teremos $0,05x - 6125 = 0,01x$, donde se conclui que $x = 153125$.

Se quisermos saber qual o valor que paga 2%, temos que esse valor tem de estar no escalão de 187500 Euros a 312500 Euros:

$$\frac{\frac{7}{100}x - 9875}{x} = \frac{2}{100} \iff \frac{7}{100} - \frac{9875}{x} = \frac{2}{100} \iff \frac{5}{100} = \frac{9875}{x} \iff x = 197500$$

Note-se que $197500 \times \frac{2}{100} = 3950 = 197500 \times \frac{7}{100} - 9875$.

Entretanto, passaram-se alguns anos e o imposto da sisa foi substituído pelo IMT (imposto municipal sobre transmissões onerosas de bens imóveis). Vejamos o que se passa em 2006, na Região Autónoma da Madeira:

Valor sobre que incide o IMT (em Euro)	Taxa a aplicar	Parcela a abater (em Euro)
Até 104375,00	0 %	0
De mais de 104375,00 até 143500,00	2 %	2087,50
De mais de 143500,00 até 195625,00	5 %	6392,50
De mais de 195625,00 até 326125,00	7 %	10305,00
De mais de 326125,00 até 652125,00	8 %	13566,25
Superior a 652125,00	Taxa única de 6,5 %	

A função que dá o imposto é:

$$i(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow 0 \leq x \leq 104375 \\ \frac{2}{100}(x - 104375) & \Leftarrow 104375 < x \leq 143500 \\ \frac{5}{100}x - 6392,50 & \Leftarrow 143500 < x \leq 195625 \\ \frac{7}{100}x - 10305 & \Leftarrow 195625 < x \leq 326125 \\ \frac{8}{100}x - 13566,25 & \Leftarrow 326125 < x \leq 652125 \\ \frac{6,5}{100}x & \Leftarrow x > 652125 \end{cases}$$

Calculemos os limites laterais no ponto $x = 652125$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 652125^+} i(x) &= \lim_{x \rightarrow 652125^+} \left(\frac{6,5}{100}x \right) = 42388,125 \\ \lim_{x \rightarrow 652125^-} i(x) &= \lim_{x \rightarrow 652125^-} \left(\frac{8}{100}x - 13566,25 \right) = 38603,75 \\ i(652125) &= 38603,75 \end{aligned}$$

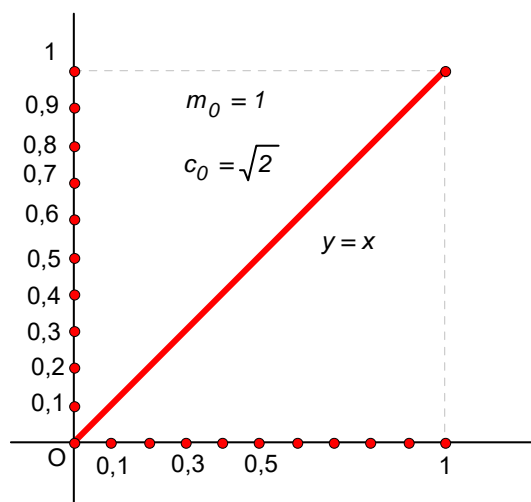
E, como podemos verificar, há um valente "salto", quando passamos de uma casa de 652125 Euros para outra de 652125,01 Euros.

Não podemos deixar de registar um desabafo: E não há responsáveis?

Capítulo 15

A Escada do Diabo

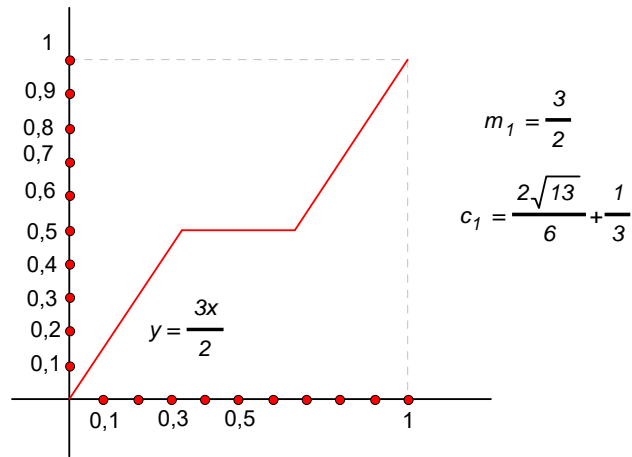
Consideremos a função $f_0(x) = x$ de domínio $[0, 1]$. A representação gráfica da função é a seguinte:



O gráfico é um segmento de recta de comprimento $c_0 = \sqrt{2}$. Esse segmento divide o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ em dois triângulos de área $\frac{1}{2}$ cada um. A recta que contém o segmento tem declive 1.

Para construir a escada do diabo, procedemos do seguinte modo:

Dividimos o domínio de f_0 , o intervalo $[0, 1]$, em três intervalos com o mesmo comprimento: $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$; no intervalo central, consideramos a função constante $y = \frac{1}{2}$, valor este que é a média entre as ordenadas dos extremos do segmento inicial; no intervalo $[0, \frac{1}{3}]$, consideramos o segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$; finalmente, consideramos o segmento de extremos $(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ e $(1, 1)$:



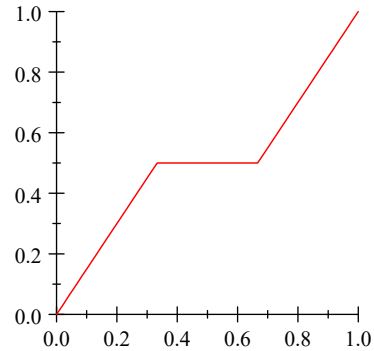
Obtivemos um segmento e recta horizontal e dois segmentos oblíquos de declive $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{3}{2}$.

Seja $\vec{u}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Então, $\|\vec{u}_1\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+9}{36}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$. Logo, o comprimento c_1 da linha que une os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$ é dado por $c_1 = 2 \times \frac{\sqrt{13}}{6} + \frac{1}{3}$, ou seja, $c_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{3} = \frac{\sqrt{2^2+3^2}}{3} + 1 - \frac{2}{3}$.

É claro que os dois segmentos de recta oblíquos são paralelos e o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ continua a ficar dividido em duas partes de área $\frac{1}{2}$ cada uma.

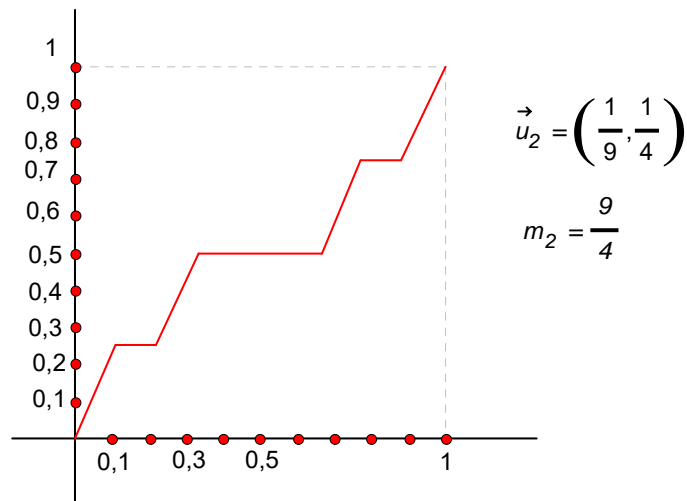
A linha considerada é o gráfico duma função definida por ramos:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \iff 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \iff \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}(x - \frac{1}{3}) & \iff \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



O passo seguinte é análogo ao anterior:

Mantemos todos os segmentos horizontais e, quanto aos segmentos oblíquos, substituímos o terço central, por um segmento horizontal cujos pontos têm ordenada que é a média das ordenadas dos extremos do segmento a ser substituído. Cada extremo do novo segmento horizontal é unido com o extremo adequado do segmento substituído. Então, o próximo gráfico é o seguinte:



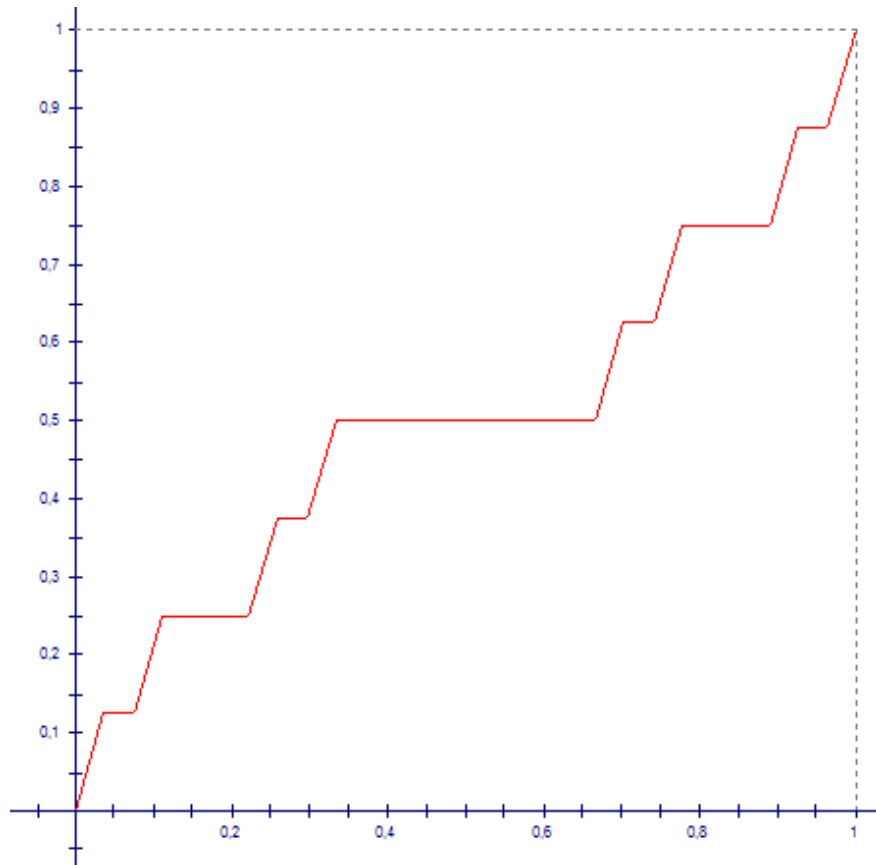
Neste caso, temos $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{4} \right)$, pelo que $\|\vec{u}_2\| = \sqrt{\frac{4^2+9^2}{36^2}} = \frac{\sqrt{97}}{36}$.

Então, $4\vec{u}_2 = 4\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{4}{9}, 1\right)$, tendo-se $\|4\vec{u}_2\| = \frac{\sqrt{97}}{9}$.

Note-se que a soma dos comprimentos dos segmentos horizontais é $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$, ou seja, $\frac{5}{9}$. De qualquer modo, é mais útil (nos passos seguintes) calcular esse valor pela expressão $1 - 4 \times \frac{1}{9}$.

Então, $c_2 = \frac{\sqrt{97}}{9} + 1 - \frac{4}{9} = \frac{\sqrt{(2^2)^2 + (3^2)^2}}{3^2} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\sqrt{97} + \frac{5}{9}$

Continuando o processo, obtemos o seguinte gráfico:



Então, $\vec{u}_3 = (\frac{1}{27}, \frac{1}{8})$, pelo que o declive dos segmentos oblíquos é $m_3 = \frac{1}{8} \div \frac{1}{27} = \frac{27}{8}$.

Logo, $8\vec{u}_3 = 8(\frac{1}{27}, \frac{1}{8}) = (\frac{8}{27}, 1)$, tendo-se que $\|8\vec{u}_3\| = \sqrt{(\frac{8}{27})^2 + 1} = \sqrt{\frac{8^2+27^2}{27^2}} = \frac{\sqrt{793}}{27}$

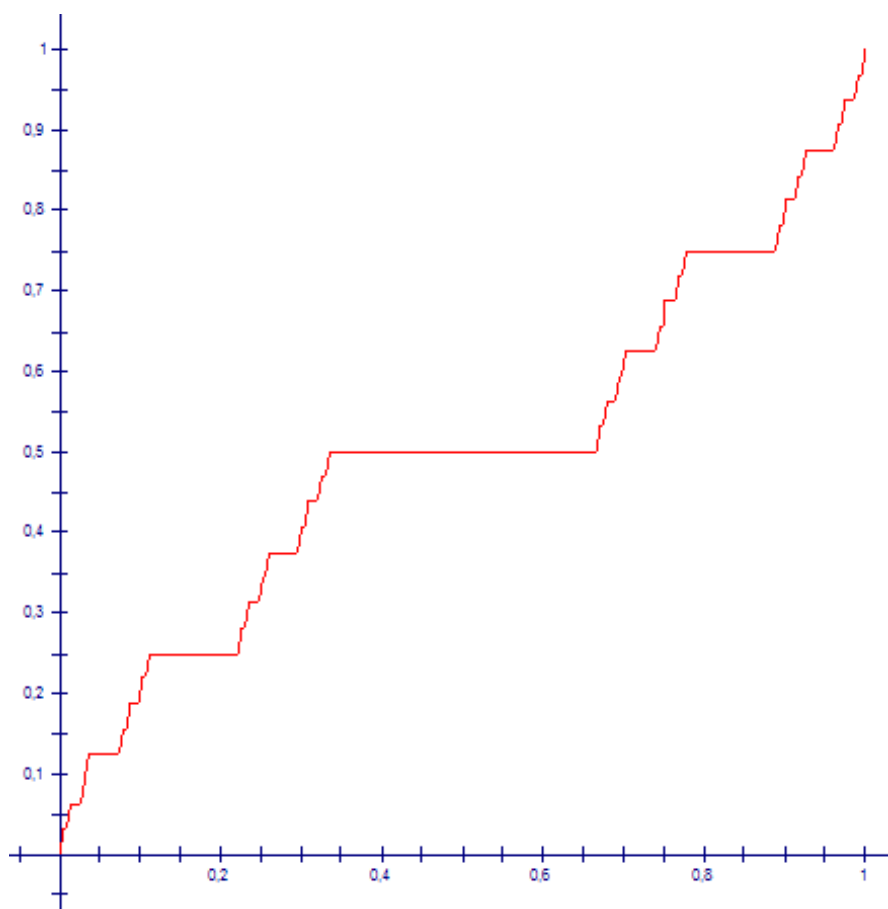
Então, a soma dos comprimentos dos segmentos horizontais é $1 - \frac{8}{27}$.

Note-se que $\|8\vec{u}_3\| = \|2^3\vec{u}_3\| = \sqrt{\frac{(2^3)^2+(3^3)^2}{3^6}} = \frac{\sqrt{(2^3)^2+(3^3)^2}}{3^3}$.

Então, o comprimento total é dado por $c_3 = \frac{\sqrt{(2^3)^2+(3^3)^2}}{3^3} + 1 - (\frac{2}{3})^3$.

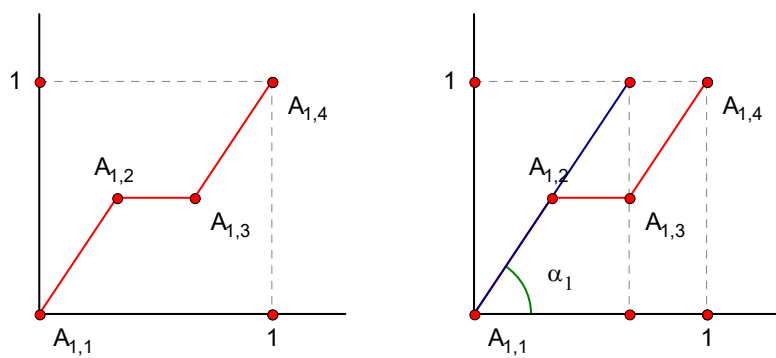
E já estamos convencidos que teremos $c_n = \frac{\sqrt{(2^n)^2+(3^n)^2}}{3^n} + 1 - (\frac{2}{3})^n$.

O gráfico seguinte é:



Observação

Consideremos a primeira escada obtida:



Então,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_{1,1}A_{1,4}} &= \overrightarrow{A_{1,1}A_{1,2}} + \overrightarrow{A_{1,2}A_{1,3}} + \overrightarrow{A_{1,3}A_{1,4}} = 2 \times \overrightarrow{A_{1,1}A_{1,2}} + \overrightarrow{A_{1,2}A_{1,3}} \\ &= 2 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3}, 0 \right) = \left(\frac{2}{3}, 1 \right) + \left(\frac{1}{3}, 0 \right) = (1, 1)\end{aligned}$$

Para a segunda, temos que a soma dos vectores oblíquos é $4 \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{4} \right)$, ou seja, $\left(\frac{4}{9}, 1 \right)$. E a soma dos vectores horizontais é $(1, 1) - \left(\frac{4}{9}, 1 \right)$, ou seja, $\left(\frac{5}{9}, 0 \right)$.

No caso geral, temos que a soma dos vectores oblíquos é $2^n \left(\frac{1}{3^n}, \frac{1}{2^n} \right)$, ou seja, $\left(\frac{2^n}{3^n}, 1 \right)$. E a soma dos vectores horizontais é $(1, 1) - \left(\frac{2^n}{3^n}, 1 \right)$, ou seja, $\left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n, 0 \right)$.

E o comprimento total, c_n , é dado por

$$\begin{aligned}c_n &= \left\| \left(\frac{2^n}{3^n}, 1 \right) \right\| + \left\| \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n, 0 \right) \right\| = \sqrt{1 + \frac{2^{2n}}{3^{2n}}} + 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ &= \sqrt{\frac{3^{2n} + 2^{2n}}{3^{2n}}} + 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n = 1 + \frac{\sqrt{3^{2n} + 2^{2n}}}{3^{2n}} - \left(\frac{2}{3} \right)^n\end{aligned}$$

Capítulo 16

Funções Exponencial e Logarítmica

Exemplo 306 Estudo da função $f(x) = 2^x$

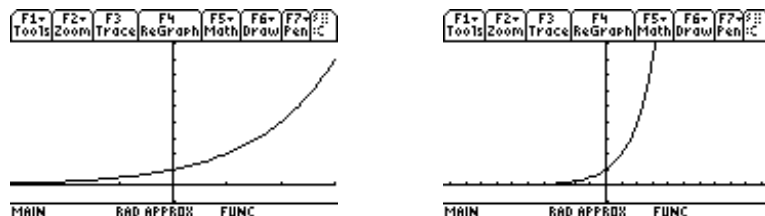
A função tem domínio \mathbb{R} . Atribuindo valores a x e calculando as respectivas imagens, podemos construir a seguinte tabela:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

A tabela anterior faz-nos crer que números simétricos têm imagens inversas uma da outra, o que é muito fácil de provar:

$$f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Representação gráfica desta função, usando a janela de visualização $[-3, 3] \times [-1, 9]$ e, a seguir, usando a Opção Zoom Square:

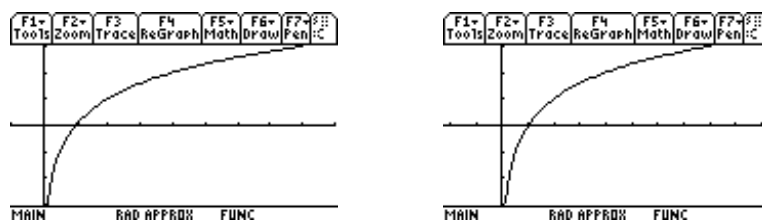


Intuitivamente, vemos que a função é estritamente crescente, pelo que é injectiva. O contradomínio da função é \mathbb{R}^+ . O gráfico de f admite uma assíntota horizontal (o eixo das abcissas).

$$\text{Então, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x) = 0^+.$$

Como f é injectiva, então admite função inversa. A função inversa de f tem domínio \mathbb{R}^+ e contradomínio \mathbb{R} .

Representação gráfica da função inversa de f , na janela de visualização $[-1, 9] \times [-3, 3]$ e, depois, em referencial ortonormado:



Neste caso, o gráfico admite uma assíntota vertical (o eixo das ordenadas).

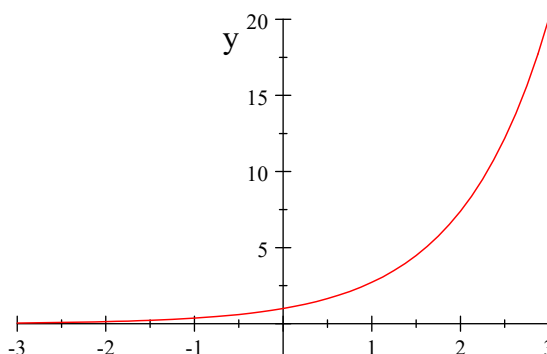
Então, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. À função inversa de f , chamamos função logarítmica e representamo-la por $f^{-1}(x) = \log_2 x$ (logaritmo de x , na base 2).

Exemplo 307 Estudo da função real de variável real $f(x) = e^x$, de domínio \mathbb{R} .

Atribuindo valores a x e calculando as respectivas imagens numa calculadora, construímos a seguinte tabela:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,049 79	0,135 34	0,367 88	1	2,718 28	7,389 06	20,085 54

O número irracional e chama-se constante de Neper, tendo-se $e \approx 2,71828182845905$. A representação gráfica da função $f(x) = e^x$, usando a janela de visualização $[-3, 3] \times [-1, 20]$, é a seguinte:



Intuitivamente, vemos que a função é estritamente crescente, pelo que é injectiva. O contradomínio da função é $]0, +\infty[$. O gráfico de f admite uma assíntota horizontal (o eixo das abcissas). Então, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$.

Um facto muito importante, sobre a função e^x , é o seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

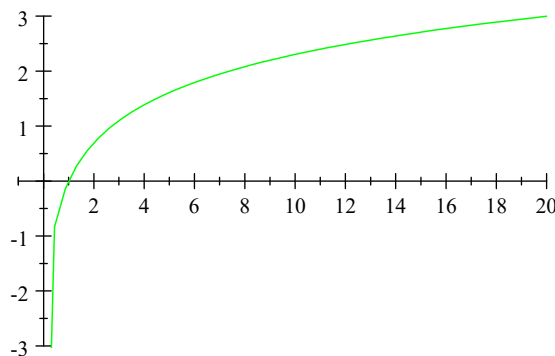
Um outro limite importante é o seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Como f é injectiva, então admite função inversa. O domínio da função inversa de f é $]0, +\infty[$ e o contradomínio é \mathbb{R} .

À função inversa de f , chamamos função logarítmica e representamo-la por $\log_e x$ (logaritmo de x , na base e). Esta função é representada, habitualmente, por $\ln x$, em vez de $\log_e x$.

Representação gráfica da função inversa de f , na janela de visualização $[-1, 20] \times [-3, 3]$:



Um facto importante, sobre a função $\ln x$, é o seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Calculemos a derivada da função $f(x) = e^x$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a(e^{x-a} - 1)}{x - a} = e^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \times 1 = e^a$$

Logo, $f'(x) = e^x$.

Quanto à derivada da função $g(x) = \ln x$, temos:

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \left(\frac{a+x-a}{a} \right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{a \frac{x-a}{a}} = \frac{1}{a}$$

Logo, $g'(x) = \frac{1}{x}$.

O cálculo das duas derivadas anteriores pode ser feito do seguinte modo:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^a(e^h - 1)}{h} = e^a \times 1 = e^a \\ g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{a+h}{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{a} \right)}{a \frac{h}{a}} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Exemplo 308 Estudo da função real de variável real $f(x) = 3x - e^x$

O domínio desta função é \mathbb{R} , tendo-se $f'(x) = 3 - e^x$.

$$f'(x) = 0 \iff 3 - e^x = 0 \iff e^x = 3 \iff x = \ln 3$$

$$f'(x) > 0 \iff 3 - e^x > 0 \iff e^x < 3 \iff x < \ln 3$$

Monotonia da função:

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$3 - e^x$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow

A função tem um máximo absoluto no ponto $x = \ln 3$, tendo-se $f(\ln 3) = 3 \ln 3 - e^{\ln 3} = 3 \ln 3 - 3$.

Quanto à segunda derivada, temos $f''(x) = -e^x < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - e^x) = -\infty - e^{-\infty} = -\infty - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(3 - \frac{e^x}{x} \right) \right) = (+\infty)(3 - (+\infty)) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

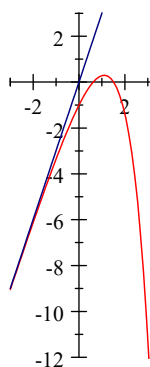
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^x) = 3 - e^{-\infty} = 3 - 0 = 3 = m$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - e^x - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - e^x) = 3 - (+\infty) = -\infty$$

Dos resultados anteriores, concluímos que a recta de equação $y = 3x$ é a única assíntota ao gráfico da função.

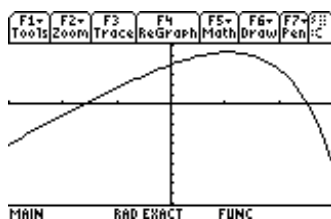
Representação gráfica da função, incluindo a assíntota:



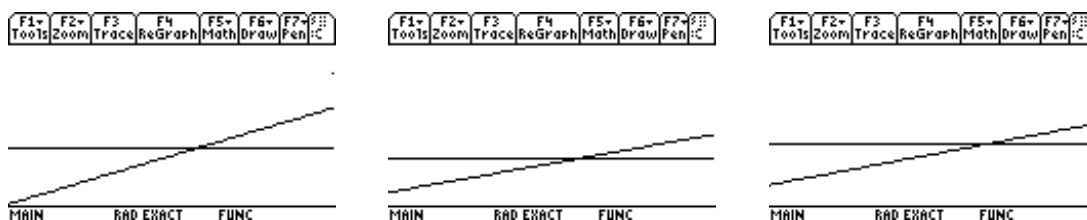
O contradomínio da função é $]-\infty, 3 \ln 3 - 3]$.

Resolução da equação $f(x) = -5$, recorrendo à calculadora:

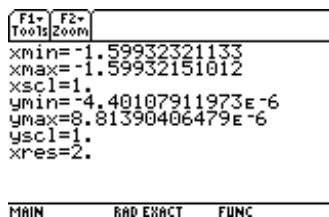
De $3x - e^x = -5$, vem $3x - e^x + 5 = 0$. Recorrendo à calculadora, temos a seguinte representação gráfica da função $g(x) = 3x - e^x + 5$, da qual pretendemos determinar os zeros:



Esta função tem dois zeros. Recorrendo à opção ZoomBox da calculadora, temos sucessivamente:

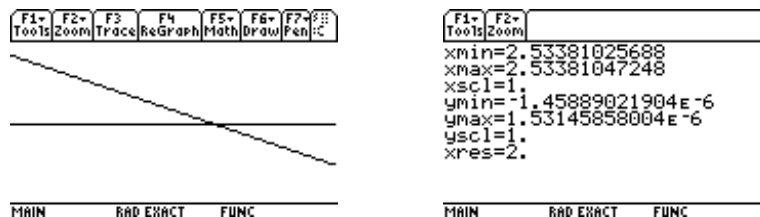


O último gráfico corresponde à janela de visualização seguinte:



Então, um dos zeros da função $g(x) = 3x - e^x + 5$ é $-1,59932$, com erro inferior a uma centésima milésima.

De modo análogo, temos:



O outro zero da função $g(x) = 3x - e^x + 5$ é $2,533810$, com erro inferior a uma milionésima.

Outra maneira de obter as soluções da equação $3x - e^x + 5 = 0$:

Começamos por construir uma tabela da função $g(x) = 3x - e^x + 5$, utilizando o valor inicial -2 e, fazendo $\Delta \text{tbl} = 0,1$:

F1-Tools	F2-Setup	F3-Table	F4-Edit	F5-Delete	F6-Settings	F7-Settings
x		y1				
-1.8		-.5653				
-1.7		-.2827				
-1.6		-.0019				
-1.5		.27687				
-1.4		.5534				
x=-1.5						
MAIN		RAD EXACT	FUNC			

Verificamos que um dos zeros da função (a função é contínua em qualquer intervalo) está entre os dois valores $-1,6$ e $-1,5$. Seguidamente, usamos o valor inicial $-1,6$ e $\Delta \text{tbl} = 0,01$.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Setup	Diag	Ans	Pol	Func
x	u1				
-1.6	-.0019				
-1.59	.02607				
-1.58	.05402				
-1.57	.08195				
-1.56	.10986				
x=-1.6					
MAIN	RAD EXACT	FUNC			

A função tem um zero entre $-1,6$ e $-1,59$.

E assim sucessivamente:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Setup	Diag	Ans	Pol	Func
x	u1				
-1.6	-.0019				
-1.599	.0009				
-1.598	.0037				
-1.597	.0065				
-1.596	.00929				
x=-1.6					
MAIN	RAD EXACT	FUNC			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Setup	Diag	Ans	Pol	Func
x	u1				
-1.6	-.0011				
-1.6	-.0008				
-1.6	-.0005				
-1.599	-.0002				
-1.599	.00006				
x=-1.5994					
MAIN	RAD EXACT	FUNC			

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Setup	Diag	Ans	Pol	Func
x	u1				
-1.6	-.0011				
-1.6	-.0008				
-1.6	-.0005				
-1.599	-.0002				
-1.599	.00006				
x=-1.5993					
MAIN	RAD EXACT	FUNC			

Embora a última tabela tenha os valores de arredondados às milésimas, vemos em $x = \dots$ o valor de x com mais casas decimais ($x = -1,5994$). No ponto $x = -1,5993$, a função é positiva, sendo que para $x = -1,5994$, a função é negativa. Logo, um dos zeros da função está entre estes dois valores de x .

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Setup	Diag	Ans	Pol	Func
2↑Y= Editor					
3:Window Editor					
4:Graph Editor					
5:Table					
6:Data/Matrix Editor					
7:Program Editor					
8:Text Editor					
9:Numeric Solver					
TYPE OR USE ←↑↓→ + [ENTER] OR [ESC]					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Solve	Graph	Get Cursor	EAns	Clr a-Z...
3*x-e^x+5=0					
x=					
bound={-2., -1.}					
left-rt=-1.1E-13					
MAIN RAD EXACT FUNC					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Solve	Graph	Get Cursor	EAns	Clr a-Z...
3*x-e^x+5=0					
x=-1.5993221964825					
bound={-2., -1.}					
left-rt=-1.1E-13					
MAIN RAD EXACT FUNC					

Terceira maneira de determinar os zeros da função:

Na TI 89, em APPS, escolhemos a opção 9: Numeric Solver. Depois, escolhemos os valores -2 e -1 , entre os quais sabemos existir um zero da função. Agora, carregamos em F2, obtendo-se o zero da função.

De modo análogo se encontra o outro zero da função:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Solve	Graph	Get Cursor	EAns	Clr a-Z...
3*x-e^x+5=0					
x=					
bound={2., 3.}					
left-rt=-1.E-12					
MAIN RAD EXACT FUNC					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	Solve	Graph	Get Cursor	EAns	Clr a-Z...
3*x-e^x+5=0					
x=2.5338103931865					
bound={2., 3.}					
left-rt=-1.E-12					
MAIN RAD EXACT FUNC					

Nos outros modelos de calculadoras procede-se de modo semelhante.

Exemplo 309 Estudo da função e^{-x^2}

O domínio desta função é \mathbb{R} .

Paridade ou simetria:

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Então, a função é par, pelo que não é injectiva nem admite função inversa.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2}) = e^{-\infty} = 0^+$$

Logo, a recta de equação $y = 0$ é uma assíptota horizontal ao gráfico da função.

Primeira derivada e monotonia:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}; \quad f'(x) = 0 \iff x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	0	$-$
e^{-x^2}	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow

A função tem um máximo absoluto no ponto $x = 0$, tendo-se $f(0) = 1$.

Segunda derivada e sentido da concavidade:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2xe^{-x^2}) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

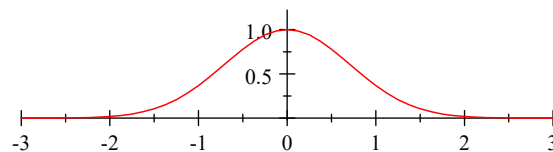
Sentido da concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = 0 \iff (4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0 \iff 4x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
e^{-x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\smile	PI	\frown	PI	\smile

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,60653$$

Representação gráfica da função f :



Exemplo 310 Estudo da função $f(x) = 1 + 2 \ln x$

O domínio desta função é $]0, +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + 2 \ln 0^+ = 1 + 2(-\infty) = -\infty$, pelo que existe uma assíntota vertical ao gráfico da função (a recta de equação $x = 0$).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 2 \ln(+\infty) = 1 + 2(+\infty) = +\infty$, pelo que o gráfico da função não admite assíntotas horizontais.

A derivada da função é $f'(x) = \frac{2}{x}$, pelo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{2}{+\infty} = 0$.

Então, se houvesse uma assíntota não vertical, ela seria horizontal. Mas já sabemos que tal não acontece, pelo que não há assíntotas não verticais.

Como $f'(x) = \frac{2}{x} > 0, \forall x \in]0, +\infty[$, concluímos que a função é estritamente crescente e, por causa disso, injectiva.

Logo, existe função inversa de f :

$$1 + 2 \ln x = y \iff \ln x = \frac{y-1}{2} \iff x = e^{\frac{y-1}{2}}$$

Logo, $f^{-1}(x) = e^{\frac{x-1}{2}}$, função esta que tem domínio \mathbb{R} . Então, o contra-domínio de f é \mathbb{R} .

Zeros e sinal de $f(x)$:

$$1 + 2 \ln x = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-\frac{1}{2}} \iff x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Observe-se que o zero de $f(x)$ é $f^{-1}(0)$, sempre que exista função inversa e a função f tenha um zero.

$$1 + 2 \ln x = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-\frac{1}{2}} \iff x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$1 + 2 \ln x > 0 \iff \ln x > -\frac{1}{2} \iff x > e^{-\frac{1}{2}} \iff x > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

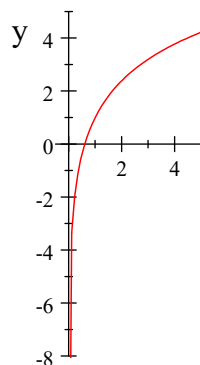
x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$1 + 2 \ln x$	-	0	+

Segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2} < 0, \forall x \in]0, +\infty[$$

Então, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo, não havendo pontos de inflexão.

Representação gráfica da função f :



Exemplo 311 Estudo da função $f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$:

Domínio da função:

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| > 0 \iff x+1 \neq 0 \wedge x-1 \neq 0 \iff x \neq -1 \wedge x \neq 1$$

Logo, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Paridade:

$$f(-x) = \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right| = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \ln |x-1| - \ln |x+1|$$

$$f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln |x+1| - \ln |x-1|$$

Logo, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, pelo que a função é ímpar.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \lim_{x \rightarrow -1^-} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \left| \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \lim_{x \rightarrow -1^+} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \left| \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \lim_{x \rightarrow 1^-} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \left| \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \lim_{x \rightarrow 1^+} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \left| \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln (+\infty) = +\infty$$

Então, o gráfico da função admite duas assíntotas verticais: as rectas de equação $x = \pm 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln \left| \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função.

Como $f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln |x+1| - \ln |x-1|$ e $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$, temos

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1}$$

Sinal da derivada e monotonia da função:

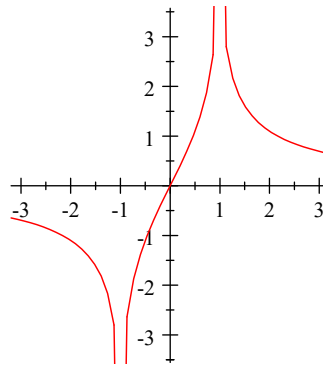
x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	\searrow		\nearrow		\searrow

$$f''(x) = \frac{0+2 \times 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

Sinal da segunda derivada e sentido da concavidade:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x^2 - 1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	\frown		\frown	PI	\smile		\smile

Representação gráfica da função f :



Exemplo 312 Estudo da função $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$:

O domínio da função é \mathbb{R} , pois $e^x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Sinal da função:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$e^x + 1$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Correspondência inversa de f :

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y &\iff e^x - 1 = ye^x + y \iff e^x - ye^x = y + 1 \\ &\iff e^x(1 - y) = y + 1 \iff e^x = \frac{1 + y}{1 - y} \iff x = \ln \frac{1 + y}{1 - y} \end{aligned}$$

Logo, $f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

O domínio de f^{-1} (e contra-domínio de f) é o subconjunto de \mathbb{R} definido pela condição $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$	0	$+$		$-$

Logo, $D'_f =]-1, 1[$.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0, \forall x \in]-1, 1[$$

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x+1)^2-2e^x \times 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{2e^x(e^x+1)-4e^xe^x}{(e^x+1)^3} = \frac{2e^x(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^3} = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2e^x$	$+$	$+$	$+$
$1-e^x$	$+$	0	$-$
$(e^x+1)^3$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\cup	P Inf	\cap

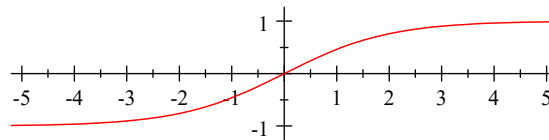
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Logo, o gráfico da função admite duas assíntotas horizontais (as rectas definidas por $y = \pm 1$).

Como a função é contínua em \mathbb{R} , não há assíntotas verticais ao gráfico da função.

Representação gráfica da função:



Exemplo 313 Estudo da função $f(x) = \ln(x^2 - 3x - 4)$:

$$\Delta = 9 + 16 = 25; \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \iff x = -1 \vee x = 4$$

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \iff x < -1 \vee x > 4$$

Logo, o domínio da função é $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(x^2 - 3x - 4) = \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \ln(x^2 - 3x - 4) = \ln(0^+) = -\infty$$

Então, o gráfico da função admite duas assíntotas verticais ($x = -1 \vee x = 4$).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 3x - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left[x^2\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)\right] = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 3x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left[x^2\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)\right] = \ln(+\infty) = +\infty$$

Logo, o gráfico da função não admite assíntotas horizontais (pode admitir assíntotas oblíquas).

Como $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x-4}$, então $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x^2-3x-4} = 0$, pelo que não há assíntotas oblíquas.

Monotonia da função:

x	$-\infty$	-1		0		4	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 3x - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	Não definida					$+$
$f(x)$	\searrow	Não definida					\nearrow

Segunda derivada:

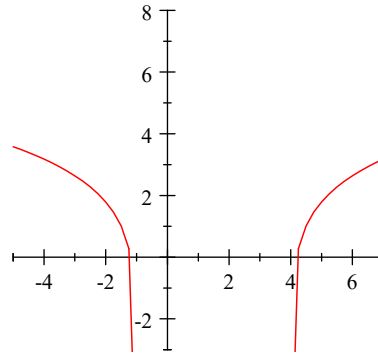
$$f''(x) = \frac{2(x^2-3x-4) - (2x-3)(2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} = \frac{2x^2-6x-8-4x^2+12x-9}{(x^2-3x-4)^2} = \frac{-2x^2+6x-17}{(x^2-3x-4)^2}$$

$\Delta = 36 - 136 = -100 < 0$. Logo, $-2x^2 + 6x - 17 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Sentido da concavidade:

x	$-\infty$	-1		4	$+\infty$
$-2x^2 + 6x - 17$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x^2 - 3x - 4)^2$	$+$	0	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	Não definida			$-$
$f(x)$	\frown	Não definida			\frown

Representação gráfica da função f :



Exemplo 314 Estudo da função $f(x) = 1 + \ln(1 + e^x)$:

O domínio desta função é \mathbb{R} , porque $1 + e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A derivada da função é $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Então, f é estritamente crescente.

$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima.
Então, não há extremos relativos nem pontos de inflexão.

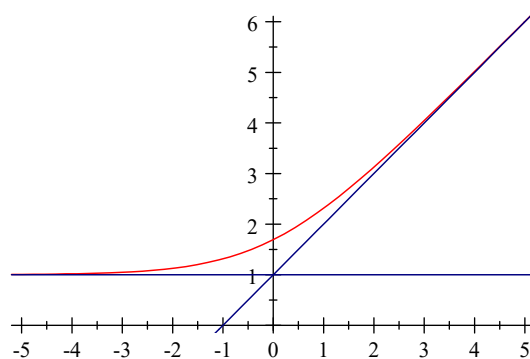
$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{+\infty} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1 \\ b_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(1+e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(1+e^x) - \ln(e^x)] \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{1+e^x}{e^x} \right] = 1 + \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Logo, a recta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota ao gráfico da função.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \ln(1+e^x)) = 1 + \ln 1 = 1$, então a recta de equação $y = x + 1$ é uma assíntota (horizontal) ao gráfico da função.

Como a função é contínua em \mathbb{R} , não há assíntotas verticais.

Representação gráfica da função e das assíntotas:



Exemplo 315 Estudo da função $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$:

O domínio desta função é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$e^{\frac{1}{x}} = y \iff \frac{1}{x} = \ln y \iff x = \frac{1}{\ln y}$$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln x}$, pelo que devemos ter $x > 0 \wedge x \neq 1$. Logo, o contradomínio da função é $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, ou seja, $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Como existe função inversa, f é uma função injectiva.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = e^{-\infty} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = e^{+\infty} = +\infty \end{cases}$$

Logo, o gráfico da função admite uma assíntota vertical (a recta de equação $x = 0$).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} \right) = e^0 = 1$$

Então, a recta de equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Deste facto, não podemos concluir que f seja uma função estritamente decrescente em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, mas, apenas, que f é estritamente decrescente em $] -\infty, 0[$ e que é estritamente decrescente em $] 0, +\infty[$.

Do facto da função ser diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, concluímos que é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = \left(-x^{-2}e^{\frac{1}{x}}\right)' = 2x^{-3}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$$

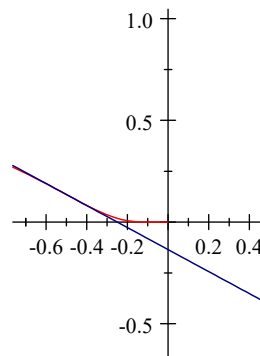
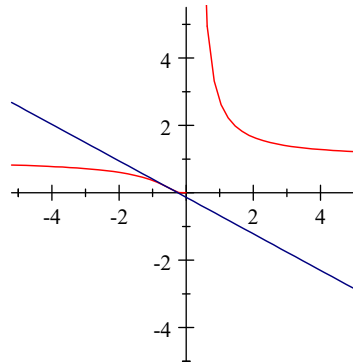
Sinal da segunda derivada e sentido da concavidade:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^4	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	\cap	P Inf	\cup		\cup

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$. Então, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ é o ponto de inflexão.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4e^{-2} = -\frac{4}{e^2}$. Então, $y - \frac{1}{e^2} = -\frac{4}{e^2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ é uma equação da recta tangente ao gráfico da função no ponto de inflexão.

Representação gráfica da função, incluindo a tangente no ponto de inflexão:



Exemplo 316 Estudo da função $f(x) = xe^x$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Não é possível explicitar a correspondência inversa de f .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{e^{-x}}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{t}{e^t}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty \end{cases}$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função.

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x; \quad f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

$$f'(x) = 0 \iff (x+1)e^x = 0 \iff x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	mín	\nearrow

Logo, f é estritamente decrescente em $] -\infty, -1]$ e é estritamente crescente em $[-1, +\infty[$.

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Como f é diferenciável em \mathbb{R} , concluímos que f é contínua em \mathbb{R} , pelo que o gráfico da função não admite assíntotas verticais.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, podemos concluir que não há nenhuma assíntota, para além daquela que já foi encontrada ($y = 0$).

Sinal da segunda derivada e sentido da concavidade:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\frown	P Inf	\smile

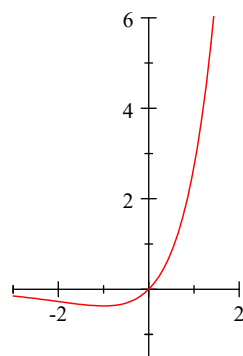
$f(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$. Então, $(-2, -\frac{2}{e^2})$ é o ponto de inflexão.

$$f'(-2) = (-2+1)e^{-2} = -\frac{1}{e^2}.$$

Equação da recta tangente ao gráfico da função, no ponto de inflexão:

$$y + \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x+2) \iff y = -\frac{x}{e^2} - \frac{3}{e^2} \iff y = -\frac{x+3}{e^2}$$

Representação gráfica da função f :



O contradomínio da função é $[-\frac{1}{e}, +\infty[$.

Resolução da equação $f(x) = 3$, com obtenção da solução aproximada:

$$f(1) = e < 3; \quad f(1) = 2e^2 > 3$$

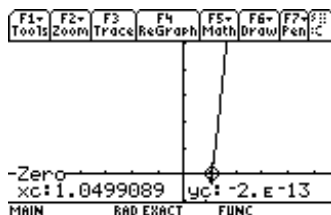
Como f é contínua em $[1, 2]$, existe um número real c , tal que $1 < c < 2$ e $f(c) = 3$.

Recorrendo à ferramenta "Table" duma calculadora, podemos obter:

<table><tr><th>F1-Tools</th><th>F2-Setup</th><th>F3-↵</th><th>F4-↵</th><th>F5-↵</th><th>F6-↵</th><th>F7-↵</th><th>F8-↵</th></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.</td><td>2.7183</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.1</td><td>3.3046</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.2</td><td>3.9841</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.3</td><td>4.7701</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.4</td><td>5.6773</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	F5-↵	F6-↵	F7-↵	F8-↵	x	u1							1.	2.7183							1.1	3.3046							1.2	3.9841							1.3	4.7701							1.4	5.6773							<table><tr><th>F1-Tools</th><th>F2-Setup</th><th>F3-↵</th><th>F4-↵</th><th>F5-↵</th><th>F6-↵</th><th>F7-↵</th><th>F8-↵</th></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.01</td><td>2.7731</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.02</td><td>2.8287</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.03</td><td>2.8851</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.04</td><td>2.9424</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.05</td><td>3.0005</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	F5-↵	F6-↵	F7-↵	F8-↵	x	u1							1.01	2.7731							1.02	2.8287							1.03	2.8851							1.04	2.9424							1.05	3.0005							<table><tr><th>F1-Tools</th><th>F2-Setup</th><th>F3-↵</th><th>F4-↵</th><th>F5-↵</th><th>F6-↵</th><th>F7-↵</th><th>F8-↵</th></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.046</td><td>2.9772</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.047</td><td>2.983</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.048</td><td>2.9888</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.049</td><td>2.9947</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.05</td><td>3.0005</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>								F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	F5-↵	F6-↵	F7-↵	F8-↵	x	u1							1.046	2.9772							1.047	2.983							1.048	2.9888							1.049	2.9947							1.05	3.0005						
F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	F5-↵	F6-↵	F7-↵	F8-↵																																																																																																																																																																																								
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.	2.7183																																																																																																																																																																																														
1.1	3.3046																																																																																																																																																																																														
1.2	3.9841																																																																																																																																																																																														
1.3	4.7701																																																																																																																																																																																														
1.4	5.6773																																																																																																																																																																																														
F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	F5-↵	F6-↵	F7-↵	F8-↵																																																																																																																																																																																								
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.01	2.7731																																																																																																																																																																																														
1.02	2.8287																																																																																																																																																																																														
1.03	2.8851																																																																																																																																																																																														
1.04	2.9424																																																																																																																																																																																														
1.05	3.0005																																																																																																																																																																																														
F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	F5-↵	F6-↵	F7-↵	F8-↵																																																																																																																																																																																								
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.046	2.9772																																																																																																																																																																																														
1.047	2.983																																																																																																																																																																																														
1.048	2.9888																																																																																																																																																																																														
1.049	2.9947																																																																																																																																																																																														
1.05	3.0005																																																																																																																																																																																														
x=1.								x=1.05								x=1.049																																																																																																																																																																															
<table><tr><th>MAIN</th><th>RAD</th><th>EXACT</th><th>FUNC</th></tr><tr><td>F1-Tools</td><td>F2-Setup</td><td>F3-↵</td><td>F4-↵</td></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0496</td><td>2.9982</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0497</td><td>2.9988</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0498</td><td>2.9994</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>2.9999</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.05</td><td>3.0005</td><td></td><td></td></tr></table>								MAIN	RAD	EXACT	FUNC	F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	x	u1			1.0496	2.9982			1.0497	2.9988			1.0498	2.9994			1.0499	2.9999			1.05	3.0005			<table><tr><th>MAIN</th><th>RAD</th><th>EXACT</th><th>FUNC</th></tr><tr><td>F1-Tools</td><td>F2-Setup</td><td>F3-Header</td><td>F4-↵</td></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>2.9999</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0001</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0001</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0002</td><td></td><td></td></tr></table>								MAIN	RAD	EXACT	FUNC	F1-Tools	F2-Setup	F3-Header	F4-↵	x	u1			1.0499	2.9999			1.0499	3.			1.0499	3.0001			1.0499	3.0001			1.0499	3.0002			<table><tr><th>MAIN</th><th>RAD</th><th>EXACT</th><th>FUNC</th></tr><tr><td>F1-Tools</td><td>F2-Setup</td><td>F3-↵</td><td>F4-↵</td></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>2.9999</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0001</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0001</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0002</td><td></td><td></td></tr></table>								MAIN	RAD	EXACT	FUNC	F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	x	u1			1.0499	2.9999			1.0499	3.			1.0499	3.0001			1.0499	3.0001			1.0499	3.0002																																																																										
MAIN	RAD	EXACT	FUNC																																																																																																																																																																																												
F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵																																																																																																																																																																																												
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.0496	2.9982																																																																																																																																																																																														
1.0497	2.9988																																																																																																																																																																																														
1.0498	2.9994																																																																																																																																																																																														
1.0499	2.9999																																																																																																																																																																																														
1.05	3.0005																																																																																																																																																																																														
MAIN	RAD	EXACT	FUNC																																																																																																																																																																																												
F1-Tools	F2-Setup	F3-Header	F4-↵																																																																																																																																																																																												
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.0499	2.9999																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0001																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0001																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0002																																																																																																																																																																																														
MAIN	RAD	EXACT	FUNC																																																																																																																																																																																												
F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵																																																																																																																																																																																												
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.0499	2.9999																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0001																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0001																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0002																																																																																																																																																																																														
x=1.05								u1(x)=3.0000064726328								x=1.04991																																																																																																																																																																															
<table><tr><th>MAIN</th><th>RAD</th><th>EXACT</th><th>FUNC</th></tr><tr><td>F1-Tools</td><td>F2-Setup</td><td>F3-↵</td><td>F4-↵</td></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0496</td><td>2.9982</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0497</td><td>2.9988</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0498</td><td>2.9994</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>2.9999</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.05</td><td>3.0005</td><td></td><td></td></tr></table>								MAIN	RAD	EXACT	FUNC	F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	x	u1			1.0496	2.9982			1.0497	2.9988			1.0498	2.9994			1.0499	2.9999			1.05	3.0005			<table><tr><th>MAIN</th><th>RAD</th><th>EXACT</th><th>FUNC</th></tr><tr><td>F1-Tools</td><td>F2-Setup</td><td>F3-Header</td><td>F4-↵</td></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>2.9999</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0001</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0001</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0002</td><td></td><td></td></tr></table>								MAIN	RAD	EXACT	FUNC	F1-Tools	F2-Setup	F3-Header	F4-↵	x	u1			1.0499	2.9999			1.0499	3.			1.0499	3.0001			1.0499	3.0001			1.0499	3.0002			<table><tr><th>MAIN</th><th>RAD</th><th>EXACT</th><th>FUNC</th></tr><tr><td>F1-Tools</td><td>F2-Setup</td><td>F3-↵</td><td>F4-↵</td></tr><tr><td>x</td><td>u1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>2.9999</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0001</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0001</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1.0499</td><td>3.0002</td><td></td><td></td></tr></table>								MAIN	RAD	EXACT	FUNC	F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵	x	u1			1.0499	2.9999			1.0499	3.			1.0499	3.0001			1.0499	3.0001			1.0499	3.0002																																																																										
MAIN	RAD	EXACT	FUNC																																																																																																																																																																																												
F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵																																																																																																																																																																																												
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.0496	2.9982																																																																																																																																																																																														
1.0497	2.9988																																																																																																																																																																																														
1.0498	2.9994																																																																																																																																																																																														
1.0499	2.9999																																																																																																																																																																																														
1.05	3.0005																																																																																																																																																																																														
MAIN	RAD	EXACT	FUNC																																																																																																																																																																																												
F1-Tools	F2-Setup	F3-Header	F4-↵																																																																																																																																																																																												
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.0499	2.9999																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0001																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0001																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0002																																																																																																																																																																																														
MAIN	RAD	EXACT	FUNC																																																																																																																																																																																												
F1-Tools	F2-Setup	F3-↵	F4-↵																																																																																																																																																																																												
x	u1																																																																																																																																																																																														
1.0499	2.9999																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0001																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0001																																																																																																																																																																																														
1.0499	3.0002																																																																																																																																																																																														

Logo, $x \approx 1,049\,908\,9$.

Também podemos obter a solução através dos zeros da função $y = xe^x - 3$:



Ainda podemos obter a solução aproximada por intersecção das funções $y = xe^x$ e $y = 3$, ou recorrendo às opções Zoom e Trace da calculadora.

Exemplo 317 Estudo da função $f(x) = \frac{x}{e^x}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Não é possível explicitar a correspondência inversa de f .

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{-x}) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+ \end{cases}$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função.

$$f'(x) = \frac{1e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}; \quad f''(x) = \frac{-1e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-1-1+x}{e^x} = \frac{x-2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1-x}{e^x} = 0 \iff x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
e^x	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow

Logo, f é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e é estritamente decrescente em $[1, +\infty[$.

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

Como f é diferenciável em \mathbb{R} , concluímos que f é contínua em \mathbb{R} , pelo que o gráfico da função não admite assíntotas verticais.

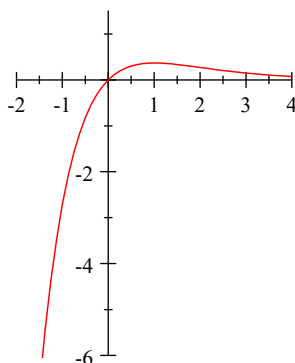
Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = +\infty$, não há nenhuma assíntota, para além daquela que já foi encontrada ($y = 0$).

Sinal da segunda derivada e sentido da concavidade:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
e^x	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	\cap	P Inf	\cup

$f(2) = \frac{2}{e^2}$. Então, $(2, \frac{2}{e^2})$ é ponto de inflexão.

Representação gráfica da função f :



O contradomínio da função é $[-\infty, \frac{1}{e}[$.

Convém comparar o gráfico desta função com o gráfico da função do exemplo anterior.

Observação

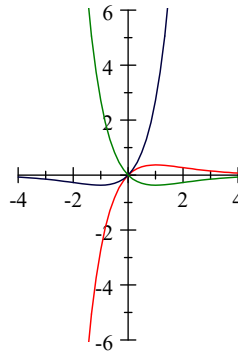
Sejam $f(x) = xe^x$ e $g(x) = \frac{x}{e^x}$. Então, $f(-x) = -xe^{-x} = -\frac{x}{e^x} = -g(x)$.

Então, $g(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que o gráfico de $g(x)$ pode ser obtido do gráfico de $f(x)$, por meio de duas transformações:

O gráfico de $f(-x)$ é o simétrico do gráfico de $f(x)$, em relação ao eixo das ordenadas.

O gráfico de $-f(-x)$ é o simétrico do gráfico de $f(-x)$, em relação ao eixo das abcissas.

O gráfico de $-f(-x)$ é o gráfico de $f(x)$ rodado 180° , em torno da origem.

**Exemplo 318** Estudo da função $f(x) = \ln|x|$

Esta função pode ser estudada a partir da função $g(x) = \ln x$, mas vamos fazer o seu estudo directamente.

Devemos ter $|x| > 0$, pelo que $x \neq 0$. Logo, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x|$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a função é par.

Então, a função f não é injectiva nem admite função inversa.

Para a correspondência inversa, temos:

$$\ln|x| = y \iff |x| = e^y \iff x = \pm e^y$$

Como, na expressão anterior, y pode assumir qualquer valor real, o contradomínio de f é \mathbb{R} .

A função pode ser definida por ramos:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \iff x > 0 \\ \ln(-x) & \iff x < 0 \end{cases} \cdot \text{Então, } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \iff x > 0 \\ -\frac{1}{x} = \frac{1}{x} & \iff x < 0 \end{cases}$$

Então, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$		\searrow	\nearrow

Logo, f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, o gráfico da função não admite assíntotas oblíquas.

Mas, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x| = \ln(+\infty) = +\infty$, pelo que o gráfico da função não admite assíntotas horizontais.

Como f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, concluímos que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que o gráfico da função, apenas pode admitir uma assíntota vertical (a recta $x = 0$).

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = \ln(0^+) = -\infty$, podemos concluir que a recta $x = 0$ é, de facto, assíntota ao gráfico da função f .

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo.

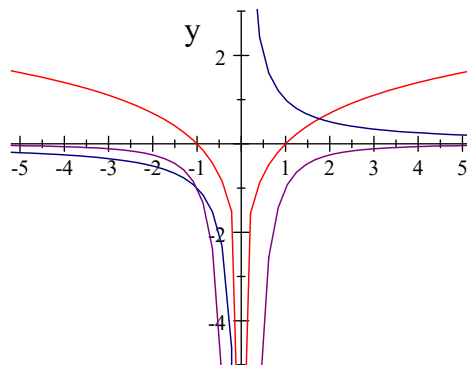
Zeros e sinal da função:

$$f(x) = 0 \iff \ln|x| = 0 \iff |x| = 1 \iff x = \pm 1$$

$$f(x) > 0 \iff \ln|x| > 0 \iff |x| > 1 \iff x < -1 \vee x > 1$$

$$f(x) < 0 \iff \ln|x| < 0 \iff 0 < |x| < 1 \iff -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$$

Representação gráfica de $f(x)$, de $f'(x)$ e de $f''(x)$, a vermelho, azul e roxo, respectivamente:



Exemplo 319 Estudo da função $f(x) = e^x - e^{-x}$:

O domínio desta função é \mathbb{R} .

$f(-x) = e^{-x} - e^x = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Então, f é uma função ímpar.

Para a correspondência inversa, temos:

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= y \iff e^x - \frac{1}{e^x} - y = 0 \iff e^{2x} - ye^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2} \iff x = \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

Observemos que para a resolução da equação anterior é conveniente conhecer as fórmulas que dão a soma e o produto (e respectivos sinais) das soluções duma equação de segundo grau.

Da expressão $x = \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$, concluímos que y pode assumir qualquer valor, que existe função inversa de f e que f é injectiva.

Então, $D'_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, f é estritamente crescente em \mathbb{R} .

Zeros e sinal da função:

$$f(x) = 0 \iff e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$$

Como f é estritamente crescente, vem:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Segunda derivada: $f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Então, o sinal de $f''(x)$ é o sinal de $f(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\cap	P Inf	\cup

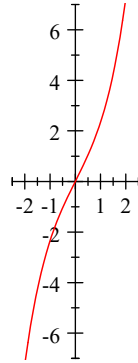
Assíntotas:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + e^{-x}) = e^{-\infty} + e^{+\infty} = 0 + (+\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \end{cases}$$

Logo, não há assíntotas não verticais.

Como a função f é diferenciável em \mathbb{R} , então f é contínua em \mathbb{R} , pelo que não há assíntotas verticais.

Representação gráfica de $f(x)$:



Exemplo 320 Estudo da função $f(x) = e^x + e^{-x}$:

O domínio desta função é \mathbb{R} .

$$f(-x) = e^{-x} + e^x = e^x + e^{-x} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, f é uma função par.

Além disso, temos que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que a função f não tem zeros.

Para a correspondência inversa, temos:

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} = y &\iff e^x - y + \frac{1}{e^x} = 0 \wedge y > 0 \iff e^{2x} - ye^x + 1 = 0 \wedge y > 0 \\ &\iff e^x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \wedge y > 0 \iff x = \ln \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \wedge y > 0 \end{aligned}$$

Então, $y^2 - 4 \geq 0 \wedge y > 0$, donde se conclui que $y \geq 2$, pelo que o contradomínio de f é $[2, +\infty[$.

$$f'(x) = e^x - e^{-x}$$

Então, $f'(x) = 0 \iff x = 0$, conforme vimos no exemplo anterior.

Monotonia da função:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	mín	\nearrow

$$f(0) = 2$$

Segunda derivada:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

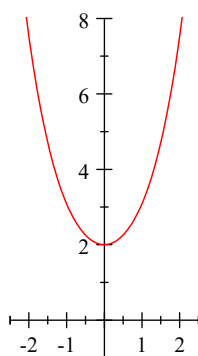
Assíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty$$

Logo, não há assíntotas não verticais.

Como a função f é diferenciável em \mathbb{R} , então f é contínua em \mathbb{R} , pelo que, também, não há assíntotas verticais.

Representação gráfica de $f(x)$:



Observe-se que existe uma relação profunda entre as duas funções $y = e^x - e^{-x}$ e $y = e^x + e^{-x}$.

Essa relação vai para além do facto de cada uma delas ser a derivada da outra, como podemos ver, na seguinte propriedade:

$$[e^x + e^{-x}]^2 - [e^x - e^{-x}]^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x} = 4, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Então, } \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]^2 - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Há uma semelhança muito grande entre as funções definidas por $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e as funções trigonométricas $\cos x$ e $\sin x$ (muito para além do que foi mostrado). Essa semelhança levou a que essas funções tivessem recebido o nome de coseno hiperbólico e seno hiperbólico.

Assim, temos $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Seguem-se algumas fórmulas para o seno e o coseno hiperbólicos:

$$\sinh(a + b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$

$$\sinh(a - b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b$$

$$\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$

$$\cosh(a - b) = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b$$

Demonstração da 1ª fórmula:

$$\begin{aligned}
\sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\
&= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{a+b} - e^{a-b} + e^{-a+b} - e^{-a-b}}{4} \\
&= \frac{2e^{a+b} - 2e^{-a-b}}{4} = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} = \sinh(a+b)
\end{aligned}$$

Exemplo 321 Estudo da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$:

O domínio da função é \mathbb{R} .

$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que a função f é par.

Logo, f não é injectiva nem existe função inversa de f .

Para a correspondência inversa, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} &= y \iff e^{-\frac{x^2}{2}} = y\sqrt{2\pi} \iff -\frac{x^2}{2} = \ln(y\sqrt{2\pi}) \iff x^2 = -2\ln(y\sqrt{2\pi}) \\
&\iff x^2 = -2\ln y - \ln 2 - \ln \pi \iff x = \pm \sqrt{-2\ln y - \ln 2 - \ln \pi}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
2\ln y + \ln 2 + \ln \pi \leq 0 \wedge y > 0 &\iff 2\ln y \leq -\ln 2 - \ln \pi \wedge y > 0 \iff \ln(y^2) \leq \ln \frac{1}{2\pi} \wedge y > 0 \\
&\iff y^2 \leq \frac{1}{2\pi} \wedge y > 0 \iff 0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Logo, o contradomínio de f é $\left]0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$.

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}$, pelo que o sinal de $f'(x)$ é o sinal de $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Como f é diferenciável em \mathbb{R} , f é contínua em \mathbb{R} , pelo que o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

Para a segunda derivada e sentido da concavidade, temos:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0 \iff x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$\frac{x^2-1}{\sqrt{2\pi}}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\smile	P Inf	\frown	P Inf	\smile

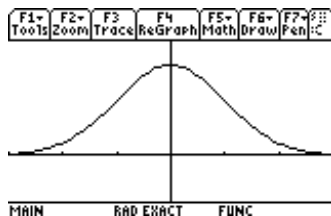
$$f(-1) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}e}$$

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0 = 0$$

Logo, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de f .

A representação gráfica da função $f(x)$:

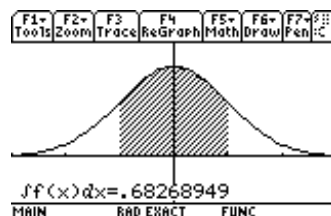


A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ é a conhecida curva de Gauss, com valor médio zero e desvio padrão 1.

Recorrendo à calculadora, podemos achar a área da região limitada pelo eixo das abcissas, pela curva e pelas rectas de equação $x = \pm 1$:

Para esse efeito, temos de calcular $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$:

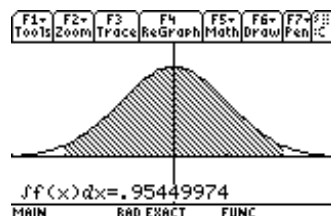
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0,682\,689\,49$$



E, assim, obtivemos a conhecida probabilidade de 0,682 689 492 1.

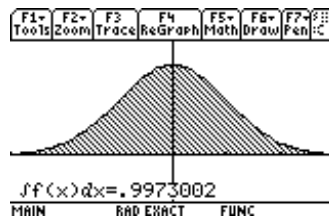
Área da região limitada pelo eixo das abcissas, pela curva e pelas rectas de equação $x = \pm 2$:

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0,954\,499\,74$$



Área da região limitada pelo eixo das abcissas, pela curva e pelas rectas de equação $x = \pm 3$:

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0,997\,300\,23\,9$$



Exemplo 322 Estudo da função $f(x) = e^{|x|}$:

$$D_f = \mathbb{R};$$

$$e^{|x|} = y \iff |x| = \ln y \iff x = \pm \ln y \wedge \ln y \geq 0 \iff x = \pm \ln y \wedge y \geq 1$$

$D'_f = [1, +\infty[$, pelo que a função não tem zeros. Não existe função inversa de f . Então, f não é injectiva.

$$f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Então, } f \text{ é par.}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \iff x \leq 0 \\ e^x & \iff x \geq 0 \end{cases}.$$

A função é contínua no ponto $x = 0$ (a imagem de zero pode ser calculada em qualquer das expressões e^{-x} e e^x , as quais são funções contínuas em \mathbb{R}).

Não existe derivada no ponto $x = 0$, porque as derivadas laterais são diferentes: $f'_d(0) = 1 \wedge f'_e(0) = -1$.

Pelo facto das derivadas laterais serem diferentes, diz-se que o gráfico de tem um ponto anguloso ($x = 0$).

$$\text{Então, } f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \iff x < 0 \\ e^x & \iff x > 0 \end{cases}$$

Observe-se que a função e^x é diferenciável em \mathbb{R} e a derivada no ponto $x = 0$ é 1. Então, a derivada à direita (no ponto $x = 0$) é 1. A função e^{-x} é diferenciável em \mathbb{R} e a derivada no ponto $x = 0$ é -1 . Então, a derivada à esquerda (no ponto $x = 0$) é -1 .

A função f é contínua em \mathbb{R} .

Monotonia:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	não definida	$+$
$f(x)$	\searrow	mín	\nearrow

$$f(0) = e^0 = 1$$

Assíntotas:

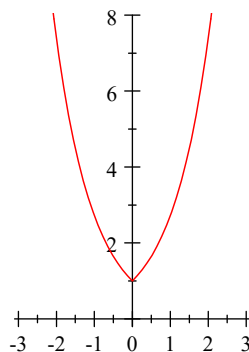
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x}) = -e^{+\infty} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

Logo, o gráfico de f não admite assíntotas não verticais. Como f é contínua em \mathbb{R} , o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x} & \iff x < 0 \\ e^x & \iff x > 0 \end{cases}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

Representação gráfica da função f :



Exemplo 323 Estudo da função $f(x) = \ln(e + |x|)$:

A função, de domínio \mathbb{R} , pode ser definida por ramos, do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e - x) & \Leftarrow x \leq 0 \\ \ln(e + x) & \Leftarrow x \geq 0 \end{cases}$$

f é contínua no ponto $x = 0$, porque $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$f(-x) = \ln(e + |-x|) = \ln(e + |x|) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, f é uma função par, pelo que não é injectiva nem admite função inversa.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{e-x} & \Leftarrow x < 0 \\ \frac{1}{e+x} & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$$

No ponto $x = 0$, a função não tem derivada, uma vez que as derivadas laterais são diferentes ($-\frac{1}{e}$ e $\frac{1}{e}$). Dizemos que no ponto $x = 0$, o gráfico da função tem um ponto anguloso.

Como $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$, $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ e f é contínua no ponto $x = 0$, temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	não definida	$+$
$f(x)$	\searrow	mín	\nearrow

$$f(0) = \ln e = 1$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1 \times (-1)}{(e-x)^2} = -\frac{1}{(e-x)^2} & \Leftarrow x < 0 \\ \frac{-1 \times 1}{(e+x)^2} = -\frac{1}{(e+x)^2} & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$$

Então, $f''(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pelo que o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo.

Podemos obter a correspondência inversa:

$$\begin{aligned} \ln(e + |x|) = y & \iff e + |x| = e^y \iff |x| = e^y - e \iff x = \pm(e^y - e) \wedge e^y - e \geq 0 \\ & \iff x = \pm(e^y - e) \wedge y \geq 1 \end{aligned}$$

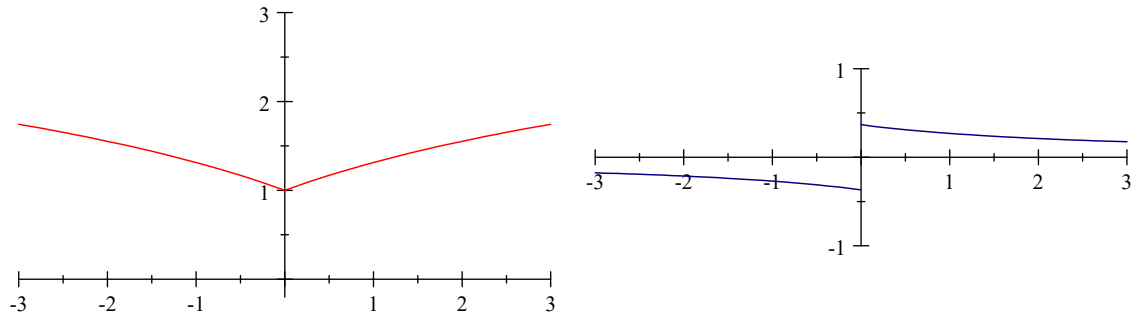
Então, $D'_f = [1, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e+x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e + x) = +\infty$$

Como a função f é par, podemos concluir que não há assíntotas não verticais.

Como a função é contínua em \mathbb{R} , não há assíntotas verticais.

Representação gráfica da função e da sua derivada:



Embora não esteja completamente correcta, pois não existe derivada da função no ponto $x = 0$, apresentámos o gráfico da função $f'(x)$, sem as "bolas abertas" nos pontos $(0, \frac{1}{e})$ e $(0, -\frac{1}{e})$.

Exemplo 324 Estudo da função $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

O domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Não é possível explicitar a correspondência inversa de f .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, pelo que não existe assíntota vertical no ponto $x = 0$. A função pode ser prolongada ao conjunto \mathbb{R} , passando a estar definida no ponto $x = 0$, de modo a ser contínua neste ponto, sendo 1 a imagem de zero.

Daqui em diante, consideramos a função $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \Leftarrow x \neq 0 \\ 1 & \Leftarrow x = 0 \end{cases}$, cujo domínio é \mathbb{R} .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0 - 1}{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty - 0 = +\infty$$

Então, a recta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função, sendo a única assíntota não vertical. Como f é contínua em \mathbb{R} , então não há assíntotas verticais.

$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$, função esta que está definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Haverá derivada no ponto $x = 0$?

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

O numerador e o denominador da fracção $\frac{e^x - x - 1}{x^2}$ tendem para zero, quando x tende para zero.

Para o cálculo do limite anterior é conveniente conhecer a regra de Cauchy, a qual nos diz que devemos calcular o limite do quociente entre a derivada do numerador e a derivada do denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Como este limite existe, então $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$ também existe e é igual ao limite anterior, ou seja, $f'(0) = \frac{1}{2}$. Este facto pode ser verificado, representando a função graficamente, bem como a recta de equação $y = \frac{x}{2}$.

Então, f é uma função derivável em \mathbb{R} .

Então, f é uma função contínua em \mathbb{R} .

Estudo da monotonia da função:

Como não é fácil estudar o sinal de $xe^x - e^x + 1$, vamos começar por estudar a monotonia da função $g(x) = xe^x - e^x + 1$, de modo a determinar o seu sinal.

$$g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
e^x	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	\searrow	mín	\nearrow

Então, $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $g(0) = 0$.

E, agora, é fácil estudar o sinal de $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$xe^x - e^x + 1$	$+$	0	$+$
x^2	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$
$f(x)$	\nearrow		

Então, f é estritamente crescente em \mathbb{R} .

Segunda derivada e sentido da concavidade:

$$f''(x) = \frac{xe^x x^2 - (xe^x - e^x + 1)2x}{x^4} = \frac{e^x x^2 - (xe^x - e^x + 1)2}{x^3} = \frac{x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3}$$

Seja $h(x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$. Então:

$$h'(x) = 2xe^x + x^2 e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = x^2 e^x$$

Então, h é estritamente crescente em \mathbb{R} . Como $h(0) = 0$, temos que $h(x)$ tem o sinal de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$	$-$	0	$+$
x^3	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	\smile		

Se pretendermos calcular $f''(0)$, procedemos de maneira análoga ao cálculo de $f'(0)$, obtendo-se $f''(0) = \frac{1}{3}$.

Para quem conhecer o desenvolvimento duma função em série de Mac-Laurin, observe-se o seguinte:

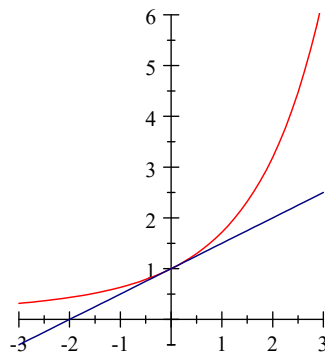
$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdots \\ e^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdots \\ \frac{e^x - 1}{x} &= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} \cdots \end{aligned}$$

Então, para $x \neq 0$, a função $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ pode ser definida pela série anterior, a qual está definida para $x = 0$, obtendo-se o valor 1. Esse é valor é a imagem de zero pela função inicial f .

Ora, $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} \dots = 1 + \frac{1}{2} \frac{x}{1!} + \frac{1}{3} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{1}{n} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \dots$

Então, $f^{(n-1)}(0) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Observemos que, para $n = 1$, obtemos $f^0(0) = \frac{1}{1}$, ou seja, $f(0) = 1$.

Segue-se a representação gráfica da função e da recta tangente no ponto de abcissa zero.



Exemplo 325 Estudo da função $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

O domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sinal: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Correspondência inversa de f :

$$e^{\frac{1}{x}} = y \iff \frac{1}{x} = \ln y \wedge y > 0 \iff x = \frac{1}{\ln y} \wedge y > 0 \wedge y \neq 1$$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln x}$, com $x > 0 \wedge x \neq 1$.

Então, o contradomínio de f é $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Então, a recta de equação $y = 1$ é a única assíntota horizontal ao gráfico da função dada.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty, \text{ pelo que existe assíntota vertical no ponto } x = 0.$$

$$\text{No entanto, } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo, a função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$, voltando a ser estritamente decrescente em $]0, +\infty[$.

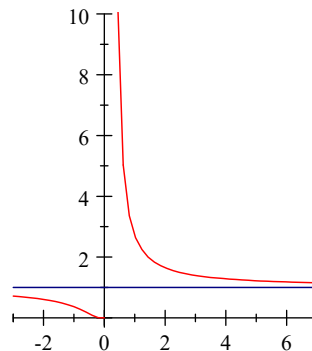
Como f é uma função derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, então, f é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = (-x^{-2})' e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= 2x^{-3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Sentido da concavidade:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$		$+$
x^4	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	\frown	P Inflexão	\smile		\smile

Representação gráfica da função, incluindo a assíntota horizontal:



Exemplo 326 Estudo da função $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \Longleftarrow x \neq 0 \\ 0 & \Longleftarrow x = 0 \end{cases}$

O domínio da função é \mathbb{R} .

Sinal: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$.

Para $x \neq 0$, temos $f(-x) = e^{-\frac{1}{|-x|}} = e^{-\frac{1}{|x|}} = f(x)$. É claro que $f(-0) = f(0)$.

Então, $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que f é uma função par.

Correspondência inversa de f :

$$\begin{aligned}
 e^{-\frac{1}{|x|}} = y &\iff -\frac{1}{|x|} = \ln y \wedge y > 0 \iff -|x| = \frac{1}{\ln y} \wedge y > 0 \wedge y \neq 1 \\
 &\iff |x| = -\frac{1}{\ln y} \wedge y > 0 \wedge y \neq 1 \iff x = \pm \frac{1}{\ln y} \wedge y > 0 \wedge y \neq 1 \wedge \ln y < 0 \\
 &\iff x = \pm \frac{1}{\ln y} \wedge 0 < y < 1
 \end{aligned}$$

Para $x = 0$, vem $y = 0$, pelo que o contradomínio de f é $[0, 1[$.

Assíntotas horizontais:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{|x|}} = e^0 = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, porque a função f é par.

Então, a recta de equação $y = 1$ é a única assíntota horizontal ao gráfico da função dada.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{|x|}} = e^{-\infty} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, pelo que não existe assíntota vertical no ponto $x = 0$, tendo-se que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, pelo que a função é contínua no ponto $x = 0$.

Para $x > 0$, temos $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, pelo que, $f'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, para $x > 0$.

Para $x < 0$, temos $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, pelo que $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, para $x < 0$.
Falta saber se existe derivada no ponto $x = 0$.

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

Como a função f é par, então $f'_e(0) = 0$. Então, $f'(0) = 0$.

$$\text{Então, } f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \Longleftarrow x < 0 \\ 0 & \Longleftarrow x = 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \Longleftarrow x > 0 \end{cases}$$

Então, f é uma função derivável em \mathbb{R} .

Então, f é uma função contínua em \mathbb{R} , pelo que o gráfico da função não admite assíntotas verticais.

Monotonia da função:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$	—		
$\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$			+
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	\searrow	mín	\nearrow

Logo, a função é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$, tendo um mínimo (absoluto) no ponto $x = 0$, com $f(0) = 0$.

$$f''_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0$$

Como f é par, temos $f''_e(0) = 0$.

Suponhamos que $x < 0$. Então:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(-x^{-2} e^{\frac{1}{x}}\right)' = 2x^{-3} e^{\frac{1}{x}} - x^{-2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$$

Suponhamos que $x > 0$. Então:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right)' = \left(x^{-2} e^{-\frac{1}{x}}\right)' = -2x^{-3} e^{-\frac{1}{x}} + x^{-2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} = -\frac{2x+1}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Se quisermos utilizar uma única expressão para a segunda derivada, podemos escrever

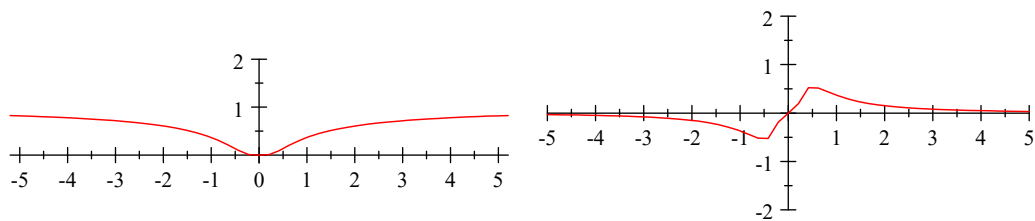
$$f''(x) = \frac{-2|x|+1}{x^4} e^{-\frac{1}{|x|}}$$

Sentido da concavidade:

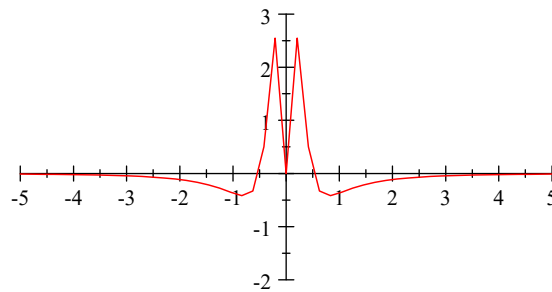
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$				
$e^{\frac{1}{x}}$	$+$	$+$	$+$				
x^4	$+$	$+$	$+$				
$-2x + 1$					$+$	0	$-$
$e^{-\frac{1}{x}}$					$+$	$+$	$+$
x^4					$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\cap	P Inf	\cup				P Inf
	\cap						\cap

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Representação gráfica das funções $f(x)$ e $f'(x)$:



Representação gráfica da função $f''(x)$:



Exemplo 327 Estudo da função $f(x) = x \ln x$

O domínio da função é \mathbb{R}^+ .

Zeros e sinal:

$$\begin{cases} f(x) = 0 \iff x \ln x = 0 \iff (x = 0 \vee \ln x = 0) \wedge x > 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1 \\ \ln x > 0 \iff x > e^0 \iff x > 1 \\ \ln x < 0 \iff x < e^0 \wedge x > 0 \iff 0 < x < 1 \end{cases}$$

x	0		1	$+\infty$
x	0	+	+	+
$\ln x$		-	0	+
$f(x)$		-	0	+

$$f'(x) = 1 \ln x + x \left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + 1 = 1 + \ln x$$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, pelo que o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima.

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1} \iff x = \frac{1}{e} \\ f'(x) > 0 \iff 1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1} \iff x > \frac{1}{e} \\ f'(x) < 0 \iff 1 + \ln x < 0 \iff \ln x < -1 \iff 0 < x < e^{-1} \iff 0 < x < \frac{1}{e} \end{cases}$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$1 + \ln x$		-	0	+
$f(x)$			mín	

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} (-1) = -\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x) = 1 + \ln(+\infty) = +\infty$$

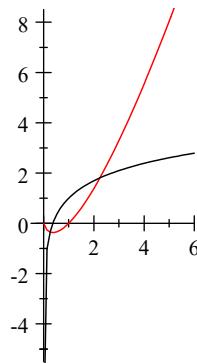
Então, o gráfico da função não admite assíntotas não verticais.

Como a função é derivável em \mathbb{R}^+ , é contínua em \mathbb{R}^+ , pelo que pode admitir uma única assíntota vertical (a recta de equação $x = 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln t}{t}\right) = 0$$

Logo, a recta de equação $x = 0$ não é assíntota.

Representação gráfica da função e da primeira derivada:



Exemplo 328 Estudo da função $f(x) = \ln \ln x$

Resolução

De $x > 0 \wedge \ln x > 0$, vem $x > 1$, pelo que o domínio da função é $]1, +\infty[$.

$$f(x) = 0 \iff \ln \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$$

A função tem um único zero (e).

$$f(x) = y \iff \ln \ln x = y \iff \ln x = e^y \iff x = e^{e^y}$$

Logo, existe função inversa de f , tendo-se $f^{-1}(x) = e^{e^x}$.

O contradomínio de f é \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} > 0, \forall x \in]1, +\infty[.$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x \ln x}\right)' = \frac{0 - (1 \ln x + x \times \frac{1}{x})}{x^2 \ln^2 x} = -\frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x} < 0, \forall x \in]1, +\infty[.$$

A função é contínua e estritamente crescente em $]1, +\infty[$ e o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

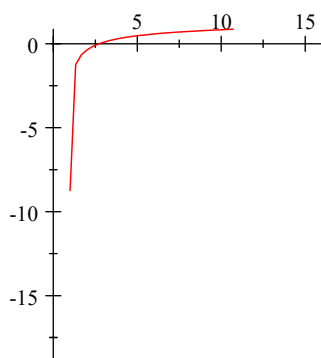
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \ln x = \ln \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln \ln x) = \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Dos resultados anteriores, concluímos que não há assíntotas verticais e que a recta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função. Como a função é contínua em $]1, +\infty[$, não há mais assíntotas verticais.

Representação gráfica da função:



Exemplo 329 Estudo da função $f(x) = \frac{10}{1+9e^{-10x}}$

Resolução

O domínio da função é \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \frac{10}{1+9e^{-10x}} &= y \iff 1+9e^{-10x} = \frac{10}{y} \iff 9e^{-10x} = \frac{10}{y} - 1 \\ &\iff e^{-10x} = \frac{10-y}{9y} \iff -10x = \ln \frac{10-y}{9y} \iff x = -\frac{1}{10} \ln \frac{10-y}{9y} \end{aligned}$$

Então, f admite função inversa, pelo que é injectiva.

De $\frac{10-y}{9y} > 0$, vem $0 < y < 10$, pelo que o contradomínio de f é $]0, 10[$.

$$f'(x) = \frac{0 - 10(-90e^{-10x})}{(1+9e^{-10x})^2} = \frac{900e^{-10x}}{(1+9e^{-10x})^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, a função é estritamente crescente em \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-9000e^{-10x} (1 + 9e^{-10x})^2 - 900e^{-10x} \times 2 (1 + 9e^{-10x}) (-90e^{-10x})}{(1 + 9e^{-10x})^4} \\ &= \frac{-9000e^{-10x} (1 + 9e^{-10x}) - 900e^{-10x} \times 2 (-90e^{-10x})}{(1 + 9e^{-10x})^3} \\ &= \frac{-9000e^{-10x} (1 + 9e^{-10x} - 18e^{-10x})}{(1 + 9e^{-10x})^3} = \frac{-9000e^{-10x} (1 - 9e^{-10x})}{(1 + 9e^{-10x})^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 9e^{-10x} = 1 \iff e^{-10x} = \frac{1}{9} \iff -10x = -\ln 9 \iff x = \frac{1}{10} \ln 9 \\ 1 - 9e^{-10x} > 0 &\iff 9e^{-10x} < 1 \iff e^{-10x} < \frac{1}{9} \iff -10x < -\ln 9 \iff x > \frac{1}{10} \ln 9 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{10} \ln 9$	$+\infty$
$-90e^{-10x}$	$-$	$-$	$-$
$1 - 9e^{-10x}$	$-$	0	$+$
$(1 + 9e^{-10x})^3$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\smile	P Inf	\frown

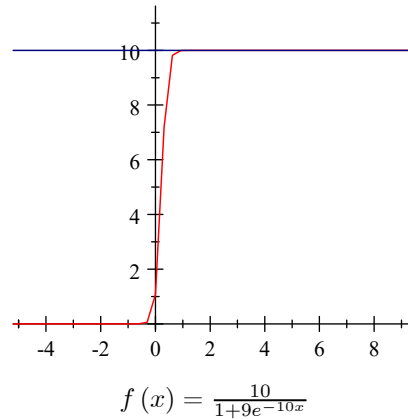
$$f\left(\frac{1}{10} \ln 9\right) = \frac{10}{1 + 9e^{-\ln 9}} = \frac{10}{1 + \frac{9}{9}} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{1 + 9e^{-x}} = \frac{10}{1 + 9 \times 0} = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{1 + 9e^{-x}} = \frac{10}{1 + 9 \times (+\infty)} = 0$$

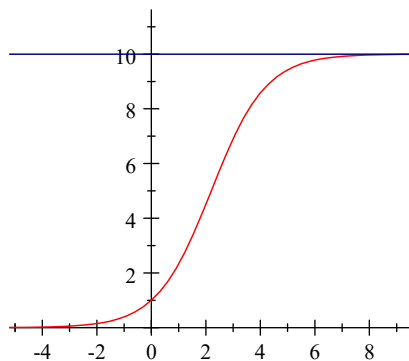
O gráfico da função admite duas assíntotas horizontais: as rectas definidas por $y = 0 \vee y = 10$.

Representação gráfica da função, incluído as assíntotas:

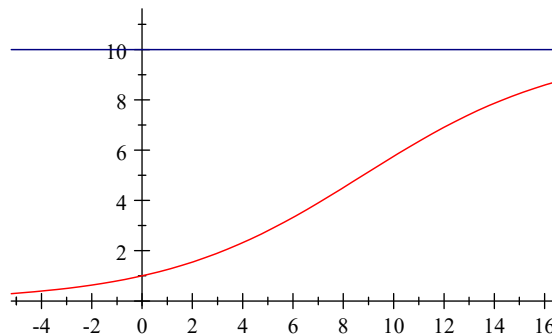


O gráfico anterior traduz um crescimento lento, um crescimento rápido que volta a dar lugar a um crescimento lento, quase imperceptível a partir de certo valor de x .

A função anterior é um bom modelo, embora muito acelerado, para o crescimento de populações. A seguir, temos dois exemplos menos acelerados:



$$f(x) = \frac{10}{1+9e^{-x}}$$



$$f(x) = \frac{10}{1+9e^{-\frac{x}{4}}}$$

Vejamos, agora, uma propriedade interessante da função $f(x)$, calculando $10f(x) - [f(x)]^2$:

$$\begin{aligned} 10f(x) - [f(x)]^2 &= \frac{100}{1+9e^{-10x}} - \left(\frac{10}{1+9e^{-10x}} \right)^2 = \frac{100(1+9e^{-10x})}{(1+9e^{-10x})^2} - \frac{100}{(1+9e^{-10x})^2} \\ &= \frac{100+900e^{-10x}-100}{(1+9e^{-10x})^2} = \frac{900e^{-10x}}{(1+9e^{-10x})^2} = f'(x) \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo adaptado à população humana a nível mundial:

Exemplo 330 Seja $N(t) = \frac{0,029 \times 3,34 \times 10^9}{2,695 \times 10^{-12} \times 3,34 \times 10^9 + (0,029 - 2,695 \times 10^{-12} \times 3,34 \times 10^9)e^{-0,029t}}$, onde $N(0)$ dá o número de habitantes (humanos) do planeta Terra em 1965.

$$N(t) \approx \frac{96860000}{0,0090013 + 0,0199987e^{-0,029t}}$$

$$N(0) \approx 3,34 \times 10^9$$

$$N(35) \approx 5,961027165 \times 10^9$$

$$N(40) \approx 6,342900603 \times 10^9$$

Então, o número de habitantes, em 2005, seria de $6,34 \times 10^9$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 1,07606679 \times 10^{10}$$

A função $N(t) = \frac{kN_0}{rN_0 + (k-rN_0)e^{-kt}}$, com $k > 0 \wedge r > 0$, é conhecida por função logística.

Esta função satisfaz a condição $N'(t) = kN(t) - r[N(t)]^2$, tendo-se $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{kN_0}{rN_0} = \frac{k}{r}$.

A condição $N'(t) = kN(t) - r[N(t)]^2$ significa que, para valores pequenos de $N(t)$, $N'(t)$ é positivo e razoavelmente grande, pelo que a população aumenta rapidamente; mas, a partir de certa altura, o facto de termos $N'(t) = kN(t) - r[N(t)]^2$, faz com que $N'(t)$ se aproxime de zero, pelo que o crescimento é muito lento. Se, por algum motivo, $N(t)$ se tornar demasiado grande (ou seja, se $N > \frac{k}{r}$), então $N'(t)$ é negativo e a população diminui.

O parâmetro k é responsável pelo aumento da população, enquanto que o parâmetro r traduz uma competição entre os indivíduos. É como se nos automóveis existisse um dispositivo que impedisse velocidades superiores a 120 km por hora (nas autoestradas...).

Vejamos um exemplo com derivada negativa:

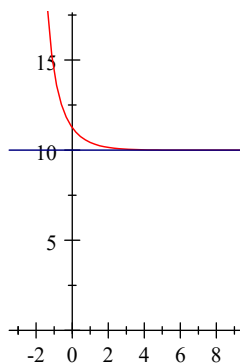
Exemplo 331 Seja $N(t) = \frac{10}{1 - \frac{1}{9}e^{-t}}$

$$1 - \frac{1}{9}e^{-t} \neq 0 \iff e^{-t} \neq 9 \iff -t \neq \ln 9 \iff t \neq -\ln 9$$

Neste caso, o domínio não é \mathbb{R} , mas $\mathbb{R} \setminus \{-\ln 9\}$. É claro que só nos interessa a parte do domínio em que a função é positiva.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10}{1 - \frac{1}{9}e^{-t}} = \frac{10}{1} = 10.$$

Representação gráfica de $N(t)$, com $t > -\ln 9$:



$$N(t) = \frac{10}{1 - \frac{1}{9}e^{-t}}$$

Exercício 332 Seja g uma função de domínio $[0, +\infty[$, decrescente e tal que $g'(x) = g(x) - x + 1, \forall x \in [0, +\infty[$.

1. Mostre que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo.
2. Mostre que a função $y = -e^x + x$ verifica as condições do enunciado e explique a razão pela qual não se considerou que o domínio da função era \mathbb{R} .

Resolução

1. Como g é uma função decrescente, então $g'(x) \leq 0, \forall x \in [0, +\infty[$.
Por outro lado, temos $g''(x) = g'(x) - 1, \forall x \in [0, +\infty[$. Logo, $g''(x) < 0, \forall x \in [0, +\infty[$.
Então, o gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo.
2. Seja $g(x) = -e^x + x$. Então, $g'(x) = -e^x + 1, \forall x \in [0, +\infty[$. Ora, $g'(x) = 0 \iff -e^x + 1 = 0$.
Então, $e^x = 1$, donde vem $x = 0$.

Por outro lado, temos que $g'(x) < 0$ é equivalente a $-e^x < -1$, donde vem $e^x > 1$ e $x > 0$.
Logo, a função g é decrescente em $[0, +\infty[$ e é crescente em $]-\infty, 0]$.

Além disso, temos que $g(x) - x + 1 = -e^x + x - x + 1 = -e^x + 1 = g'(x), \forall x \in [0, +\infty[$.
É claro que $g''(x) = -e^x, \forall x \in [0, +\infty[$, pelo que g admite derivadas de todas as ordens. A razão de considerarmos que o domínio de g é $[0, +\infty[$ e não \mathbb{R} , deve-se ao facto de, como o exemplo apresentado deixa suspeitar, não haver nenhuma função de domínio \mathbb{R} que satisfaça as condições do enunciado.

Exercício 333 Seja g uma função de domínio $[-\ln 2, +\infty[$, crescente, com derivadas de todas as ordens e tal que $g'(x) = g(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \forall x \in [-\ln 2, +\infty[$.

1. Mostre que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima.
2. Mostre que a função $y = e^x - \frac{1}{2}x$ verifica as condições do enunciado e explique a razão pela qual se considerou que o domínio da função era $[-\ln 2, +\infty[$ e não \mathbb{R} .

Resolução

1. Como g é uma função crescente, então $g'(x) \geq 0, \forall x \in [-\ln 2, +\infty[$.

Por outro lado, temos $g''(x) = g'(x) + \frac{1}{2}, \forall x \in [-\ln 2, +\infty[$. Logo, $g''(x) > 0, \forall x \in [-\ln 2, +\infty[$. Então, o gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima.

2. Seja $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x$. Então, $g'(x) = e^x - \frac{1}{2}, \forall x \in [-\ln 2, +\infty[$. Ora, $g'(x) = 0 \iff e^x - \frac{1}{2} = 0$.

Então, $e^x = \frac{1}{2}$, donde vem $x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. Por outro lado, temos que $g'(x) > 0$ é equivalente a $e^x - \frac{1}{2} > 0$, donde vem $e^x > \frac{1}{2}$ e $x > -\ln 2$. Logo, a função g é crescente em $[-\ln 2, +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty, -\ln 2]$.

Além disso, temos que $g(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = e^x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = e^x - \frac{1}{2} = g'(x), \forall x \in [-\ln 2, +\infty[$. É claro que $g''(x) = e^x, \forall x \in [-\ln 2, +\infty[$, pelo que g admite derivadas de todas as ordens. A razão de considerarmos que o domínio de g é $[-\ln 2, +\infty[$ e não \mathbb{R} , deve-se ao facto de, como o exemplo apresentado deixa suspeitar, não haver nenhuma função de domínio \mathbb{R} que satisfaça as condições do enunciado.

Exercício 334 Um navio tanque sofreu um acidente a 6 km da costa de certo país, provocando uma mancha de crude, com a forma circular. Suponha que a forma circular se mantém e que o centro da mancha se mantém fixo. Suponha que, às t horas do dia seguinte ao acidente, a área $A(t)$, da mancha de crude, é dada, em km^2 , por $A(t) = 20e^{\frac{t}{10}} - e^{\frac{t}{5}}$, com $0 \leq t \leq 24$.

1. Calcule a área da mancha de crude às 24 horas do dia do acidente e às 24 horas do dia seguinte ao acidente.
2. Calcule a derivada da função $A(t)$.
3. Determine a área máxima da mancha de crude, no dia seguinte ao acidente. Indique, com aproximação ao segundo, a hora a que tal aconteceu e, com erro inferior a 1 metro quadrado, a área máxima da mancha.
4. A mancha de crude atingiu a costa, no dia seguinte ao acidente? Justifique.

Resolução

1. $A(0) = 20 - 1 = 19$; $A(24) = 20e^{\frac{24}{10}} - e^{\frac{24}{5}} \approx 98.953\,110\,1$

A área, às 24 horas do dia do acidente, era de 19 km^2 e às 24 horas do dia seguinte era de, aproximadamente, $98,953\,110 \text{ km}^2$.

2. $A'(t) = 20 \times \frac{1}{10}e^{\frac{t}{10}} - \frac{1}{5}e^{\frac{t}{5}} = 2e^{\frac{t}{10}} - \frac{1}{5}e^{\frac{t}{5}}$

3.

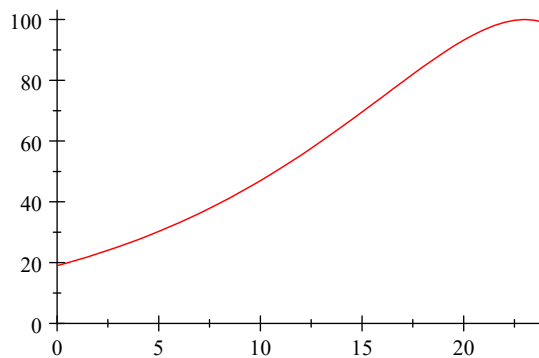
$$\begin{aligned}
 A'(t) = 0 &\iff 2e^{\frac{t}{10}} - \frac{1}{5}e^{\frac{t}{5}} = 0 \iff 10e^{\frac{t}{10}} - e^{\frac{t}{5}} = 0 \\
 &\iff 10 = e^{\frac{t}{10}} \iff \frac{t}{10} = \ln 10 \iff t = 10 \ln 10
 \end{aligned}$$

$$10 \ln 10 \approx 23,025\,850\,93; \quad 0,025\,850\,93 \times 60 = 1,551\,055\,8; \quad 0,551\,055\,8 \times 60 = 33,063\,348$$

$$A(10 \ln 10) = 20e^{\frac{10 \ln 10}{10}} - e^{\frac{10 \ln 10}{5}} = 20e^{\ln 10} - e^{2 \ln 10} = 200 - 100 = 100$$

A área máxima é de exactamente 100 km^2 , sendo atingida às 23 horas 1 minuto e 33 segundos do dia a seguir ao acidente.

A representação gráfica da função (que dá a área da mancha de crude) é a seguinte:



4. De $\pi R^2 = 100$ vem $R = \frac{10}{\sqrt{\pi}} \approx 5,641\,895\,835$, pelo que a mancha de crude não atingiu a costa (a distância do centro da mancha à costa era de 6 km).

Exercício 335 Suponha que, no exercício anterior, acrescentávamos a condição do centro de mancha estar fixo até às zero horas do dia seguinte ao acidente e, a partir dessa hora, se aproximar da costa perpendicularmente à mesma e com a velocidade de 100 m por hora. A que horas do dia seguinte ao acidente, a mancha de crude atingiria a costa?

Resolução

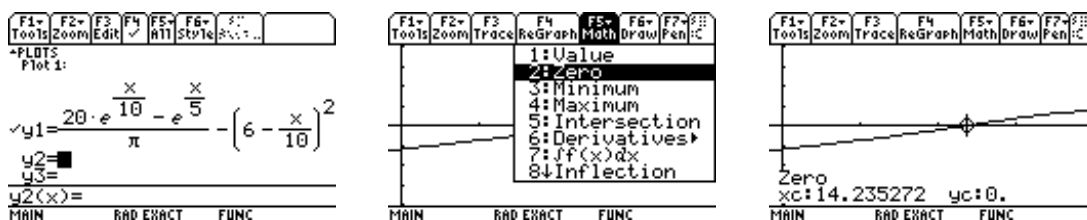
A velocidade do centro da mancha era de um décimo de quilómetro por hora, pelo que t horas depois das 24 horas do dia do acidente, o centro da mancha está à distância de $6 - \frac{t}{10}$. Se a mancha atingir a costa, então $6 - \frac{t}{10} = R(t)$, onde $R(t)$ é o valor do raio da mancha às t horas do dia seguinte ao acidente. Ora,

$$R(t) = \sqrt{\frac{A(t)}{\pi}} = \sqrt{\frac{20e^{\frac{t}{10}} - e^{\frac{t}{5}}}{\pi}}$$

Então,

$$\sqrt{\frac{20e^{\frac{t}{10}} - e^{\frac{t}{5}}}{\pi}} = 6 - \frac{t}{10} \implies \frac{20e^{\frac{t}{10}} - e^{\frac{t}{5}}}{\pi} - \left(6 - \frac{t}{10}\right)^2 = 0$$

Determinando os zeros da função $F(x) = \frac{20e^{\frac{x}{10}} - e^{\frac{x}{5}}}{\pi} - \left(6 - \frac{x}{10}\right)^2 = 0$, através duma Calculadora, obteríamos $x \approx 14,235272$.



$$0,235272 \times 60 = 14,11632$$

$$0,11632 \times 60 = 6,9792$$

A mancha atingiria a costa às 14 horas, 14 minutos e 7 segundos (aproximadamente) do dia seguinte ao acidente.

É claro que a partir deste momento a mancha deixa de ser circular e a expressão que dá a área da mancha passa a ser outra. Estamos a supor que a mancha não invade a ilha e que o crude se concentra junto à costa.

Assim, teríamos de descontar a área dum segmento circular.

Recordamos que, numa circunferência de raio R , a área do segmento circular correspondente a um arco de amplitude α radianos é $\frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha)$.

Exemplo 336 Finalizamos este capítulo, com dois exemplos de funções que podem baralhar os alunos, devido a diferenças entre a escrita corrente e a escrita na calculadora.

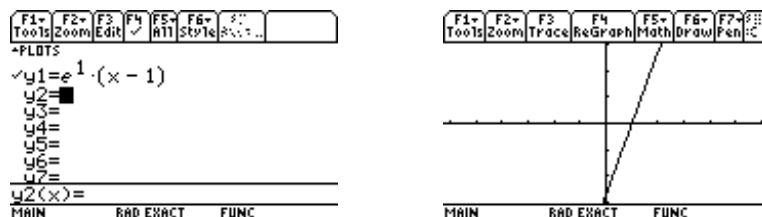
Sejam $f(x) = e(x-1)$ e $g(x) = e^{x-1}$.

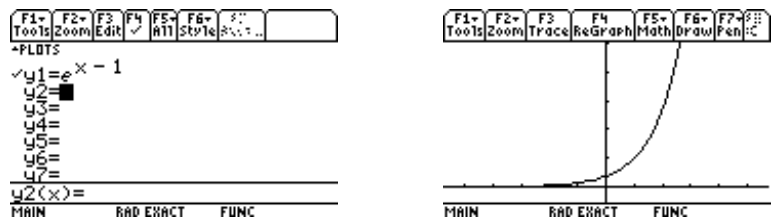
É claro que o gráfico de f é uma recta e o gráfico de g é uma curva exponencial. Mas, se não tivermos algum cuidado na escrita, podemos ter alguns problemas, quando formos representar graficamente as funções, na calculadora.

Note-se que, nalgumas calculadoras, a função $g(x)$ escreve-se $e(x-1)$, enquanto que $f(x)$ se escreve $e1(x-1)$.

Os alunos (e não só) devem prestar muita atenção a este aspecto e escrever a expressão adequada ao que se pretende e não aquela cujo aspecto é mais parecido, de modo a evitar dissabores que podem ser muito desagradáveis.

No caso da TI-89, temos:





Neste modelo, a escrita na calculadora é semelhante à escrita usual.

Capítulo 17

Estudo de Funções Trigonométricas

Exemplo 337 Estudo da função $f(x) = \sqrt{3} + 2 \sin x$

A função $f(x) = \sqrt{3} + 2 \sin x$ tem domínio \mathbb{R} e, tal como a função $\sin x$, é uma função periódica cujo período positivo mínimo é 2π .

Zeros da função:

$$\sqrt{3} + 2 \sin x = 0 \iff \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

De $-1 \leq \sin x \leq 1$, vem $\sqrt{3} - 2 \leq \sqrt{3} + 2 \sin x \leq \sqrt{3} + 2$, o que significa que o contradomínio de f é um subconjunto de $[\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} + 2]$.

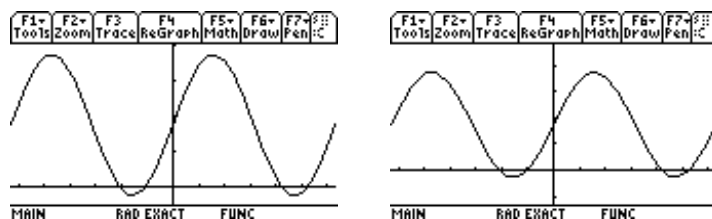
Mas, $\sqrt{3} + 2 \sin x = \sqrt{3} + 2 \iff \sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

E $\sqrt{3} + 2 \sin x = \sqrt{3} - 2 \iff \sin x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

O máximo de f é $\sqrt{3} + 2$, enquanto que o mínimo é $\sqrt{3} - 2$.

Como a função é contínua em \mathbb{R} , então o contradomínio de f é o intervalo $[\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} + 2]$.

Apresenta-se, a seguir, a representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-2\pi, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}, 4]$ e, depois, na opção Zoom Square correspondente:



Exemplo 338 Estudo da função $f(x) = \sin x \cos x$

Estudemos a função $f(x) = \sin x \cos x$, de domínio $[-\pi, \pi]$.

Como $\sin x \cos x = \frac{1}{2} (2 \sin x \cos x) = \frac{1}{2} \sin (2x)$, então $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin (2x) \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [-\pi, \pi]$.

Então, o contradomínio da função f é um subconjunto de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Mas, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ e $f(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$, pelo que o contradomínio da função f é o intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, uma vez que a função considerada é contínua.

Como $f(-x) = \sin(-x) \cos(-x) = -\sin x \cos x, \forall x \in [-\pi, \pi]$, então a função f é ímpar, pelo que a primeira derivada de f é par e a segunda derivada volta a ser ímpar.

Ora, $f(x) = 0 \iff \sin x \cos x = 0 \iff \sin x = 0 \vee \cos x = 0 \iff x = \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Então, os zeros da função são $-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Ora, $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$. Então, $f'(x) = \cos(2x)$ e $f''(x) = -2 \sin(2x)$.

Mas, $f'(x) = 0 \iff \cos(2x) = 0 \iff 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \frac{(2k+1)\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$, embora k não possa assumir qualquer valor inteiro.

Os zeros de $f'(x)$, no intervalo $[-\pi, \pi]$, são $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, donde resulta o seguinte quadro para a monotonia da função $f(x) = \sin x \cos x$:

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+
$f(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow	

A função admite máximos relativos nos pontos $x = -\frac{3\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \pi$; e admite mínimos relativos nos pontos $x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = -\pi$.

Quanto aos zeros da segunda derivada, temos

$$f''(x) = 0 \iff \sin(2x) = 0 \iff x = -\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} \vee x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi$$

Donde resulta o quadro seguinte para o sentido da concavidade do gráfico da função $f(x)$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-2 \sin(2x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$		\smile	P. Inf.	\frown	P. Inf.	\smile	P. Inf.	\frown	

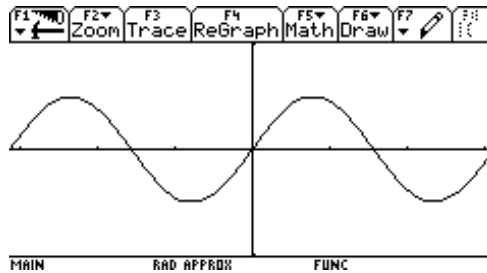
O gráfico da função admite pontos de inflexão para $x = -\frac{\pi}{2}, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. O gráfico da função não admite pontos de inflexão para $x = -\pi$ e para $x = \pi$, porque o domínio considerado é $[-\pi, \pi]$.

No quadro seguinte, apresentamos alguns valores da função:

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Como a função é contínua, temos que o seu contradomínio é $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, uma vez que o mínimo absoluto da função é $-\frac{1}{2}$ e o máximo absoluto é $\frac{1}{2}$.

Apresenta-se, a seguir, a representação gráfica da função:



Se pretendermos estudar a função $g(x) = \sin x \cos x$, de domínio \mathbb{R} , a maior parte do estudo é idêntico, mas há algumas diferenças:

Em primeiro lugar, temos a questão da periodicidade. Ora:

$$g(x + \pi) = \sin(x + \pi) \cos(x + \pi) = -\sin x (-\cos x) = \sin x \cos x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, π é período da função $g(x)$. A partir dos pontos onde a função assume o valor máximo, podemos ver que π é o período positivo mínimo.

Em segundo lugar, temos a questão das assíntotas não verticais que não se põe, quando o domínio é $[-\pi, \pi]$. No caso do domínio ser \mathbb{R} , já se põe esta questão. Neste caso concreto, não há assíntotas não verticais, porque a função é periódica e não é uma função constante. Observe-se que não há assíntotas verticais aos gráficos das funções f e g , porque estas duas funções são contínuas num intervalo fechado e em \mathbb{R} , respectivamente.

Exemplo 339 Estudo da função $f(x) = \cos x + \sin x$

O domínio desta função é \mathbb{R} .

Como $f(-x) = \cos(-x) + \sin(-x) = \cos x - \sin x$, a função não é par nem ímpar.

Como $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que $-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Mas, daqui, não podemos concluir que o contradomínio da função seja $[-2, 2]$, mas, apenas, que o contradomínio de f é um subconjunto do intervalo $[-2, 2]$.

Ora,

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

E, agora, temos $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ e $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Como a função é contínua em \mathbb{R} , então o contradomínio de f é $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, concluindo-se, também, que o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

Como $\cos x$ e $\sin x$ são funções periódicas de período positivo mínimo 2π , então $\cos x + \sin x$, também é uma função periódica. Resolvendo a equação $f(x) = \sqrt{2}$, vemos que o período positivo mínimo da função é 2π :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \iff \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \iff \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Como a função f é periódica e limitada e não é constante, então o gráfico de f não admite assíntotas não verticais.

Zeros da função:

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x = 0 &\iff \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \iff \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ &\iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

A derivada de f é dada por $f'(x) = -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

$$f'(x) = 0 \iff -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \iff \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Se, apenas, considerarmos o intervalo $[-\pi, \pi]$, temos:

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		π
$-\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	\searrow		mín	\nearrow	Máx	\searrow	

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \\ f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(-\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos(-\pi) = -\sqrt{2} \end{cases}$$

A segunda derivada de f é dada por $f''(x) = -\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Então:

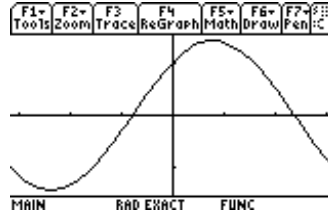
$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff -\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ &\iff x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Estudo da concavidade do gráfico da função:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$-\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	\smile		P. Inf.	\frown	P. Inf.	\smile	

$$\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} = 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

A representação gráfica da função $f(x) = \cos x + \sin x$, na janela de visualização $[-\pi, \pi] \times [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, é a seguinte:



Exemplo 340 Estudo da função $f(x) = -\sqrt{3} \cos x + \sin x$

Começemos por observar que

$$-\sqrt{3} \cos x + \sin x = -2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = -2 \left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} \right) = -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

Então, $-2 \leq -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mas,

$$-\sqrt{3} \cos x + \sin x = -2 \iff -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -2 \iff \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 &\iff -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \iff \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \\ &\iff x = -\frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = -\frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

É claro que $f(x + 2\pi) = -2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = -2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Dos resultados anteriores, concluímos que f é uma função periódica, sendo 2π o período positivo mínimo. Além disso, temos que o contradomínio de f é $[-2, 2]$.

Zeros da função:

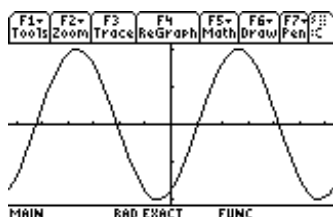
$$-\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0 \iff \sin x = \sqrt{3} \cos x \iff \tan x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Derivadas da função:

$$f'(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right); f''(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Então, os zeros da segunda derivada de f são os mesmos da função f . Como há mudança de sinal da segunda derivada, os zeros da função são os pontos de inflexão do gráfico da função.

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-2\pi, 2\pi] \times \left[-\frac{21}{10}, \frac{21}{10}\right]$ é a seguinte:



Exemplo 341 Estudo da função $f(x) = \frac{1}{7+2\cos x}$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que $5 \leq 7 + 2 \cos x \leq 9, \forall x \in \mathbb{R}$.

Logo, $\frac{1}{9} \geq \frac{1}{7+2\cos x} \geq \frac{1}{9}, \forall x \in \mathbb{R}$, donde se conclui que o domínio da função é \mathbb{R} , sendo o contradomínio um subconjunto do intervalo $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{5}\right]$.

Mas, como f é uma função contínua em \mathbb{R} e $f(0) = \frac{1}{9}$ e $f(\pi) = \frac{1}{5}$, então o contradomínio de f é $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{5}\right]$.

Como $f(-x) = \frac{1}{7+2\cos(-x)} = \frac{1}{7+2\cos x} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, então f é uma função par.

De $f(x + 2\pi) = \frac{1}{7+2\cos(x+2\pi)} = \frac{1}{7+2\cos x} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, conclui-se que é uma função periódica.

Resolvendo a equação $f(x) = \frac{1}{9}$, vem $7 + 2 \cos x = 9$, donde se conclui que $\cos x = 1$, pelo que $x = 2k\pi$, com $(k \in \mathbb{Z})$.

Logo, o período positivo mínimo da função é 2π .

Como f é contínua em \mathbb{R} , o gráfico de f não admite assíntotas verticais e, como f é periódica e não constante, não há assíntotas não verticais.

Primeira derivada:

$$f'(x) = \frac{0 - 2(-\sin x)}{(7 + 2 \cos x)^2} = \frac{2 \sin x}{(7 + 2 \cos x)^2}$$

Estudo da monotonia da função f , no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$2 \sin x$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$(7 + 2 \cos x)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow	Máx	\searrow	

Segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \cos x (7 + 2 \cos x)^2 - 2 \sin x \times 2 (7 + 2 \cos x) (-2 \sin x)}{(7 + 2 \cos x)^4} \\ &= \frac{2 \cos x (7 + 2 \cos x) - 2 \sin x \times 2 (-2 \sin x)}{(7 + 2 \cos x)^3} = \frac{14 \cos x + 4 \cos^2 x + 8 \sin^2 x}{(7 + 2 \cos x)^3} \\ &= \frac{14 \cos x + 4 \cos^2 x + 8 - 8 \cos^2 x}{(7 + 2 \cos x)^3} = \frac{8 + 14 \cos x - 4 \cos^2 x}{(7 + 2 \cos x)^3} \end{aligned}$$

Consideremos a função quadrática $g(t) = 8 + 14t - 4t^2$. Calculemos os zeros desta função:

$$8 + 14t - 4t^2 = 0 \iff 4t^2 - 14t - 8 = 0 \iff t = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} \iff t = \frac{7 \pm 9}{4} \iff t = -\frac{1}{2} \vee t = 4$$

Então, $g(t) = -4(t + \frac{1}{2})(t - 4) = (-2 - 4t)(t - 4) = (2 + 4t)(4 - t)$.

Logo,

$$f''(x) = \frac{(2 + 4 \cos x)(4 - \cos x)}{(7 + 2 \cos x)^3}$$

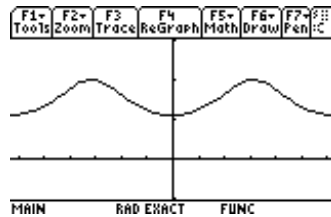
Zeros da segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \iff (2 + 4 \cos x)(4 - \cos x) = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Estudo da concavidade do gráfico da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{2}{3}\pi$		$\frac{2}{3}\pi$		π
$2 + 4 \cos x$	-	-	0	+	0	-	-
$4 - \cos x$	+	+	+	+	+	+	+
$(7 + 2 \cos x)^3$	+	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	⌒		P. Inf.	⌓		P. Inf.	⌒

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-2\pi, 2\pi] \times [-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}]$ é a seguinte:



Exemplo 342 Estudo da função $f(x) = \frac{1}{7+2\sin x}$

O domínio da função é \mathbb{R} , porque $5 \leq 7 + 2 \sin x \leq 9, \forall x \in \mathbb{R}$, razão pela qual o denominador não se anula.

Pela mesma razão, o contradomínio de f é um subconjunto do intervalo $[\frac{1}{9}, \frac{1}{5}]$.

E, pelas mesmas razões do exemplo anterior, temos que o contradomínio de f é o intervalo $[\frac{1}{9}, \frac{1}{5}]$. Como $f(-x) = \frac{1}{7+2\sin(-x)} = \frac{1}{7-2\sin x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que a função não é par nem ímpar.

Como a função $\sin x$ é uma função periódica de período positivo mínimo 2π , então a função f admite o mesmo período positivo mínimo (2π).

Pelas razões adiantadas no exemplo anterior, o gráfico da função não admite assíntotas.

A derivada de f é dada por $f'(x) = \frac{-2\cos x}{(7+2\sin x)^2}$.

Estudo da monotonia da função f , no intervalo $[-\frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi]$:

x	$-\frac{3}{2}\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$
$-2\cos x$	0	+	0	-	0	+	0
$(7+2\sin x)^2$	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$		\nearrow		Máx	\searrow	mín	\nearrow

Observe-se que $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{9}$; $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{5}$; $f(-\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{9}$; $f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{5}$.

A segunda derivada de f é dada por:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{2\sin x (7+2\sin x)^2 + 2\cos x \times 2(7+2\sin x) 2\cos x}{(7+2\sin x)^4} \\
 &= \frac{2\sin x (7+2\sin x) + 2\cos x \times 4\cos x}{(7+2\sin x)^3} = \frac{14\sin x + 4\sin^2 x + 8\cos^2 x}{(7+2\sin x)^3} \\
 &= \frac{14\sin x + 4\sin^2 x + 8 - 8\sin^2 x}{(7+2\sin x)^3} = \frac{-4\sin^2 x + 14\sin x + 8}{(7+2\sin x)^3} = \frac{2(1+2\sin x)(4-\sin x)}{(7+2\sin x)^3}
 \end{aligned}$$

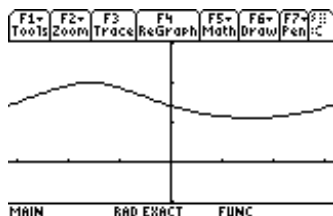
Ora, $f'(x) = 0 \iff 1+2\sin x = 0 \iff \sin x = -\frac{1}{2} \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Estudo da concavidade do gráfico da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
$1+2\sin x$	+	+	0	-	0	+	+
$8-2\sin x$	+	+	+	+	+	+	+
$(7+2\sin x)^2$	+	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$		\cup		P. Infl.	\cap	P. Infl.	\cup

Repare-se que $f(-\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{6}$ e $f(-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{6}$.

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-\pi, \pi] \times [-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}]$ é a seguinte:



Exemplo 343 Estudo da função $f(x) = \ln(4 + 2\cos x)$

O domínio da função é \mathbb{R} , porque $2 \leq 4 + 2\cos x \leq 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

Então, $\ln 2 \leq \ln(4 + 2\cos x) \leq \ln 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $f(0) = \ln 6$ e $f(\pi) = \ln 2$ e f é contínua em \mathbb{R} , o contradomínio de f é o intervalo $[\ln 2, \ln 6]$.

Por outro lado, temos $f(-x) = \ln(4 + 2\cos(-x)) = \ln(4 + 2\cos x), \forall x \in \mathbb{R}$. Então, a função é par.

Como a função $\cos x$ é periódica de período positivo mínimo 2π , então a função admite o mesmo período positivo mínimo.

Pelas razões adiantadas nos exemplos anteriores, o gráfico da função não admite assíntotas.

A derivada de f é dada por

$$f'(x) = \frac{-2\sin x}{4 + 2\cos x} = \frac{-\sin x}{2 + \cos x}$$

Estudo da monotonia da função f , no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$-\sin x$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$2 + \cos x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$		\searrow	mín	\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow	

A segunda derivada de f é dada por

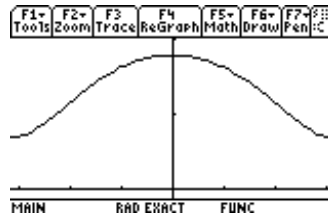
$$f''(x) = \frac{-\cos x(2 + \cos x) + \sin x(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{-2\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{-(1 + 2\cos x)}{(2 + \cos x)^2}$$

Estudo da concavidade do gráfico da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$-(1 + 2\cos x)$	+	+	0	-	0	+	+
$(2 + \cos x)^2$	+	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$		\smile	P. Infl.	\frown	P. Infl.	\smile	

Como $f(-\frac{2\pi}{3}) = f(\frac{2\pi}{3}) = \ln 6 = 1.791\,759\,469$, temos que os pontos de inflexão são $(-\frac{2\pi}{3}, \ln 3)$ e $(\frac{2\pi}{3}, \ln 3)$.

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-\pi, \pi] \times [-\frac{1}{10}, 2]$ é a seguinte:



Exemplo 344 Estudo da função $f(x) = \ln(2 - \cos x)$

O domínio da função é \mathbb{R} , porque $1 \leq 2 - \cos x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Então, $0 \leq \ln(2 - \cos x) \leq \ln 3, \forall x \in \mathbb{R}$

Pelas mesmas razões dos exemplos anteriores, temos que o contradomínio de f é o intervalo $[0, \ln 3]$.

Ora, $f(-x) = \ln(2 - \cos(-x)) = \ln(2 - \cos x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Logo, a função é par.

Como a função $\cos x$ é uma função periódica de período positivo mínimo 2π , então a função f admite o mesmo período positivo mínimo.

Pelas razões adiantadas nos exemplos anteriores, o gráfico da função não admite assíntotas.

A derivada de f é dada por

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

Estudo da monotonia da função f , no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$:

x	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$\sin x$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$2 - \cos x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	\nearrow		Máx	\searrow	mín	\nearrow	Máx	\searrow	

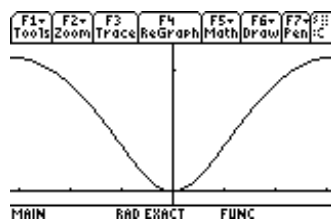
A segunda derivada de f é dada por

$$f''(x) = \frac{\cos x (2 - \cos x) - \sin x (\sin x)}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2 \cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{-1 + 2 \cos x}{(2 + \cos x)^2}$$

Estudo da concavidade do gráfico da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$-1 + 2 \cos x$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$(2 + \cos x)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	\cap		P. Infl.	\cup	P. Infl.	\cap	

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-\pi, \pi] \times [-\frac{1}{10}, \frac{6}{5}]$, é a seguinte:

**Exemplo 345** Estudo da função $f(x) = \ln(2 + \sin x)$

O domínio da função é \mathbb{R} , porque $1 \leq 2 + \sin x \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Então, $0 \leq \ln(2 + \sin x) \leq \ln 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pelas mesmas razões dos exemplos anteriores, temos que o contradomínio de f é o intervalo $[0, \ln 3]$.

$$f(-x) = \ln(2 + \sin(-x)) = \ln(2 - \sin x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, a função não é par nem ímpar. Como a função $\sin x$ é uma função periódica de período positivo mínimo 2π , então a função f admite o mesmo período positivo mínimo. Pelas razões adiantadas nos exemplos anteriores, o gráfico da função não admite assíntotas.

A primeira derivada de f é dada por

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$$

Estudo da monotonia da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$	-	-	0	+	0	-	-
$2 + \cos x$	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$		\searrow	mín	\nearrow	Máx	\nearrow	

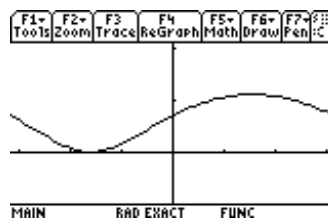
A segunda derivada de f é dada por

$$f''(x) = \frac{-\sin x (2 + \sin x) - \cos x \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-2 \sin x - 1}{(2 + \sin x)^2}$$

Estudo da concavidade do gráfico da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		π
$-1 - 2 \sin x$	+	+	0	-	0	+	+
$(2 + \sin x)^2$	+	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$		\smile	P. Infl.	\frown	P. Infl.	\smile	

A representação gráfica da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$, na opção Zoom Square, é a seguinte:



Exemplo 346 Estudo da função $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Consideremos a função definida por $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \Longleftarrow x \neq 0 \\ 0 & \Longleftarrow x = 0 \end{cases}$

O domínio de f é \mathbb{R} , tendo-se que $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$, porque x tende para zero e a função $\sin \frac{1}{x}$ é limitada. Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, a função é contínua no ponto $x = 0$. É claro que f é contínua em qualquer ponto diferente de zero, pelo que f é contínua em \mathbb{R} . Então, o gráfico de f não admite assíntotas verticais.

Se $x \neq 0$, então $f(-x) = -x \sin(-\frac{1}{x}) = x \sin \frac{1}{x}$, pelo que f é uma função par.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = 1$, então a recta de equação $y = 1$ é uma assíntota (horizontal) ao gráfico de f .

Suponhamos que $x > 0$. Então, $-x \leq f(x) \leq x$, pelo que em \mathbb{R}^+ , o gráfico da função f fica compreendido entre as rectas de equação $y = x$ e $y = -x$.

Suponhamos, agora, que $x \neq 0$ e que pretendemos saber em que pontos o gráfico de f intersecta a recta $y = x$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \sin \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow \sin \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2}{(4k+1)\pi}, (k \in \mathbb{Z})$$

O resultado anterior significa que o gráfico da função f intersecta a recta de equação $y = x$ em infinitos pontos.

As abcissas desses pontos estão compreendidas entre $-\frac{2}{3\pi}$ e $\frac{2}{\pi}$.

Suponhamos que $x \neq 0$ e que pretendemos saber em que pontos o gráfico de f intersecta a recta $y = -x$:

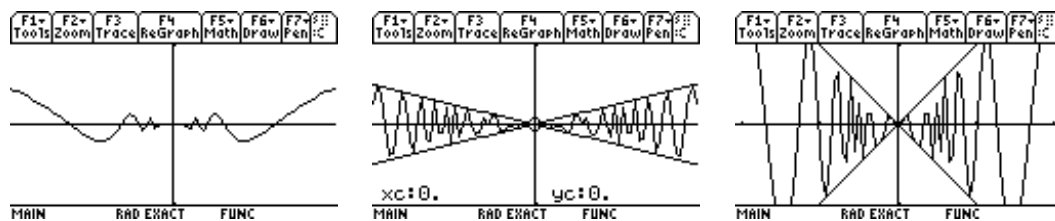
$$\begin{aligned} f(x) = -x &\Leftrightarrow x \sin \frac{1}{x} = -x \Leftrightarrow \sin \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2}{(4k-1)\pi}, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

O resultado anterior significa que o gráfico da função f intersecta a recta de equação $y = -x$ em infinitos pontos, cujas abcissas estão compreendidas entre $-\frac{2}{\pi}$ e $\frac{2}{3\pi}$.

Zeros da função:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee \sin \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{1}{x} = k\pi, (k \in \mathbb{Z} \wedge k \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{k\pi}, (k \in \mathbb{Z} \wedge k \neq 0) \end{aligned}$$

Seguidamente, temos a representação gráfica da função f , com várias janelas de visualização:



1ª e 2ª derivadas:

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(-\sin \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x}$$

A equação $f'(x) = 0$ só pode ser resolvida numericamente (obtendo-se valores aproximados das soluções), enquanto que para a equação $f''(x) = 0$, podemos obter os valores exactos das soluções:

$$f''(x) = 0 \iff -\frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} = 0 \iff \sin \frac{1}{x} = 0 \iff x = \frac{1}{k\pi}, (k \in \mathbb{Z} \wedge k \neq 0)$$

Exemplo 347 Estudo da função $f(x) = x \ln x$

O domínio da função é \mathbb{R}^+ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln t}{t} \right) = 0$$

Dos resultados anteriores, concluímos que não há assíntotas ao gráfico da função.

$$f'(x) = x \left(\frac{1}{x} \right) + \ln x = 1 + \ln x$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

Estudo da monotonia da função f :

$$f'(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e}$$

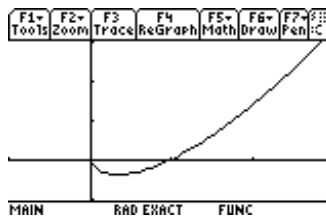
$$f'(x) > 0 \iff 1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \frac{1}{e}$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\searrow	mín	\nearrow

Como $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, o mínimo da função é $-\frac{1}{e}$. Como a função é contínua e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, o contradomínio de f é $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

Como $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, temos que o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima.

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-1, 3] \times [-1, 3]$ é a seguinte:



Exemplo 348 Estudo da função $f(x) = 2 \sin^2 x + 4 \sin x$

O domínio da função f é \mathbb{R} .

Como $f(-x) = 2\sin^2(-x) + 4\sin(-x)$, a função não é par nem ímpar.

Zeros da função:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2\sin^2 x + 4\sin x = 0 \iff 2\sin x (\sin x + 2) = 0 \\ &\iff \sin x = 0 \iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Da expressão dos zeros da função, podemos concluir que o período positivo mínimo de f é um múltiplo de π , pelo que será π ou 2π , uma vez que $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Por observação atenta da expressão $2\sin^2 x + 4\sin x$, concluimos que o valor máximo que a função pode assumir é 6. Resolva-se a equação $f(x) = 6$:

$$\begin{aligned} f(x) = 6 &\iff 2\sin^2 x + 4\sin x = 6 \iff \sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0 \\ &\iff \sin x = 1 \vee \sin x = -3 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Então, o período positivo mínimo da função é 2π .

Como a função é contínua em \mathbb{R} , periódica, limitada e não constante, então o gráfico da função não admite assíntotas.

$$f'(x) = 4\sin x \cos x + 4\cos x = 4\cos x (1 + \sin x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 4\cos x (1 + \sin x) = 0 \iff \cos x = 0 \vee \sin x = -1 \\ &\iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Estudo da monotonia da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$4\cos x$	-	-	0	+	0	-	-
$1 + \sin x$	+	+	0	+	+	+	+
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$		\searrow	mín	\nearrow	Máx		\searrow

$$f(-\pi) = 0 = f(\pi); \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4\sin x (1 + \sin x) + 4\cos x \cos x = -4\sin x - 4\sin^2 x + 4\cos^2 x \\ &= -4\sin x - 4\sin^2 x + 4(1 - \sin^2 x) = -4\sin x - 4\sin^2 x + 4 - 4\sin^2 x \\ &= -8\sin^2 x - 4\sin x + 4 = -4(2\sin^2 x + \sin x - 1) = -4(1 + \sin x)(2\sin x - 1) \end{aligned}$$

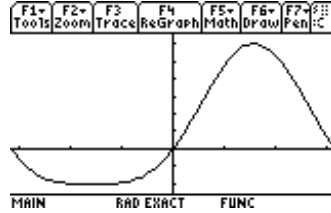
Nota: O último passo deve-se ao facto da equação $2y^2 + y - 1 = 0$ admitir as raízes -1 e $\frac{1}{2}$, pelo que temos $2y^2 + y - 1 = 2(y + 1)(y - \frac{1}{2})$, ou seja, $2y^2 + y - 1 = (y + 1)(2y - 1)$.

Estudo da concavidade do gráfico da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
-4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$1 + \sin x$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2 \sin x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	\cup				P. Infl.	\cap	P. Infl.	\cup	

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2} = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-\pi, \pi] \times \left[-\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right]$, é a seguinte:



Exemplo 349 Estudo da função $f(x) = \sin(2x)\cos x - 5\sin x$

O domínio da função é \mathbb{R} .

$$f(-x) = \sin(-2x)\cos(-x) - 5\sin(-x) = -\sin(2x)\cos x + 5\sin x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Então, a função é ímpar.

Zeros da função:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \sin(2x)\cos x - 5\sin x = 0 \iff 2\sin x \cos^2 x - 5\sin x = 0 \\ &\iff \sin x (2\cos^2 x - 5) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Da expressão anterior, conclui-se que o período positivo mínimo da função é um múltiplo de π .

$$f(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi)\cos(x + \pi) - 5\sin(x + \pi) = \sin(2x)(-\cos x) + 5\sin x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, π não é período da função.

É claro que $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pelo que 2π é o período positivo mínimo da função f .

A função é contínua em \mathbb{R} , pelo que o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

A função é limitada em \mathbb{R} , pelo que o seu gráfico não admite assíntotas oblíquas.

$$9\sin x (1 - 2(1 - \sin^2 x)) = 9\sin x (-1 + 2\sin^2 x)$$

$$9\sin x \cos(2x) = 18\sin x \cos^2 x - 9\sin x$$

A função é periódica e não constante, pelo que o seu gráfico não admite assíntotas horizontais.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(2x)\cos x - 5\sin x = 2\sin x \cos^2 x - 5\sin x = \sin x (2\cos^2 x - 5) \\ &= \sin x (2 - 2\sin^2 x - 5) = -2\sin^3 x - 3\sin x \end{aligned}$$

$$f'(x) = -6 \sin^2 x \cos x - 3 \cos x = -3 \cos x (1 + 2 \sin^2 x) = -3 \cos x (1 + 2 - 2 \cos^2 x) = 6 \cos^3 x - 9 \cos x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -18 \cos^2 x \sin x + 9 \sin x = 9 \sin x (1 - 2 \cos^2 x) = 9 \sin x (1 - \cos^2 x - \cos^2 x) \\ &= -9 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = -9 \sin x \cos(2x) \end{aligned}$$

Estudemos a monotonia da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$-3 \cos x$	+	+	0	-	0	+	+
$1 + 2 \sin^2 x$	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	\nearrow		Máx	\searrow	mín	\nearrow	

$$f(-\pi) = 0 = f(\pi); \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$$

O contradomínio da função é $[-5, 5]$.

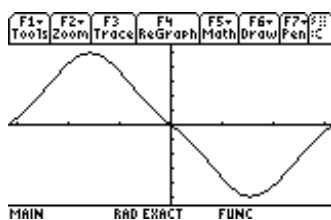
$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff -9 \sin x \cos(2x) = 0 \iff \sin x = 0 \vee \cos(2x) = 0 \\ &\iff x = k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \iff x = k\pi \vee x = \frac{(2k+1)\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Estudo do sentido da concavidade do gráfico de f :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$-9 \sin x$	0	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	0
$\cos(2x)$	+	+	0	-	0	+	+	+	0	-	0	+	+
$f''(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	\smile		PI	\frown	PI	\smile	PI	\frown	PI	\smile	PI	\frown	

$$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}; f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}; f(0) = 0; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}; f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$$

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-\pi, \pi] \times [-5, 5]$, é a seguinte:



Exemplo 350 Estudo da função $f(x) = \sin x \cos(2x) - 4 \sin x$

O domínio da função é \mathbb{R} . A função é ímpar, porque

$$f(-x) = \sin(-x) \cos(-2x) - 4 \sin(-x) = -\sin x \cos 2x + 4 \sin x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Zeros da função:

$$f(x) = 0 \iff \sin x \cos(2x) - 4 \sin x = 0 \iff \sin x = 0 \vee \cos(2x) = 4 \iff x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \sin(x + \pi) \cos(2(x + \pi)) - 4 \sin(x + \pi) \\ &= -\sin x \cos(2x + 2\pi) + 4 \sin x = -\sin x \cos(2x) + 4 \sin x = -f(x) \end{aligned}$$

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) \cos(2x + 4\pi) - 4 \sin(x + 2\pi) = \sin x \cos(2x) - 4 \sin x = f(x)$$

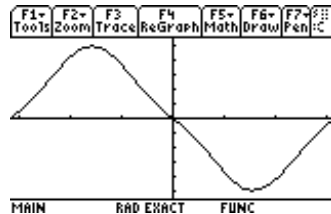
Então, o período positivo mínimo da função é 2π .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \cos(2x) - 2 \sin x \sin(2x) - 4 \cos x = \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) - 4 \sin^2 x \cos x - 4 \cos x \\ &= \cos x (2 \cos^2 x - 1) - 4 (1 - \cos^2 x) \cos x - 4 \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 4 \cos x + 4 \cos^3 x - 4 \cos x = 6 \cos^3 x - 9 \cos x \end{aligned}$$

E, como vimos, no exercício anterior, $f''(x) = -9 \sin x \cos(2x)$.

Como a primeira e a segunda derivadas são as mesmas do exemplo anterior, então a monotonia e o sentido da concavidade são os mesmos. A única coisa que pode mudar é a imagem de cada ponto. O gráfico desta função é o gráfico anterior, eventualmente, deslocado na vertical. Prestando atenção ao que já resolvemos, verificamos que os zeros das duas funções são os mesmos, pelo que as duas funções são iguais, embora, à primeira vista, não pareçam.

A representação gráfica da função f , na janela de visualização $[-\pi, \pi] \times [-5, 5]$, é a seguinte:



Exemplo 351 Estudo da função $f(x) = \sin\left(\frac{x^2 \pi}{6(x^2 + 1)}\right)$

O domínio da função é \mathbb{R} , tendo-se que $-1 \leq \sin\left(\frac{x^2 \pi}{6(x^2 + 1)}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Então, o contradomínio de f é um subconjunto do intervalo $[-1, 1]$.

Analisando a expressão $\frac{x^2}{x^2+1}$, vemos que $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1, \forall x \in \mathbb{R}$, verificando-se que $\frac{x^2}{x^2+1}$ assume todos os valores do intervalo $[0, 1[$, isto é, o contradomínio da função $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ é $[0, 1[$. Então, $\frac{x^2\pi}{6(x^2+1)}$ assume todos os valores do intervalo $[0, \frac{\pi}{6}[$ e só assume valores deste intervalo.

Como a função $y = \sin x$ é estritamente crescente e contínua em $[0, \frac{\pi}{6}[$, então o contradomínio de f é o intervalo $[\sin 0, \sin \frac{\pi}{6}[$, ou seja, o intervalo $[0, \frac{1}{2}[$.

É claro que a função f é par.

Zeros da função f :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \sin\left(\frac{x^2\pi}{6(x^2+1)}\right) = 0 \iff \frac{x^2\pi}{6(x^2+1)} = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\iff \frac{x^2}{6(x^2+1)} = k, (k \in \mathbb{Z}) \iff \frac{x^2}{6(x^2+1)} = 0 \iff x = 0 \end{aligned}$$

Observe-se que $0 \leq \frac{x^2}{6(x^2+1)} < \frac{1}{6}$, tendo-se que o único valor inteiro entre 0 e $\frac{1}{6}$ é 0.

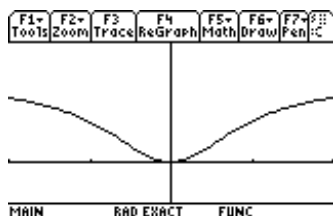
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{6} \times \frac{2x(x^2+1) - x^2 \times 2x}{(x^2+1)^2} \cos \frac{x^2\pi}{6(x^2+1)} \\ &= \frac{\pi}{6} \times \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} \cos \frac{x^2\pi}{6(x^2+1)} = \frac{\pi x}{3(x^2+1)^2} \cos \frac{x^2\pi}{6(x^2+1)} \end{aligned}$$

Então, o sinal de $f'(x)$ é o sinal de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	mín	\nearrow

Devido à sua complexidade, não calculamos a segunda derivada da função.

Segue-se a representação gráfica da função na janela de visualização $[-2, 2] \times [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$:



Exemplo 352 Estudo da função $f(x) = 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1$, sem utilização de derivadas

O domínio da função é \mathbb{R} .

Para determinar o contradomínio da função, vamos considerar a função $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima e de vértice $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$.

O contradomínio de g é $[-\frac{1}{8}, +\infty[$, sendo que o contradomínio da restrição de g ao intervalo $[-1, 1]$ é $[-\frac{1}{8}, 6]$, uma vez que $g(-1) = 6$, $g(1) = 0$ e $g(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{8}$.

Como $\sin x$ pode assumir qualquer valor do intervalo $[-1, 1]$, então o contradomínio de f é $[-\frac{1}{8}, 6]$.

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= 2\sin^2(x + 2\pi) - 3\sin(x + 2\pi) + 1 \\ &= 2\sin^2 x - 3\sin x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Então, f é uma função periódica, cujo período positivo mínimo é um submúltiplo de 2π .
Zeros de f :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \iff \sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \iff \sin x = 1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Analisando a expressão que dá os zeros de f , concluímos que o período positivo mínimo da função é 2π .

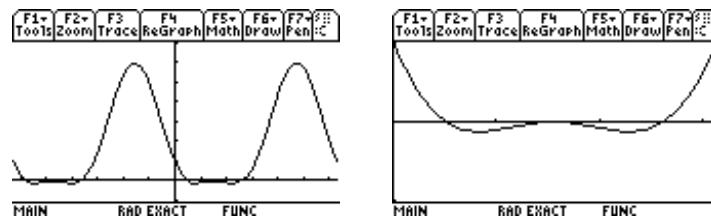
Maximizantes da função f :

$$\begin{aligned} f(x) = 6 &\iff 2\sin^2 x - 3\sin x - 5 = 0 \iff \sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} \\ &\iff \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{5}{2} \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Minimizantes da função f :

$$\begin{aligned} f(x) = -\frac{1}{8} &\iff 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = -\frac{1}{8} \iff 16\sin^2 x - 24\sin x + 9 = 0 \\ &\iff (4\sin x - 3)^2 = 0 \iff \sin x = \frac{3}{4} \\ &\iff x = \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi \vee x = \pi - \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Recorrendo à calculadora, obtemos a representação gráfica da função:



No primeiro caso, a janela de visualização é $[-2\pi, 2\pi] \times [-1, 7]$, enquanto que no segundo caso é $[0, \pi] \times [-1, 1]$.

Exemplo 353 Estudo da função $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$, com utilização de derivadas

O domínio da função é \mathbb{R} .

$$f'(x) = 4 \sin x \cos x - 3 \cos x = (3 - 4 \sin x) \cos x$$

Estudemos a monotonia da função f , no intervalo $[-\pi, \pi]$:

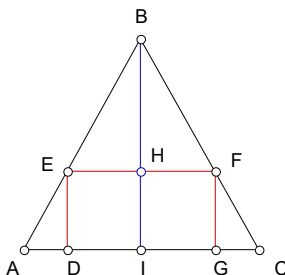
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\arcsin \frac{3}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\pi - \arcsin \frac{3}{4}$		π
$\cos x$	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	-
$4 \sin x - 3$	-	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	0	-	0	+	+
$f(x)$		\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow	Máx	\searrow	mín	\nearrow	

Não apresentamos o estudo do sentido da concavidade, devido à relativa complexidade dos zeros da segunda derivada, embora o leitor mais interessado, possa fazer esse estudo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (4 \sin x \cos x - 3 \cos x)' = (2 \sin(2x) - 3 \cos x)' = 4 \cos(2x) + 3 \sin x \\ &= 4(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3 \sin x = 4(1 - 2 \sin^2 x) + 3 \sin x = -8 \sin^2 x + 3 \sin x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 8 \sin^2 x - 3 \sin x - 4 = 0 \iff \sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 128}}{16} \\ &\iff \sin x = \frac{3 - \sqrt{137}}{16} \vee \sin x = \frac{3 + \sqrt{137}}{16} \end{aligned}$$

Problema 354 Determine a área mínima do triângulo $[ABC]$ da figura seguinte, supondo que $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{EF} = 20$ cm, $\overline{DE} = 10$ cm, que $[DEFG]$ é um rectângulo, que os pontos A, D, I, G e C são colineares, o mesmo acontecendo com B, H e I , e que a recta BI é perpendicular ao lado $[AC]$.



Resolução

Seja x a amplitude do ângulo A . Suponhamos que $\overline{AD} = a$ cm. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, então $\overline{AI} = \overline{IC}$, pelo que a área do triângulo $[ABC]$ é o dobro da área do triângulo $[ABI]$.

Além disso, $\tan x = \frac{\overline{BI}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{10}{a}$. Logo, $a = \frac{10}{\tan x}$ e $\overline{BI} = \overline{AI} \tan x = (a + 10) \tan x$.

Então, a área do triângulo $[ABC]$, em cm^2 é $(a + 10)(a + 10) \tan x$, ou seja, $(a + 10)^2 \tan x$.

Substituindo a por $\frac{10}{\tan x}$, obtemos $(\frac{10}{\tan x} + 10)^2 \tan x$ para a área do triângulo $[ABC]$.

Consideremos a seguinte função: $A(x) = \left(\frac{10}{\tan x} + 10\right)^2 \tan x = 100 \left(1 + \frac{1}{\tan x}\right)^2 \tan x$
Então,

$$A(x) = 100 \left(1 + \frac{2}{\tan x} + \frac{1}{\tan^2 x}\right) \tan x = 100 \left(\tan x + 2 + \frac{1}{\tan x}\right) = 100 \left(\frac{\sin x}{\cos x} + 2 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} A'(x) &= 100 \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = 100 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= \frac{-100(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x \sin^2 x} = \frac{-100 \cos(2x)}{\cos^2 x \sin^2 x} \end{aligned}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos que $0 < 2x < \pi$. Se $0 < x < \frac{\pi}{4}$, então $\cos(2x) > 0$; se $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, então $\cos(2x) < 0$; se $x = \frac{\pi}{4}$, então $\cos(2x) = 0$.

O sinal da derivada e a monotonia da função estão indicados no seguinte quadro:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{-100}{\cos^2 x \sin^2 x}$		—	—	—	
$\cos(2x)$		+	0	—	
$A'(x)$		—	0	+	
$A(x)$		\searrow	mín	\nearrow	

Ora, $A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 400$, pelo que o valor mínimo da área do triângulo é 400 cm^2 que corresponde ao caso em que o triângulo é rectângulo em B .

Este problema pode ser resolvido, calculando a área do triângulo, em função de a , em vez de ser calculada, em função de x :

Ora, $f(a) = 10a + 200 + \frac{1000}{a}$

$$(a + 10)^2 \tan x = \frac{10(a + 10)^2}{a} = 10a + 200 + \frac{1000}{a}$$

Obtivemos a função $f(a) = 10a + 200 + \frac{1000}{a}$, cuja derivada é a função $f'(a) = 10 - \frac{1000}{a^2}$. Então,

$$f'(a) = 10 \left(1 - \frac{100}{a^2}\right) = 10 \left(\frac{a^2 - 100}{a^2}\right) = \frac{10(a - 10)(a + 10)}{a^2}$$

A partir da função $f'(a)$, podemos estudar a monotonia da função $f(a)$, com $a > 0$:

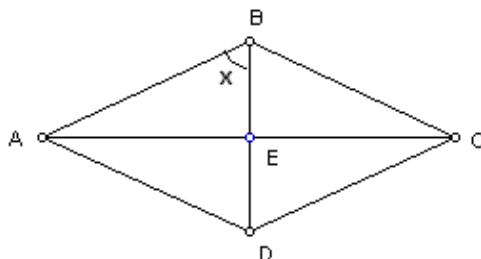
a	0		10		$+\infty$
$\frac{10}{a^2}$		+	+	+	
$a + 10$		+	+	+	
$a - 10$		—	0	+	
$f'(a)$		—	0	+	
$f(a)$		\searrow	mín	\nearrow	

Então, $f(10) = \frac{10(10 + 10)^2}{10} = 400$. Logo, o mínimo da função é 400.

Exercício 355 Determine a área máxima dum losango com 10 cm de lado.

Resolução

Consideremos o losango seguinte:



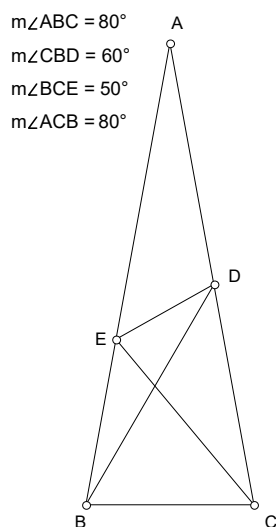
De acordo com a figura anterior, temos $\begin{cases} \sin x = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \\ \cos x = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \end{cases}$. Então, $\begin{cases} \overline{AE} = \overline{AB} \sin x \\ \overline{BE} = \overline{AB} \cos x \end{cases}$

Logo, a área do losango é $4 \times \frac{1}{2} \times \overline{AB} \sin x \times \overline{AB} \cos x$, ou seja, $\overline{AB}^2 \times 2 \sin x \cos x$, expressão equivalente a $\overline{AB}^2 \times \sin(2x)$.

Logo, em cm^2 , temos que a área do losango é dada pela função $f(x) = 100 \sin(2x)$. Esta função assume o valor máximo 100, correspondente a $2x = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $x = \frac{\pi}{4}$.

A área máxima do losango é 100 cm^2 e corresponde ao caso em que dois lados consecutivos são perpendiculares (caso em que o losango é um quadrado).

Exercício 356 Determine a amplitude do ângulo EDB, de acordo com a figura seguinte:



Resolução

Começemos por referir que os triângulos $[ABC]$, $[ABD]$ e $[BCE]$ são isósceles, por terem dois ângulos internos iguais.

Representamos a amplitude do ângulo EDB por α , \overline{BD} por x , e $\overline{BE} = \overline{BC}$ por z .
Aplicamos a lei dos senos aos triângulos $[BCD]$ e $[BDE]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin 40^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 60^\circ}{\overline{CD}} = \frac{\sin 80^\circ}{\overline{BD}} \\ \frac{\sin \alpha}{\overline{BE}} = \frac{\sin 20^\circ}{\overline{DE}} = \frac{\sin(\alpha+20^\circ)}{\overline{BD}} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin 40^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 80^\circ}{\overline{BD}} \\ \frac{\sin \alpha}{\overline{BE}} = \frac{\sin(\alpha+20^\circ)}{\overline{BD}} \end{array} \right.$$

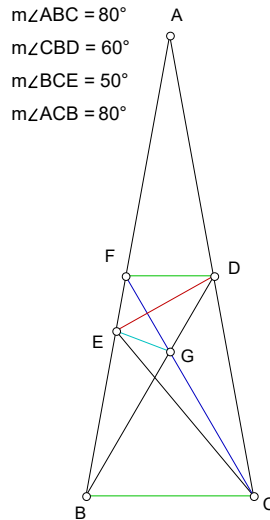
Mas,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin 40^\circ}{\overline{BC}} = \frac{\sin 80^\circ}{\overline{BD}} \\ \frac{\sin \alpha}{\overline{BE}} = \frac{\sin(\alpha+20^\circ)}{\overline{BD}} \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin 40^\circ}{z} = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{x} \\ \frac{\sin \alpha}{z} = \frac{\sin(\alpha+20^\circ)}{x} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2z \cos 40^\circ \\ \frac{\sin \alpha}{z} = \frac{\sin(\alpha+20^\circ)}{2z \cos 40^\circ} \end{array} \right. \\ &\Rightarrow 2 \sin \alpha \cos 40^\circ = \sin(\alpha + 20^\circ) \\ &\Rightarrow \sin(\alpha + 40^\circ) + \sin(\alpha - 40^\circ) - \sin(\alpha + 20^\circ) = 0 \\ &\Rightarrow \sin(\alpha + 40^\circ) + 2 \sin \frac{\alpha - 40^\circ - \alpha - 20^\circ}{2} \cos \frac{\alpha - 40^\circ + \alpha + 20^\circ}{2} = 0 \\ &\Rightarrow \sin(\alpha + 40^\circ) - 2 \sin 30^\circ \cos(\alpha - 10^\circ) = 0 \\ &\Rightarrow \sin(\alpha + 40^\circ) - \cos(\alpha - 10^\circ) = 0 \\ &\Rightarrow \sin(\alpha + 40^\circ) = \sin(100^\circ - \alpha) \\ &\Rightarrow \alpha + 40^\circ = 100^\circ - \alpha \vee \alpha + 40^\circ = \alpha + 80^\circ \\ &\Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ \end{aligned}$$

Outra resolução

a) Pelo ponto D , traça-se uma paralela ao lado $[BC]$. Esta paralela intersecta o lado $[AB]$ no ponto F .

b) Traça-se o segmento $[CF]$, o qual intersecta $[BD]$ no ponto G .



c) Os triângulos $[BCG]$ e $[DFG]$ são equiláteros, porque os seus ângulos internos são de 60° .
Então, $\overline{BG} = \overline{BC} = \overline{CG}$; $\overline{FG} = \overline{DG} = \overline{DF}$.

d) O ângulo BEC tem uma amplitude de 50° (porque os outros dois ângulos internos do triângulo medem 50° e 80°). Então, o triângulo $[BEC]$ é isósceles, pelo que $\overline{BE} = \overline{BC}$.

e) Então, $\overline{BE} = \overline{BG}$, pelo que o triângulo $[BGE]$ é isósceles. Logo, o ângulo BEG mede 80° , o mesmo acontecendo com o ângulo BGE .

f) O ângulo EGF mede 40° ($180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$).

g) Então, o ângulo EFG mede 40° , pelo que o triângulo $[EGF]$ é isósceles. Logo, $\overline{EF} = \overline{EG}$.

h) O ponto D é equidistante de F e G .

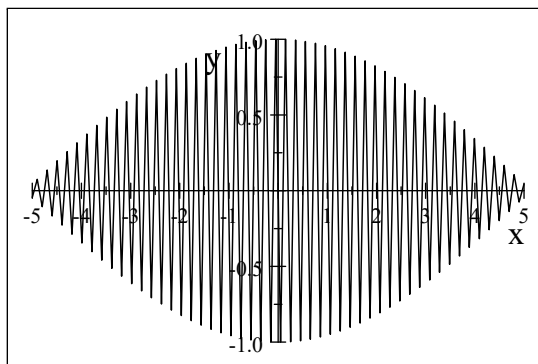
i) Então, a recta DE é a mediatriz de $[FG]$ e, também a bissetriz do ângulo GDF , o qual mede 60° . Então, o ângulo EDB mede 30° .

Observação final

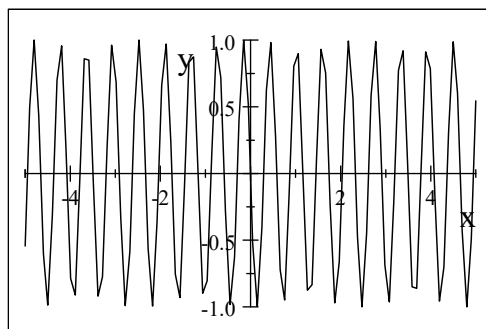
É preciso ter algum cuidado com a representação gráfica de funções em calculadoras ou computadores.

Vejam os seguintes exemplos:

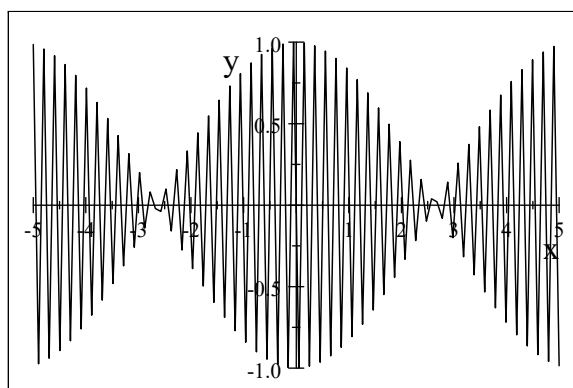
$$f(x) = \sin(93x)$$



$$f(x) = \sin(73x)$$



$$g(x) = \sin(93,8x)$$



Algum dos gráficos é verdadeiro?

Capítulo 18

Indeterminações

Exemplo 357 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3x + 1}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

Exemplo 358 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^2 + 3x + 1}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^2 + 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{1 + 0 + 0} = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 359 Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{3x + 1}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(3 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(3 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2 - 1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Convém chamar a atenção para o facto de que, para $x < 0$, temos $\sqrt{x^2} = -x$ e não $\sqrt{x^2} = x$.

Fazendo a mudança $t = -x$, o limite anterior pode ser transformado em $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-2t + \sqrt{t^2 + 1}}{-3t + 1}$.

Exemplo 360 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}}{3x + 1}$.

Resolução

Seja $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{3x+1}$. Então,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{3x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})}{(3x+1)(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+x+1) - (x^2-x+1)}{x(3+\frac{1}{x})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x(3+\frac{1}{x})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(3+\frac{1}{x})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})} \\
 &= \frac{2}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

Exemplo 361 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$.

Resolução

Seja $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$. Então,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1})}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+x+1) - (x^2-x+1)}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} + \sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \\
 &= \frac{2}{1+1} = 1
 \end{aligned}$$

Exemplo 362 Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$.

Resolução

Seja $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$. Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1})}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{2}{-1 - 1} = -1
\end{aligned}$$

Exemplo 363 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^5 - x^2}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^5 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x - 3)}{x^2(x^3 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3}{x^3 - 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Exemplo 364 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{2x}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-x}(e^{3x} - 1)}{3x} \times \frac{3}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{3}{2} = 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 365 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{x^2 + 3x}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x}(e^{5x} - 1)}{x(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x}}{x + 3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{5x} - 1}{5x} \times 5 \right) = \frac{1}{3} \times 1 \times 5 = \frac{5}{3}$$

Exemplo 366 Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(2x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\
&= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x + \sin x} = - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = - \frac{1}{\sqrt{2}} = - \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Exemplo 367 Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\cos x}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x+x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos(2x) - 2\sin^2 x) = \cos \pi - 2\sin^2 \frac{\pi}{2} = -1 - 2 = -3 \end{aligned}$$

Exemplo 368 Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$.

Resolução

Como 1 é raiz (zero) do numerador e do denominador, podemos factorizar ambos os polinómios, dividindo-os por $x-1$. Para isso, podemos usar a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1+1+1}{1+1+1+1} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 369 Calcular $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.

Resolução

Na resolução deste exercício, convém saber que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ou efectuar a mudança de variável $\sqrt[3]{x} = y$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Efectuando a mudança de variável $\sqrt[3]{x} = y$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y-2}{y^3-8}$$

2	1	0	0	-8
	2	4	8	
	1	2	4	0

$$\text{Então, } \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y-2}{y^3-8} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y^2+2y+4} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

Exemplo 370 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{5x^2 + 3x^{\frac{4}{3}}}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{5x^2 + 3x^{\frac{4}{3}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{7}{3}} \left(1 + x^{\frac{1}{2} - \frac{7}{3}}\right)}{x^2 \left(5 + 3x^{\frac{4}{3} - 2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{7}{3} - 2} \left(1 + x^{\frac{3}{6} - \frac{14}{6}}\right)}{5 + 3x^{-\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} \left(1 + x^{\frac{3}{6} - \frac{14}{6}}\right)}{5 + 3x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{(+\infty)(1+0)}{5+0} = +\infty \end{aligned}$$

Exemplo 371 Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$.

Resolução

Para os alunos mais "distraindo" que não atinam com $\sqrt{x^2} = -x$, quando $x < 0$:
Fazendo a mudança de variável $x = -y$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{y^2+1}}{-2y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{y^2+1}}{-2y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{y^2 \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)}}{-2y} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}}{-2y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}}{-2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

O pior é se os tais alunos não gostam de mudanças de variável...

Exemplo 372 Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-2x+1}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(-2 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{-x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 373 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{(+\infty) + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 374 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x})$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x}} - 1 \right) \right) = (+\infty) \times (\sqrt{2} - 1) = +\infty \end{aligned}$$

Exemplo 375 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{5x}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{4x}-1}{4x} \times \frac{4x}{5x} \right) = 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

Exemplo 376 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{e^{3x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{4x}-1}{4x} \times \frac{3x}{e^{3x}-1} \times \frac{4}{3} \right) = 1 \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Exemplo 377 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2+x^3}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2+x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+x^3} \right) = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

Exemplo 378 Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-9}-1}{x^3-27}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x^2-9}-1}{x^3-27} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{e^{x^2-9}-1}{x^2-9} \times \frac{x^2-9}{x^3-27} \right) = 1 \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^3-27} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+3x+9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2+3x+9} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Exemplo 379 Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{\ln(x-1)}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{\ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{\ln(1+x-2)} = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\ln(1+x-2)} = 2 \times 1 = 2$$

ou, através da mudança de variável $x = 2 + h$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\ln(x-1)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h)}{\ln(2+h-1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4 - 2h}{\ln(1+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{\ln(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{\ln(1+h)} = 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

ou, através da mudança de variável $\ln(x-1) = y$, donde vem $x = 1 + e^y$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\ln(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{\ln(1+x-2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+e^y)(e^y-1)}{y} = 2 \times 1 = 2$$

Exemplo 380 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Resolução

Como, $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então $-\frac{1}{x} \leq \sin x \leq \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Além disso, temos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)$.

Então, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Exemplo 381 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, onde $\lfloor x \rfloor$ representa o maior número inteiro não superior a x .

Resolução

Como $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \wedge x > 0$, temos $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$.

Além disso, temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1) = 1$.

Então, pelo Teorema das sucessões encastradas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$.

Exemplo 382 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x+1}$.

Resolução

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 + \frac{4}{2x}}\right)^{2x}\right)^{\frac{3x+1}{2x}} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 + \frac{4}{2x}}\right)^{2x}\right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x}} \\ &= \left(\frac{e}{e^4}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

Exemplo 383 Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{3x+1}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{3x+1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 + \frac{4}{2x}} \right)^{2x} \right)^{\frac{3x+1}{2x}} \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 + \frac{4}{2x}} \right)^{2x} \right)^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{2x}} = \left(\frac{e}{e^4} \right)^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

Outra maneira de resolver os dois exercícios anteriores:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4} \right)^{3x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{3}{2x+4} \right)^{2x+4} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x+4}} \\
&= (e^{-3})^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}$$

Exemplo 384 Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+4x+4} \right)^{3x+1}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+3x+1}{2x^2+4x+4} \right)^{3x+1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+4x+4-x-3}{2x^2+4x+4} \right)^{3x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{x+3}{2x^2+4x+4} \right)^{3x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{\frac{2x^2+4x+4}{x+3}} \right)^{\frac{2x^2+4x+4}{x+3}} \right)^{(3x+1) \frac{x+3}{2x^2+4x+4}} \\
&= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{2x^2+4x+4}{x+3}} \right)^{\frac{2x^2+4x+4}{x+3}} \right)^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+1)(x+3)}{2x^2+4x+4}} \\
&= (e^{-1})^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Exemplo 385 Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+x+1} \right)^{x^2}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1 - x}{x^2 + x + 1} \right)^{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{x}{x^2 + x + 1} \right)^{x^2} \\
&= \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{\frac{x^2 + x + 1}{x}} \right)^{\frac{x^2 + x + 1}{x}} \right) \right]^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \times x}{x^2 + x + 1}} \\
&= (e^{-1})^{-\infty} = e^{+\infty} = +\infty
\end{aligned}$$

Exemplo 386 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \right)^{x^2}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1 - x}{x^2 + x + 1} \right)^{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{x^2 + x + 1} \right)^{x^2} \\
&= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{\frac{x^2 + x + 1}{x}} \right)^{\frac{x^2 + x + 1}{x}} \right) \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \times x}{x^2 + x + 1}} \\
&= (e^{-1})^{+\infty} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

Convém fazer duas observações, relativamente aos dois últimos exemplos:

Primeira observação: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \times x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Segunda: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$, pelo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{\frac{x^2 + x + 1}{x}} \right)^{\frac{x^2 + x + 1}{x}} \right) = e^{-1}$.

Exemplo 387 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2 + 1)}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2 + 1)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln \left[x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln(x^2) + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\ln x}} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exemplo 388 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$.

Resolução

Com a mudança de variável $x = \frac{1}{t}$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\ln t}{t} \right) = 0$$

Com a mudança de variável $\ln x = y$, $x = e^y$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (ye^y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-te^{-t}) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right) = 0$$

Nesta segunda maneira, fizemos duas mudanças de variável. Mas podemos fazer uma só: $\ln x = -y$, donde vem $x = e^{-y}$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-ye^{-y}) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = -0 = 0$$

Exemplo 389 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x) \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 390 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(3x)}{\sin(5x)}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(3x)}{\sin(5x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{5x}{\sin(5x)} \times \frac{3x}{5x} \right) = 2 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

Exemplo 391 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \sin(5x)}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \sin(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{x} \times \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} \right) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$$

Exemplo 392 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{\sin(x^2)}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{\sin(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2(3x)}{x^2} \times \frac{x^2}{\sin(x^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin(3x)}{x} \right)^2 \times \frac{x^2}{\sin(x^2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\sin(3x)}{x} \right)^2 \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = 3^2 \times 1 = 9 \end{aligned}$$

Exemplo 393 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \tan x}{\sin(x^2)}$.

Resolução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \tan x}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{x} \times \frac{\tan x}{x} \times \frac{x^2}{\sin(x^2)} \right) = 3 \times 1 \times 1 = 3$$

Exemplo 394 Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 + \sin x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{(1 + \sin x) \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(1 + \sin x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 395 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x} + 1)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(1+x-1)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x(\sqrt{1+x} + 1)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + 1}{1 + \cos x} \\ &= 1^2 \times \frac{1+1}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

Exemplo 396 Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{\sin x \tan x}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{\sin x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{1-\cos x} - 1}{1 - \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{\sin x \tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{1 - \cos x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x \tan x} \\ &= 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\sin x \tan x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \tan x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x \tan x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 397 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2\cos x}{x+3}$.

Resolução

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo o número real x , temos que $-2 \leq -2\cos x \leq 2$, para qualquer real x . Note-se que podemos escrever $2 \geq -2\cos x \geq -2$, pois ao multiplicarmos por -2 , os sinais de inequação invertem. Mas, no caso, obtemos uma equação equivalente à que foi apresentada.

Então, $1 - 2 \leq 1 - 2\cos x \leq 1 + 2$, ou seja, $-1 \leq 1 - 2\cos x \leq 3$, para todo o real x .

Como x tende para $+\infty$, podemos considerar $x + 3 > 0$. Logo, para todo o número real positivo x , temos

$$\frac{-1}{x+3} \leq \frac{1-2\cos x}{x+3} \leq \frac{3}{x+3}$$

Mas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+3} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+3}$, pelo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2\cos x}{x+3} = 0$.

Exemplo 398 Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}}$.

Resolução

Façamos a substituição $\sqrt{x} = t$. Então, $x = t^2$, pelo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

O limite anterior pode ser calculado sem mudança de variável:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^2}{e^{\sqrt{x}}} = 0$$

Exemplo 399 Calcular $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$.

Resolução

Trata-se duma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, pelo que até poderemos aplicar a regra de Cauchy (se tal for permitido). Além da regra de Cauchy, há outras maneiras de calcularmos o limite anterior, sendo que a mais frequente é fazermos $x = \pi + h$.

Tentemos não usar nenhuma mudança de variável:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(x-\pi)^2(1-\cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1-\cos^2 x}{(x-\pi)^2(1-\cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin^2 x}{(x-\pi)^2} \times \frac{1}{1-\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(\sin x)^2}{(x-\pi)^2} \times \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{1-\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(-\sin(x-\pi))^2}{(x-\pi)^2} \times \frac{1}{1+1} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x-\pi)}{(x-\pi)^2} \times \frac{1}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} \times \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} \right) \times \frac{1}{2} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Capítulo 19

Equações de Segundo Grau

As equações de 2º grau são resolvidas, em geral, por meio duma transformação em que se obtém uma equação do tipo $y^2 = c$, ou através da aplicação da regra do anulamento dum produto, ou ainda por meio da aplicação duma fórmula.

19.1 Primeira abordagem

Seguem-se alguns exemplos de resolução de equações de 2º grau:

Exemplo 400 *Resolva a equação $x^2 = 9$.*

Resolução

$$x^2 = 9 \iff x = \pm\sqrt{9} \iff x = \pm 3$$

A equação anterior tem duas soluções reais. O conjunto de verdade (conjunto das soluções) é $S = \{-3, 3\}$.

Exemplo 401 *Resolva a equação $x^2 = 5$.*

$$x^2 = 5 \iff x = \pm\sqrt{5}$$

A equação anterior tem duas soluções reais. O conjunto de verdade (conjunto das soluções) é $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

Exemplo 402 *Resolva a equação $x^2 = 0$.*

Resolução

$$x^2 = 0 \iff x \times x = 0 \iff x = 0 \vee x = 0 \iff x = 0$$

A equação tem uma solução real, embora muitas vezes se diga que o polinómio x^2 admite uma raiz dupla ou duas raízes iguais. O conjunto de verdade é $S = \{0\}$.

Exemplo 403 *Resolva a equação $x^2 = -4$.*

Resolução

A equação $x^2 = -4$ é impossível, em \mathbb{R} , uma vez que o quadrado dum número real nunca dá um número negativo. A equação anterior não tem soluções reais. O conjunto de verdade é $S = \emptyset$.

Exemplo 404 Resolva a equação $x^2 = c$.

Resolução

Se tivermos $c > 0$, a equação tem duas soluções reais, obtendo-se $x = \pm\sqrt{c}$. Se $c = 0$, a equação tem uma solução real, obtendo-se $x = 0$. Se $c < 0$, a equação é impossível, em \mathbb{R} .

Exemplo 405 Resolva a equação $(2x + 3)^2 = 9$.

Resolução

$$\begin{aligned} (2x + 3)^2 = 9 &\iff 2x + 3 = \pm\sqrt{9} \iff 2x + 3 = \pm 3 \\ &\iff 2x = -3 \pm 3 \iff 2x = -6 \vee 2x = 0 \\ &\iff x = -3 \vee x = 0 \end{aligned}$$

A equação $(2x + 3)^2 = 9$ tem duas soluções reais.
O conjunto de verdade é $S = \{-3, 0\}$.

Exemplo 406 Resolva a equação $(3x + 4)^2 = 11$.

Resolução

$$\begin{aligned} (3x + 4)^2 = 11 &\iff 3x + 4 = \pm\sqrt{11} \iff 3x = -4 \pm \sqrt{11} \\ &\iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{11}}{3} \end{aligned}$$

A equação tem duas soluções reais. O conjunto de verdade é $S = \left\{ \frac{-4 - \sqrt{11}}{3}, \frac{-4 + \sqrt{11}}{3} \right\}$.

Exemplo 407 Resolva a equação $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 = 0 &\iff x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = 3^2 - 8 \\ &\iff (x + 3)^2 = 1 \iff x + 3 = \pm 1 \\ &\iff x = -3 \pm 1 \\ &\iff x = -4 \vee x = -2 \end{aligned}$$

A equação tem duas soluções reais. O conjunto de verdade é $S = \{-4, -2\}$.

Exemplo 408 Resolva a equação $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x + 6 = 0 &\iff x^2 + 2 \times x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 \\
&\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - 6 \\
&\iff \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\
&\iff x + \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2} \\
&\iff x = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\
&\iff x = -3 \vee x = -2
\end{aligned}$$

A equação tem duas soluções reais. O conjunto de verdade é $S = \{-3, -2\}$.

Outra resolução

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x + 6 = 0 &\iff 4x^2 + 20x + 24 = 0 \iff (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 5^2 - 24 \\
&\iff (2x + 5)^2 = 1 \iff 2x + 5 = \pm 1 \iff 2x = -5 \pm 1 \iff x = -3 \vee x = -2
\end{aligned}$$

Observe-se que, neste caso, não usámos fracções, tendo-se multiplicado ambos os membros da equação dada por 4, uma vez que 5, o coeficiente do termo de 1º grau, é ímpar.

Exemplo 409 Resolva a equação $3x^2 + 4x + 1 = 0$.

Resolução

Dividindo ambos os membros da equação por 3, obtemos:

$$\begin{aligned}
3x^2 + 4x + 1 = 0 &\iff x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \\
&\iff x^2 + 2 \times x \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \\
&\iff \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{3}{9} \\
&\iff x + \frac{2}{3} = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \\
&\iff x = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} \\
&\iff x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

A equação tem duas soluções reais. O conjunto de verdade é $S = \{-1, -\frac{1}{3}\}$.

Outra resolução

A equação $3x^2 + 4x + 1 = 0$ pode ser resolvida de maneira mais simples, se multiplicarmos ambos os membros da equação por 3, que é o coeficiente do termo de 2º grau do polinómio $3x^2 + 4x + 1$.

Observe-se que, nesta resolução, praticamente não usámos fracções, ao contrário da resolução anterior.

Exemplo 410 Resolva a equação $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

Resolução

Dividindo ambos os membros da equação por 3, obtemos:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 2 = 0 &\iff x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \\ &\iff x^2 + 2 \times x \times \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} \\ &\iff \left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \iff x + \frac{5}{6} = \pm \sqrt{\frac{1}{36}} \\ &\iff x = -\frac{5}{6} \pm \frac{1}{6} \iff x = -1 \vee x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

A equação tem duas soluções reais. O conjunto de verdade é $S = \{-1, -\frac{2}{3}\}$.

Segunda resolução

Multiplicando ambos os membros da equação por 3, obtemos:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 2 = 0 &\iff 9x^2 + 15x + 6 = 0 \\ &\iff (3x)^2 + 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 \\ &\iff \left(3x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} \\ &\iff 3x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &\iff 3x = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\ &\iff 3x = -3 \vee 3x = -2 \\ &\iff x = -1 \vee x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Terceira resolução

Multiplicando ambos os membros da equação por 3×4 , obtemos:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 2 = 0 &\iff 36x^2 + 60x + 24 = 0 \\ &\iff (6x)^2 + 2 \times 6x \times 5 + 5^2 = 5^2 - 24 \\ &\iff (6x + 5)^2 = 1 \\ &\iff 6x + 5 = \pm 1 \\ &\iff 6x = -5 \pm 1 \\ &\iff 6x = -6 \vee 6x = -4 \\ &\iff x = -1 \vee x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Como podemos ver, a maneira mais simples de resolver a equação, consiste em multiplicarmos ambos os membros da equação por 3, que é o coeficiente do termo de 2º grau do polinómio e por 4, já que o termo de 1º grau tem coeficiente ímpar.

Exemplo 411 Resolva a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Resolução

Multiplicando ambos os membros da equação por $4a$, obtemos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \\ &\iff 4a^2x^2 + 4abx = -4ac \\ &\iff (2ax)^2 + 2 \times 2ax \times b + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\iff (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Temos, agora, dois casos a considerar:

Se $b^2 - 4ac < 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ é impossível.

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então vem:

$$\begin{aligned} (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac &\iff 2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ &\iff 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ &\iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

À expressão $b^2 - 4ac$, chamamos binómio discriminante, pois este binómio indica-nos o número de raízes da equação, conforme o seu sinal.

À expressão $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, chamamos fórmula resolvente da equação de 2º grau.

Fórmulas Resolventes Simplificadas das Equações de 2º Grau

A fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ pode ser simplificada, em certos casos:

1º Caso:

Suponhamos que $b = 2k$, isto é, $k = \frac{b}{2}$. Então:

$$\begin{aligned} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\iff x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} \\ &\iff x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

2º Caso:

Suponhamos que $b = 2k$ e $a = 1$. Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \iff x = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$$

Seguem-se alguns exemplos de resolução de equações de 2º grau, usando as fórmulas resolventes anteriores:

Exemplo 412 Resolva a equação $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

Resolução

Neste caso, temos $a = 2, b = 3, c = -5$. Então, $b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49 > 0$, pelo que a equação tem duas soluções reais que são dadas por

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} \iff x = \frac{-3 \pm 7}{4} \iff x = -\frac{5}{2} \vee x = 1$$

O conjunto de verdade é $S = \{-\frac{5}{2}, 1\}$.

Exemplo 413 Resolva a equação $3x^2 - 4x - 7 = 0$.

Resolução

Na equação $3x^2 - 4x - 7 = 0$, b é um número par, pelo que podemos aplicar a fórmula $x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Observe-se que, para determinar o número de soluções da equação, podemos usar o binómio discriminante simplificado $k^2 - ac$, em vez de $b^2 - 4ac$: Como $a = 3, b = -4, k = -2, c = -7$, temos $k^2 - ac = 4 + 21 = 25 > 0$.

Então, a equação tem duas raízes reais, dadas por:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{25}}{3} \iff x = \frac{2 \pm 5}{3} \iff x = -1 \vee x = \frac{7}{3}$$

O conjunto de verdade é $S = \{-1, \frac{7}{3}\}$.

Exemplo 414 Resolva a equação $x^2 - 4x - 21 = 0$.

Resolução

Neste caso, temos $a = 1, b = -4, k = -2, c = -21$, pelo que podemos usar a fórmula mais simples de todas. O binómio discriminante simplificado é $k^2 - c = 4 + 21 = 25 > 0$, pelo que a equação tem duas raízes reais:

$$x = 2 \pm \sqrt{25} \iff x = 2 \pm 5 \iff x = -3 \vee x = 7$$

O conjunto de verdade é $S = \{-3, 7\}$.

Exemplo 415 Resolva a equação $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$.

Resolução

Neste caso, temos $a = 1, b = -2\sqrt{3}, k = -\sqrt{3}, c = -1$.

Então, podemos usar a fórmula mais simples de todas.

O binómio discriminante simplificado é $k^2 - c = 3 + 1 = 4 > 0$, pelo que a equação tem duas raízes reais:

$$x = \sqrt{3} \pm 2 \iff x = 2 + \sqrt{3} \iff x = -2 + \sqrt{3}$$

O conjunto de verdade é $S = \{2 + \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\}$.

19.2 Segunda abordagem

Os exemplos seguintes, incluindo a dedução da fórmula resolvente das equações de 2º grau, são resolvidos com base num dos casos notáveis da multiplicação (a diferença entre dois quadrados). Recordamos que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, quaisquer que sejam os números reais (e complexos) a e b . Note-se, ainda, que $[(a+b)+c] \times [(a+b)-c] = (a+b)^2 - c^2$.

Exemplo 416 Resolva a equação $x^2 - 3x - 10 = 0$

Resolução

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3x - 10 = 0 &\iff x^2 - 3x = 10 \\
 &\iff x(x-3) = 10 \\
 &\iff \left(x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right) = 10 \\
 &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 10 \\
 &\iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \\
 &\iff x - \frac{3}{2} = \pm \frac{7}{2} \\
 &\iff x = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2} \\
 &\iff x = -2 \vee x = 5
 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{-2, 5\}$.

Exemplo 417 Resolva a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$

Resolução

$$\begin{aligned}
 x^2 - 5x + 4 = 0 &\iff x^2 - 5x = -4 \iff x(x-5) = -4 \\
 &\iff \left(x - \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) \left(x - \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right) = -4 \\
 &\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -4 \\
 &\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - 4 \\
 &\iff \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\
 &\iff x - \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2} \\
 &\iff x = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
 &\iff x = 1 \vee x = 4
 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{1, 4\}$.

Exemplo 418 Resolva a equação $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Resolução

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 5x + 2 = 0 &\iff x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{2}{3} \\
 &\iff x\left(x - \frac{5}{3}\right) = -\frac{2}{3} \\
 &\iff \left(x - \frac{5}{6} + \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6} - \frac{5}{6}\right) = -\frac{2}{3} \\
 &\iff \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3} \\
 &\iff \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} - \frac{24}{36} \\
 &\iff \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \\
 &\iff x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6} \\
 &\iff x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \vee x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \\
 &\iff x = \frac{2}{3} \vee x = 1
 \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$.

Exemplo 419 Resolva a equação $3x^2 + x - 1 = 0$

Resolução

$$\begin{aligned}
 3x^2 + x - 1 = 0 &\iff x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \\
 &\iff x\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\
 &\iff \left(x + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right)\left(x + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} \\
 &\iff \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} \\
 &\iff \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{36} \\
 &\iff \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{36} \\
 &\iff x + \frac{1}{6} = \pm \frac{\sqrt{13}}{6} \\
 &\iff x = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6} \vee x = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}
 \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}, -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right\}$.

A resolução de equações de 2º grau pode ser ligeiramente diferente daquela que acabámos de apresentar: em vez de dividir ambos os membros da equação por a , multiplicamos por $4a$:

Exemplo 420 Resolva a equação $3x^2 + 5x + 2 = 0$

Resolução

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 5x + 2 = 0 &\iff 36x^2 + 60x = -24 \\
 &\iff 6x(6x + 10) = -24 \\
 &\iff (6x + 5 - 5)(6x + 5 + 5) = -24 \\
 &\iff (6x + 5)^2 - 5^2 = -24 \\
 &\iff (6x + 5)^2 = 25 - 24 \\
 &\iff (6x + 5)^2 = 1 \\
 &\iff 6x + 5 = \pm 1 \\
 &\iff 6x = -5 \pm 1 \\
 &\iff x = \frac{-5 - 1}{6} \vee x = \frac{-5 + 1}{6} \\
 &\iff x = -1 \vee x = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}, -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Exemplo 421 Resolva a equação $5x^2 - 9x - 2 = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 5x^2 - 9x - 2 = 0 &\iff 100x^2 - 180x - 40 = 0 \\
 &\iff 100x^2 - 180x = 40 \\
 &\iff 10x(10x - 18) = 40 \\
 &\iff (10x - 9 + 9)(10x - 9 - 9) = 40 \\
 &\iff (10x - 9)^2 - 9^2 = 40 \\
 &\iff (10x - 9)^2 = 121 \\
 &\iff 10x - 9 = \pm 11 \\
 &\iff 10x = 9 \pm 11 \\
 &\iff 10x = 9 - 11 \vee 10x = 9 + 11 \\
 &\iff 10x = -2 \vee 10x = 20 \\
 &\iff x = -\frac{1}{5} \vee x = 2
 \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}, -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Exemplo 422 Resolva a equação $3x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$.

Resolução

$$\begin{aligned}
3x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0 &\iff 36x^2 - 12\sqrt{5}x - 24 = 0 \\
&\iff 36x^2 - 12\sqrt{5}x = 24 \\
&\iff 6x(6x - 2\sqrt{5}) = 24 \\
&\iff (6x - \sqrt{5} + \sqrt{5})(6x - \sqrt{5} - \sqrt{5}) = 24 \\
&\iff (6x - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2 = 24 \\
&\iff (6x - \sqrt{5})^2 = 29 \\
&\iff 6x - \sqrt{5} = \pm\sqrt{29} \\
&\iff 6x = \sqrt{5} \pm \sqrt{29} \\
&\iff x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{29}}{6} \vee x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{29}}{6}
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } S = \left\{ \frac{\sqrt{5} - \sqrt{29}}{6}, \frac{\sqrt{5} + \sqrt{29}}{6} \right\}.$$

Exemplo 423 Resolva a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Resolução

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 &\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\iff x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
&\iff x\left(x + \frac{b}{a}\right) = -\frac{c}{a} \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right) = -\frac{c}{a} \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
&\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

Se $b^2 - 4ac < 0$, então a equação é impossível.

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, donde se conclui que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Capítulo 20

O método das Tangentes de Newton

Neste capítulo, pretendemos determinar valores aproximados dos zeros duma função, utilizando o método das tangentes. Vamos começar com um exemplo muito simples: a determinação de valores aproximados de $\sqrt{2}$.

Exemplo 424 Consideremos a função $f(x) = x^2 - 2$, cuja derivada é $f'(x) = 2x$.

Consideremos $x_0 = 1$. Então, $f(1) = -1$ e $f'(1) = 2$.

Uma equação da recta tangente ao gráfico da função f , no ponto $x = 1$ é $y + 1 = 2(x - 1)$, a qual é equivalente a $y = 2x - 3$.

A tangente anterior intersecta o eixo das abcissas no ponto $x = \frac{3}{2}$, pelo que fazemos $x_1 = \frac{3}{2}$, que é um valor aproximado de $\sqrt{2}$.

E o processo continua até obtermos uma boa aproximação de $\sqrt{2}$.

Na segunda iteração, temos $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$ e $f'(\frac{3}{2}) = 3$.

Então, uma equação da tangente no ponto $x = \frac{3}{2}$ é $y + \frac{1}{4} = 3(x - \frac{3}{2})$, a qual é equivalente a $y = 3x - \frac{19}{4}$.

Esta nova recta intersecta o eixo das abcissas no ponto $x = \frac{19}{12}$, que é uma nova aproximação de $\sqrt{2}$.

Há algumas questões que podem ser colocadas:

Será que obtemos uma sucessão? Se obtivermos uma tangente horizontal, o processo acaba...

Outra questão é a da convergência da sucessão, caso a sucessão exista...

Suponhamos que temos o termo x_n . Como obter x_{n+1} , pelo método das tangentes?

$$f(x_n) = x_n^2 - 2, \quad f'(x_n) = 2x_n$$

A equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto $x = x_n$ é:

$$y - x_n^2 + 2 = 2x_n(x - x_n)$$

Fazendo $y = 0$, temos $\frac{2 - x_n^2}{2x_n} = x - x_n$, equação que é equivalente a $x = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$, pelo que temos $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$.

Se $x_n > 0$, então $x_{n+1} > 0$ e o processo pode continuar indefinidamente. Repare-se que se tivéssemos $x_n < 0$, então $x_{n+1} < 0$, pelo que o processo continuava indefinidamente.

Está, assim resolvida a primeira questão. Quanto à convergência, apenas referimos que, neste caso, a sucessão é convergente, partindo dum valor inicial não nulo e que no caso geral duma função que admita derivada contínua e finita em qualquer ponto, se for garantida a existência da sucessão, esta converge desde que o valor inicial esteja suficientemente próximo do zero da função procurado. No entanto, o estar suficientemente próximo é algo que irá depender da função em causa. No exemplo que estivemos a considerar, o valor inicial pode ser qualquer valor positivo, para que o limite seja $\sqrt{2}$. Partindo dum valor negativo o limite da sucessão será $-\sqrt{2}$.

Partindo do valor inicial $x_0 = 1$, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1^2+2}{2 \times 1} = \frac{3}{2}; & x_2 &= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{17}{12}; & x_3 &= \frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2+2}{2 \times \frac{17}{12}} = \frac{577}{408} \\ x_4 &= \frac{\left(\frac{577}{408}\right)^2+2}{2 \times \frac{577}{408}} = \frac{665\,857}{470\,832}; & x_5 &= \frac{\left(\frac{665\,857}{470\,832}\right)^2+2}{2 \times \frac{665\,857}{470\,832}} = \frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048} \approx 1,414\,213\,562 \\ x_6 &= \frac{\left(\frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048}\right)^2+2}{2 \times \frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048}} = \frac{1572\,584\,048\,032\,918\,633\,353\,217}{1111\,984\,844\,349\,868\,137\,938\,112} \approx 1,414\,213\,562 \\ x_7 &= \frac{\left(\frac{1572\,584\,048\,032\,918\,633\,353\,217}{1111\,984\,844\,349\,868\,137\,938\,112}\right)^2+2}{2 \times \frac{1572\,584\,048\,032\,918\,633\,353\,217}{1111\,984\,844\,349\,868\,137\,938\,112}} = \frac{4946\,041\,176\,255\,201\,878\,775\,086\,487\,573\,351\,061\,418\,968\,498\,177}{3497\,379\,255\,757\,941\,172\,020\,851\,852\,070\,562\,919\,437\,964\,212\,608} \approx 1,414\,213\,562 \end{aligned}$$

Podemos comparar o resultado com o valor apresentado pela Calculadora para $\sqrt{2}$.

Exemplo 425 O método das tangentes

Consideremos uma função de domínio \mathbb{R} , que admite derivada contínua e finita em qualquer ponto. Supondo conhecido o valor x_n , vejamos como obter x_{n+1} .

A equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto $x = x_n$ é

$$y - f(x_n) = (x - x_n) f'(x_n)$$

Fazendo $y = 0$, obtemos $(x - x_n) f'(x_n) = -f(x_n)$, donde se conclui que $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, ou seja, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, caso x_{n+1} esteja definido.

Exemplo 426 Será que os Babilónios conheciam um algoritmo para calcular valores aproximados de $\sqrt{2}$?

Os Babilónios tinham um sistema de numeração que usava a base 60 e sabiam resolver equações de 2º grau.

Vejamos um método iterativo, para determinar valores aproximados de $\sqrt{2}$, que podia ser utilizado pelos Babilónios:

Como $1^2 < 2 < 2^2$, devemos ter $1 < \sqrt{2} < 2$.

Faça-se $x_0 = 1$. Então, $\sqrt{2} = 1 + \delta_1$, pelo que $(1 + \delta_1)^2 = 2$. Observe-se que $0 < \delta_1 < 1$.

Então, $1 + 2\delta_1 + \delta_1^2 = 2$. Mas, para valores entre zero e 1, o quadrado é um número pequeno, pelo que pode ser desprezado.

Logo, $1 + 2\delta_1 \approx 2$, donde vem $\delta_1 \approx \frac{1}{2}$. Então, $x_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Calculemos x_2 :

Como $x_1^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$, devemos ter $\sqrt{2} = \frac{3}{2} - \delta_2$, com $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$.

Então, $\left(\frac{3}{2} - \delta_2\right)^2 = 2$, donde vem $\frac{9}{4} - 3\delta_2 + \delta_2^2 = 2$.

Logo, $\frac{9}{4} - 3\delta_2 \approx 2$, pelo que $3\delta_2 \approx \frac{9}{4} - 2$, ou seja, $\delta_2 \approx \frac{1}{12}$.

$$\text{Então, } x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

E o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se boas aproximações de $\sqrt{2}$. Curiosamente, estamos a obter os mesmos valores que obtivemos com o método de Newton, partindo do valor inicial $x_0 = 1$, em ambos os casos.

Será que as duas sucessões são iguais? Para responder a esta questão, basta-nos provar que se partirmos de valores arbitrários iguais, obtemos na iteração seguinte valores iguais.

No método das tangentes, já vimos que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, pelo que, no caso da função $f(x) = x^2 - 2$, temos $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$.

Pelo segundo processo, supondo que $2 > x_n > \sqrt{2}$, temos:

$$(x_n - \delta_{n+1})^2 = 2$$

Logo, $x_n^2 - 2x_n\delta_{n+1} + \delta_{n+1}^2 = 2$, donde obtemos $x_n^2 - 2x_n\delta_{n+1} \approx 2$. Então, $\delta_{n+1} \approx \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$, pelo que $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$, obtendo-se a mesma expressão que fora obtida pelo método das tangentes.

Logo, os dois processos conduzem à mesma sucessão (neste caso).

Exemplo 427 Determine um valor aproximado de $-\sqrt{2}$, pelo método das tangentes.

Resolução

Consideremos a função $f(x) = x^2 - 2$. Seja $x_0 = -1$. Então, utilizando a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, temos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+2}{-2} = -\frac{3}{2} = -1,5 \\ x_2 = \frac{\frac{9}{4}+2}{-\frac{3}{2}} = -\frac{17}{12} \approx -1,416\,666\,667 \\ x_3 = \frac{\frac{289}{144}+2}{-\frac{17}{12}} = -\frac{577}{144} \times \frac{6}{17} = -\frac{577}{408} \approx -1,414\,215\,686 \\ x_4 = \frac{\left(\frac{577}{408}\right)^2+2}{-2 \times \frac{577}{408}} = -\frac{665\,857}{470\,832} \approx -1,414\,213\,562 \\ x_5 = \frac{\left(\frac{665\,857}{470\,832}\right)^2+2}{-2 \times \frac{665\,857}{470\,832}} = -\frac{886\,731\,088\,897}{627\,013\,566\,048} \approx -1,414\,213\,562 \end{array} \right.$$

E bastaram cinco iterações para chegarmos ao resultado pretendido.

Exemplo 428 Resolva a equação $2x + \sin x - 5 = 0$, pelo método das tangentes.

Resolução

Seja $f(x) = 2x + \sin x - 5$. Então, $f'(x) = 2 + \cos x$

Vamos partir de $x_0 = 0$, usando a fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ e uma Calculadora:

■ ClrHome	Done
■ 0	0.
■ 0. - $\frac{2 \cdot 0. + \sin(0.) - 5}{2 + \cos(0.)}$	1.66666666667
■ 1.666666666667 - $\frac{2 \cdot 1.666666666667 + \sin(1.666666666667)}{2 + \cos(1.666666666667)}$	2.01916732812
<u>■ n(ans(1))-5)/(2+cos(ans(1)))</u>	

$\begin{aligned} & \blacksquare 1.666666666667 - \frac{2 + \cos(1.66)}{2.01916732812} \\ & \blacksquare 2.01916732812 - \frac{2 \cdot 2.01916732812 + \sin(2)}{2 + \cos(2.01916)} \\ & \blacksquare 2.0577953561803 - \frac{2 \cdot 2.0577953561803 + s}{2 + \cos(2.05)} \\ & \underline{\dots n(\text{ans}(1))-5)/\langle 2+\cos(\text{ans}(1)) \rangle} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \blacksquare 2.0582314261877 - \frac{2 + \cos(2.05)}{2.05823148104} \\ & \blacksquare 2.0582314810429 - \frac{2 \cdot 2.0582314810429 + s}{2 + \cos(2.05)} \\ & \blacksquare 2.0582314810429 - \frac{2 \cdot 2.0582314810429 + s}{2 + \cos(2.05)} \\ & \underline{\dots n(\text{ans}(1))-5)/\langle 2+\cos(\text{ans}(1)) \rangle} \end{aligned}$
--	--

E bastaram cinco iterações para chegarmos ao resultado pretendido.

Então, uma das soluções da equação é, aproximadamente, o número real 2,058 231 4810429. Observemos que $f'(x) = 2 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que a função f é estritamente crescente.

Então, a função tem um único zero, do qual já conhecemos uma boa aproximação.

Exemplo 429 Determine uma boa aproximação do ponto fixo da função $f(x) = 1 - \arctan x$.

Resolução

Recordamos que ponto fixo duma função f é um ponto x do domínio de f , tal que $f(x) = x$. Então, pretendemos resolver a equação $1 - \arctan x = x$, equação esta que é equivalente a $x - 1 + \arctan x = 0$.

A questão inicial transformou-se na determinação do zero da função $g(x) = x - 1 + \arctan x$.

Então, $g'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}$. Observe-se, desde já, que a função é estritamente crescente, pelo que não pode ter mais do que um zero.

Ora, $g(0) = -1$ e $g(1) = \frac{\pi}{4}$. Além disso, a função é contínua em \mathbb{R} . Então, a função tem um zero no intervalo $]0, 1[$.

A fórmula de recorrência do método das tangentes é:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - 1 + \arctan x_n}{1 + \frac{1}{1+x_n^2}} \\ &= x_n - \frac{x_n - 1 + \arctan x_n}{\frac{2+x_n^2}{1+x_n^2}} \\ &= x_n - \frac{(x_n - 1 + \arctan x_n)(1+x_n^2)}{2+x_n^2} \end{aligned}$$

Partindo do valor inicial $x_0 = 1$, temos:

$$\begin{aligned} & \blacksquare 1. - \frac{(1. - 1 + \tan^{-1}(1.)) \cdot [1 + (1.)^2]}{2 + (1.)^2} \\ & \hspace{15em} .476401224402 \\ & \blacksquare .4764012244017 - \frac{(.4764012244017 - 1 + \tan^{-1}(.4764012244017)) \cdot [1 + (.4764012244017)^2]}{2 + (.4764012244017)^2} \\ & \hspace{15em} .519931116131 \\ & \underline{\dots * (1 + (\text{ans}(1))^2) / \langle 2 + \text{ans}(1)^2 \rangle} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 \blacksquare .51993111613136 - \frac{(.51993111613136 - 1 +}{.520268972138} \rightarrow & \blacksquare .52026897213836 - \frac{(.52026897213836 - 1 +}{.52026899272} \rightarrow \\
 \blacksquare .52026897213836 - \frac{(.52026897213836 - 1 +}{.52026899272} \rightarrow & \blacksquare .52026899271959 - \frac{(.52026899271959 - 1 +}{.52026899272} \rightarrow \\
 \frac{\dots * (1 + \langle \text{ans}(1) \rangle^2) / (2 + \text{ans}(1)^2)}{\dots * (1 + \langle \text{ans}(1) \rangle^2) / (2 + \text{ans}(1)^2)} & \frac{\dots * (1 + \langle \text{ans}(1) \rangle^2) / (2 + \text{ans}(1)^2)}{\dots * (1 + \langle \text{ans}(1) \rangle^2) / (2 + \text{ans}(1)^2)}
 \end{array}$$

O valor do ponto fixo da função inicial é, aproximadamente, 0,520 268 992 71959.

Capítulo 21

Polinómios de Colocação

Neste capítulo, pretendemos determinar uma função polinomial que assuma determinados valores em determinados pontos.

Começamos por fazer referência ao Teorema Fundamental da Álgebra, o qual afirma que um polinómio de grau n e de coeficientes complexos não admite mais do que n raízes complexas. Como consequência, um polinómio de grau n e de coeficientes reais não admite mais do que n raízes reais.

Recordamos que polinómio identicamente nulo é o polinómio $P(x)$ com todos os coeficientes nulos, isto é, $P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x + 0$.

Convenciona-se que o grau do polinómio identicamente nulo é $-\infty$. Esta convenção deve-se ao facto de pretendemos que o grau da soma de dois polinómios seja menor ou igual ao maior dos graus das parcelas e que o grau do produto seja igual à soma dos graus dos factores.

Proposição 430 *Se um polinómio $P(x)$, de grau menor ou igual a n , com $n \in \mathbb{N}$, se anula em $n+1$ pontos, então $P(x)$ é o polinómio identicamente nulo.*

Demonstração

A demonstração é trivial, em face do que foi afirmado.

Proposição 431 *Não há mais do que um polinómio, de grau menor ou igual a n , com $n \in \mathbb{N}$, que assuma $n+1$ valores pré-determinados, em $n+1$ pontos.*

Demonstração

Sejam $P_1(x)$ e $P_2(x)$ dois polinómios de grau menor ou igual a n , satisfazendo as condições do enunciado.

Sejam $P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e $P_2(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$.

Suponhamos, ainda, que $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ são os $n+1$ pontos onde os dois polinómios assumem os $n+1$ valores pré-determinados.

Seja $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$. Então:

$$P(x_k) = P_1(x_k) - P_2(x_k) = 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$$

Logo, o polinómio $P(x)$, de grau menor ou igual a n , anula-se em $n+1$ pontos, pelo que se trata do polinómio identicamente nulo.

Então, os dois polinómios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são idênticos.

Repare-se que esta proposição não afirma que existe um polinómio que satisfaça as condições do enunciado, embora tal se verifique, como veremos.

Exercício 432 *Determinemos o polinómio $P(x)$, de grau menor ou igual a 3 e que satisfaz as condições $P(0) = 3$, $P(1) = 1$, $P(2) = 3$ e $P(3) = 1$.*

Resolução

Seja $P_1(x) = 3$. É claro que $P_1(0) = 3$, mas $P_1(1) = 3 \neq 1$. Pretendemos obter um novo polinómio $P_2(x)$ que satisfaça $P_2(1) = 1$, mas sem deixar de satisfazer $P_2(0) = 3$. Tal é conseguido com $P_2(x) = P_1(x) + ax = 3 + ax$.

Então, devemos ter $P_2(1) = 3 + a = 1$, donde se conclui que $a = -2$.

Logo, $P_2(x) = 3 - 2x$.

E, agora, fazemos $P_3(x) = P_2(x) + bx(x-1) = 3 - 2x + bx(x-1)$.

$P_3(2) = 3 - 4 + 2b = 2b - 1$. Então, $2b - 1 = 3$, donde vem $b = 2$.

Logo, $P_3(x) = 3 - 2x + 2x(x-1) = 3 - 4x + 2x^2$.

Seja $P_4(x) = P_3(x) + cx(x-1)(x-2) = 3 - 4x + 2x^2 + cx(x-1)(x-2)$.

$1 = P_4(3) = 3 - 12 + 18 + 3c \times 2 \times 1 = 9 + 6c$.

Então, $6c = -8$, donde vem $c = -\frac{4}{3}$.

Logo, $P_4(x) = 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$.

Efectuando os cálculos, temos:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) \\ &= 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x(x^2 - 3x + 2) \\ &= 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{8}{3}x \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3 \end{aligned}$$

E, como podemos verificar, temos $P_4(0) = 3$, $P_4(1) = 1$, $P_4(2) = 3$, $P_4(3) = 1$.

Observe-se que podíamos ter poupado um passo no cálculo do polinómio, pois, $P_1(x) = 3$ já está correcto em dois pontos (em $x = 0$ e em $x = 2$).

Então, fazemos $P_2(x) = 3 + Ax(x-2)$ e determinamos A , de modo que $P_2(1) = 1$.

De $P_2(1) = 1$, vem $3 - A = 1$, donde se conclui que $A = 2$.

Então, $P_2(x) = 3 + 2x(x-2) = 3 - 4x + 2x^2$.

E, finalmente, temos $P_3(x) = 3 - 4x + 2x^2 + Bx(x-1)(x-2)$.

E, de $P_3(3) = 1$, vem $3 - 12 + 18 + B \times 3 \times 2 \times 1 = 1$, pelo que $6B = -8$.

Logo, $B = -\frac{4}{3}$, pelo que $P_3(x) = 3 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x(x-1)(x-2) = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3$

Segunda resolução

Vamos resolver este exercício, usando um processo análogo, mas começando "da direita para a esquerda".

Seja $P_1(x) = 1$. É claro que $P_1(3) = 1$, mas $P_1(2) = 1 \neq 3$. Pretendemos obter um novo polinómio $P_2(x)$ que satisfaça $P_2(2) = 3$, mas sem deixar de satisfazer $P_2(3) = 1$. Tal é conseguido com $P_2(x) = 1 + a(x-3)$.

Então, devemos ter $3 = P_2(2) = 1 - a$, donde vem $a = -2$. Logo, $P_2(x) = 1 - 2(x-3) = 7 - 2x$.

E, agora, fazemos $P_3(x) = 7 - 2x + b(x-2)(x-3)$.

De $1 = P_3(1) = 7 - 2 + 2b = 2b + 5$, vem $b = -2$.

Logo, $P_3(x) = 7 - 2x - 2(x-3)(x-2) = 7 - 2x - 2(x^2 - 5x + 6) = -2x^2 + 8x - 5$.

Seja $P_4(x) = -2x^2 + 8x - 5 + c(x-3)(x-2)(x-1)$.

De $3 = P_4(0) = -5 - 6c$, vem $6c = -8$. Logo, $c = -\frac{4}{3}$.

Efectuando os cálculos, temos:

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= -2x^2 + 8x - 5 - \frac{4}{3}(x-3)(x-2)(x-1) \\
 &= -2x^2 + 8x - 5 - \frac{4}{3}(x^2 - 5x + 6)(x-1) \\
 &= -2x^2 + 8x - 5 - \frac{4}{3}(x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6) \\
 &= -2x^2 + 8x - 5 - \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{44}{3}x + 8 \\
 &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3
 \end{aligned}$$

É claro que tínhamos de obter o mesmo polinómio, porque não pode haver mais do que uma solução de grau menor ou igual a 3.

É claro que ainda não respondemos à questão de saber se o problema tem solução no seu caso geral.

Terceira resolução

Consideremos os seguintes polinómios:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1 \times (-2) \times (-3)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6} \\ L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{1 \times (-1) \times (-2)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2} \\ L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{2 \times 1 \times (-1)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2} \\ L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{3 \times 2 \times 1} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} \end{array} \right.$$

Os quatro polinómios anteriores são de grau 3, pelo que qualquer combinação linear dos quatro polinómios tem grau menor ou igual a 3.

Além disso, temos que $L_0(x)$ se anula nos pontos 1, 2 e 3, tomando o valor 1, no ponto 0. De modo análogo, temos que $L_i(x)$, (com $i = 0, 1, 2, 3$), toma o valor 1 no ponto i e anula-se nos outros três pontos dados.

Então, o polinómio $L(x) = 3L_0(x) + 1L_1(x) + 3L_2(x) + 1L_3(x)$ satisfaz as condições do enunciado. À expressão anterior é costume chamar polinómio interpolador de Lagrange.

Efectuemos os cálculos:

$$\begin{aligned}
 L(x) &= 3L_0(x) + 1L_1(x) + 3L_2(x) + 1L_3(x) \\
 &= 3 \times \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6} + \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2} + 3 \times \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2} + \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} \\
 &= \frac{-3x^3 + 18x^2 - 33x + 18 + x^3 - 3x^2 + 2x}{6} + \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - 3x^3 + 12x^2 - 9x}{2} \\
 &= \frac{-2x^3 + 15x^2 - 31x + 18}{6} + \frac{-2x^3 + 7x^2 - 3x}{2} \\
 &= \frac{-2x^3 + 15x^2 - 31x + 18 - 6x^3 + 21x^2 - 9x}{6} \\
 &= \frac{-8x^3 + 36x^2 - 40x + 18}{6} \\
 &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3
 \end{aligned}$$

Esta última "construção" mostra-nos que existe um polinómio, de grau menor ou igual a n , que assume $n + 1$ valores em $n + 1$ pontos.

Tal existência também se verifica nas duas primeiras resoluções, uma vez que o polinómio a somar ao anteriormente obtido, apenas se anula nos pontos anteriores àquele que está a ser considerado, pelo que a constante que aparece no novo polinómio pode ser determinada (de modo único).

Exemplo 433 Sejam $n \in \mathbb{N}, h > 0, y_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, \dots, n$. Determine o polinómio $P(x)$, de grau menor ou igual a n e que satisfaz $P(a) = y_0, P(a+h) = y_1, \dots, P(a+ih) = y_i, \dots, P(a+nh) = y_n$.

Resolução

Comecemos por notar que os argumentos $a, a+h, a+2h, \dots, a+nh$ variam em progressão aritmética, o que pode não acontecer no caso geral.

Sejam $P_0(x) = y_0$ e $P_1(x) = P_0(x) + c_1(x-a)$.

Então, $y_1 = P_1(a+h) = P_0(x) + c_1(a+h-a) = y_0 + c_1h$.

Então, $c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}$ e $P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x-a)$.

Seja $P_2(x) = P_1(x) + c_2(x-a)(x-a-h) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x-a) + c_2(x-a)(x-a-h)$.

Então,

$$\begin{aligned}
 y_2 &= P_2(a+2h) \\
 &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(a+2h-a) + c_2(a+h-a)(a+2h-a-h) \\
 &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \times 2h + c_2 \times h \times 2h = y_0 + 2(y_1 - y_0) + 2c_2h^2 \\
 &= y_0 + 2y_1 - 2y_0 + 2c_2h^2 = 2y_1 - y_0 + 2c_2h^2
 \end{aligned}$$

Logo,

$$c_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}$$

Então:

$$P_2(x) = \frac{y_0}{0!} + \frac{y_1 - y_0}{1! \times h}(x-a) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2! \times h^2}(x-a)(x-a-h)$$

E, se continuarmos, temos:

$$P_3(x) = P_2(x) + c_3(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)$$

Então:

$$\begin{aligned} y_3 &= P_3(a+3h) \\ &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \times 3h + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} \times 3h \times 2h + c_3 \times 3h \times 2h \times h \\ &= y_0 + 3y_1 - 3y_0 + 3y_2 - 6y_1 + 3y_0 + c_3 \times 3! \times h^3 \\ &= 3y_2 - 3y_1 + y_0 + 6h^3 c_3 \end{aligned}$$

Então:

$$c_3 = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3! \times h^3}$$

Observemos o seguinte quadro, obtido por diferenças entre elementos consecutivos da linha anterior:

y_0		y_1		y_2		y_3
	$y_1 - y_0$		$y_2 - y_1$		$y_3 - y_2$	
		$y_2 - 2y_1 + y_0$		$y_3 - 2y_2 + y_1$		
			$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$			

Então, $P_3(x)$ é o seguinte polinómio:

$$\frac{y_0}{0!} + \frac{y_1 - y_0}{1! \times h} (x - a) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2! \times h^2} (x - a)(x - a - h) + \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3! \times h^3} (x - a)(x - a - h)(x - a - 2h)$$

Observe o polinómio $P_3(x)$ e compare com o quadro anterior.

Voltemos ao exemplo já resolvido, em que $P(0) = 3$, $P(1) = 1$, $P(2) = 3$ e $P(3) = 1$.

x_i	0	1	2	3
y_i	3	1	3	1
		-2	2	-2
			4	-4
				-8

Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= 3 - \frac{2}{1 \times 1} (x - 0) + \frac{4}{2 \times 1^2} (x - 0)(x - 1) - \frac{8}{6 \times 1^3} (x - 0)(x - 1)(x - 2) \\ &= 3 - 2x + 2x(x - 1) - \frac{4}{3}x(x - 1)(x - 2) \\ &= 3 - 2x + 2x^2 - 2x - \frac{4}{3}x(x^2 - 3x + 2) \\ &= 3 - 2x + 2x^2 - 2x - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{8}{3}x \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3 \end{aligned}$$

Voltemos ao quadro anteriormente apresentado:

x_0	x_1		x_2		x_3
y_0	y_1		y_2		y_3
	$y_1 - y_0$		$y_2 - y_1$		$y_3 - y_2$
		$y_2 - 2y_1 + y_0$		$y_3 - 2y_2 + y_1$	
			$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$		

Vejamos como obter o polinómio partindo "da direita para a esquerda", supondo que os valores de x_i estão em progressão aritmética:

$$P_1(x) = y_3$$

$$P_2(x) = P_1(x) + A(x - x_3) = y_3 + A(x - x_3)$$

$$y_2 = P_2(x_2) = y_3 + A(x_2 - x_3) = y_3 - Ah$$

$$\text{Então, } A = \frac{y_3 - y_2}{h}.$$

Logo,

$$P_2(x) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x - x_3)$$

$$\text{Seja } P_3(x) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x - x_3) + B(x - x_3)(x - x_2).$$

$$y_1 = P_3(x_1) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x_1 - x_3) + B(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$$

Então,

$$B = \frac{y_1 - y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(2h)}{2h^2} = \frac{y_1 - y_3 + 2y_3 - 2y_2}{2h^2} = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2h^2}$$

Logo,

$$P_3(x) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x - x_3) + \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}(x - x_3)(x - x_2)$$

$$\text{Seja } P_4(x) = P_3(x) + C(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1).$$

$$y_0 = P_4(x_0) = y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x_0 - x_3) + \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}(x_0 - x_3)(x_0 - x_2) + C(x_0 - x_3)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)$$

Então,

$$\begin{aligned} y_0 &= y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(-3h) + \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}(-3h)(-2h) + C(x_0 - x_3)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) \\ &= y_3 - 3y_3 + 3y_2 + 3y_3 - 6y_2 + 3y_1 + C(-3h)(-2h)(-h) \\ &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - 6Ch^3 \end{aligned}$$

Logo,

$$C = \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6h^3}$$

E, finalmente, temos

$$\begin{aligned} P_4(x) &= y_3 + \frac{y_3 - y_2}{h}(x - x_3) + \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{2h^2}(x - x_3)(x - x_2) \\ &\quad + \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6h^3}(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1) \end{aligned}$$

Vejamos o exemplo anteriormente apresentado:

x_i	0	1	2	3
y_i	3	1	3	1
		-2	2	-2
			4	-4
				-8

Então,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 1 - \frac{2}{1}(x-3) - \frac{4}{2}(x-2)(x-3) - \frac{8}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\
 &= 1 - 2x + 6 - 2(x^2 - 5x + 6) - \frac{4}{3}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \\
 &= 7 - 2x - 2x^2 + 10x - 12 - \frac{4}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{44}{3}x + 8 \\
 &= 3 - \frac{20}{3}x + 6x^2 - \frac{4}{3}x^3 \\
 &= -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3
 \end{aligned}$$

Diferenças divididas

O exemplo anterior pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|cccc}
 x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 \hline
 y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \\
 & & \frac{1-3}{1-0} & \frac{3-1}{2-1} & \frac{1-3}{3-2}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c|cccc}
 x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 \hline
 y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \\
 & & -2 & 2 & -2 \\
 & & & \frac{2+2}{2-0} & \frac{-2-2}{3-1}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c|cccc}
 x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 \hline
 y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \\
 & & -2 & 2 & -2 \\
 & & & 2 & -2 \\
 & & & & \frac{-2-2}{3-0}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c|cccc}
 x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 \hline
 y_i & 3 & 1 & 3 & 1 \\
 & & -2 & 2 & -2 \\
 & & & 2 & -2 \\
 & & & & -\frac{4}{3}
 \end{array}
 \end{array}$$

Então,

$$P(x) = 3 - 2x + 2x(x-1) - \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

Ou,

$$P(x) = 1 - 2(x-3) - 2(x-3)(x-2) - \frac{4}{3}(x-3)(x-2)(x-1)$$

Se efectuarmos os cálculos, obtemos

$$P(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - \frac{20}{3}x + 3$$

Exemplo 434 Usando as fórmulas das diferenças divididas progressivas e regressivas, determine o polinómio $P(x)$, de grau mínimo, que satisfaz as seguintes condições:

x_i	1	2	4	7	15
$P(x_i)$	6	20	40	100	300

Resolução

1	2	4	7	15
6	20	40	100	300
$\frac{20-6}{2-1}$	$\frac{40-20}{4-2}$	$\frac{100-40}{7-4}$	$\frac{300-100}{15-7}$	
14	10	20	25	
$\frac{10-14}{4-1}$	$\frac{20-10}{7-2}$	$\frac{25-20}{15-4}$		
2	4	7	15	
6	20	40	100	300
14	10	20	25	
$-\frac{4}{3}$	$\frac{2+\frac{4}{3}}{6}$	$\frac{\frac{5}{11}-2}{13}$	$\frac{5}{11}$	
1	2	4	7	15
6	20	40	100	300
14	10	20	25	
$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{17}{143}$	$\frac{5}{11}$	
	$-\frac{17}{143}-\frac{5}{9}$			
1	2	4	7	15
6	20	40	100	300
14	10	20	25	
$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{17}{143}$	$\frac{5}{11}$	
		$-\frac{62}{1287}$		

Então,

$$P(x) = 6 + 14(x-1) - \frac{4}{3}(x-1)(x-2) + \frac{5}{9}(x-1)(x-2)(x-4) - \frac{62}{1287}(x-1)(x-2)(x-4)(x-7)$$

Ou, pela fórmula das diferenças divididas regressivas

$$\begin{aligned} P(x) &= 300 + 25(x-15) + \frac{5}{11}(x-15)(x-7) - \frac{17}{143}(x-15)(x-7)(x-4) \\ &\quad - \frac{62}{1287}(x-15)(x-7)(x-4)(x-2) \end{aligned}$$

Registe-se que as fórmulas das diferenças divididas (progressivas e regressivas) podem aplicar-se em qualquer situação, enquanto que as fórmulas das diferenças não divididas (progressivas e regressivas) só podem ser utilizadas, quando os valores de x estão em progressão aritmética.

Efectuando os cálculos, obtemos, nos dois casos:

$$P(x) = -\frac{62}{1287}x^4 + \frac{1583}{1287}x^3 - \frac{10627}{1287}x^2 + \frac{39748}{1287}x - \frac{7640}{429}$$

Exemplo 435 Usando as fórmulas das diferenças divididas, progressivas e regressivas, determine o polinómio $P(x)$, de grau mínimo, que satisfaz as seguintes condições:

x_i	1	3	7	15	31
$P(x_i)$	6	8	40	96	240

Resolução

1	3	7	15	31
6	8	40	96	240
	1	8	7	9
		$\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
		$-\frac{5}{56}$	$\frac{1}{168}$	
			$\frac{1}{315}$	

Então,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 6 + 1(x-1) + \frac{7}{6}(x-1)(x-3) - \frac{5}{56}(x-1)(x-3)(x-7) \\
 &\quad + \frac{1}{315}(x-1)(x-3)(x-7)(x-15) \\
 &= 240 + 9(x-31) + \frac{1}{12}(x-31)(x-15) + \frac{1}{168}(x-31)(x-15)(x-7) \\
 &\quad + \frac{1}{315}(x-31)(x-15)(x-7)(x-3)
 \end{aligned}$$

Efectuando os cálculos, obtemos, nos dois casos:

$$P(x) = \frac{1}{315}x^4 - \frac{433}{2520}x^3 + \frac{6983}{2520}x^2 - \frac{6701}{840}x + \frac{91}{8}$$

Exemplo 436 Usando as fórmulas das diferenças divididas e não divididas, progressivas e regressivas, determine o polinómio $P(x)$, de grau mínimo, que satisfaz as seguintes condições:

x_i	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	6	7	10	20	30

Resolução

Diferenças divididas:

1	2	3	4	5
6	7	10	20	30
	1	3	10	10
		1	$\frac{7}{2}$	0
		$\frac{5}{6}$	$-\frac{7}{6}$	
			$-\frac{1}{2}$	

Então,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 6 + 1(x-1) + 1(x-1)(x-2) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\
 &= 30 + 10(x-5) - \frac{7}{6}(x-5)(x-4)(x-3) - \frac{1}{2}(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)
 \end{aligned}$$

Diferenças não divididas:

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{6} & \frac{2}{7} & \frac{3}{10} & \frac{4}{20} & \frac{5}{30} & \\
 & 1 & 3 & 10 & 10 & \\
 & & 2 & 7 & 0 & \\
 & & & 5 & -7 & \\
 & & & & -12 &
 \end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 6 + 1(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)(x-2) + \frac{5}{3!}(x-1)(x-2)(x-3) \\
 &\quad - \frac{12}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\
 &= 6 + 1(x-1) + (x-1)(x-2) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 30 + 10(x-5) - \frac{7}{3!}(x-5)(x-4)(x-3) - \frac{12}{4!}(x-5)(x-4)(x-3)(x-2) \\
 &= 30 + 10(x-5) - \frac{7}{6}(x-5)(x-4)(x-3) - \frac{1}{2}(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)
 \end{aligned}$$

Em qualquer dos casos, obtemos o polinómio

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{35}{6}x^3 - \frac{43}{2}x^2 + \frac{193}{6}x - 10$$

E, conforme pode ser verificado, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) = 6 \\ P(2) = 7 \\ P(3) = 10 \\ P(4) = 20 \\ P(5) = 30 \end{array} \right.$$

Capítulo 22

Construindo Cones

Exemplo 437 Considere um arco de circunferência de amplitude α rad e o cone construído a partir do sector circular correspondente ao arco anterior. Determine o volume e a área lateral do cone, supondo que o raio da circunferência é R :

Resolução

Seja C o comprimento do arco de amplitude α . Então, $\frac{2\pi}{2\pi R} = \frac{\alpha}{C}$, donde vem $C = R\alpha$.

Se representarmos o raio da base do cone por r , teremos $2\pi r = R\alpha$, donde se conclui que $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$, pelo que a área da base do cone é

$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{R\alpha}{2\pi} \right)^2 = \frac{R^2 \alpha^2}{4\pi}$$

Seja h a altura do cone. Então, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} h^2 + r^2 &= R^2 \iff h^2 = R^2 - r^2 \\ \iff h^2 &= R^2 - \frac{R^2 \alpha^2}{4\pi^2} \\ \iff h^2 &= \frac{4\pi^2 R^2 - R^2 \alpha^2}{4\pi^2} \\ \iff h^2 &= \frac{(4\pi^2 - \alpha^2) R^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Logo, $h = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$. Então, o volume $V(\alpha)$ do cone é dado por

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \frac{1}{3} \times \frac{R^2 \alpha^2}{4\pi} \times \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} \\ &= \frac{R^3 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} \end{aligned}$$

Consideremos a função $f(x) = x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$. Então:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \\
 &= 2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \\
 &= \frac{2x(4\pi^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \\
 &= \frac{8x\pi^2 - 3x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} \\
 &= \frac{(8\pi^2 - 3x^2)x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}
 \end{aligned}$$

Neste caso, o domínio da função é $]0, 2\pi[$, tendo-se para o sinal da derivada:

x	0	$\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}$	2π
x	+	+	+
$8\pi^2 - 3x^2$	+	0	-
$\sqrt{4\pi^2 - x^2}$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	Máx	\searrow

Nota: $8\pi^2 - 3x^2 = 0 \iff x = \pm \frac{2}{3}\pi$

O máximo da função é $f(\frac{2}{3}\pi\sqrt{6})$. O maximizante é $\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}$, o qual é aproximadamente igual a 5,130 199 322. O valor anterior está em radianos, pelo que o valor do maximizante é cerca de 293,938 769 1°.

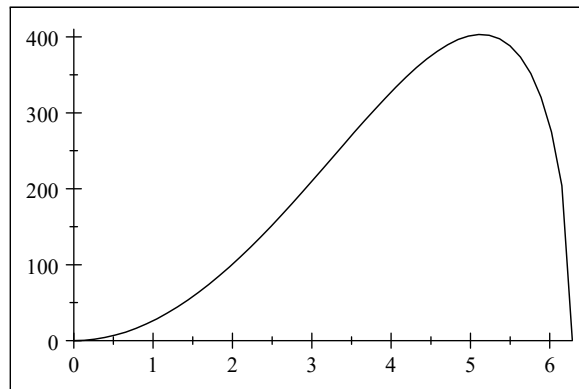
$$f\left(\frac{2}{3}\pi\sqrt{6}\right) = \frac{16}{9}\pi^3\sqrt{3}$$

Então, o volume máximo do cone é $V = \frac{16}{9}\pi^3 \times \frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{3} = \frac{2}{27}\pi R^3\sqrt{3}$, ou seja, .

Se tivermos $R = 10$ cm, o volume máximo do cone é $\frac{2000}{27}\pi\sqrt{3}$ cm³.

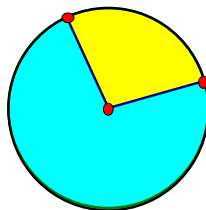
Seja $V(x) = \frac{1000x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{125x^2}{3\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$.

A representação gráfica desta função é a seguinte:



Quanto à área lateral do cone, basta determinar a área do sector circular correspondente a um arco de α rad, obtendo-se $\alpha \frac{R^2}{2}$.

Exemplo 438 Considere dois pontos numa circunferência de raio R , os quais definem dois arcos de amplitudes α e $2\pi - \alpha$. Considere os dois sectores circulares correspondentes aos dois arcos, como se indica na figura seguinte. Suponha que construímos dois cones, utilizando cada um dos sectores circulares. Determine as amplitudes dos arcos de modo que o volume total dos dois cones seja máximo.



Resolução

No exercício anterior, calculámos o volume do cone correspondente ao arco de amplitude α :

$$V(\alpha) = \frac{R^3 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

O volume do outro cone é dado por

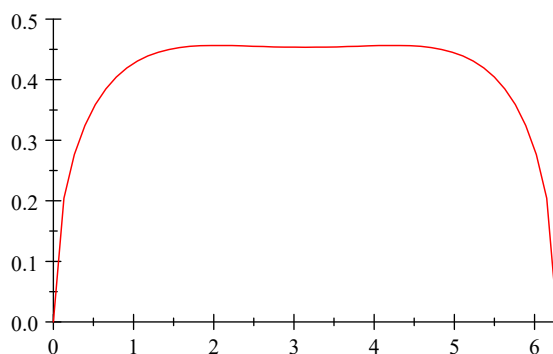
$$V(2\pi - \alpha) = \frac{R^3 (2\pi - \alpha)^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - (2\pi - \alpha)^2}$$

Então o volume dos dois cones é

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= V(2\pi - \alpha) + V(\alpha) = \frac{R^3 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \frac{R^3 (2\pi - \alpha)^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - (2\pi - \alpha)^2} \\ &= \frac{R^3 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \frac{R^3 (2\pi - \alpha)^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - 4\pi^2 + 4\pi\alpha - \alpha^2} \\ &= \frac{R^3 \alpha^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2} + \frac{R^3 (2\pi - \alpha)^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} \end{aligned}$$

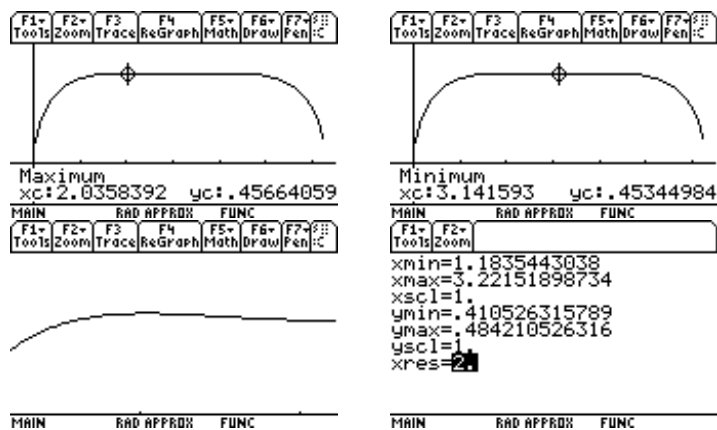
Suponhamos que $R = 1$.

Representemos graficamente a função $f(x) = \frac{x^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - x^2} + \frac{(2\pi - x)^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi x - x^2}$:



$$f(x) = \frac{x^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - x^2} + \frac{(2\pi - x)^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi x - x^2}$$

Recorrendo à calculadora, podemos encontrar o máximo da função e um dos maximizantes:



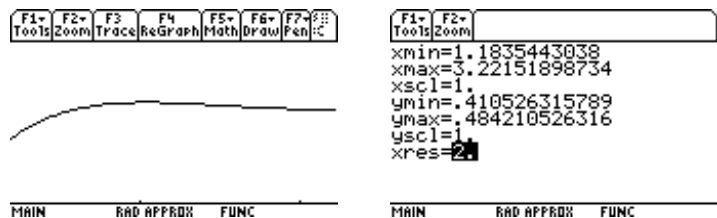
Como podemos verificar, um dos maximizantes é 2,0358392 (aproximadamente), sendo o outro $2\pi - 2,0358392$ (aproximadamente).

É claro que o gráfico anterior é simétrico em relação à recta de equação $x = \pi$, pois é indiferente usar os arcos de amplitudes x e $2\pi - x$ ou os arcos de amplitudes $2\pi - x$ e x .

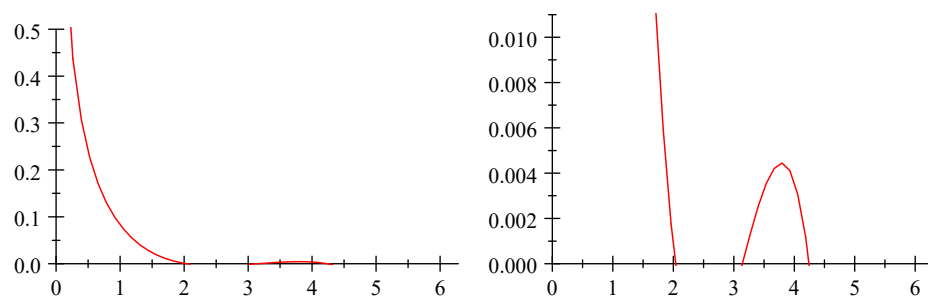
Registe-se que a função tem um mínimo relativo no ponto $x = \pi$.

Convém referir que a função não é constante em nenhum intervalo, embora o gráfico possa dar essa ideia. Repare-se nos valores do máximo e do mínimo (relativo) indicados pela Calculadora: 0,45664059 e 0,45344984.

Zoom do gráfico da função e respectiva janela de visualização:



Representação gráfica da derivada da função:



Capítulo 23

Brincando com Chapéus

Oito condenados à pena capital, com chapéus azuis, uns, e chapéus vermelhos, outros, estão em fila indiana, sendo que cada uma das pessoas, apenas vê os chapéus das pessoas que estão à sua frente. O rei gosta de jogos e de premiar os bons jogadores. Por isso resolveu que aqueles que acertarem na cor do seu próprio chapéu são libertados e os que falharem são executados.

Qual deve ser a estratégia para que, mais de metade das pessoas descubram a cor do seu chapéu? São permitidas conversas entre as pessoas, para combinar a estratégia a seguir, mas, apenas, antes de terem os chapéus colocados. Após o palpite de cada condenado, o rei diz se o condenado falhou ou acertou.

Suponhamos que temos 8 condenados. O último da fila vê sete chapéus (só não vê o seu). Como há uma cor maioritária, ele refere essa cor.

Se a primeira pessoa a falar disser "azul", os restantes dizem "azul" e a maioria acerta na cor do seu chapéu. Se disser "vermelho", todos dizem "vermelho" e a maioria acerta. No entanto, há a possibilidade de apenas metade se salvar, caso haja 4 chapéus de cada cor. Mais adiante, veremos uma estratégia melhor.

Suponhamos, agora que temos 7 condenados em vez de 8. Neste caso, pode não haver uma cor maioritária entre os primeiros 6 chapéus.

Combinemos a seguinte estratégia: se houver uma cor maioritária, o último da fila refere essa cor; se não houver dirá "vermelho".

Suponhamos que o último da fila diz "azul". Então, todos dizem "azul" e a maioria acerta.

Se o último disser "vermelho", existe uma possibilidade de empate nos seis chapéus da frente, caso a penúltima pessoa da fila não veja quatro ou cinco chapéus vermelhos (caso em que dirá "vermelho", sendo acompanhado pelos restantes).

Se a penúltima pessoa vir dois ou três chapéus vermelhos dirá "azul", alertando, novamente, para a possibilidade de empate. A terceira pessoa a falar dirá a cor que não empata (relativamente aos seis da frente). Se falhar, então há um empate nas primeiras seis pessoas da fila, pelo que os últimos quatro a falar acertam. Se acertar, então é conhecido o total de chapéus de cada cor (quatro vermelhos e dois azuis), pelo que, a partir daqui, todos acertam. De qualquer modo, mais de metade dos condenados salvam-se.

Se, no caso ímpar, as duas primeiras pessoas referirem a mesma cor, temos a certeza que há uma cor maioritária, mas vamos acrescentar uma primeira nuance à nossa estratégia: se alguém, com excepção dos dois primeiros a falar, verificar à sua frente uma situação de empate dirá a cor

minoritária. Assim, todos os restantes saberão a cor do seu chapéu.

Mas esta nuance, ainda pode ser melhorada: se alguém verificar à sua frente uma situação em que o número de chapéus duma cor é um múltiplo do número de chapéus da outra cor, dirá a cor minoritária. A pessoa seguinte só não conhece a cor do seu próprio chapéu, pelo que tem, apenas, duas alternativas. No entanto, esta estratégia é incorrecta, em certos casos. Imaginemos que vemos à nossa frente oito chapéus azuis e quatro vermelhos e dizemos "vermelho". Se a cor maioritária for "azul", aquele que está imediatamente à nossa frente, se tiver chapéu vermelho, não sabe se a distribuição é $9 + 3$ ou $8 + 4$, pelo que combinamos que, no caso de situação duvidosa, apenas dizemos a cor minoritária no caso da diferença entre os números de chapéus das duas cores ser mínima (no caso exemplificado, só diríamos a cor minoritária se a distribuição fosse $8 + 4$).

Suponhamos que a sequência (do fim da fila para o princípio) era a seguinte: V, A, A, V, V, V, A, A, A, A, V, A, A, A, V, V, A

A sequência de respostas é a seguinte:

1. A (falha) vê 10 A, 6 V
2. A (acerta) vê 9 A, 6 V
3. A (acerta) vê 8 A, 6 V
4. A (falha) vê 8 A, 5 V
5. V (acerta) vê 8 A, 4 V
6. Vê 8 A, 3 V. O facto da resposta anterior ser V e não A é um alerta!

A distribuição pode ser $9 + 3$ ou $8 + 4$, pelo que, conforme combinado, a distribuição é $8 + 4$.

Então, todos sabem que, daqui para a frente, temos quatro chapéus vermelhos.

A resposta (certa) é V, pelo que passa a haver três chapéus vermelhos).

7. A (acerta) vê 3 V e faltam 3 V
8. A (acerta) vê 3 V e faltam 3 V
9. A (acerta) vê 3 V e faltam 3 V
10. A (acerta) vê 3 V e faltam 3 V
11. V (acerta) vê 2 V e faltavam 3 V
12. A (acerta) vê 2 V e faltam 2 V
13. A (acerta) vê 2 V e faltam 2 V
14. A (acerta) vê 2 V e faltam 2 V
15. V (acerta) vê 1 V e faltam 2 V
16. V (acerta) vê 0 V e falta 1 V
17. A (acerta) vê 0 V e falta 0 V

resultado: 15 acertos e duas falhas, quando havia 10 chapéus azuis e 7 vermelhos.

Esta "estratégia melhorada" pode aplicar-se, sem restrições, no caso de termos um número par de pessoas, pois a situação inicial nunca é de empate.

Outra possibilidade consiste em combinar que o primeiro a falar dirá a cor minoritária dos chapéus à sua frente, em vez de dizer a cor maioritária, cor maioritária que será seguida pelos restantes, com as nuances já referidas.

Uma outra estratégia, no caso de um número ímpar de pessoas, consiste em arranjar um código para a situação de empate (a última pessoa da fila vê tantos chapéus azuis, como vermelhos): "o meu chapéu é vermelho", por exemplo (também pode ser, "encarnado").

Nos restantes casos, diz apenas, "azul" ou "vermelho", consoante a cor maioritária dos chapéus que estão à sua frente. E todos os restantes dizem só "azul", ou só "vermelho", se o primeiro a falar, apenas tiver dito "azul" ou "vermelho", ou "o meu chapéu é ..." se o primeiro a falar, também o tiver dito, para que o rei não desconfie da tramóia.

Repare-se que, no caso de se saber que há empate, todas as pessoas acabam por saber a cor do seu chapéu: a pessoa seguinte a falar, sabe quantos chapéus azuis e quantos chapéus vermelhos tem à sua frente, pelo que sabe a cor do seu chapéu. E todas as restantes pessoas acabam por saber a cor dos chapéus de todos. A única pessoa que pode não saber a cor do seu chapéu, é o último da fila (o primeiro a falar!).

Outra estratégia, melhor que a anterior, consiste em indicar ao rei a cor do nosso chapéu, ao mesmo tempo que dizemos à pessoa que nos precede, a cor do seu chapéu! Como fazer isso?

Se for permitido tocar na pessoa que nos precede, o código é facilímo: tocar no ombro esquerdo significa chapéu vermelho e tocar no ombro direito quer dizer chapéu azul.

Suponhamos que não é possível tocar na pessoa que nos precede. Então, combinamos o seguinte código:

Se respondermos ao rei, vermelho ou azul, então o chapéu da pessoa que nos precede é da mesma cor que o nosso.

Se respondermos ao rei, o meu chapéu é vermelho (ou o meu chapéu é azul), então o chapéu da pessoa que nos precede é de cor diferente do nosso.

Assim, mesmo sem haver empate, todos acertam, com a possível excepção do último da fila! Mas pode acontecer que o rei não vá em cantigas e exija que cada pessoa diga, apenas, "vermelho" ou, apenas, "azul". Como proceder, neste caso? Ainda podemos pensar em responder de imediato ou fazer uma pausa, consoante a cor do chapéu do condenado que está imediatamente antes de nós. E se não puder haver um código deste tipo?

Dois terços salvam-se!

Suponhamos que temos uma fila com um número de condenados que é múltiplo de 3 e em que cada condenado só vê os chapéus dos condenados que estão à sua frente na fila. Então, pelo menos, dois terços dos condenados serão salvos, se adoptarmos a seguinte estratégia:

1. Dividimos os condenados em grupos de 3, a partir do fim.

2. O último de cada grupo diz aos outros dois do seu grupo as cores dos respectivos chapéus, utilizando o seguinte código: Se disser vermelho, os dois chapéus são da mesma cor e se disser azul, os dois chapéus são de cores diferentes. Assim, o segundo do grupo acerta e, por fim, o terceiro também acerta.

3. Em cada grupo, salvam-se dois ou três condenados!

Se tivermos um número de condenados da forma $3n + 2$, formam-se grupos de três, a contar do fim, sobrando um grupo de dois.

1. Em cada grupo de três, adoptamos a estratégia anterior.

2. No grupo de dois, o segundo condenado diz a cor do chapéu do primeiro, o qual acerta. Neste grupo, salvam-se um ou dois condenados.

Se tivermos um número de condenados da forma $3n + 1$, formam-se grupos de três, a contar do fim, sobrando um condenado.

1. Em cada grupo de três, adoptamos a estratégia anterior.

2. O último a falar (o primeiro da fila) diz uma cor ao acaso e espera pelo resultado!

De três condenados, quantos se salvam?

Um rei perverso tem por hábito colocar um *puzzle* aos condenados, mesmo antes de estes serem executados. Os que se saírem bem são poupados. Neste dia havia três condenados ao garrote. O rei mandou colocá-los em fila, de forma que o preso 3 vê o 1 e o 2, o preso 2 só vê o preso 1 e este não tem qualquer contacto visual com os demais. Disse o rei: "Há três chapéus vermelhos e dois azuis, e é desses que vou tirar três e distribuir por vocês. Quem souber a cor do chapéu que lhe coube não será executado, antes partirá livre. Mas tem de ter a certeza absoluta e ser capaz de explicar

as suas conclusões. Responda primeiro o prisioneiro 3, depois o 2 e finalmente o 1". E assim foi. O preso 3, por não saber a cor do chapéu que lhe coubera, foi morto. O número 2 teve igual sorte. Mas o prisioneiro 1 salvou-se! Como?

Resolução

O prisioneiro 3 não tinha a certeza da cor do seu chapéu, pelo que não estava a ver dois chapéus azuis, caso em que o seu chapéu seria vermelho. O prisioneiro 2 também não tinha a certeza da cor do seu chapéu, pelo que o chapéu do primeiro preso é vermelho (se fosse azul, o preso 2 sabia que o seu chapéu era vermelho, em face do que tinha acontecido ao preso 3).

Salve-se quem puder

Outro rei, outros condenados, o mesmo vício do jogo. As regras são bem conhecidas dos prisioneiros, que se reúnem mesmo antes de o jogar, para tentar escolher uma boa estratégia (se é que existe uma!).

Desta vez são colocados chapéus em todos os 38 condenados, que podem ser vermelhos ou azuis. Cada um vê os chapéus dos outros, mas não o próprio. A um sinal do rei todos devem tentar adivinhar a cor do seu chapéu. Quem acertar vive, quem errar morre.

O jogo efectuou-se e 19 presos sobreviveram. "Tivestes sorte!", disse o rei. "Nunca matarás mais de metade de nós!", respondeu Spartacus, um dos sobreviventes.

Poderá Spartacus ter razão?

Spartacus tem razão, mas jogou muito mal! Antes do sinal do rei, os condenados podem juntar-se em fila, lado a lado, de modo que os de chapéu vermelho fiquem à direita e os de chapéu azul fiquem à esquerda:

Um qualquer condenado coloca-se junto a uma parede (se houver!). Um segundo condenado junta-se ao anterior, colocando-se à direita do primeiro se vir que ele tem um chapéu azul, e à esquerda, se vir que ele tem um chapéu vermelho. Assim, quando o segundo condenado se coloca na fila, o primeiro descobre a cor do seu próprio chapéu.

O terceiro condenado a juntar-se à fila procede de modo semelhante: se os dois primeiros condenados tiverem chapéus vermelhos, coloca-se à esquerda de ambos; se tiverem chapéus azuis, coloca-se à direita de ambos; se tiverem chapéus de cores diferentes, coloca-se entre ambos (fica entre um azul e um vermelho, pelo que está, sempre, bem colocado).

Os restantes condenados procedem do mesmo modo. Quando houver um condenado que se coloca entre outros dois, está a garantir que os da esquerda são azuis e os da direita são vermelhos. Quando o último condenado ocupa o seu lugar, todos os restantes ficam a conhecer a cor do próprio chapéu, a menos que ele se coloque num dos extremos. Isso significa que todos os restantes se colocaram num dos extremos e todos eles têm chapéus da mesma cor.

E o último condenado também se salva:

Se ficar num dos extremos e tiver o chapéu da mesma cor dos restantes, o condenado que está ao seu lado troca de posição com o último condenado, o qual fica a saber que todos os chapéus são da mesma cor.

Se não ficar num dos extremos, está entre dois condenados com chapéus de cores diferentes, pelo que aquele que tiver a mesma cor de chapéu troca com ele, dando-lhe a pista que ele necessita para se salvar!

Se morreram 19 condenados e podiam salvar-se todos, Spartacus jogou muito mal!

Salve-se quem puder, em fila

O rei da estória anterior irritou-se e, no dia de execuções seguinte, mudou as regras. Agora os 59 prisioneiros são colocados em fila. Cada um recebe um chapéu que pode ser vermelho ou azul. O último da fila (o 59) vê todos os outros, o 58 vê todos menos o 59, etc. Começando pelo 59, cada

preso deve tentar adivinhar a cor do seu chapéu. Se acertar, vive, se errar morre. Mas a execução só é efectuada no dia seguinte. Por isso, cada preso ouve os palpites dos prisioneiros que o precedem, mas não sabe se são bons ou maus. Isto é, o prisioneiro genérico, na posição i , vê os chapéus dos presos $1, 2, \dots, i - 1$ e ouve os palpites dos presos O rei concede uma reunião aos 59 condenados antes do jogo fatal. Desta vez, pelo aspecto feliz dos prisioneiros, poucos irão morrer. Quantos se podem, de certeza, salvar?

Por cada 3, salvam-se 2, no mínimo!

Suponhamos que temos 3 condenados, em fila indiana, de modo que o terceiro vê os chapéus dos dois primeiros, o segundo só vê o chapéu do primeiro e este não vê o chapéu de nenhum dos outros. É possível arranjar um código de modo ao terceiro condenado fazer com que os outros dois acertem na cor dos seus chapéus! A estratégia combinada entre todos é a seguinte:

Se os dois condenados da frente tiverem chapéus da mesma cor, o terceiro condenado diz vermelho, o segundo condenado diz a cor do chapéu do primeiro e este repete a mesma cor do anterior.

Se os dois condenados da frente tiverem chapéus de cores diferentes, o terceiro condenado diz azul, o segundo condenado diz a cor contrária ao chapéu do primeiro e este diz a cor contrária à do segundo.

Resultado: Dois condenados salvam-se e o terceiro ainda pode salvar-se!

Se tivermos dois condenados, em fila indiana, o segundo diz a cor do chapéu do primeiro que se limita a repetir a cor que ouviu:

Resultado: Um condenado salva-se e o segundo ainda pode salvar-se!

Voltemos aos 59 condenados:

Os prisioneiros 1 e 2 formam um grupo e os restantes dividem-se em 19 grupos de 3 (59, 58 e 57 num grupo, etc.).

Então, 39 presos estão salvos e, dos outros 20, ainda podem salvar-se muitos!

Repare-se que, se tivermos 20 cegos, todos podem ser salvos se, por exemplo, forem colocados nas posições 1, 3, 6, 9, 12, ..., 57!

E que tal uma amnistia, camarada Spartacus?

Terminamos com uma resolução bastante interessante e que mostra o poder das célulaszinhas cinzentas, como diria o detective Henri Poirot.

Esta resolução é quase igual àquela em que, numa fila de 3 elementos, o terceiro indica, com uma única palavra, a cor dos chapéus dos dois elementos que estão à sua frente. O segredo é bem mais fácil do que pode parecer:

Suponhamos que temos uma fila com 20 pessoas, umas atrás das outras. O 20º elemento só tem duas hipóteses, quando conta o número de chapéus azuis à sua frente: ou esse número é par ou é ímpar,

Então, combina com os restantes o seguinte: Se disser azul, há um número ímpar de chapéus azuis à sua frente; se disser vermelho, então o número de chapéus azuis é par. E a probabilidade dele se salvar é 50%.

Quanto aos restantes, desde que sigam o processo com atenção, todos se salvam. O penúltimo conta os chapéus azuis à sua frente e compara a paridade desse número com a paridade indicada pelo último da fila, para saber a cor do seu chapéu. E o processo continua, até ao primeiro da fila.

É caso para recordar um jogo infantil que é do conhecimento de todos: PAR OU ÍMPAR?

Vejamos uma situação concreta: Suponhamos que temos uma fila de 7 pessoas e que as cores dos chapéus são, do 7º para o 1º da fila: A,V,A,A,A,V,A.

A 7ª pessoa da fila vê 4 chapéus azuis e 2 chapéus vermelhos. Então, dirá vermelho, sendo que todos saberão que nos 6 prisioneiros que estão no início da fila, há um número par de chapéus azuis.

O 6º elemento da fila continua a ver um número par de chapéus azuis (4), pelo que dirá vermelho.

O 5º elemento da fila sabe que nos primeiros 5, continua a haver um número par de chapéus azuis, pelo que dirá azul.

O 4º elemento da fila sabe que nos primeiros 5, há um número par de chapéus azuis, sendo que o 5º elemento tem um chapéu azul. Então, nos primeiros 4, há um número ímpar de chapéus azuis e ele só vê 2 chapéus azuis à sua frente, pelo que dirá azul.

O 3º elemento da fila sabe que nos primeiros 5, há um número par de chapéus azuis e já foram identificados 2 chapéus azuis. Então, nos primeiros três, há um número par de chapéus azuis e ele só vê um chapéu dessa cor. Então, o seu chapéu é azul.

O 2º elemento da fila sabe que nos primeiros 5, há um número par de chapéus azuis e já foram identificados 3 chapéus azuis. Então, nos primeiros dois, há um número ímpar de chapéus azuis e ele vê um chapéu dessa cor. Então, o seu chapéu é vermelho.

O 1º elemento da fila sabe que nos primeiros 5, há um número par de chapéus azuis e já foram identificados 3 chapéus azuis. Então, o seu chapéu é azul.

Resumindo, temos a seguinte situação (numa fila de n elementos): o último elemento indica se o número de chapéus azuis à sua frente é par ou ímpar. Cada elemento da fila conta os chapéus azuis que está a ver (à sua frente), soma com o número de chapéus azuis que já foram referidos atrás de si (sem contar com o primeiro que falou) e descobre a cor do seu chapéu.

Capítulo 24

Os Números Complexos

24.1 Uma ideia maluca

Suponhamos que queremos ampliar o conjunto dos números reais e que criamos um novo número i , número este que fica sujeito à condição $i^2 = -1$.

O conjunto $\mathbb{R} \cup \{i\}$ é pouco interessante, pois não permite somar 1 com i , isto é, o conjunto $\mathbb{R} \cup \{i\}$ não é fechado para a adição. Para que tal aconteça, devemos ter números do tipo $1+i, 5+i, \pi+i, \dots$

Mas interessa-nos, também multiplicar, pelo que devemos ter números como $2i, -3i$ e, por causa da adição, $4+3i, 5-2i, \dots$

Do exposto fica-nos a necessidade de que o novo conjunto tenha elementos da forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Mas será que não são necessários outros números?

Comecemos pela adição:

É natural a definição $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pelo que não há problemas com a adição. A subtracção é transformada na adição, pelo que também não há problema.

Recordamos que, para subtrair dois números, somamos ao aditivo o simétrico do subtractivo, pelo que

$$(a+bi) - (c+di) = (a+bi) + (-c-di) = (a-c) + (b-d)i, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

É claro que pretendemos multiplicar números. Comecemos com um exemplo:

$$(2+3i)(4+5i) = 8+10i+12i+15i^2 = 8+22i-15 = -7+22i$$

O produto anterior efectua-se do mesmo modo que $(2+3x)(4+5x)$, com a diferença importantíssima de termos imposto a ideia maluca de que $i^2 = -1$.

No caso geral teremos, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad+bc)i - bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Quanto à divisão, começemos por notar que é impossível dividir um número diferente de zero por zero, impossibilidade que se manterá no novo conjunto.

Vejamos um exemplo de como dividir dois dos novos números:

$$\frac{2+3i}{3+4i} = \frac{2+3i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i+9i-12i^2}{9-16i^2} = \frac{6+i+12}{9+16} = \frac{18+i}{25} = \frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$$

No caso geral, será, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac+bd-adi+bci}{c^2+d^2} \\ &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

Então, tudo está a funcionar como desejado: podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir estes novos números. É claro que podemos calcular quadrados, cubos e quaisquer potências de expoente natural destes números, os quais são conhecidos por números complexos.

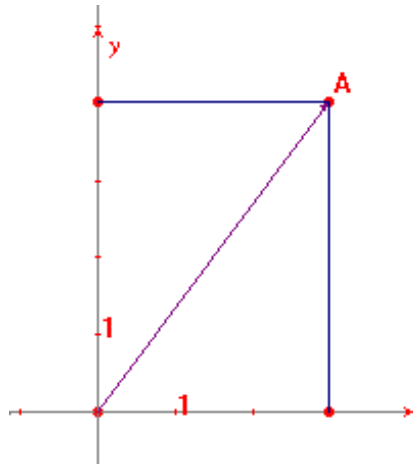
Exercício 439 Calcule $\frac{1+i}{1-i}$

Resolução

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i = 0+i$$

24.1.1 O plano complexo

Uma ideia interessante consiste em fazer corresponder a cada número complexo um ponto dum plano e reciprocamente, do mesmo modo que se faz corresponder a cada par ordenado de números reais um ponto dum plano. Assim, ao número complexo $2+3i$, fazemos corresponder o ponto de coordenadas $(2, 3)$. Esta ideia permite interpretar um número complexo como ponto ou como vector e permite-nos desenvolver muito mais o estudo das operações com estes números.



Ao número complexo $3+4i$ podemos fazer corresponder, num referencial ortonormado, o ponto A , de coordenadas $(3, 4)$ ou o vector definido pela origem do referencial e o ponto A , conforme a figura anterior:

À norma do vector correspondente ao número complexo, chamamos módulo do número complexo, usando-se o mesmo símbolo que para o módulo dum número real. Então, $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ e $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Observemos que $|a + 0i| = \sqrt{a^2} = |a|$, em que o primeiro sinal de módulo diz respeito a um número complexo e o segundo é o sinal de módulo de um número real, pelo que não há possibilidades de confusão, uma vez que obtemos o mesmo resultado.

Refira-se que ao número complexo $a - bi$ chamamos conjugado de $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

O conjugado de z é representado por \bar{z} .

24.1.2 A forma trigonométrica dum número complexo

Do número complexo $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, diz-se que está escrito na forma algébrica. Como é do conhecimento dos alunos de 12º Ano, o ponto genérico da circunferência de centro na origem dum referencial ortonormado e de raio ρ , com $\rho \geq 0$, é dado por $(\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, pelo que o número complexo correspondente é $\rho \cos \alpha + \rho i \sin \alpha$, ou seja, $\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Esta última expressão costuma ser abreviada para $\rho \operatorname{cis} \alpha$, dizendo-se que o número complexo está escrito na forma trigonométrica.

Seguidamente, apresentamos alguns exemplos de passagem de uma forma para outra.

Exemplo 440 Passe o complexo $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ para a forma algébrica

$$z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Exemplo 441 Passe o complexo $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ para a forma algébrica

$$z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

Exemplo 442 Passe o complexo $z = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$ para a forma algébrica

$$z = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i$$

Exemplo 443 Passe o complexo $z = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$ para a forma algébrica

$$z = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i$$

Exemplo 444 Passe o complexo $z = -1 + i\sqrt{3}$ para a forma trigonométrica

$$|z| = \left| -1 + i\sqrt{3} \right| = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Quanto ao argumento, temos que $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, sendo que o ponto correspondente a $-1 + i\sqrt{3}$ fica no segundo quadrante, pelo que vem $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

Então, $-1 + i\sqrt{3} = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$.

24.1.3 Produto de complexos na forma trigonométrica

Começemos por calcular o produto $\operatorname{cis} \alpha \operatorname{cis} \beta$:

$$\begin{aligned}\operatorname{cis} \alpha \operatorname{cis} \beta &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = \operatorname{cis}(\alpha + \beta)\end{aligned}$$

Intuitivamente, vem que $(\rho_1 \operatorname{cis} \alpha_1)(\rho_2 \operatorname{cis} \alpha_2) = (\rho_1 \rho_2) \operatorname{cis}(\alpha_1 + \alpha_2)$, com $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

A igualdade anterior é conhecida por fórmula de Moivre para o produto de dois complexos. Esta fórmula esconde uma propriedade interessante que é a seguinte: o produto de duas somas de dois quadrados é uma soma de dois quadrados.

Esta propriedade pode ser demonstrada directamente:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 \\ &= a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd + a^2 d^2 + b^2 c^2 + 2abcd = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2\end{aligned}$$

Mas também pode ser demonstrada, recorrendo ao módulo dum número complexo:

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ora, $(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

Por outro lado, temos $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|c + di| = \sqrt{c^2 + d^2}$. Ora,

$$\begin{aligned}|ac - bd + (ad + bc)i| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2 c^2 - 2abcd + b^2 d^2 + a^2 d^2 + 2abcd + b^2 c^2} \\ &= \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2} = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

Então, o módulo do produto de dois números complexos é o produto dos módulos desses complexos.

Elevando ao quadrado ambos os membros de $\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}$, temos a igualdade $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Observe-se que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ e que estas igualdades têm mais interesse, quando os números a, b, c, d são inteiros.

24.1.4 Quociente entre complexos na forma trigonométrica

Sejam $\rho_1, \rho_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\rho_1 \geq 0, \rho_2 > 0$. Então,

$$\frac{\rho_1 \operatorname{cis} \alpha_1}{\rho_2 \operatorname{cis} \alpha_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

A fórmula anterior é conhecida por fórmula de Moivre para o quociente de dois complexos.

Exemplo 445 Calcule $\frac{4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}}$.

$$\frac{4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}} = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$$

24.1.5 Potência dum complexo na forma trigonométrica

Sejam $\rho, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, com $\rho > 0$. Então,

$$(\rho \operatorname{cis} \alpha)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\alpha)$$

Exemplo 446 Calcule $(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6})^9$.

$$\left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}\right)^9 = 2^9 \operatorname{cis} \left(9 \times \frac{\pi}{6}\right) = 512 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = 512 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

24.1.6 Raízes índice n dum complexo na forma trigonométrica

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $z = \rho \operatorname{cis} \alpha$, com $\rho > 0$. Raiz índice n de z é um complexo ω , tal que $\omega^n = z$. Suponhamos que $\omega = r \operatorname{cis} \beta$, com $r > 0, \beta \in \mathbb{R}$.

Então, $\rho \operatorname{cis} \alpha = z = \omega^n = r^n \operatorname{cis} (n\beta)$, donde vem $r^n = \rho$ e $n\beta = \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, $\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$. Como β depende de k , vamos substituí-lo por β_k . Observe-se que estamos a supor n fixo e k variável.

Seja $\beta_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$. Então:

$$\beta_0 = \frac{\alpha}{n}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha + 2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \beta_{n-1} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}, \quad \beta_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{2n\pi}{n}$$

Então, $\operatorname{cis} \beta_0 = \operatorname{cis} \frac{\alpha}{n} = \operatorname{cis} \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2n\pi}{n} \right) = \operatorname{cis} \beta_n$.

O que acontece é que, apenas, n dos números complexos são distintos, pelo que basta atribuir a k os valores $0, 1, \dots, n-1$.

Exemplo 447 Determine as raízes sextas do número complexo $1+i$:

Como $1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, temos que as raízes sextas de $1+i$ são dadas por

$$\sqrt[6]{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{6} = \sqrt[12]{2} \operatorname{cis} \frac{(1+8k)\pi}{24}, k = 0, 1, \dots, 5$$

Como curiosidade, vejamos que a soma das seis raízes determinadas é zero. Seja $\omega_k = \sqrt[12]{2} \operatorname{cis} \frac{(1+8k)\pi}{24}$. Podemos interpretar ω_k como uma sucessão de números complexos. Vejamos que essa sucessão é uma progressão geométrica:

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{\sqrt[12]{2} \operatorname{cis} \frac{(1+8(k+1))\pi}{24}}{\sqrt[12]{2} \operatorname{cis} \frac{(1+8k)\pi}{24}} = \frac{\operatorname{cis} \frac{(1+8k+8)\pi}{24}}{\operatorname{cis} \frac{(1+8k)\pi}{24}} = \operatorname{cis} \frac{(1+8k+8-1-8k)\pi}{24} = \operatorname{cis} \frac{8\pi}{24} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{6}$$

Então, a razão da progressão geométrica é $\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$.

Então, a soma dos primeiros 6 termos da progressão é

$$\sum_{k=0}^5 \omega_k = \omega_0 \times \frac{1 - \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right)^6}{1 - \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}} = \omega_0 \times \frac{1 - \operatorname{cis} \frac{6\pi}{3}}{1 - \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}} = \omega_0 \times \frac{1 - \operatorname{cis} (2\pi)}{1 - \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}} = \omega_0 \times \frac{1 - 1}{1 - \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}} = 0$$

Exemplo 448 *Determine as raízes oitavas do número 1:*

Como $1 = \text{cis } 0$, temos que as raízes oitavas de são dadas pela expressão

$$\text{cis } \frac{0 + 2k\pi}{8} = \text{cis } \frac{k\pi}{4}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

As soluções, na forma trigonométrica, são:

$$\text{cis } 0, \text{cis } \frac{\pi}{4}, \text{cis } \frac{\pi}{2}, \text{cis } \frac{3\pi}{4}, \text{cis } \pi, \text{cis } \frac{5\pi}{4}, \text{cis } \frac{3\pi}{2}, \text{cis } \frac{7\pi}{4}$$

E na forma algébrica:

$$1, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemplo 449 *Determine as raízes oitavas do número $1 + i\sqrt{3}$:*

Como, $1 + i\sqrt{3} = 2 \text{cis } \frac{\pi}{3}$, temos que as raízes oitavas de $1 + i\sqrt{3}$ são dadas por

$$\sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{8}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Então, as soluções são $\sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{\pi}{24}, \sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{7\pi}{24}, \sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{13\pi}{24}, \sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{19\pi}{24}, \sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{25\pi}{24}, \sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{31\pi}{24}, \sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{37\pi}{24}$ e $\sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{43\pi}{24}$.

As oito soluções correspondem a oito pontos numa circunferência de raio $\sqrt[8]{2}$, sendo que esses oito pontos dividem a circunferência em oito partes iguais.

Então, basta-nos conhecer uma das raízes oitavas, pois as restantes são obtidas somando ao argumento da primeira sucessivos múltiplos de $\frac{2\pi}{8}$, ou seja, sucessivos múltiplos de $\frac{\pi}{4}$ ou, se preferirmos, sucessivos múltiplos de $\frac{6\pi}{24}$, o que, partindo de $\sqrt[8]{2} \text{cis } \frac{\pi}{24}$, facilita os cálculos.

Exercício 450 *Seja z um complexo do primeiro quadrante, eixos não incluídos. Mostre que a imagem de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.*

Resolução

Seja $z = \rho \text{cis } \alpha$ com $\rho > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Então, $z^3 = \rho^3 \text{cis } (3\alpha)$ com $\rho^3 > 0, 0 < 3\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Logo, a imagem de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

24.2 Pentágono regular inscrito numa circunferência

Nos exemplos seguintes, vamos mostrar (de três maneiras diferentes) que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ e, por conseguinte, $\sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Com base nesses resultados, vamos dividir uma circunferência em cinco partes iguais, utilizando régua e compasso.

Exemplo 451 *Resolva a equação $z^3 = (\bar{z})^2$.*

Começamos por referir que dois complexos, escritos na forma algébrica, são iguais se e só se têm a mesma parte real e a mesma parte imaginária.

Dois complexos não nulos, escritos na forma trigonométrica, são iguais se e só se têm o mesmo módulo e os argumentos diferem de um múltiplo de 2π .

Resolução, na forma trigonométrica:

Seja $z = \rho \operatorname{cis} \alpha$ com $\rho \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Então, $\bar{z} = \rho \operatorname{cis}(-\alpha)$. Logo:

$$\begin{aligned} (\rho \operatorname{cis} \alpha)^3 &= (\rho \operatorname{cis}(-\alpha))^2 &\iff \rho^3 \operatorname{cis}(3\alpha) &= \rho^2 \operatorname{cis}(-2\alpha) \\ &&\iff \rho^3 &= \rho^2 \wedge 3\alpha = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &&\iff \rho^2(\rho - 1) &= 0 \wedge 5\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &&\iff (\rho = 0 \vee \rho = 1) \wedge \alpha &= \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ &&\iff \rho = 0 \vee \left(\rho = 1 \wedge \alpha = \frac{2k\pi}{5} \right), &k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

As soluções distintas são obtidas para $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Então,

$$z = 0 \vee z = \operatorname{cis} 0 = 1 \vee z = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{5} \vee z = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{5} \vee z = \operatorname{cis} \frac{6\pi}{5} \vee z = \operatorname{cis} \frac{8\pi}{5}$$

Resolução, na forma algébrica:

$$\begin{aligned} (x + yi)^3 &= (x - yi)^2 &\iff x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 &= x^2 - 2xyi + y^2i^2 \\ &&\iff x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i &= x^2 - y^2 - 2xyi \\ &&\iff x^3 - 3xy^2 = x^2 - y^2 \wedge 3x^2y - y^3 &= -2xy \\ &&\iff 3x^2y + 2xy - y^3 = 0 \wedge x^3 - 3xy^2 &= x^2 - y^2 \\ &&\iff y(3x^2 + 2x - y^2) = 0 \wedge x^3 - x^2 &= 3xy^2 - y^2 \\ &&\iff (y = 0 \vee 3x^2 + 2x = y^2) \wedge x^3 - x^2 &= (3x - 1)y^2 \end{aligned}$$

Se $y = 0$, vem $x^3 - x^2 = 0$, donde se conclui que $x = 0 \vee x = 1$.

Obtivemos, assim, duas das soluções: 0 e 1.

Para $3x^2 + 2x = y^2$, vem:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 &= (3x - 1)(3x^2 + 2x) &\iff x(x^2 - x) - x(3x - 1)(3x + 2) \\ &&\iff x(x^2 - x - (3x - 1)(3x + 2)) &= 0 \\ &&\iff x = 0 \vee x^2 - x - 9x^2 - 6x + 3x + 2 &= 0 \\ &&\iff x = 0 \vee -8x^2 - 4x + 2 &= 0 \\ &&\iff x = 0 \vee 4x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ &&\iff x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

E, a partir dos valores de x , podemos encontrar os respectivos valores para y , uma vez que temos

$y = \pm\sqrt{3x^2 + 2x}$. Seja $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$. Então:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x &= 3\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 + 2 \times \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = 3\left(\frac{1 + 5 - 2\sqrt{5}}{16}\right) + \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{4} \\ &= 3\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{8}\right) + \frac{-4 + 4\sqrt{5}}{8} = \frac{9 - 3\sqrt{5} - 4 + 4\sqrt{5}}{8} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \end{aligned}$$

Logo,

$$y = \pm\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

Analogamente, para $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, obtendo-se

$$y = \pm\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

Então, as soluções, na forma algébrica, são

$$0, 1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \pm i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

Recordamos que, na forma trigonométrica, as soluções eram

$$z = 0 \vee z = \text{cis } 0 = 1 \vee z = \text{cis } \frac{2\pi}{5} \vee z = \text{cis } \frac{4\pi}{5} \vee z = \text{cis } \frac{6\pi}{5} \vee z = \text{cis } \frac{8\pi}{5}$$

Comparando as soluções, temos:

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \wedge \sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

Exemplo 452 Mostre que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Resolução

Vejamos outra maneira de mostrar que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Começamos por recordar que $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $x = \cos \frac{2\pi}{5}$. Ora, $\cos \frac{2\pi}{5} = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.

Então, $x = \cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{8\pi}{5} = 2\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) - 1$. Mas, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1 = 2x^2 - 1$.

Logo, $x = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 2(4x^4 - 4x^2 + 1) - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

Então, $\cos \frac{2\pi}{5}$ é solução da equação $8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0$.

É fácil de descobrir que uma das soluções da equação anterior é 1. Outra solução, esta não tão fácil de descobrir, é $-\frac{1}{2}$. Então, o polinómio $8x^4 - 8x^2 - x + 1$ é divisível por $(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Aplicando a regra de Ruffini, vem:

$$\begin{array}{c|ccccc}
& 8 & 0 & -8 & -1 & 1 \\
1 & & 8 & 8 & 0 & -1 \\
\hline
& 8 & 8 & 0 & -1 & 0 \\
-\frac{1}{2} & & -4 & -2 & 1 & \\
\hline
& 8 & 4 & -2 & 0 &
\end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0 & \iff (x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1) = 0 \\
& \iff x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \vee 4x^2 + 2x - 1 = 0 \\
& \iff x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{4} \\
& \iff x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

Mas, $0 < \cos \frac{2\pi}{5} < 1$, pelo que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Note-se que os números encontrados estão relacionados com o número de ouro ($\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Por exemplo, $-2 \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

isto é, $\cos \frac{2\pi}{5}$ é metade de $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, número este que é conhecido por número de ouro e costuma

ser representado por ϕ . Então, $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\phi}{2}$.

Note-se que as soluções 1 e $-\frac{1}{2}$ podem ser obtidas resolvendo a equação $\cos(4t) = \cos t$:

$$\begin{aligned}
\cos(4t) = \cos t & \iff 4t = \pm t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff 3t = 2k\pi \vee 5t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
& \iff t = \frac{2k\pi}{3} \vee t = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Ora, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ e $\cos 0 = 1$, pelo que $-\frac{1}{2}$ e 1 têm de ser soluções da equação $8x^4 - 8x^2 - x + 1 = 0$.

Exemplo 453 Mostre que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Resolução

Começamos por observar que

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}$$

Então, resolvendo a equação $\cos(3x) - \cos(2x) = 0$, vem

$$\begin{aligned}\cos(3x) - \cos(2x) = 0 &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - \cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 2\cos^2 x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0\end{aligned}$$

É fácil verificar que zero é uma das soluções da equação $\cos(3x) - \cos(2x) = 0$.

Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a equação de 3º grau $4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$. Esta equação admite a solução $\cos 0 = 1$, pelo que é fácil resolvê-la, utilizando a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 4 & -2 & -3 & 1 \\ & & 4 & 2 & -1 \\ \hline & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Então,

$$\begin{aligned}4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0 &\Leftrightarrow (t - 1)(4t^2 + 2t - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\ &\Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{-1 + \sqrt{1+4}}{2} \vee t = \frac{-1 - \sqrt{1+4}}{2} \\ &\Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Voltemos a resolver a equação $\cos(3x) - \cos(2x) = 0$:

$$\begin{aligned}\cos(3x) - \cos(2x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow 3x = \pm 2x + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow 5x = 2k\pi \vee x = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{5} \vee x = 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

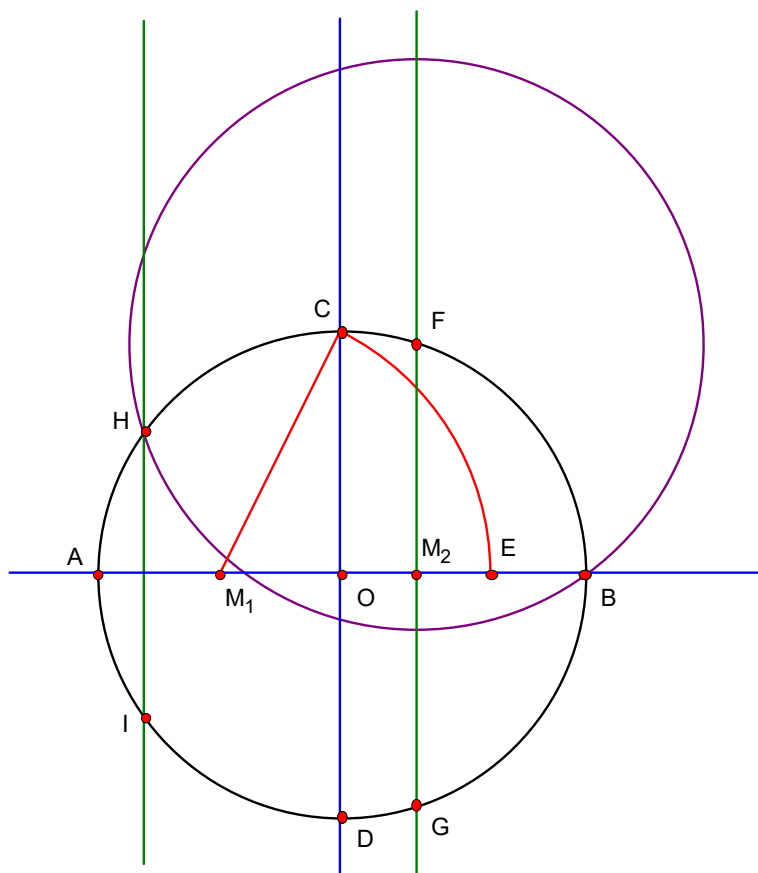
Então, a equação $\cos(3x) - \cos(2x) = 0$ admite as soluções $0, \frac{2\pi}{5}$ e $\frac{4\pi}{5}$.

Logo, terá de ser $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ e $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$, uma vez que $\frac{4\pi}{5}$ pertence ao segundo quadrante e $\frac{2\pi}{5}$ pertence ao primeiro.

Exercício 454 *Divida uma circunferência em cinco partes iguais, utilizando régua e compasso.*

Resolução

Dos exercícios anteriores, concluímos que, para conseguir desenhar um ângulo de $\frac{2\pi}{5}$ radianos, basta-nos considerar num referencial ortonormado, uma circunferência de raio 1 e, marcar sobre a circunferência o ponto de abscissa $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, o que pode ser feito com régua e compasso. Essa é uma construção clássica e que permite dividir uma circunferência em cinco partes iguais.



Descrição da construção:

1. Desenhamos o círculo trigonométrico.
2. Determinamos M_1 , o ponto médio de $[OA]$. O ponto M_1 tem abcissa $-\frac{1}{2}$. Note-se que não apresentámos a construção para a obtenção do ponto médio, para não sobrecarregar o desenho.
3. Desenhamos uma circunferência de centro M_1 e que passa por C . Esta circunferência intersecta o semieixo positivo das abcissas no ponto E .
4. Determinamos a mediatriz de $[OE]$, a qual intersecta a circunferência inicial nos pontos F e G .
5. O resto da construção é trivial.

Justificação:

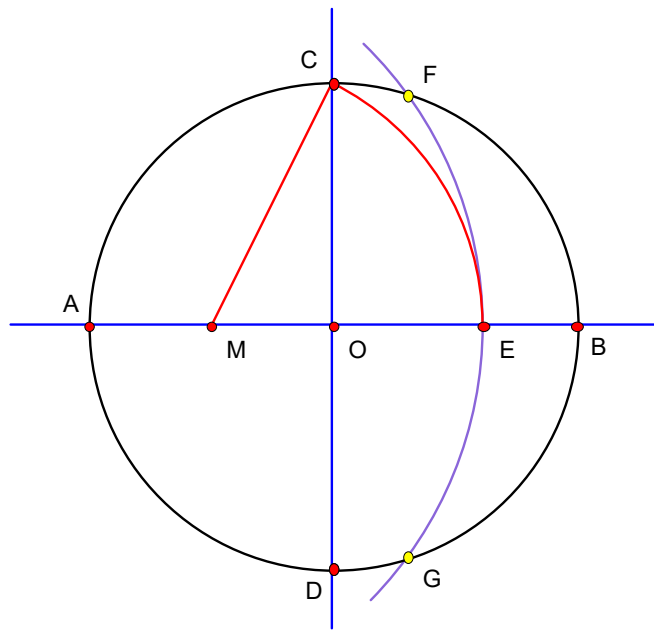
$$\overline{M_1C} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

A abcissa do ponto E é $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, ou seja, $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Então, a abcissa do ponto M_2 é $\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, valor este que sabemos ser a abcissa do ponto F , uma vez que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

O pentágono $[BFHIG]$ é regular e a circunferência ficou dividida em cinco partes iguais.

A construção anterior pode ser substituída por outra, ainda mais simples:



1. Desenhemos o círculo trigonométrico.
2. Determinamos M , o ponto médio de $[OA]$. O ponto M tem abcissa $-\frac{1}{2}$.
3. Desenhemos uma circunferência de centro M e que passa por C . Esta circunferência intersecta o semieixo positivo das abcissas no ponto E .
4. Desenhemos uma circunferência de centro A e que passa por E . Esta circunferência intersecta a circunferência inicial nos pontos F e G .
5. O resto da construção é trivial, não tendo sido feita.

Justificação:

Embora a construção seja mais fácil, o mesmo não acontece com a justificação.

Consideremos a primeira construção.

$$\overline{AM_2} = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}; \quad \overline{FM_2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}.$$

Apliquemos o Teorema de Pitágoras ao triângulo (rectângulo) $[AM_2F]$:

$$\begin{aligned} \overline{AF}^2 &= \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \right)^2 = \frac{9 + 5 + 6\sqrt{5}}{16} + \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{8} + \frac{5 + \sqrt{5}}{8} = \frac{12 + 4\sqrt{5}}{8} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\overline{AE}^2 = \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Então, $\overline{AF}^2 = \overline{AE}^2$, donde vem que $\overline{AF} = \overline{AE}$, uma vez que os comprimentos \overline{AF} e \overline{AE} são números positivos.

24.3 Maior hexágono regular contido num quadrado

Como determinar o maior hexágono regular contido no quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$?

Consideremos o ponto $A(a) = -1 + ai$, com $a \in \mathbb{R}$ e rodemos este ponto, em torno da origem, sucessivos múltiplos de $\frac{\pi}{3}$.

$$A(a) = -1 + ai$$

$$B(a) = (-1 + ai) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}ia - \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$C(a) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}ia - \frac{1}{2}a\sqrt{3} \right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}ia - \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$D(a) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}ia - \frac{1}{2}a\sqrt{3} \right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - ia$$

$$E(a) = (1 - ia) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}ia + \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$F(a) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}ia + \frac{1}{2}a\sqrt{3} \right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}ia + \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$A(a) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} + \frac{1}{2}ia + \frac{1}{2}a\sqrt{3} \right) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + ia$$

Pretendemos que as imagens dos números anteriores pertençam ao quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Então, os módulos das partes reais e imaginárias dos complexos anteriores têm de ser menores ou iguais a 1. Como os seis números complexos obtidos são simétricos, dois a dois, basta-nos considerar os três primeiros números. Além disso, podemos considerar, sem perda de generalidade que $a \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq 1 \\ 0 \leq a \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{3} \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}a \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{3} \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}a \leq 1 \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a \leq 1 \\ -2 \leq -1 - a\sqrt{3} \leq 2 \\ -2 \leq -\sqrt{3} + a \leq 2 \\ -2 \leq 1 - a\sqrt{3} \leq 2 \\ -2 \leq -\sqrt{3} - a \leq 2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a \leq 1 \\ -1 \leq -a\sqrt{3} \leq 3 \\ -2 + \sqrt{3} \leq a \leq 2 + \sqrt{3} \\ -3 \leq -a\sqrt{3} \leq 1 \\ -2 + \sqrt{3} \leq -a \leq 2 + \sqrt{3} \end{array} \right\} \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a \leq 1 \\ a\sqrt{3} \leq 1 \\ a \geq -2 + \sqrt{3} \\ a\sqrt{3} \leq 3 \\ a \leq 2 - \sqrt{3} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a \leq 1 \\ a \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a \geq 0 \\ a \leq \sqrt{3} \\ a \leq 2 - \sqrt{3} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq a \leq 1 \\ a \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a \leq 2 - \sqrt{3} \end{array} \right\} \\
 &\iff 0 \leq a \leq 2 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

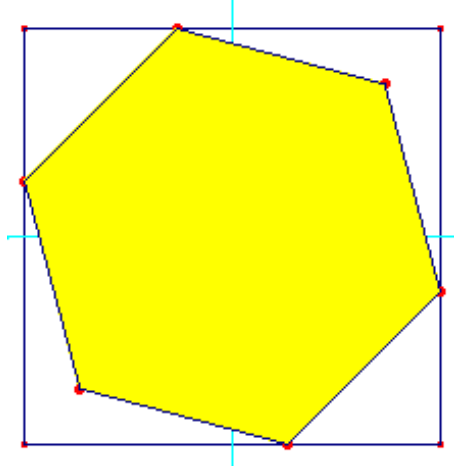
Então, a área máxima corresponde ao caso em que $a = 2 - \sqrt{3}$.

Agora, basta-nos encontrar o lado do hexágono, o qual é igual ao raio da circunferência circunscrita, ou seja, $r = \sqrt{a^2 + 1}$, o módulo do complexo $-1 + ai$.

Note-se que a área dum triângulo equilátero de lado 2 é $\sqrt{3}$, pelo que a área dum triângulo equilátero de lado 1 é $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Então, a área dum triângulo equilátero de lado l é $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Finalmente, a área do hexágono (regular) é

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\sqrt{a^2 + 1} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + 1) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left((2 - \sqrt{3})^2 + 1 \right) = 12\sqrt{3} - 18$$



Observemos que qualquer rotação do hexágono, em torno do seu centro, que não o deixe na "mesma" posição faz com que algum dos vértices saia do quadrado. É claro que qualquer ampliação do hexágono produz o mesmo efeito.

Então, o hexágono da figura é o maior hexágono regular contido no quadrado.

$$A = -1 + (2 - \sqrt{3})i$$

$$B = (-1 + (2 - \sqrt{3})i) \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$$

O ponto B pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Equação da recta AB :

$$m = \frac{1 - \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} + 1} = -\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

$$y - 2 + \sqrt{3} = (-2 - \sqrt{3})(x + 1) \iff y = -2\sqrt{3} - 2x - x\sqrt{3}$$

Equação da recta BC :

$$B = 1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$$

$$C = (1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})) \times \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} - i$$

$$m = \frac{-1 - 1 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}} = -2 + \sqrt{3}$$

$$y - 1 + \sqrt{3} = (-2 + \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3}) \iff y = 6 - 4\sqrt{3} - 2x + x\sqrt{3}$$

Equação da recta CD :

$$D = 1 + (-2 + \sqrt{3})i$$

$$m = \frac{-2 + \sqrt{3} + 1}{1 - 2 + \sqrt{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3}} = 1$$

$$y + 2 - \sqrt{3} = x - 1 \iff y = -3 + \sqrt{3} + x$$

Equação da recta DE :

$$E = -1 + \sqrt{3} + i(-1 + \sqrt{3})$$

$$m = \frac{-1 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{-1 + \sqrt{3} - 1} = \frac{1}{-2 + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(-2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = -2 - \sqrt{3}$$

$$y + 1 - \sqrt{3} = (-2 - \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3}) \iff y = 2\sqrt{3} - 2x - x\sqrt{3}$$

Equação da recta EF :

$$F = -2 + \sqrt{3} + i$$

$$m = \frac{1 + 1 - \sqrt{3}}{-2 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}} = -2 + \sqrt{3}$$

$$y - 1 = (-2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}) \iff y = -6 + 4\sqrt{3} + x(\sqrt{3} - 2)$$

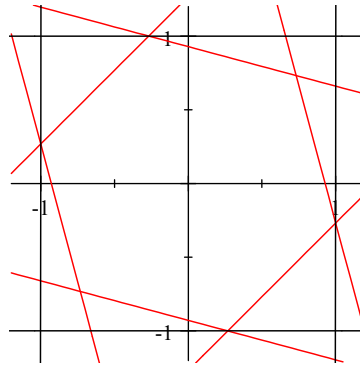
Equação da recta AF :

$$F = -2 + \sqrt{3} + i, \quad A = -1 + (2 - \sqrt{3})i$$

$$m = \frac{2 - \sqrt{3} - 1}{-1 + 2 - \sqrt{3}} = 1$$

$$y - 1 = x + 2 - \sqrt{3} \iff y = x + 3 - \sqrt{3}$$

Representação gráfica das 6 rectas anteriores e das rectas $y = \pm 1$ e $x = \pm 1$:



24.4 Domínios planos

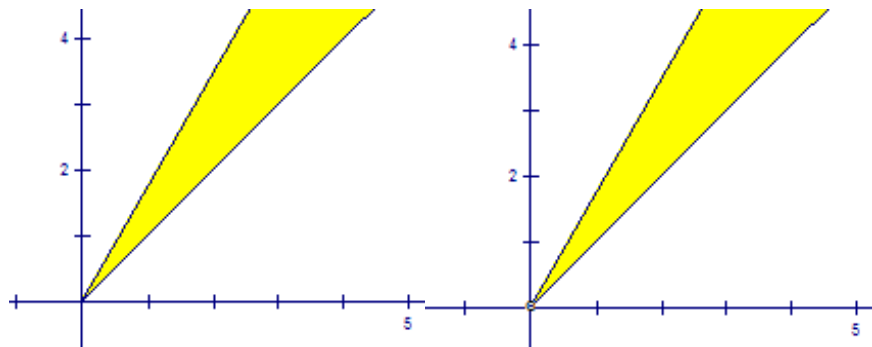
Vamos, agora, representar geometricamente algumas condições envolvendo complexos.

Começamos por referir que é costume representar um número complexo por z . Quando escrevemos $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, temos que $\operatorname{Re}(z) = x$ e $\operatorname{Im}(z) = y$. Além disso, temos que $|z|$ representa a distância de z (da imagem de z) à origem do plano complexo.

Refira-se, também, que $|z_2 - z_1|$ representa a distância entre z_1 e z_2 .

Finalmente, temos que qualquer complexo não nulo define com a origem um segmento de recta (e um vector), os quais definem com o semi-eixo real positivo uma infinidade de ângulos, dos quais podemos escolher um, no intervalo $]-\pi, \pi]$. Tal ângulo é representado por $\arg(z)$, sendo conhecido por argumento principal. Se escolhermos o ângulo em $[0, 2\pi[$, temos o argumento positivo mínimo. É claro que os dois ângulos coincidem em $[0, \pi]$.

Quanto ao complexo $z = 0$, o melhor é não definir o seu argumento, embora em certas ocasiões "desse jeito" considerá-lo, de modo a termos um ângulo incluindo o seu vértice, por exemplo, $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$.



Circunferência de centro z_0 e raio $r > 0$:

$$r : |z - z_0| = r$$

Círculo fechado de centro z_0 e raio $r > 0$:

$$r : |z - z_0| \leq r$$

Círculo aberto de centro z_0 e raio $r > 0$:

$$r : |z - z_0| < r$$

Mediatriz do segmento de recta de extremos z_1 e z_2 , com $z_1 \neq z_2$.

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

Semi-plano definido pela mediatriz do segmento de recta de extremos z_1 e z_2 e que contém o ponto z_1 :

$$|z - z_1| \leq |z - z_2|$$

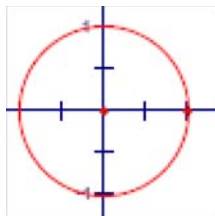
Semi-plano definido pela mediatriz do segmento de recta de extremos z_1 e z_2 e que contém o ponto z_2 :

$$|z - z_1| \geq |z - z_2|$$

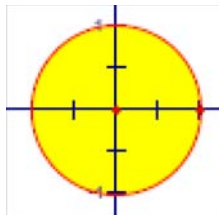
Circunferência de Apolónio:

$$|z - z_1| = \lambda |z - z_2|, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \neq z_2, \lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda \neq 1$$

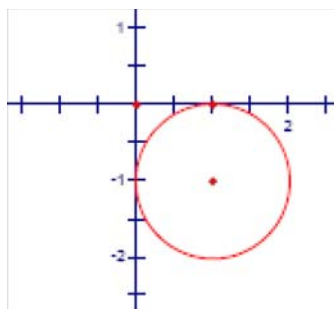
Exemplo 455 $|z| = 1$



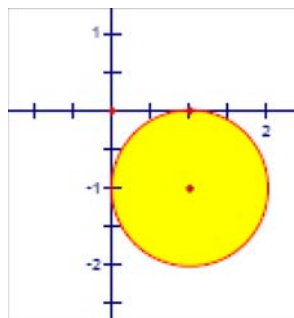
Exemplo 456 $|z| \leq 1$



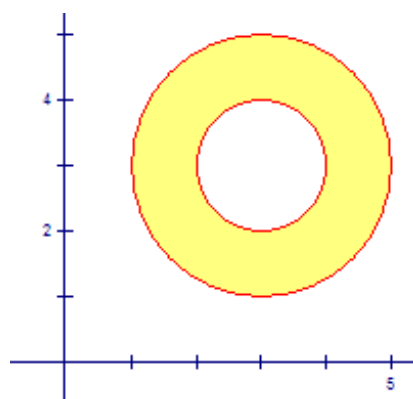
Exemplo 457 $|z - 1 + i| = 1$



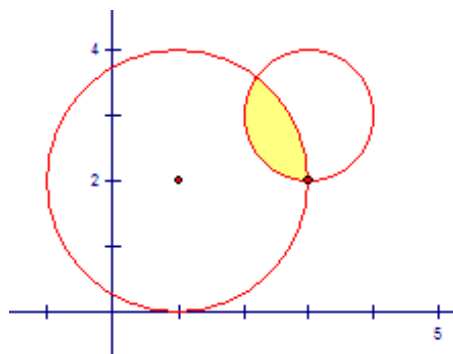
Exemplo 458 $|z - 1 + i| \leq 1$



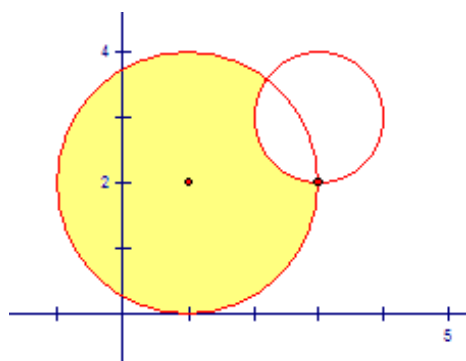
Exemplo 459 $1 \leq |z - 3 - 3i| \leq 2$



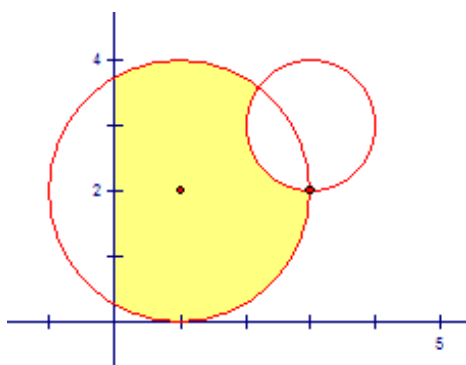
Exemplo 460 $|z - 1 - 2i| \leq 2 \wedge |z - 3 - 3i| \leq 1$



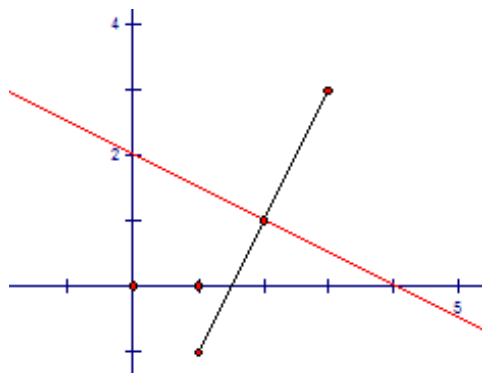
Exemplo 461 $|z - 1 - 2i| \leq 2 \wedge |z - 3 - 3i| \geq 1$



Exemplo 462 $|z - 1 - 2i| \leq 2 \wedge |z - 3 - 3i| \geq 1 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0$



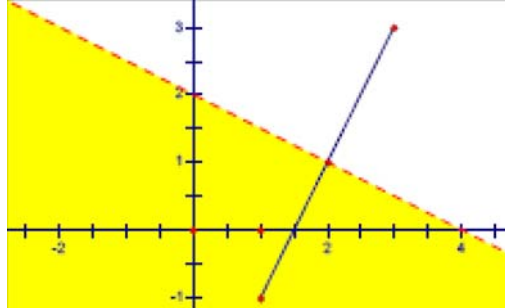
Exemplo 463 $|z - 1 + i| = |z - 3 - 3i|$



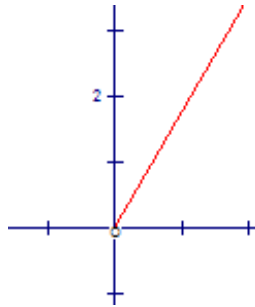
Observe-se que $|z - 1 + i|$ e $|z - 3 - 3i|$ representam as distâncias entre a imagem de z e as imagens de $1 - i$ e $3 + 3i$. De modo mais simplificado, diremos que $|z - 1 + i|$ é a distância entre z e $1 - i$, enquanto que $|z - 3 - 3i|$ é a distância entre z e $3 + 3i$.

Então, z é equidistante de $1 - i$ e de $3 + 3i$, pelo que z pertence à mediatriz do segmento de recta de extremos $1 - i$ e $3 + 3i$.

Exemplo 464 $|z - 1 + i| < |z - 3 - 3i|$

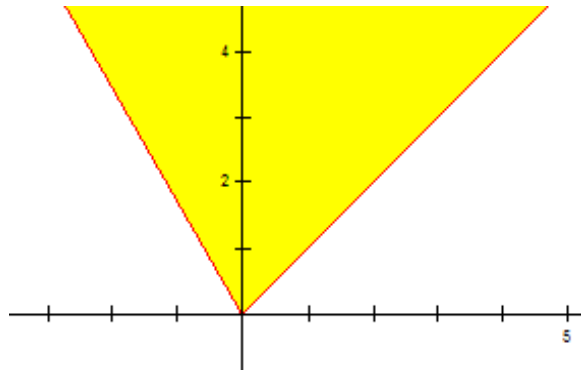


Exemplo 465 $\arg z = \frac{\pi}{3}$



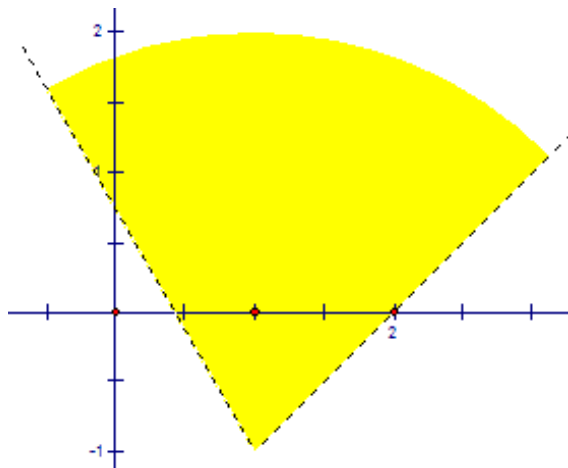
Trata-se duma semi-recta de declive $\sqrt{3}$ ($\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$). A origem da semi-recta é a origem do referencial e não faz parte do conjunto solução.

Exemplo 466 $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3}$



Trata-se do ângulo cujos lados são as semi-rectas que fazem ângulos de $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{2\pi}{3}$ radianos com o semieixo positivo das abcissas. O vértice do ângulo não faz parte do conjunto solução. Como é óbvio, no desenho, só está colorida parte do ângulo.

Exemplo 467 $\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 + i) < \frac{2\pi}{3}$



Exemplo 468 $|z - 1 + i| = 2|z - 3 - 3i|$

A condição $|z - 1 + i| = 2|z - 3 - 2i|$ define uma circunferência (circunferência de Apolônio), sendo que temos de descobrir o centro e o raio. Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Então, $z - 1 + i = x + yi - 1 + i$ e $z - 3 - 2i = x + yi - 3 - 2i$.

De $|z - 1 + i|^2 = 4|z - 3 - 2i|^2$, vem $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4(x - 3)^2 + (y - 2)^2$.

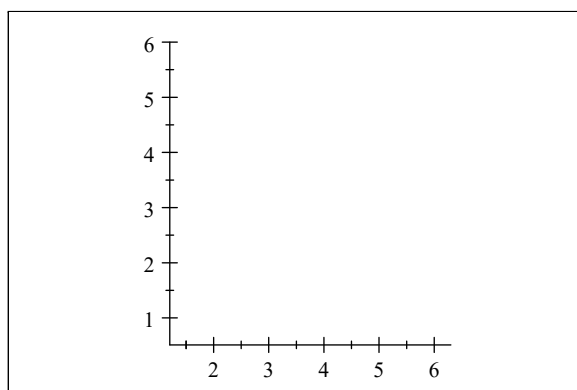
Logo, $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 4(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4)$. Então,

$$4x^2 - 24x + 4y^2 - 16y + 52 - x^2 + 2x - y^2 - 2y - 2 = 0 \iff 3x^2 + 3y^2 - 22x - 18y + 50 = 0$$

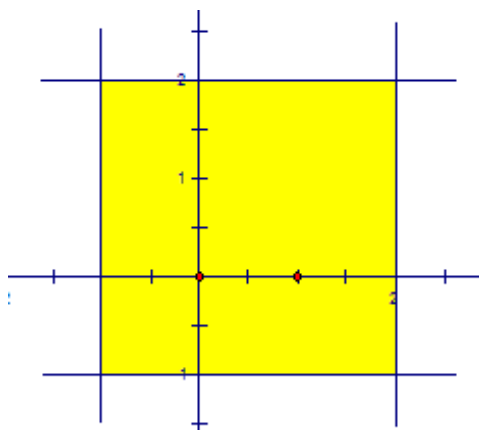
Mas,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 22x - 18y + 50 = 0 &\iff x^2 + y^2 - \frac{22}{3}x - 6y + \frac{50}{3} = 0 \\ &\iff x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{121}{9} + y^2 - 6y + 9 = \frac{121}{9} + 9 - \frac{50}{3} \\ &\iff \left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + (y - 3)^2 = \frac{52}{9} \end{aligned}$$

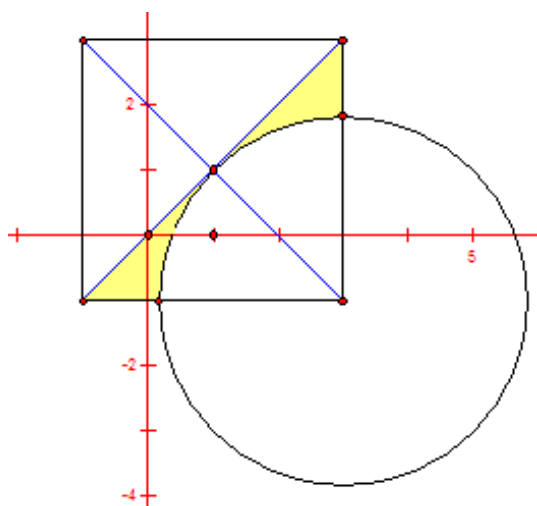
O centro da circunferência é $(\frac{11}{3}, 3)$ e o raio é $\frac{2}{3}\sqrt{13}$.



Exemplo 469 $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge -1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2$



Exemplo 470 Defina por meio duma condição com complexos a figura seguinte:

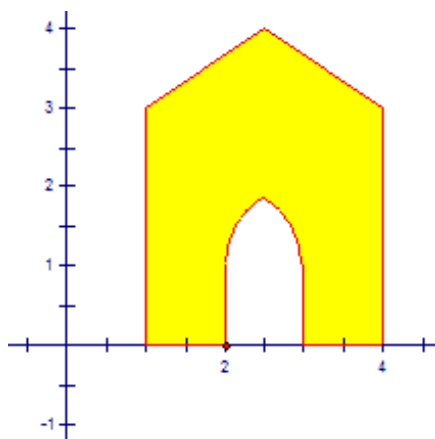
**Solução**

$$|z + 1 - 3i| \geq |z - 3 + i| \wedge |z - 3 + i| \geq 2\sqrt{2} \wedge \text{Im}(z) \geq -1 \wedge \text{Re}(z) \leq 3$$

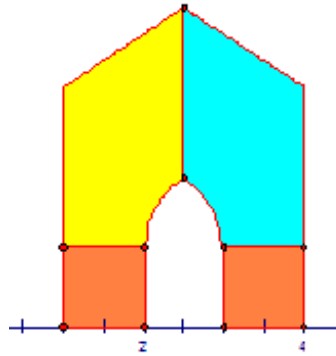
Outra solução:

$$|z + 1 - 3i| \geq |z - 3 + i| \wedge |z - 3 + i| \geq 2\sqrt{2} \wedge \frac{\pi}{2} \leq \arg(z - 3 + i) \leq \pi$$

Exemplo 471 Defina, por meio duma condição com complexos, a figura seguinte, incluindo a fronteira:

**Solução**

A condição $(1 \leq \text{Re}(z) \leq 2 \wedge 0 \leq \text{Im}(z) \leq 1) \vee (3 \leq \text{Re}(z) \leq 4 \wedge 0 \leq \text{Im}(z) \leq 1)$ define os dois quadrados da figura seguinte:

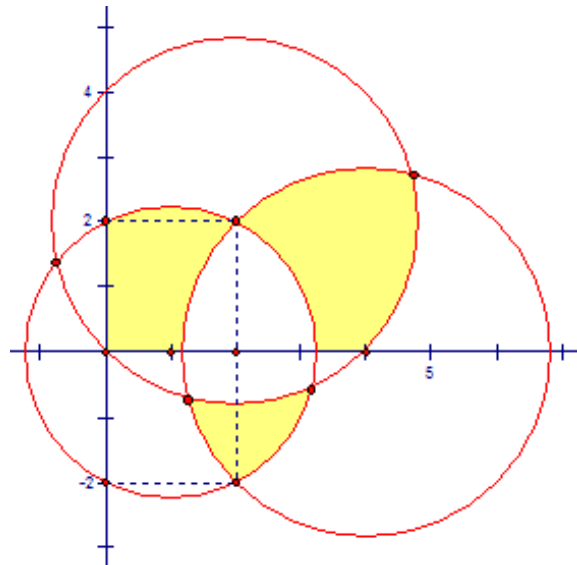


A condição $1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{5}{2} \wedge 1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \frac{2}{3} \operatorname{Re}(z) + \frac{7}{3} \wedge |z - 3 - i| \geq 1$ define a região a amarelo.

A condição $\frac{5}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq 4 \wedge 1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq -\frac{2}{3} \operatorname{Re}(z) + \frac{17}{3} \wedge |z - 2 - i| \geq 1$ define a região a amarelo.

A condição pedida é a disjunção entre as três condições anteriores.

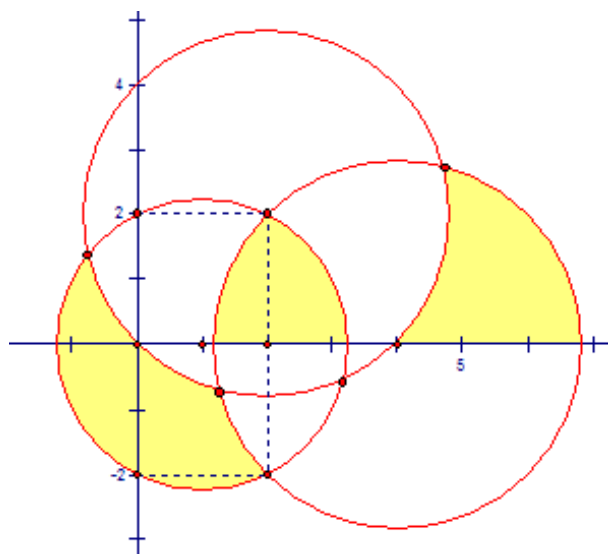
Exemplo 472 Defina por meio duma condição com complexos a figura seguinte:



Solução

$$\left\{ \begin{array}{l} |z - 1| \leq \sqrt{5} \\ \operatorname{Re}(z) \geq 0 \\ \operatorname{Im}(z) \geq 0 \\ |z - 4| \geq 2\sqrt{2} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} |z - 1| \geq \sqrt{5} \\ |z - 2 - 2i| \leq 2\sqrt{2} \\ |z - 4| \leq 2\sqrt{2} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} |z - 1| \leq \sqrt{5} \\ |z - 4| \leq 2\sqrt{2} \\ |z - 2 - 2i| \geq 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Exemplo 473 Defina por meio duma condição com complexos a figura seguinte:



Solução

$$\left\{ \begin{array}{l} |z-1| \leq \sqrt{5} \\ |z-4| \leq 2\sqrt{2} \\ \text{Im}(z) \geq 0 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} |z-1| \leq \sqrt{5} \\ |z-2-2i| \geq 2\sqrt{2} \\ |z-4| \geq 2\sqrt{2} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} |z-4| \leq 2\sqrt{2} \\ |z-2-2i| \geq 2\sqrt{2} \\ \text{Im}(z) \geq 0 \end{array} \right.$$

Capítulo 25

O Anel dos Inteiros Gaussianos

Nota histórica

O aparecimento dos números complexos deve-se à procura da fórmula resolvente das equações de 3º grau de coeficientes reais, as quais têm, no mínimo, uma solução real. Como veremos mais adiante, toda a equação de 3º grau pode ser transformada numa equação da forma $x^3 + ax + b = 0$, pelo que basta obter a fórmula resolvente para este caso. Fazendo $x = u + v$, vem:

$$\begin{aligned}(u + v)^3 + a(u + v) + b = 0 &\iff u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + a(u + v) + b = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + a(u + v) + b = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + (3uv + a)(u + v) = -b\end{aligned}$$

Podemos escolher u e v de modo que $3uv = -a \wedge u^3 + v^3 = -b$. Então, $uv = -\frac{a}{3}$.

Logo, $u^3v^3 = -\frac{a^3}{27} \wedge u^3 + v^3 = -b$, donde se conclui que u^3 e v^3 são as raízes da equação de 2º grau $\lambda^2 + b\lambda - \frac{a^3}{27} = 0$.

$$\text{Como } \lambda^2 + b\lambda - \frac{a^3}{27} = 0 \iff \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}, \text{ temos } \begin{cases} u^3 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2} \\ v^3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Então, } \begin{cases} u = \sqrt[3]{\frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}} \\ v = \sqrt[3]{\frac{-b - \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}} \end{cases}, \text{ pelo que } x = \sqrt[3]{\frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-b - \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}}{2}}$$

Vejamos um exemplo de resolução de uma equação de terceiro grau, usando o método anterior:

Consideremos a equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Começamos por fazer a substituição $x = y + h$, com vista a eliminar o termo de 2º grau, obtendo-se:

$$\begin{aligned}\text{A equação } (y + h)^3 + 3(y + h)^2 - 3(y + h) - 1 = 0 &\text{ é equivalente a} \\ y^3 + 3y^2h + 3yh^2 + h^3 + 3y^2 + 6yh + 3h^2 - 3y - 3h - 1 = 0 &\iff y^3 + (3h + 3)y^2 + (3h^2 + 6h - 3)y + \\ h^3 + 3h^2 - 3h - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\text{Fazendo } h = -1, \text{ vem } y^3 - 6y + 4 = 0$$

Segue-se a nova substituição $y = u + v$, a qual nos conduz a $u^3 + v^3 = -4 \wedge u^3v^3 = 8$.

Então, u^3 e v^3 são as raízes da equação de 2º grau $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$, que são $-2 \pm \sqrt{-4}$.

Obtivemos, deste modo, uma raiz quadrada de um número negativo, a qual não representa nenhum número real.

Para quem já conhece os números imaginários, é fácil verificar que $u = \sqrt[3]{-2+2i} = 1+i$, $v = \sqrt[3]{-2-2i} = 1-i$.

Observe-se, no entanto, que $\sqrt[3]{-2+2i}$ é uma expressão pouco pacífica, uma vez que um número imaginário admite três raízes cúbicas e não apenas uma.

Se usarmos as raízes cúbicas $1+i$ e $1-i$, obtemos

$$y = u + v = 1 + i + 1 - i = 2 \wedge x = y + h = 2 - 1 = 1$$

Logo, uma das raízes da equação inicial é 1, o que permite encontrar as outras raízes (aplicando a regra de Ruffini).

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\text{Então, } x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0 \iff (x-1)(x^2 + 4x + 1) = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Repare-se que, embora as três raízes da equação sejam reais, para resolver a equação, tivemos de "sair" do conjunto \mathbb{R} .

E se tivéssemos usado outra raiz cúbica de $-2+2i$?

Vimos que uma das raízes cúbicas de $-2+2i$ é $1+i$.

Como $1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, então as outras raízes cúbicas de $-2+2i$ são $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$ e $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)$.

$$\text{Seja } u = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}.$$

$$\text{Ora, de } uv = 2, \text{ vem } v = \frac{2}{u} = \frac{2}{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{11\pi}{12}\right)$$

Então,

$$\begin{aligned} y &= u + v = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12} + \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{11\pi}{12} = 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \right) = -1 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, $x = -1 - \sqrt{3} - 1 = -2 - \sqrt{3}$, obtendo-se, assim uma das raízes da equação inicial.

Definição 474 *Corpo dos números complexos é o conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, algebrizado com as operações "adição" e "multiplicação" assim definidas:*

$$\text{Adição: } (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Multiplicação: } (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

A definição da multiplicação apresentada resulta da multiplicação "usual" de polinômios com a condição suplementar $i^2 = -1$.

Definição 475 *Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O complexo $a - bi$, é chamado conjugado de z (e representamo-lo por \bar{z}), enquanto que ao número real $\sqrt{a^2 + b^2}$ chamamos módulo de z (que é representado por $|z|$). Ao número a chamamos parte real de z e escrevemos $\operatorname{Re}(z) = a$, enquanto que ao número b chamamos parte imaginária de z e escrevemos $\operatorname{Im}(z) = b$.*

Definição 476 Ao conjunto $\mathbb{Z}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$, o qual algebrizado com a adição e multiplicação de complexos é um anel, chamamos anel dos inteiros gaussianos.

Definição 477 Inteiro algébrico é um elemento do conjunto \mathbb{C} que anula um polinómio mónico de $\mathbb{Z}[t]$, isto é, anula um polinómio em t cujos coeficientes pertencem a \mathbb{Z} e em que o termo de maior grau tem coeficiente 1.

É fácil verificar que todos os elementos de $\mathbb{Z}(i)$ são inteiros algébricos; para isso, basta-nos considerar $a + bi$ e a equação de 2º grau $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$, com $a, b \in \mathbb{Z}$.

Observemos, ainda, que a definição de inteiro apresentada não cria, em \mathbb{Q} , mais inteiros, para além dos elementos de \mathbb{Z} , os quais, por esse motivo, são chamados inteiros racionais.

Definição 478 Num anel com identidade, chama-se unidade a qualquer elemento do anel que seja invertível.

Definição 479 Dois elementos dum anel com identidade dizem-se associados, se existir uma unidade do anel que multiplicada por um dos elementos dê o outro.

Definição 480 Em $\mathbb{Z}(i)$, define-se norma, como sendo a aplicação N , de $\mathbb{Z}(i)$ em \mathbb{Z} , tal que $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

A aplicação anterior satisfaz as propriedades seguintes:

1. $N(a + bi) \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{Z}$
2. Se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $N(a + bi) = 0 \iff a = b = 0$
3. $N(z) = N(\bar{z}), \forall z \in \mathbb{Z}(i)$
4. $N(zw) = N(z) \times N(w), \forall z, w \in \mathbb{Z}(i)$

Uma vantagem da aplicação norma, em relação à aplicação módulo, reside no facto da norma de qualquer inteiro gaussiano ser um número inteiro racional, enquanto que o módulo dum inteiro gaussiano pode ser um número irracional.

Proposição 481 O conjunto \mathbb{U} , dos elementos invertíveis de um anel com identidade, forma um grupo multiplicativo.

Demonstração

\mathbb{U} é um conjunto não vazio, porque $1 \in \mathbb{U}$.

Sejam $u, v \in \mathbb{U}$. Então existem, em \mathbb{U} , elementos s e t , tais que $su = us = 1 = tv = vt$.

De $(uv)(ts) = u(vt)s = u(1s) = us = 1$ e de $(ts)(uv) = t(su)v = t(1v) = tv = 1$, concluímos que uv é um elemento invertível, donde vem que \mathbb{U} é um grupo para a multiplicação, uma vez que esta operação é associativa, existe, em \mathbb{U} , elemento neutro e todo o elemento de \mathbb{U} é invertível.

Definição 482 Sejam A um anel comutativo e $a, b \in A$. Diz-se que a divide b (e escrevemos $a|b$), se existir, em A , um elemento c , tal que $ac = b$. Se não existir um tal c , diz-se que a não divide b .

Observação

Quando o Anel não é comutativo, podemos definir divisão à esquerda e divisão à direita.

Definição 483 Seja $\alpha \in \mathbb{Z}(i)$. Diz-se que α é irredutível, se, sempre que tivermos $\alpha = \beta\sigma$, com β, σ pertencentes a $\mathbb{Z}(i)$, então, pelo menos, um dos elementos β, σ é unidade.

Definição 484 Seja $\alpha \in \mathbb{Z}(i)$. Diz-se que α é primo, se α não é unidade e sempre que α divide um produto de dois elementos de $\mathbb{Z}(i)$, então α divide um dos factores. Diz-se que α não é primo, se α é unidade ou se α divide um produto de dois elementos de $\mathbb{Z}(i)$ e não divide nenhum dos factores.

Proposição 485 Seja $\alpha \in \mathbb{Z}(i)$. Então, α é uma unidade de $\mathbb{Z}(i)$, sse $N(\alpha) = 1$.

Demonstração

Seja $\alpha = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Se α é uma unidade de $\mathbb{Z}(i)$, então existe $\beta \in \mathbb{Z}(i)$, tal que $\alpha\beta = 1$. Então, $1 = N(1) = N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

Como $N(\alpha)$ e $N(\beta)$ são números inteiros não negativos, temos que $N(\alpha) = N(\beta) = 1$. Logo, $N(\alpha) = 1$.

Reciprocamente, se $N(\alpha) = 1$, então existem inteiros a, b tais que $1 = N(\alpha) = a^2 + b^2$. Logo, $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 1$, pelo que $a + bi$ é invertível e, por isso, uma unidade de $\mathbb{Z}(i)$.

Observe-se que se tivermos $a^2 + b^2 = 1$, então teremos forçosamente $a = 0, b = \pm 1$ ou $b = 0, a = \pm 1$.

Logo, as unidades de $\mathbb{Z}(i)$ são $\pm 1, \pm i$, todas elas da forma i^m , com $m \in \mathbb{Z}$.

Observação

Sejam $z, w \in \mathbb{Z}(i)$. Vimos que w divide z , se existir v pertencente a $\mathbb{Z}(i)$, tal que $wv = z$.

Observemos que se w divide z , então $N(w)$ divide $N(z)$, mas o recíproco não é válido, pois, por exemplo, $N(2 + i)$ divide $N(2 - i)$ e, no entanto, $2 + i$ não divide $2 - i$.

Definição 486 Para cada número real x , define-se o número inteiro \tilde{x} como sendo $\tilde{x} = \text{arr}(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$, onde $\lfloor y \rfloor$ é o maior número inteiro não superior a y .

Esta função arredonda um dado número real para o inteiro mais próximo, a menos que o número a arredondar esteja equidistante de dois inteiros consecutivos, caso em que o arredondamento é feito por excesso.

Definição 487 Sejam $z, w \in \mathbb{Z}(i)$, com $w \neq 0$ e $v \in \mathbb{C}$, tal que $v = \frac{z}{w} = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Sejam $q, r \in \mathbb{Z}(i)$, tais que $q = \tilde{x} + \tilde{y}i$ e $r = w((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})i)$. Divisão inteira de z por w é a operação que, pelo processo agora descrito, determina os inteiros gaussianos q e r (chamados quociente e resto), e que satisfazem a condição $z = qw + r$.

Exemplo 488 Calculemos o quociente e o resto da divisão inteira de $20 + 3i$ por $4 + 5i$.

Para isso, começamos por dividir, em \mathbb{C} , $20 + 3i$ por $4 + 5i$:

$$\frac{20 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(20 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{80 - 100i + 12i - 15i^2}{16 + 25} = \frac{95}{41} - \frac{88}{41}i$$

Então, na divisão inteira de $20 + 3i$ por $4 + 5i$, o quociente é dado por $2 - 2i$ (que se obtém, arredondando $\frac{95}{41}$ e $-\frac{88}{41}$), enquanto que o resto é dado por $r = z - qw = 20 + 3i - (2 - 2i)(4 + 5i) = 20 + 3i - 8 - 10i + 8i + 10i^2$. Então, $r = 2 + i$.

Observe-se que r pode ser dado por:

$$\begin{aligned} r &= \left(\left(\frac{95}{41} - 2 \right) + \left(-\frac{88}{41} + 2 \right) i \right) (4 + 5i) = \left(\frac{13}{41} - \frac{6}{41}i \right) (4 + 5i) \\ &= \frac{52}{41} + \frac{65}{41}i - \frac{24}{41}i - \frac{30}{41}i^2 = \frac{82}{41} + \frac{41}{41}i = 2 + i \end{aligned}$$

Proposição 489 *Sejam $z, w \in \mathbb{Z}(i)$, com $w \neq 0$. Então, com a notação introduzida, temos $(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 \leq \frac{1}{2}$ e $N(r) \leq \frac{1}{2} N(w)$.*

Demonstração

Como $\frac{z}{w} = x + yi = \tilde{x} + (x - \tilde{x}) + (\tilde{y} + (y - \tilde{y}))i$, temos:

$$z = w(x + yi) = w(\tilde{x} + (x - \tilde{x}) + (\tilde{y} + (y - \tilde{y}))i) = w(\tilde{x} + \tilde{y}i) + w((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})i)$$

Então, $z - w(\tilde{x} + \tilde{y}i) = w((x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})i) = r \in \mathbb{Z}(i)$.

Como $|x - \tilde{x}| \leq \frac{1}{2}$ e $|y - \tilde{y}| \leq \frac{1}{2}$, então $(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, donde se conclui que $N(r) \leq \frac{1}{2} N(w)$.

Finalmente, observe-se que w divide z , se e só se, $N(r) = 0$.

Proposição 490 *Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{Z}$, tais que p é primo, $p \equiv 1 \pmod{4}$ e p divide $N(z)$. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $p = a^2 + b^2$. Então, em $\mathbb{Z}(i)$, $a + bi$ divide $x + yi$ ou $a + bi$ divide $x - yi$.*

Demonstração

$$\begin{aligned} \frac{x + yi}{a + bi} &= \frac{(x + yi)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ax - bxi + ayi - byi^2}{a^2 + b^2} = \frac{ax + by}{p} + \frac{ay - bx}{p}i \\ \frac{x - yi}{a + bi} &= \frac{(x - yi)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ax - bxi - ayi + byi^2}{a^2 + b^2} = \frac{ax - by}{p} - \frac{ay + bx}{p}i \end{aligned}$$

Vamos provar que, nas condições do enunciado, p divide $ax + by$ se e só se p divide $ay - bx$.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p \mid ax + by \\ p = a^2 + b^2 \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} p \mid (ax + by)^2 \\ p \mid (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} p \mid a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \\ p \mid a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \end{array} \right. \\ &\implies p \mid a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2 \\ &\implies p \mid a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy \\ &\implies p \mid (ay - bx)^2 \implies p \mid ay - bx \end{aligned}$$

Reciprocamente:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p \mid ay - bx \\ p = a^2 + b^2 \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} p \mid (ay - bx)^2 \\ p \mid (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} p \mid a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \\ p \mid a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \end{array} \right. \\ &\implies p \mid a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2y^2 + 2abxy - b^2x^2 \\ &\implies p \mid a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy \\ &\implies p \mid (ax + by)^2 \\ &\implies p \mid ax + by \end{aligned}$$

Logo, nas condições do enunciado, p a parte real de $\frac{x+yi}{a+bi}$ é um número inteiro, se e só se, a parte imaginária de $\frac{x+yi}{a+bi}$ também é. Analogamente se mostrava que a parte real de $\frac{x-yi}{a+bi}$ é um número inteiro, se e só se, a parte imaginária de $\frac{x-yi}{a+bi}$ também é.

Mas, por hipótese, $p = a^2 + b^2$ e p divide $N(z) = x^2 + y^2$. Então, p divide $(a^2 + b^2)x^2 - b^2(x^2 + y^2)$.

$$\begin{aligned} p \mid (a^2 + b^2)x^2 - b^2(x^2 + y^2) &\implies p \mid a^2x^2 + b^2x^2 - b^2x^2 - b^2y^2 \\ &\implies p \mid a^2x^2 - b^2y^2 \\ &\implies p \mid (ax + by)(ax - by) \\ &\implies p \mid ax + by \vee p \mid ax - by \end{aligned}$$

Se $p \mid ax + by$, então $p \mid ay - bx$, donde se conclui que $\frac{x+yi}{a+bi} \in \mathbb{Z}(i)$.

Se $p \mid ax - by$, então $p \mid ay + bx$, donde se conclui que $\frac{x-yi}{a+bi} \in \mathbb{Z}(i)$.

Então, $a + bi$ é primo em $\mathbb{Z}(i)$.

Proposição 491 *Seja $p \in \mathbb{N}$, um número primo, tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, tais que $p = a^2 + b^2$. Então, $a + bi$ e $a - bi$ são primos em $\mathbb{Z}(i)$.*

Demonstração

Suponhamos que $a + bi$ divide $z_1 z_2$, com $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}(i)$. Dividindo z_1 e z_2 por $a + bi$, temos

$$\begin{cases} z_1 = (a + bi)w_1 + r_1, \text{ com } w_1, r_1 \in \mathbb{Z}(i) \text{ e } 0 \leq N(r_1) \leq \frac{p}{2} \\ z_2 = (a + bi)w_2 + r_2, \text{ com } w_2, r_2 \in \mathbb{Z}(i) \text{ e } 0 \leq N(r_2) \leq \frac{p}{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= ((a + bi)w_1 + r_1) \times ((a + bi)w_2 + r_2) \\ &= (a + bi)^2 w_1 w_2 + (a + bi)w_1 r_2 + (a + bi)w_2 r_1 + r_1 r_2 \end{aligned}$$

Então, $r_1 r_2 = z_1 z_2 - (a + bi)^2 w_1 w_2 - (a + bi)w_1 r_2 - (a + bi)w_2 r_1$.

Então, $a + bi$ divide $r_1 r_2$, porque $a + bi$ divide todas as parcelas do segundo membro da igualdade anterior.

Então, $N(a + bi)$ divide $N(r_1 r_2) = N(r_1)N(r_2)$, ou seja, p divide $N(r_1)$ ou p divide $N(r_2)$.

Então, $N(r_1) = 0$ ou $N(r_2) = 0$, donde se conclui que $r_1 = 0$ ou $r_2 = 0$. Logo, $a + bi$ divide z_1 ou $a + bi$ divide z_2 .

Observemos que p divide o produto $(a + bi)(a - bi)$ e p não divide nenhum dos dois factores. Então p , como elemento de $\mathbb{Z}(i)$, não é primo.

Proposição 492 *Seja $q \in \mathbb{N}$, um número primo, com $q \equiv 3 \pmod{4}$. Então, q é irredutível em $\mathbb{Z}(i)$.*

Demonstração

Suponhamos que $q = z_1 z_2$, com z_1 e z_2 não invertíveis. Ora, $N(q) = q^2 = N(z_1)N(z_2)$. Então, teria de ser $N(z_1) = N(z_2) = q$, pelo que q seria uma soma de dois quadrados, o que sabemos ser falso. Logo, $N(z_1) = 1$ ou $N(z_2) = 1$.

Logo, se q se decompuser num produto de dois elementos de $\mathbb{Z}(i)$, um desses elementos é uma unidade (por ter norma 1).

Então, q é irredutível em $\mathbb{Z}(i)$.

Proposição 493 *Seja $q \in \mathbb{N}$, um número primo, tal que $q \equiv 3 \pmod{4}$. Então, q é primo em $\mathbb{Z}(i)$.*

Demonstração

Sejam $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$, com $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$.

Suponhamos que q divide o produto $z_1 z_2$.

$$\begin{aligned}
 q \mid z_1 z_2 &\implies q \mid (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) \\
 &\implies q \mid x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i - y_1 y_2 \\
 &\implies q \mid x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \\
 &\implies \begin{cases} q \mid x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ q \mid x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} q \mid x_1^2 x_2 - x_1 y_1 y_2 \\ q \mid x_1 y_1 y_2 + x_2 y_1^2 \end{cases} \\
 &\implies q \mid x_1^2 x_2 - x_1 y_1 y_2 + x_1 y_1 y_2 + x_2 y_1^2 \\
 &\implies q \mid x_1^2 x_2 + x_2 y_1^2 \\
 &\implies q \mid x_2 (x_1^2 + y_1^2) \\
 &\implies q \mid x_2 \vee q \mid x_1^2 + y_1^2
 \end{aligned}$$

1º Caso: Suponhamos que q divide x_2 (em \mathbb{Z}). Então, temos

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} q \mid x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ q \mid x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ q \mid x_2 \end{cases} &\implies \begin{cases} q \mid y_1 y_2 \\ q \mid x_1 y_2 \\ q \mid x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} q \mid y_1 \vee q \mid y_2 \\ q \mid x_1 \vee q \mid y_2 \\ q \mid x_2 \end{cases} \\
 &\implies \begin{cases} q \mid y_1 \\ q \mid x_1 \\ q \mid x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} q \mid y_1 \\ q \mid y_2 \\ q \mid x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} q \mid y_2 \\ q \mid x_1 \\ q \mid x_2 \end{cases} \vee \begin{cases} q \mid y_1 \\ q \mid y_2 \\ q \mid x_2 \end{cases} \\
 &\implies q \mid z_1 \vee q \mid z_2
 \end{aligned}$$

2º Caso: Suponhamos que q divide $x_1^2 + y_1^2$ e que q não divide x_2 . Seja d o máximo divisor comum entre x_1 e y_1 .

Se q divide d , então q divide x_1 e divide x_2 , pelo que q divide z_1 .

Se q não divide d , então q divide $u^2 + v^2$, com $u = \frac{x_1}{d}$ e $v = \frac{y_1}{d}$. Mas esta hipótese não pode ocorrer, porque $q \equiv 3 \pmod{4}$ e o máximo divisor comum entre u e v é 1.

Está, assim, terminada a demonstração.

Proposição 494 *O elemento $1 + i$ é primo e irredutível em $\mathbb{Z}(i)$.*

Demonstração

Suponhamos que $1 + i = z_1 z_2$, com $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}(i)$. Então, $2 = N(1 + i) = N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$. Então, $N(z_1) = 1 \vee N(z_2) = 1$. Logo, um dos números z_1 e z_2 é uma unidade, pelo que $1 + i$ é irredutível em $\mathbb{Z}(i)$.

Suponhamos, agora, que $1 + i$ divide $z_1 z_2$, com $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}(i)$. Então, $2 = N(1 + i)$ divide $N(z_1)N(z_2)$, pelo que 2 divide uma das normas. Sem perda de generalidade, suponhamos que 2 divide $N(z_1)$. Seja $z_1 = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{Z}$. Então, 2 é um divisor de $a^2 + b^2$, pelo que a e b são

ambos pares ou ambos ímpares. Se forem ambos pares, 2 divide z_1 , pelo que $1+i$ divide z_1 , uma vez que $1+i$ divide 2.

Suponhamos que a e b são ambos ímpares. Mas,

$$\frac{a+bi}{1+i} = \frac{(a+bi)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{a-ai+bi+b}{(1+i)(1-i)} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}i.$$

Então, $\frac{a+bi}{1+i} \in \mathbb{Z}(i)$, porque $a+b$ e $b-a$ são pares.

Logo, $1+i$ é primo em $\mathbb{Z}(i)$.

Em face das proposições anteriores, podemos concluir que um elemento de $\mathbb{Z}(i)$ é irredutível se e só se é primo.

Podemos concluir, ainda, que os primos de $\mathbb{Z}(i)$ são $1+i$, os primos de \mathbb{N} que são congruentes com 3, módulo 4, e os elementos $a+bi$ e $a-bi$, tais que $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a^2+b^2=p$, com p primo em \mathbb{N} e p congruente com 1, módulo 4 e, ainda, os respectivos associados.

Finalmente observe-se que, num Anel com identidade, todo o primo é irredutível, mas há Anéis com identidade em que nem todo o irredutível é primo.

Proposição 495 *Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo tal que $p \equiv 1 \pmod{4}$. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}$, tais que $a^2+b^2=p$.*

Demonstração

Se $p \equiv 1 \pmod{4}$, então 4 divide $p-1$. Como $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ é um grupo cíclico para a multiplicação (ver Teorema das raízes Primitivas), então existe em $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ um elemento m de ordem 4. Então, m^2 tem ordem 2, pelo que $m^2 \equiv -1 \pmod{p}$, donde vem que p divide m^2+1 (em \mathbb{N}). Logo, p divide m^2+1 , em $\mathbb{Z}(i)$, ou seja, p divide $(m+i)(m-i)$.

Se p fosse irredutível em $\mathbb{Z}(i)$, então p dividia $m+i$ ou p dividia $m-i$, o que não acontece. Então, p não é irredutível em $\mathbb{Z}(i)$, pelo que existem $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, tais que $p = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$, tendo-se que $a+bi$ e $c+di$ não são unidades. Como a norma de p é p^2 , então as normas de $a+bi$ e $c+di$ são iguais a p . Então, $p = a^2+b^2 = c^2+d^2$.

Capítulo 26

Ternos Pitagóricos

Nota histórica

A existência de triângulos rectângulos, em que as medidas dos comprimentos dos lados são números inteiros, era do conhecimento dos Babilónios há cerca de 4000 anos.

Pensa-se, mesmo, que se os Babilónios não conheciam uma fórmula para todos os triângulos rectângulos de lados inteiros, pelo menos, deveriam conhecer fórmulas parciais para tal questão.

Alguns desses triângulos rectângulos de lados inteiros, também eram do conhecimento dos antigos Egípcios e Chineses.

Julga-se que Pitágoras conhecia os ternos Pitagóricos da forma $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$, mas é a Diophantus de Alexandria que é atribuída a descoberta da fórmula geral dos ternos Pitagóricos.

Curiosamente, embora parte da obra de Diophantus seja bem conhecida, através de traduções para Árabe, não se sabe em que época o mesmo viveu, acreditando alguns historiadores que terá sido entre os séculos II antes de Cristo e III depois de Cristo, mas sem precisar a época exacta.

Tal como os babilónios, Diophantus considerava, não só triângulos rectângulos de lados inteiros, mas também triângulos rectângulos de lados racionais.

É bem conhecido o facto de Pierre de Fermat ser um estudioso da obra de Diophantus e de ter sido na margem duma página dum dos livros de Diophantus, que Fermat escreveu o enunciado do famoso último Teorema de Fermat, que só muito recentemente foi demonstrado.

O último Teorema de Fermat deve ter sido o teorema da Matemática que mais tempo demorou a demonstrar.

Definição 496 *Sejam $x, y, z \in \mathbb{N}$. Se $x^2 + y^2 = z^2$, dizemos que (x, y, z) é um terno Pitagórico (TP); terno Pitagórico primitivo (TPP) é um terno Pitagórico (x, y, z) tal que $\text{mdc}(x, y, z) = 1$.*

Exemplo 497 *$(3, 4, 5)$ é um terno Pitagórico primitivo, porque $3^2 + 4^2 = 5^2$ e $\text{mdc}(3, 4, 5) = 1$. Já $(6, 8, 10)$ é um terno Pitagórico não primitivo, porque $6^2 + 8^2 = 10^2$, mas $\text{mdc}(6, 8, 10) = 2$.*

Interpretação geométrica

A cada terno Pitagórico (x, y, z) corresponde "um" triângulo rectângulo em que x e y são os catetos e z é a hipotenusa. Se (x, y, z) é um terno Pitagórico, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que (kx, ky, kz) é um terno Pitagórico. Observe-se que os triângulos rectângulos correspondentes aos ternos Pitagóricos (x, y, z) e (kx, ky, kz) são semelhantes.

Vejamos como determinar todos os ternos Pitagóricos, começando por alguns casos de ternos Pitagóricos primitivos:

Exemplo 498 Ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 1)$

Se $(y, x, x + 1)$ é um terno Pitagórico, então

$$(x + 1)^2 = y^2 + x^2 \iff x^2 + 2x + 1 = y^2 + x^2 \iff 2x + 1 = y^2$$

Logo y é ímpar, pelo que existe um número natural n , tal que $y = 2n + 1$. Então,

$$2x + 1 = (2n + 1)^2 \iff 2x + 1 = 4n^2 + 4n + 1 \iff x = 2n^2 + 2n \iff x = 2n(n + 1)$$

Então, $y = 2n + 1, x = 2n^2 + 2n, x + 1 = 2n^2 + 2n + 1$

Como $\text{mdc}(x, x + 1) = 1$, então $\text{mdc}(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1) = 1$.

Logo, $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ é um terno Pitagórico primitivo, para qualquer valor de n .

Logo há infinitos ternos Pitagóricos da forma $(y, x, x + 1)$. Alguns desses ternos Pitagóricos estão na tabela seguinte:

n	$2n + 1$	$2n^2 + 2n$	$2n^2 + 2n + 1$	TPP
1	3	4	5	(3, 4, 5)
2	5	12	13	(5, 12, 13)
3	7	24	25	(7, 24, 25)
4	9	40	41	(9, 40, 41)
5	11	60	61	(11, 60, 61)
6	13	84	85	(13, 84, 85)

Exemplo 499 Ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 2)$

Se $(y, x, x + 2)$ é um terno Pitagórico, então

$$(x + 2)^2 = y^2 + x^2 \iff x^2 + 4x + 4 = y^2 + x^2 \iff 4(x + 1) = y^2$$

Logo y é par, pelo que existe um número natural m , tal que $y = 2m$. Então, $4(x + 1) = 4m^2$, donde vem $x + 1 = m^2$. Se x fosse par, então y, x e $x + 2$ eram pares, pelo que $(y, x, x + 2)$ não era um terno Pitagórico primitivo. Então, x deve ser ímpar, pelo que m é par. Então, $m = 2n$, para certo natural n . Então, $x + 1 = 4n^2$, donde se conclui que $x = 4n^2 - 1$ e $x + 2 = 4n^2 + 1$

Como x é ímpar, $\text{mdc}(x, x + 2) = 1$, pelo que $\text{mdc}(4n, 4n^2 - 1, 4n^2 + 1) = 1$.

Então, $(4n, 4n^2 - 1, 4n^2 + 1)$ é um terno Pitagórico primitivo, para qualquer valor de n .

Logo há infinitos ternos Pitagóricos da forma $(y, x, x + 1)$. Alguns desses ternos Pitagóricos estão na tabela seguinte:

n	$4n$	$4n^2 - 1$	$4n^2 + 1$	TPP
1	4	3	5	(4, 3, 5)
2	8	15	17	(8, 15, 17)
3	12	35	37	(12, 35, 37)
4	16	63	65	(16, 63, 65)
5	20	99	101	(20, 99, 101)
6	24	143	145	(24, 143, 145)
7	28	195	197	(28, 195, 197)

Exemplo 500 Ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 3)$

Se $(y, x, x + 3)$ é um terno Pitagórico, então

$$(x + 3)^2 = y^2 + x^2 \iff x^2 + 6x + 9 = y^2 + x^2 \iff 3(2x + 3) = y^2$$

Logo y é múltiplo de 3, pelo que existe um número natural m , tal que $y = 3m$. Então, $3(2x + 3) = 9m^2$, donde vem $2x + 3 = 3m^2$.

Então, $2x$ tem de ser múltiplo de 3, o mesmo acontecendo com x . Então y , x e $x + 3$ são todos múltiplos de 3, pelo que não há ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 3)$.

Torna-se pertinente a questão de saber para que valores de a existem ternos Pitagóricos da forma $(y, x, x + a)$.

A essa questão daremos resposta nas proposições seguintes.

Proposição 501 *Seja p um primo ímpar. Então não há nenhum terno Pitagórico da forma $(y, x, x + p)$.*

Demonstração

Se $(y, x, x + p)$ é um terno Pitagórico, então $(x + p)^2 = y^2 + x^2$.

Logo, $x^2 + 2px + p^2 = y^2 + x^2$, donde vem $p(2x + p) = y^2$.

Então, y é múltiplo de p , pelo que existe um número natural m , tal que $y = pm$.

Então, $p(2x + p) = p^2m^2$, donde vem $2x + p = pm^2$.

Então, $2x$ tem de ser múltiplo de p , o mesmo acontecendo com x . Então y , x e $x + p$ são todos múltiplos de p , pelo que não há ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + p)$.

Proposição 502 *Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que $a > 1$, a é ímpar e a não é quadrado (perfeito). Então não há nenhum TPP da forma $(y, x, x + a)$.*

Demonstração

Seja $a = bp^{2\alpha-1}$, com p primo ímpar, $\alpha, b \in \mathbb{N}$ e b ímpar tal que p não divide b .

De $x^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$, vem:

$$y^2 = 2ax + a^2 = a(2x + a) = bp^{2\alpha-1}(2x + bp^{2\alpha-1})$$

Daqui vem que p^α divide y , pelo que $y = mp^\alpha$, para certo natural m .

Então, $y^2 = m^2p^{2\alpha} = bp^{2\alpha-1}(2x + bp^{2\alpha-1})$.

Logo $m^2p = b(2x + bp^{2\alpha-1})$, donde vem que p divide $2x + bp^{2\alpha-1}$. Então, p divide $2x$, pelo que p divide x . Então, $(y, x, x + a)$ não é um terno Pitagórico primitivo.

Proposição 503 *Se $(y, x, x + a)$ é um terno Pitagórico primitivo e a é ímpar, então a é um quadrado perfeito.*

Esta proposição é, apenas, outra maneira de afimar o mesmo que na proposição anterior. Observemos que esta proposição não garante a existência dum terno Pitagórico primitivo da forma $(y, x, x + a)$, se a for ímpar e quadrado perfeito, embora isso aconteça, como veremos na proposição seguinte.

Proposição 504 *Se a é ímpar e quadrado perfeito, então há infinitos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + a)$.*

Demonstração

Suponhamos que $a = (2s - 1)^2$, para um certo natural s e que existe um terço Pitagórico da forma considerada. Então:

$$y^2 + x^2 = x^2 + 2ax + a^2 \implies y^2 = a(2x + a) \implies y^2 = (2s - 1)^2 (2x + (2s - 1)^2)$$

Então, $2x + (2s - 1)^2$ é um quadrado perfeito ímpar, pelo que existe um número natural n , tal que $2x + (2s - 1)^2 = (2n + 2s - 1)^2$.

Então, $2x + (2s - 1)^2 = 4n^2 + 4n(2s - 1) + (2s - 1)^2$, pelo que $2x = 4n^2 + 4n(2s - 1)$. Logo, $x = 2n^2 + 2n(2s - 1)$.

Substituindo x nas expressões que nos dão y^2 e $x + (2s - 1)^2$, obtemos

$$y^2 = (2s - 1)^2 (2x + (2s - 1)^2) = (2s - 1)^2 (2n + 2s - 1)^2$$

Então, $y = (2s - 1)(2n + 2s - 1) = (n + 2s - 1 - n)(n + 2s - 1 + n) = (n + 2s - 1)^2 - n^2$.

Logo, $(y, x, x + a) = ((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$

Encontrámos, assim, uma expressão geral para os ternos Pitagóricos da forma $(y, x, x + (2s - 1)^2)$. Falta, ainda, mostrar que há infinitos ternos Pitagóricos primitivos desta forma.

Consideremos o terço $((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$.

Vejamos que o terço Pitagórico anterior é um primitivo, se e só se, $\text{mdc}(n, 2s - 1) = 1$.

Se o máximo divisor comum entre n e $2s - 1$ for diferente de 1, existe um número primo p que divide n e $2s - 1$. Então, p divide $(n + 2s - 1)^2 - n^2$, $n^2 + 2n(2s - 1)$ e $2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2$, pelo que $((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$ não é um terço Pitagórico primitivo.

Suponhamos, agora, que $\text{mdc}(n, 2s - 1) = 1$.

Seja $d = \text{mdc}((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$.

Como $(n + 2s - 1)^2 - n^2 = (2s - 1)(2n + 2s - 1)$ é ímpar, então d é ímpar. Suponhamos que $d > 1$. Então, existe um primo ímpar q , tal que q divide os números d, x, y, z . Então, q divide os dois números $z - x = (2s - 1)^2$ e $z - y = 2n^2$, isto é, q divide n e q divide $2s - 1$. Então, q divide $\text{mdc}(n, 2s - 1) = 1$, o que não pode acontecer. Então, é absurdo supor que $d > 1$, pelo que $d = 1$.

Logo, $((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2)$ é um terço Pitagórico primitivo, para todo o valor de n primo com $2s - 1$.

Uma vez que há infinitos números naturais que são primos com $2s - 1$, concluímos, como pretendíamos demonstrar, que há infinitos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + (2s - 1)^2)$.

Exemplo 505 Determinar os ternos Pitagóricos primitivos da forma $(y, x, x + 9)$.

Ora,

$$y^2 + x^2 = (x + 9)^2 \iff y^2 + x^2 = x^2 + 18x + 91 \iff y^2 = 18x + 81 \iff y^2 = 9(2x + 9)$$

E, agora, temos:

$$2x + 9 = (2n + 3)^2 \iff 2x + 9 = 4n^2 + 12n + 9 \iff 2x = 4n^2 + 12n \iff x = 2n^2 + 6n$$

Logo, $x = 2n^2 + 6n$, $y = 3(2n + 3) = 6n + 9$ e $z = 2n^2 + 6n + 9$.

É claro que, para obtermos os valores anteriores, podíamos ter aproveitado a proposição anterior e respectiva demonstração, bastando substituir por s por 2 .

Na tabela seguinte estão indicados alguns dos ternos Pitagóricos primitivos da forma anterior:

n	$6n + 9$	$2n^2 + 6n$	$2n^2 + 6n + 9$	TPP
1	15	8	17	(15, 8, 17)
2	21	20	29	(21, 20, 29)
4	33	56	65	(33, 56, 65)
5	39	80	89	(39, 80, 89)
7	51	140	149	(51, 140, 149)
8	57	176	185	(57, 176, 185)
10	69	260	269	(69, 260, 269)

Reparemos que não aparecem as linhas correspondentes a $n = 3, 6, 9, \dots$, porque estes números não são primos com 3.

Proposição 506 *Se (x, y, z) é um terno Pitagórico primitivo, então z é ímpar.*

Demonstração

Suponhamos que z é par. Então, $z^2 = x^2 + y^2$ é par. Então, x^2 e y^2 são ambos pares ou ambos ímpares, o mesmo acontecendo com x e y .

Se x e y são ambos pares, então (x, y, z) não é um terno Pitagórico primitivo.

Se x e y são ambos ímpares, então temos $x = 2t - 1$, $y = 2s - 1$ e $z = 2r$.

Então, $4r^2 = 4t^2 - 4t + 1 + 4s^2 - 4s + 1 = 4t^2 - 4t + 4s^2 - 4s + 2$, donde se conclui que 4 divide 2, o que é falso.

Em qualquer dos casos, obtivemos uma contradição. Logo, é absurdo supor que z é par, pelo que z tem de ser ímpar, pelo que está terminada a demonstração.

Observação

Se z é ímpar, podemos supor, sem perda de generalidade, que x é par e y é ímpar, pelo que $z - x = a$ é ímpar.

A questão de determinar todos os ternos Pitagóricos está resolvida, porque todo o terno Pitagórico pode ser obtido a partir dum TPP, multiplicando os seus elementos por um qualquer número inteiro positivo.

Então, podemos afirmar que todo o terno Pitagórico primitivo é da forma

$$\left((n + 2s - 1)^2 - n^2, 2n^2 + 2n(2s - 1), 2n^2 + 2n(2s - 1) + (2s - 1)^2 \right),$$

tendo-se que os ternos Pitagóricos desta forma são primitivos, se e só se $\text{mdc}(n, 2s - 1) = 1$.

Finalmente, a expressão $(2ukv, ku^2 - kv^2, ku^2 + kv^2)$, com $k, u, v \in \mathbb{N}$ e $u > v$ gera todos os ternos Pitagóricos (à parte a ordem dos dois primeiros elementos dos ternos).

Proposição 507 *Para cada número natural n maior ou igual a 3, existe um terno Pitagórico que inclui n .*

Demonstração

Se n é ímpar e $n \geq 3$, então existe um natural s , tal que $n = 2s + 1$, pelo que nos basta considerar o terno Pitagórico $(2s + 1, 2s^2 + 2s, 2s^2 + 2s + 1)$.

Se existe um natural s , tal que $n = 4s+2$, temos o terno Pitagórico $(4s+2, 4s^2+4s, 4s^2+4s+2)$. Finalmente, se $n = 4s$, consideramos o terno $(3s, 4s, 5s)$.

Proposição 508 *Sejam $a, b, p \in \mathbb{N}$, com p primo, tais que (a, b, p) é um terno Pitagórico primitivo. Sejam (x_n) e (y_n) as sucessões definidas por*
$$\begin{cases} x_1 = a, y_1 = b \\ x_{n+1} = ax_n - by_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \end{cases}$$
. Então, verificam-se as seguintes propriedades:

1. $x_{2n} = x_n^2 - y_n^2, y_{2n} = 2x_n y_n, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $x_n^2 + y_n^2 = p^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\text{mdc}(x_n, y_n, p^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$
4. $(|x_n|, |y_n|, p^n)$ é um terno Pitagórico primitivo, para todo o natural n

Demonstração

1. Para $n = 1$, temos $\begin{cases} x_2 = ax_1 - by_1 = a^2 - b^2 = x_1^2 - y_1^2 \\ y_2 = bx_1 + ay_1 = ba + ab = 2x_1 y_1 \end{cases}$

Hipótese de indução: $x_{2n} = x_n^2 - y_n^2, y_{2n} = 2x_n y_n$

Tese: $x_{2n+2} = x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2, y_{2n+2} = 2x_{n+1} y_{n+1}$

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= ax_{2n+1} - by_{2n+1} = a(ax_{2n} - by_{2n}) - b(bx_{2n} + ay_{2n}) \\ &= a^2 x_{2n} - aby_{2n} - b^2 x_{2n} - aby_{2n} = a^2 x_{2n} - b^2 x_{2n} - 2aby_{2n} \\ &= (a^2 - b^2) x_{2n} - 2aby_{2n} = (a^2 - b^2) (x_n^2 - y_n^2) - 4abx_n y_n \\ &= a^2 x_n^2 - a^2 y_n^2 - b^2 x_n^2 + b^2 y_n^2 - 2abx_n y_n - 2abx_n y_n \\ &= (a^2 x_n^2 - 2abx_n y_n + b^2 y_n^2) - (a^2 y_n^2 + 2abx_n y_n + b^2 x_n^2) \\ &= (ax_n - by_n)^2 - (bx_n + ay_n)^2 = x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{2n+2} &= ay_{2n+1} + bx_{2n+1} = a(bx_{2n} + ay_{2n}) + b(ax_{2n} - by_{2n}) \\ &= abx_{2n} + a^2 y_{2n} + abx_{2n} - b^2 y_{2n} = (a^2 - b^2) y_{2n} + 2abx_{2n} \\ &= 2(a^2 - b^2) x_n y_n + 2ab(x_n^2 - y_n^2) = 2a^2 x_n y_n - 2b^2 x_n y_n + 2abx_n^2 - 2aby_n^2 \\ &= 2ax_n (ay_n + bx_n) - 2by_n (ay_n + bx_n) = 2ax_n y_{n+1} - 2by_n y_{n+1} \\ &= 2y_{n+1} (ax_n - by_n) = 2x_{n+1} y_{n+1} \end{aligned}$$

Logo, $x_{2n} = x_n^2 - y_n^2, y_{2n} = 2x_n y_n, \forall n \in \mathbb{N}$

2. Para $n = 1$, temos $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2 = p^2$, porque (a, b, p) é um terno Pitagórico.

Hipótese de indução: $x_n^2 + y_n^2 = p^{2n}$

Tese: $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = p^{2n+2}$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 &= (ax_n - by_n)^2 + (ay_n + bx_n)^2 \\ &= a^2 x_n^2 - 2abx_n y_n + b^2 y_n^2 + a^2 y_n^2 + 2abx_n y_n + b^2 x_n^2 \\ &= a^2 x_n^2 + b^2 y_n^2 + a^2 y_n^2 + b^2 x_n^2 = a^2 (x_n^2 + y_n^2) + b^2 (x_n^2 + y_n^2) \\ &= (a^2 + b^2) (x_n^2 + y_n^2) = p^2 \times p^{2n} = p^{2n+2} \end{aligned}$$

Logo, $x_n^2 + y_n^2 = p^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$

3. Começemos por observar que $\text{mdc}(x_n, y_n, p^n) = 1$ se e só se $\text{mdc}(x_n, y_n, p) = 1$.

Para $n = 1$, temos $\text{mdc}(x_1, y_1, p) = \text{mdc}(a, b, p) = 1$, porque (a, b, p) é um terno Pitagórico primitivo.

Suponhamos que existia $m \in \mathbb{N}$, tal que $\text{mdc}(x_m, y_m, p^m) \neq 1$. Então, $\text{mdc}(x_m, y_m, p) = p$, pelo que p dividia x_m e p dividia y_m . Então, p dividia x_{m+1} e p dividia y_{m+1} . Então, p dividia x_n e p dividia y_n , para todo o natural n tal que $n \geq m$.

Como $\text{mdc}(x_1, y_1, p) = 1$, existiria um natural t , tal que $\text{mdc}(x_t, y_t, p) = 1$ e $\text{mdc}(x_{t+1}, y_{t+1}, p) = p$.

Então, $\text{mdc}(x_{2t}, y_{2t}, p) = p$. Mas:

$$\begin{aligned} \text{mdc}(x_{2t}, y_{2t}, p) = p &\implies p \mid x_{2t} \wedge p \mid y_{2t} \implies p \mid x_t^2 - y_t^2 \wedge p \mid 2x_t y_t \\ &\implies p \mid x_t^2 - y_t^2 \wedge (p \mid x_t \vee p \mid y_t) \\ &\implies (p \mid y_t^2 \wedge p \mid x_t) \vee (p \mid y_t \wedge p \mid x_t^2) \implies p \mid x_t \wedge p \mid y_t \end{aligned}$$

Então, teríamos $\text{mdc}(x_t, y_t, p) = p$, contrariamente à hipótese de que $\text{mdc}(x_t, y_t, p) = 1$.

Logo, é absurdo supor que existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $\text{mdc}(x_m, y_m, p^m) \neq 1$.

Então, $\text{mdc}(x_n, y_n, p^n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

4. A afirmação de que $(|x_n|, |y_n|, p^n)$ é um terno Pitagórico primitivo, para todo o natural n , é uma consequência imediata de 2. e 3.

Proposição 509 *Seja (x, y, z) um terno Pitagórico primitivo. Então, todo o factor primo de z é congruente com 1, módulo 4.*

Demonstração

Já sabemos que z tem de ser ímpar. Seja p um divisor primo de z . Então, p não divide x , nem divide y . Mas,

$$p \mid z \implies p \mid z^2 \implies p \mid x^2 + y^2 \implies x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$$

Então, -1 é resíduo quadrático, módulo p , pelo que $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Proposição 510 *Sejam (a, b, c) e (d, e, f) dois ternos Pitagóricos primitivos com $\text{mdc}(c, f) = 1$. Então, há pelo menos, dois ternos Pitagóricos primitivos da forma (x, y, cf) .*

Demonstração

Consideremos os ternos $(ad + be, |ae - bd|, cf)$ e $(|ad - be|, ae + bd, cf)$.

Ora:

$$\begin{aligned} (ad + be)^2 + (ae - bd)^2 &= a^2 d^2 + 2abde + b^2 e^2 + a^2 e^2 - 2abde + b^2 d^2 \\ &= a^2 d^2 + b^2 e^2 + a^2 e^2 + b^2 d^2 = a^2 (d^2 + e^2) + b^2 (d^2 + e^2) \\ &= (a^2 + b^2) (d^2 + e^2) = c^2 f^2 \end{aligned}$$

Logo, $(ad + be, |ae - bd|, cf)$ é um terno Pitagórico, a menos que se tenha $ae - bd = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $1 < c < f$.

Suponhamos que $ae - bd = 0$. Então, $ad + be = cf$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} ae - bd = 0 \\ ad + be = cf \end{cases} &\implies \begin{cases} ade = bd^2 \\ ade + be^2 = cef \end{cases} \implies bd^2 + be^2 = cef \\ &\implies b(d^2 + e^2) = cef \implies bf^2 = cef \implies bf = ce \end{aligned}$$

Então, c divide b , porque $\text{mdc}(c, f) = 1$. Mas, $\text{mdc}(b, c) = 1$, obtendo-se uma contradição. Então, é absurdo supor $ae - bd = 0$, pelo que

$(ad + be, |ae - bd|, cf)$ é um terno Pitagórico. Falta-nos, ainda, provar que este terno Pitagórico é primitivo.

Suponhamos que existe um número primo p , tal que p divide os números $ad + be$ e $ae - bd$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} p | ad + be \\ p | ae - bd \end{cases} &\implies \begin{cases} p | ade + be^2 \\ p | -ade + bd^2 \end{cases} \implies \begin{cases} p | ade + be^2 \\ p | -ade + bd^2 \end{cases} \\ &\implies p | bd^2 + be^2 \implies p | b(d^2 + e^2) \\ &\implies p | bf^2 \implies p | b \vee p | f^2 \implies p | b \vee p | f \end{aligned}$$

Suponhamos que p divide b , além de dividir $ad + be$ e $ae - bd$. Então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} p | ad + be \\ p | ae - bd \\ p | b \end{cases} &\implies \begin{cases} p | ad \\ p | ae \\ p | b \end{cases} \implies \begin{cases} p | a \vee p | d \\ p | a \vee p | e \\ p | b \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} p | a \\ p | b \end{cases} \vee \begin{cases} p | a \\ p | e \\ p | b \end{cases} \vee \begin{cases} p | d \\ p | a \\ p | b \end{cases} \vee \begin{cases} p | d \\ p | e \\ p | b \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} p | a \\ p | b \end{cases} \vee \begin{cases} p | d \\ p | e \end{cases} \end{aligned}$$

Obtivemos, assim, uma contradição, pois no primeiro caso, (a, b, c) não era um terno Pitagórico primitivo e, no segundo caso, (d, e, f) não era um terno Pitagórico primitivo. Então, terá de dividir f .

Suponhamos, então, que p divide f , que p divide $ae - bd$ e que p divide $ad + be$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} p | ad + be \\ p | ae - bd \\ p | f \end{cases} &\implies \begin{cases} p | a^2d + abe \\ p | -abe + b^2d \\ p | f \end{cases} \implies \begin{cases} p | a^2d + b^2d \\ p | f \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} p | (a^2 + b^2)d \\ p | f \end{cases} \implies \begin{cases} p | c^2d \\ p | f \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} p | c \vee p | d \\ p | f \end{cases} \implies \begin{cases} p | c \\ p | f \end{cases} \vee \begin{cases} p | d \\ p | f \end{cases} \end{aligned}$$

Em qualquer dos casos obtemos uma contradição.

Logo, é absurdo supor que existe um número primo p , tal que p divide os números $ad + be$ e $ae - bd$.

Logo, $(ad + be, |ae - bd|, cf)$ é um terno Pitagórico primitivo.

Analogamente, se provava que $(|ad - be|, ae + bd, cf)$ é um terno Pitagórico primitivo.

Ainda falta mostrar que os dois ternos são distintos.

Como $ad + be \neq |ad - be|$, basta-nos verificar que $ad + be \neq ae + bd$:

Suponhamos que $ad + be = ae + bd$. Então, $ad - ae + be - bd = 0$. Logo, $a(d - e) - b(d - e) = 0$, donde se conclui que $(a - b)(d - e) = 0$, ou seja, $a = b$ ou $d = e$, o que é uma contradição, pois não há ternos Pitagóricos da forma (x, x, z) .

Logo, é absurdo supor que $ad + be = ae + bd$, pelo que os dois ternos Pitagóricos são distintos.

Proposição 511 *Sejam $n, p \in \mathbb{N}$, com p um número primo congruente com 1, módulo 4. Então, à parte a ordem dos dois primeiros elementos, existe um único terno Pitagórico primitivo da forma (x, y, p^n) .*

Demonstração

Já sabemos que existe, pelo menos, um terno Pitagórico primitivo da forma (x, y, p^n) . Então, $x^2 + y^2 = p^{2n}$. Como $p \equiv 1 \pmod{4}$, temos $p = a^2 + b^2$, para certos naturais a e b . Consideremos os inteiros Gaussianos $x + yi$ e $a + bi$.

Como a norma de $x + yi$ é $x^2 + y^2 = p^{2n}$, então um dos inteiros Gaussianos $a + bi$ e $a - bi$ divide $x + yi$.

Mas não pode verificar-se que $a + bi$ e $a - bi$ dividam $x + yi$, pois, nesse caso, teríamos que p dividia $x + yi$, ou seja, p dividia x e p dividia y , pelo que (x, y, p^n) não era um terno Pitagórico primitivo. Suponhamos que $a + bi$ divide $x + yi$.

Então, $x + yi = (a + bi)(x_1 + iy_1)$ e $N(x_1 + iy_1) = p^{2n-1}$.

E, mais uma vez, $a + bi$ divide $x_1 + iy_1$, pois, se $a - bi$ dividisse $(x_1 + iy_1)$, então p dividia $x + yi$.

A aplicação sucessiva deste raciocínio leva-nos a concluir que temos $x + yi = u(a + bi)^{2n}$, onde u é uma unidade de $\mathbb{Z}(i)$, ou seja, u é um dos quatro números $1, -1, i, -i$. Então, os números naturais x e y estão bem determinados, só havendo duas hipóteses. Na primeira, x é o módulo da parte real de $(a + bi)^{2n}$ e y é o módulo da parte imaginária de $(a + bi)^{2n}$, enquanto que, na segunda hipótese, temos a situação inversa.

Se $a - bi$ divide $x + yi$, chegamos a uma conclusão análoga, pois $(a - bi)^{2n}$ é o conjugado de $(a + bi)^{2n}$.

É claro que se tivéssemos considerado o número $y + xi$, em vez de $x + yi$, a conclusão seria a mesma.

Fica, assim, provado que, à parte a ordem de x e y , há um único terno Pitagórico da forma (x, y, p^n) .

Proposição 512 *Sejam p_1, \dots, p_k , k números primos congruentes com 1, módulo 4, distintos dois a dois. Sejam $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Então, à parte a ordem dos números x e y , há, exactamente, 2^{k-1} ternos Pitagóricos primitivos da forma $(x, y, p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k})$.*

Exemplo 513 *Vejam como obter os ternos Pitagóricos primitivos da forma $(x, y, 5^4 \times 13^3 \times 17^2)$, ou seja, da forma $(x, y, 396\,833\,125)$:*

Como $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$ e $17 = 4^2 + 1^2$, começamos por calcular $(2 + i)^8$, $(3 + 2i)^6$ e $(4 + i)^4$:

$$(2 + i)^8 = (3 + 4i)^4 = (-7 + 24i)^2 = -527 - 336i$$

$$(3 + 2i)^6 = (5 + 12i)^3 = (5 + 12i)(-119 + 120i) = -2035 - 828i$$

$$(4+i)^4 = (15+8i)^2 = 225 + 240i - 64 = 161 + 240i$$

E, agora, calculamos:

$$\begin{aligned}(2+i)^8 (3+2i)^6 (4+i)^4 &= (-527-336i)(-2035-828i)(161+240i) \\ &= (794\,237 + 1120\,116i)(161+240i) = -140\,955\,683 + 370\,955\,556i\end{aligned}$$

E, deste modo, obtivemos (140 955 683, 370 955 556, 396 833 125), um dos ternos Pitagóricos primitivos procurados.

$$\begin{aligned}(2+i)^8 (3+2i)^6 (4-i)^4 &= (-527-336i)(-2035-828i)(161-240i) \\ &= (794\,237 + 1120\,116i)(161-240i) = 396\,699\,997 - 10\,278\,204i\end{aligned}$$

E, desta vez, obtivemos (396 699 997, 10 278 204, 396 833 125), outro dos ternos Pitagóricos primitivos procurados.

$$\begin{aligned}(2+i)^8 (3-2i)^6 (4+i)^4 &= (-527-336i)(-2035+828i)(161+240i) \\ &= (1350\,653 + 247\,404i)(161+240i) = 158\,078\,173 + 363\,988\,764i\end{aligned}$$

E, assim, obtivemos (158 078 173, 363 988 764, 396 833 125).

$$\begin{aligned}(2+i)^8 (3-2i)^6 (4-i)^4 &= (-527-336i)(-2035+828i)(161-240i) \\ &= (1350\,653 + 247\,404i)(161-240i) = 276\,832\,093 - 284\,324\,676i\end{aligned}$$

E, assim, obtivemos (276 832 093, 284 324 676, 396 833 125), o último terno Pitagórico procurado.

Se pretendermos distinguir a ordem dos dois primeiros elementos dos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(x, y, 396\,833\,125)$, temos os oito ternos:

$$\begin{array}{ll}(140\,955\,683, 370\,955\,556, 396\,833\,125) & (370\,955\,556, 140\,955\,683, 396\,833\,125) \\ (10\,278\,204, 396\,699\,997, 396\,833\,125) & (396\,699\,997, 10\,278\,204, 396\,833\,125) \\ (158\,078\,173, 363\,988\,764, 396\,833\,125) & (363\,988\,764, 158\,078\,173, 396\,833\,125) \\ (276\,832\,093, 284\,324\,676, 396\,833\,125) & (284\,324\,676, 276\,832\,093, 396\,833\,125)\end{array}$$

26.1 A trigonometria e os ternos Pitagóricos

Vamos, agora, abordar o tema dos ternos Pitagóricos ao nível de 12º Ano, utilizando conhecimentos elementares de trigonometria.

Consideremos o terno Pitagórico $(3, 4, 5)$. Da igualdade $3^2 + 4^2 = 25$, podemos obter a nova igualdade $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, que nos faz recordar a fórmula fundamental da trigonometria. Concluimos, então, que existe um número real α , tal que $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ e $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

$$\text{Então, } \begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25} \\ \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \end{cases}$$

E como $\cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) = 1$, temos que $\left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = 1$.

Da igualdade anterior vem que $7^2 + 24^2 = 25^2$, ou seja, $(7, 24, 25)$ é um novo terno Pitagórico (primitivo).

E podemos continuar, de modo a obter mais ternos Pitagóricos primitivos:

$$\begin{cases} \cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha = -\frac{7}{25} \times \frac{3}{5} - \frac{24}{25} \times \frac{4}{5} = -\frac{117}{125} \\ \sin(3\alpha) = \sin(2\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(2\alpha) = \frac{24}{25} \times \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{7}{25} = \frac{44}{125} \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, obtemos o terno Pitagórico primitivo $(44, 117, 125)$.

$$\begin{cases} \cos(4\alpha) = \cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = \frac{49}{625} - \frac{576}{625} = -\frac{527}{625} \\ \sin(4\alpha) = 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) = 2 \times \frac{24}{25} \times \left(-\frac{7}{25}\right) = -\frac{336}{625} \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, obtemos o terno Pitagórico primitivo $(336, 527, 625)$.

$$\begin{cases} \cos(5\alpha) = \cos(4\alpha)\cos\alpha - \sin(4\alpha)\sin\alpha = -\frac{527}{625} \times \frac{3}{5} + \frac{336}{625} \times \frac{4}{5} = -\frac{237}{3125} \\ \sin(5\alpha) = \sin(4\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(4\alpha) = -\frac{336}{625} \times \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{527}{625} = -\frac{3116}{3125} \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, obtemos o terno Pitagórico primitivo $(237, 3116, 3125)$.

Mas podemos ir mais além: Suponhamos que, pelo processo anterior, temos os números x_n e y_n , dados por
$$\begin{cases} \cos(n\alpha) = \frac{x_n}{5^n} \\ \sin(n\alpha) = \frac{y_n}{5^n} \end{cases}.$$

Então, temos:

$$\begin{cases} \cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha = \frac{3}{5} \times \frac{x_n}{5^n} - \frac{4}{5} \times \frac{y_n}{5^n} \\ \sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha\cos(n\alpha) = \frac{3}{5} \times \frac{y_n}{5^n} + \frac{4}{5} \times \frac{x_n}{5^n} \end{cases}$$

Das igualdades anteriores obtemos $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 4y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n \end{cases}$, o que define, por recorrência, as sucessões (x_n) e (y_n) , uma vez que são conhecidos x_1 e y_1 .

É relativamente fácil demonstrar por indução que $(x_n, y_n, 5^n)$ é um terno Pitagórico, sendo a parte mais complicada mostrar que $\text{mdc}(x_n, y_n, 5^n) = 1$, o que prova que o terno Pitagórico é primitivo.

Neste exemplo, considerámos o número primo 5, mas podemos utilizar qualquer primo congruente com 1, módulo 4, como, por exemplo, 13, 17, 29 ou outro.

Exemplo 514 *Suponhamos que temos dois ternos Pitagóricos e vejamos como obter um terceiro terno Pitagórico, a partir dos dois ternos anteriores.*

Consideremos os ternos Pitagóricos $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tais que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$ e $\sin\beta = \frac{12}{13}$. Então:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = -\frac{33}{65} \\ \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{12}{5} \times \frac{3}{13} = \frac{56}{65} \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} = \frac{63}{65} \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{12}{5} \times \frac{3}{13} = -\frac{16}{65} \end{cases}$$

E daqui se obtêm os ternos Pitagóricos primitivos $(33, 56, 65)$ e $(16, 63, 65)$.

E podemos continuar:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25} \\ \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \\ \cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169} \\ \sin(2\beta) = 2\sin\beta\cos\beta = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169} \end{cases}$$

E, ainda:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha + \beta) = \cos(2\alpha)\cos\beta - \sin(2\alpha)\sin\beta = -\frac{7}{25} \times \frac{5}{13} - \frac{24}{25} \times \frac{12}{13} = -\frac{323}{325} \\ \sin(2\alpha + \beta) = \sin(2\alpha)\cos\beta + \sin\beta\cos(2\alpha) = \frac{24}{25} \times \frac{5}{13} - \frac{7}{25} \times \frac{12}{13} = \frac{36}{325} \\ \cos(2\alpha - \beta) = \cos(2\alpha)\cos\beta + \sin(2\alpha)\sin\beta = -\frac{7}{25} \times \frac{5}{13} + \frac{24}{25} \times \frac{12}{13} = \frac{253}{325} \\ \sin(2\alpha - \beta) = \sin(2\alpha)\cos\beta - \sin\beta\cos(2\alpha) = \frac{24}{25} \times \frac{5}{13} + \frac{7}{25} \times \frac{12}{13} = \frac{204}{325} \\ \cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha\cos(2\beta) - \sin\alpha\sin(2\beta) = -\frac{3}{5} \times \frac{119}{169} - \frac{4}{5} \times \frac{120}{169} = -\frac{837}{845} \\ \sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos\alpha = -\frac{4}{5} \times \frac{119}{169} + \frac{120}{169} \times \frac{3}{5} = -\frac{116}{845} \\ \cos(\alpha - 2\beta) = \cos\alpha\cos(2\beta) + \sin\alpha\sin(2\beta) = -\frac{3}{5} \times \frac{119}{169} + \frac{4}{5} \times \frac{120}{169} = \frac{123}{845} \\ \sin(\alpha - 2\beta) = \sin\alpha\cos(2\beta) - \sin(2\beta)\cos\alpha = -\frac{4}{5} \times \frac{119}{169} - \frac{120}{169} \times \frac{3}{5} = -\frac{836}{845} \end{cases}$$

E daqui obtemos os ternos Pitagóricos primitivos $(36, 323, 325)$, $(204, 253, 325)$, $(116, 837, 845)$ e $(123, 836, 845)$.

É claro que o processo pode prolongar-se.

26.2 Os números complexos e os ternos Pitagóricos

Podemos, também, utilizar conhecimentos elementares dos números complexos, para tratar o tema dos ternos Pitagóricos.

Consideremos o número complexo $3 + 4i$. O módulo deste complexo é dado por $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, o que significa que $3^2 + 4^2 = 5^2$, obtendo-se, assim, o terno Pitagórico $(3, 4, 5)$.

E, pelo cálculo das sucessivas potências de $3 + 4i$, obtemos novos ternos Pitagóricos, uma vez que o módulo do produto de um número finito de números complexos é o produto dos módulos desses números.

$$\begin{cases} (3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = -7 + 24i \\ |-7 + 24i| = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 5^2 \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, descobrimos o terno Pitagórico primitivo $(7, 24, 25)$.

$$\begin{cases} (3 + 4i)^3 = (-7 + 24i)(3 + 4i) = -21 - 28i + 72i + 96i^2 = -117 + 44i \\ |-117 + 44i| = 5^3 \end{cases}$$

Das duas igualdades anteriores, descobrimos o terno Pitagórico primitivo $(44, 117, 125)$.

Vejamos, agora, como obter duas sucessões que vão definir os sucessivos ternos Pitagóricos:

Suponhamos que $(3 + 4i)^n = x_n + iy_n$, com $x_n + iy_n \in \mathbb{N}$. Então:

$$(3 + 4i)^{n+1} = (x_n + iy_n)(3 + 4i) = 3x_n + 4ix_n + 3iy_n - 4y_n = 3x_n - 4y_n + i(4x_n + 3y_n)$$

$$\text{E daqui, obtemos a sucessão definida por } \begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4 \\ x_{n+1} = 3x_n - 4y_n \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n \end{cases}$$

Estão, assim definidos infinitos ternos Pitagóricos primitivos da forma $(x^n, y^n, 5^n)$.

Utilizando uma Calculadora gráfica, podemos definir as funções anteriores e, assim, obter os ternos Pitagóricos.

Consideremos o número complexo $5 + 12i$. O módulo deste complexo é dado por $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, o que significa que $5^2 + 12^2 = 13^2$, obtendo-se, assim, o terno Pitagórico $(5, 12, 13)$.

E, pelo cálculo das sucessivas potências de $5 + 12i$, obtemos novos ternos Pitagóricos, uma vez que o módulo do produto de um número finito de números complexos é o produto dos módulos desses números.

$$\begin{cases} (5 + 12i)^2 = 25 + 120i + 144i^2 = -119 + 120i \\ |-119 + 120i| = \sqrt{(-119)^2 + 120^2} = \sqrt{28561} = 169 = 13^2 \end{cases}$$

Das igualdades anteriores, descobrimos o terno Pitagórico primitivo $(119, 120, 13^2)$.

$$\begin{cases} (5 + 12i)^3 = (-119 + 120i)(5 + 12i) = -595 - 1428i + 600i + 1440i^2 = -2035 - 828i \\ |-2035 - 828i| = \sqrt{(-2035)^2 + (-828)^2} = 2197 = 13^3 \end{cases}$$

Das duas igualdades anteriores, descobrimos o terno Pitagórico primitivo $(828, 2035, 13^3)$.

Vejamos, agora, como obter duas sucessões que vão definir os sucessivos ternos Pitagóricos:

Suponhamos que $(5 + 12i)^n = x_n + iy_n$, com $x_n + iy_n \in \mathbb{N}$. Então:

$$(5 + 12i)^{n+1} = (x_n + iy_n)(5 + 12i) = 5x_n + 12ix_n + 5iy_n - 12y_n = 5x_n - 12y_n + i(12x_n + 5y_n)$$

$$\text{E daqui, obtemos a sucessão definida por } \begin{cases} x_1 = 3, y_1 = 4 \\ x_{n+1} = 5x_n - 12y_n \\ y_{n+1} = 12x_n + 5y_n \end{cases}$$

Consideremos os ternos Pitagóricos $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$. A partir destes dois ternos, podemos obter outros ternos Pitagóricos:

$$\begin{cases} (3 + 4i)(5 - 12i) = 15 - 36i + 20i - 48i^2 = 63 - 16i \\ |63 - 16i| = \sqrt{63^2 + 16^2} = \sqrt{4225} = 65 = 5 \times 13 \\ (3 + 4i)(5 + 12i) = 15 + 36i + 20i + 48i^2 = -33 + 56i \\ |-33 + 56i| = \sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{4225} = 65 = 5 \times 13 \end{cases}$$

E, assim, obtivemos os dois ternos Pitagóricos $(16, 63, 5 \times 13)$ e $(33, 56, 5 \times 13)$.

Para obter os ternos Pitagóricos da forma $(x, y, 5^2 \times 13)$, calculamos $(3 + 4i)^2(5 - 12i) = 253 + 204i$ e $(3 + 4i)^2(5 + 12i) = -323 + 36i$, pelo que obtemos os ternos Pitagóricos $(204, 253, 5^2 \times 13)$ e $(36, 323, 5^2 \times 13)$.

Não podemos deixar de chamar a atenção para o importante facto deste assunto estar intimamente relacionado com a decomposição dum número natural numa soma de dois quadrados.

Assim, $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, enquanto que 7 não pode decompor-se numa soma de menos de quatro quadrados: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$.

Finalizamos, realçando o facto da Trigonometria estar intimamente relacionada com os Números Complexos, pelo que era de esperar o paralelismo existente entre as duas maneiras de abordar este Tema, a nível de 12º Ano.

Capítulo 27

Análise Combinatória

Suponhamos que queremos analisar com algum pormenor alguns jogos muito populares, como o Totobola, o Totoloto e o mais recente Euromilhões.

Para essa análise precisamos de saber fazer contagens e convém aprender algumas noções básicas, antes de falarmos nesses jogos.

Exemplo 515 *Produto cartesiano de dois ou mais conjuntos*

Um exemplo muito conhecido dos alunos é o jogo da batalha naval. Neste jogo, temos 100 quadrículas, cada uma das quais é identificada por um número e por uma letra. Em Matemática, diremos que cada quadrícula é identificada por um par ordenado constituído por um número de 1 a 10 e por uma letra de a até j , conforme se pode ver na seguinte tabela:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
1	$(1, a)$	$(1, b)$	$(1, c)$	$(1, d)$	$(1, e)$	$(1, f)$	$(1, g)$	$(1, h)$	$(1, i)$	$(1, j)$
2	$(2, a)$	$(2, b)$	$(2, c)$	$(2, d)$	$(2, e)$	$(2, f)$	$(2, g)$	$(2, h)$	$(2, i)$	$(2, j)$
3	$(3, a)$	$(3, b)$	$(3, c)$	$(3, d)$	$(3, e)$	$(3, f)$	$(3, g)$	$(3, h)$	$(3, i)$	$(3, j)$
4	$(4, a)$	$(4, b)$	$(4, c)$	$(4, d)$	$(4, e)$	$(4, f)$	$(4, g)$	$(4, h)$	$(4, i)$	$(4, j)$
5	$(5, a)$	$(5, b)$	$(5, c)$	$(5, d)$	$(5, e)$	$(5, f)$	$(5, g)$	$(5, h)$	$(5, i)$	$(5, j)$
6	$(6, a)$	$(6, b)$	$(6, c)$	$(6, d)$	$(6, e)$	$(6, f)$	$(6, g)$	$(6, h)$	$(6, i)$	$(6, j)$
7	$(7, a)$	$(7, b)$	$(7, c)$	$(7, d)$	$(7, e)$	$(7, f)$	$(7, g)$	$(7, h)$	$(7, i)$	$(7, j)$
8	$(8, a)$	$(8, b)$	$(8, c)$	$(8, d)$	$(8, e)$	$(8, f)$	$(8, g)$	$(8, h)$	$(8, i)$	$(8, j)$
9	$(9, a)$	$(9, b)$	$(9, c)$	$(9, d)$	$(9, e)$	$(9, f)$	$(9, g)$	$(9, h)$	$(9, i)$	$(9, j)$
10	$(10, a)$	$(10, b)$	$(10, c)$	$(10, d)$	$(10, e)$	$(10, f)$	$(10, g)$	$(10, h)$	$(10, i)$	$(10, j)$

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$.

Definimos produto cartesiano de A por B , o qual se representa por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados que é possível formar, de modo que o primeiro elemento do par pertença ao conjunto A e o segundo elemento do par pertença ao conjunto B . Então, $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$.

É claro que o número de elementos de $A \times B$ é o produto o número de elementos de A pelo número de elementos de B .

Representando o número de elementos de A por $\#A$, temos $\#(A \times B) = \#A \times \#B$, fórmula esta que é válida para quaisquer conjuntos finitos A e B .

O produto cartesiano de três conjuntos A, B, C é dado por:

$$A \times B \times C = \{(x, y, z) : x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$$

Quanto ao número de elementos de $A \times B \times C$, ou cardinal de $A \times B \times C$, temos

$$\#(A \times B \times C) = \#A \times \#B \times \#C$$

Exemplo 516 *O Totobola*

Suponhamos que o Totobola é constituído por 13 jogos. Quantas apostas temos de fazer, para garantirmos que se acerta nos 13 resultados?

Cada resultado é um de 3 símbolos (1, X, 2), pelo que, representando o conjunto desses símbolos por Y , temos que o conjunto de todos os resultados possíveis é Y^{13} , isto é, o produto cartesiano de 13 conjuntos todos iguais a Y .

Então, $\#Y^{13} = (\#Y)^{13} = 3^{13}$.

Ao fim e ao cabo, temos 3 elementos para escolhermos 13, podendo haver (tem de haver, neste caso) repetição de elementos.

Ao número 3^{13} chama-se "arranjos com repetição de 3, 13 a 13" que é denotado por ${}^3\overline{A}_{13}$. Então, ${}^3\overline{A}_{13} = 3^{13}$, tendo-se no caso geral, ${}^m\overline{A}_n = m^n$. Aos "arranjos com repetição" também se chama "arranjos completos".

Em conclusão, o número máximo de apostas diferentes que podemos fazer no Totoloto é 3^{13} , ou seja, 1 594 323.

Se considerarmos um Totoloto com 14 jogos, teremos $3^{14} = 4\,782\,969$ apostas diferentes.

Exemplo 517 *O código do cartão de Multibanco*

O código dos cartões de Multibanco (e dos telemóveis) é constituído por 4 algarismos de 0 a 9. Então, o número máximo de códigos diferentes que podemos escolher é ${}^{10}\overline{A}_4 = 10^4 = 10\,000$.

Exemplo 518 *Códigos de segurança*

O código de segurança dum telemóvel é uma sequência de quatro algarismos de 0 a 9. O João escolheu uma sequência que não é uma capicua. Calcule o número de hipóteses para o código do telemóvel do João.

Resolução

O número total de códigos é $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$.

O número de capicuas é $10 \times 10 \times 1 \times 1 = 100$, porque o terceiro algarismo tem de ser igual ao segundo e o quarto algarismo tem de ser igual ao primeiro. Então, o número de códigos que não são capicuas é $10\,000 - 100$, isto é, 9900.

Exemplo 519 *Números naturais de 4 algarismos*

Com os algarismos de 0 a 9, quantos números naturais de 4 algarismos podemos formar?

O número 0023 tem 2 algarismos, pois não é costume escrever um número natural, começando por zero. Então, o número de hipóteses para o primeiro dos quatro algarismos é 9, pelo que o número total de hipóteses é $9 \times 10 \times 10 \times 10$, ou seja, $9 \times {}^{10}\overline{A}_3$, ou 9000.

Exemplo 520 *Números naturais de 4 algarismos diferentes*

Com os algarismos de 0 a 9, quantos números naturais de 4 algarismos diferentes podemos formar?

Neste caso, vem $9 \times 9 \times 8 \times 7$, uma vez que, para o primeiro algarismo, temos 9 hipóteses (não pode ser zero), para o segundo, temos 9 hipóteses (não pode ser igual ao primeiro), para o terceiro, temos 8 hipóteses (não pode ser igual ao primeiro nem ao segundo) e, para o quarto algarismo, temos, apenas, 7 hipóteses.

Exemplo 521 *Números naturais de 4 algarismos diferentes*

Com os algarismos de 1 a 9, quantos números naturais de 4 algarismos diferentes podemos formar?

Neste caso, vem $9 \times 8 \times 7 \times 6$, o que corresponde a escolher quatro elementos entre 9, interessando-nos a ordem pela qual aparecem os elementos (o número 1234 é diferente do número 2413, embora sejam formados pelos mesmos algarismos). Vamos dizer que ${}^9A_4 = 9 \times 8 \times 7 \times 6$, onde o símbolo 9A_4 é o número de maneiras de escolher 4 elementos diferentes entre 9 elementos à disposição, interessando a ordem dos elementos.

O símbolo 9A_4 lê-se arranjos de nove, quatro a quatro, e é um produto de 4 factores, que começam em 9 e vão diminuindo uma unidade. Estes arranjos são conhecidos por *arranjos simples* ou *arranjos sem repetição*.

Repare-se que

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{9!}{5!}$$

No caso geral, temos

$${}^m A_n = m(m-1) \cdots (m-n+1)$$

A expressão anterior é equivalente a

$${}^m A_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Um caso particular dos arranjos simples é aquele em que os dois índices são iguais, como, por exemplo, 9A_9 ou nA_n . A expressão nA_n , habitualmente, é substituída por P_n , permutações de n , tendo-se

$$P_n = n! = n(n-1) \cdots 2 \times 1$$

Por exemplo, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ é o número de maneiras de escolher 5 elementos entre 5 elementos à disposição, interessando a ordem dos elementos escolhidos.

Observe-se que se define $0! = 1$, para que a fórmula ${}^m A_n = \frac{m!}{(m-n)!}$ tenha significado para $m = n$ e que m não pode ser inferior a n .

Exemplo 522 *Número de subconjuntos de cardinal dado*

Seja $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Quantos subconjuntos de 3 elementos admite o conjunto X ?

Nesta pergunta, podemos substituir *quantos* por *quais* e, depois, contar o número de subconjuntos, esperando-se que, entretanto, se aprenda alguma coisa, de modo a arranjar outra resolução.

Os subconjuntos pretendidos são:

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$

Logo, temos 10 subconjuntos de X com 3 elementos.

É claro que precisamos de outra maneira de resolver esta questão!

Suponhamos que pretendemos saber quantos números naturais, de 3 algarismos diferentes, podemos formar, utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5.

A resposta, já sabemos, é ${}^5A_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Esses 60 números podem ser obtidos dos conjuntos anteriores, permutando os seus elementos.

Assim, do conjunto $\{1, 2, 3\}$, obtemos 6 números: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Então, cada subconjunto origina 6 números, pelo que tem de haver 10 subconjuntos, uma vez que temos 60 números.

O número de subconjuntos de 3 elementos que o conjunto admite é representado por 5C_3 ou por $\binom{5}{3}$, que se lêem combinações de 5, 3 a 3, tendo-se $\binom{5}{3} = \frac{{}^5A_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \frac{5!}{3! \times 2!}$

No caso geral, teremos

$$\binom{n}{k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Exemplo 523 *De casa à escola por um dos caminhos mais curtos*

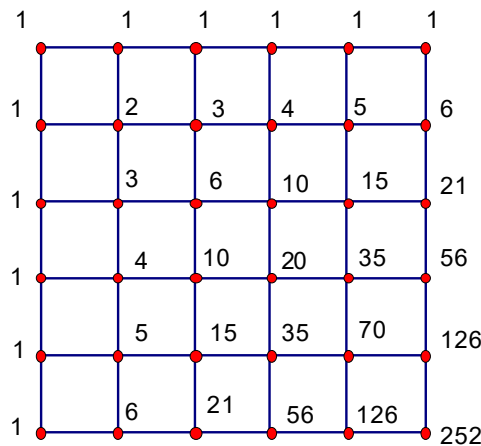
Consideremos uma cidade em que todas as ruas são perpendiculares ou paralelas. O João vive numa casa situada numa esquina (a casa que fica no canto superior esquerdo, no esquema) e tem de ir a pé para a escola, andando 5 quarteirões para leste e 5 quarteirões para sul.

Quantos percursos diferentes e mais curtos pode efectuar o João?

Esta questão é equivalente a sabermos quantas palavras, constituídas por cinco L e 5 S, podemos formar, ou dito de outro modo, quantos anagramas admite a palavra LLLLLSSSSS.

A resposta é $\binom{10}{5} \times \binom{5}{5} = \frac{10!}{5! \times 5!} = 252$

Outra resolução



Se dermos outra orientação ao quadrado anterior, temos:

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1
	5		10		10		5	
	6		15		20		15	
		21		35		35		21
			56		70		56	
				126		126		
					252			

Se considerarmos, apenas, a metade superior, obtemos o seguinte triângulo, conhecido como Triângulo de Pascal, embora fosse conhecido dos Chineses vários séculos antes do nascimento de Pascal.

				1			
			1		1		
		1		2		1	
	1		3		3		1
	1		4		6		4
1		5		10		10	
	5		10		10		5
		10		10		5	
			10		5		1
				10		5	
					10		1

Observemos que o triângulo de Pascal pode ser prolongado indefinidamente, tendo-se que todas as linha são simétricas, todas começam (e acabam) em 1, pode haver ou não haver termo médio e, em cada linha, os números aumentam e depois diminuem.

Além disso, temos que cada elemento diferente de 1 é a soma dos dois elementos da linha anterior que estão imediatamente acima.

Uma outra propriedade importante é o facto da soma dos elementos duma linha ser uma potência de 2. Por exemplo, $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.

O facto anterior pode parecer inesperado para algumas pessoas, mas é perfeitamente natural, porque a soma dos elementos duma linha é o número de subconjuntos dum certo conjunto finito. Ora, cada elemento desse conjunto tem duas possibilidades: ou pertence ou não pertence a cada subconjunto, pelo que o número de subconjuntos é uma potência de 2.

Uma maneira mais complicada consiste em fazer a demonstração por indução.

Uma terceira maneira é consequência da fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton, a qual nos dá $(a + b)^n$. Então, basta-nos, nessa fórmula, substituir a e b por 1.

Observe-se que o triângulo apresentado acima é o seguinte:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
 \end{array}$$

Exemplo 524 *Algumas propriedades do triângulo de Pascal*

Mostre que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Resolução

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
 &= \binom{n+1}{k+1}
 \end{aligned}$$

Está, assim, terminada a demonstração.

Exercício 525 *O quociente entre dois termos consecutivos numa linha do triângulo de Pascal é $\frac{7}{4}$. Que linha é essa?*

Resolução

Do enunciado conclui-se que $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{7}{4}$. Ora,

$$\begin{aligned}
 \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} &= \frac{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-k-1)!}}{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}} \\
 &= \frac{n!}{(k+1)! \times k! \times (n-k-1)!} \times \frac{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}
 \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{n-k}{k+1} = \frac{7}{4} \iff 4n-4k = 7k+7 \iff 4n-11k = 7 \iff n = \frac{11k+7}{4}$$

É fácil verificar que k deve ser ímpar. Então, $k = 2t + 1$, para certo inteiro t .

$$\text{Logo, } n = \frac{11k+7}{4} = \frac{11(2t+1)+7}{4} = \frac{22t+18}{4} = \frac{11t+9}{2}.$$

Então, t deve ser ímpar, pelo que $t = 2s + 1$, para certo inteiro s .

$$\text{Logo, } n = \frac{11t+9}{2} = \frac{11(2s+1)+9}{2} = \frac{22s+20}{2} = 11s+10.$$

$$\text{Então, } k = 2t + 1 = 2(2s + 1) + 1 = 4s + 3.$$

Na seguinte tabela estão indicadas algumas das infinitas soluções:

s	0	1	2	3	4
k	3	7	11	15	19
n	10	21	32	43	54
$\binom{n}{k+1}$	210	203 490	225 792 840	265 182 149 218	321 387 366 339 585
$\binom{n}{k}$	120	116 280	129 024 480	151 532 656 696	183 649 923 622 620
$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$

Exemplo 526 *O Binómio de Newton*

Sejam $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, com $a + b \neq 0$. Então, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Demonstração

Para $n = 0$, vem $(a + b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$, o que é verdade.

Suponhamos que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Então, pretendemos mostrar que $(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n+1-k-1} b^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k
\end{aligned}$$

Está, assim, terminada a demonstração (por indução).

Exercício 527 Calcule o termo independente de x , no desenvolvimento de $(x^2 + \frac{2}{x})^9$

Resolução

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (x^2)^{9-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \frac{x^{18-2k} 2^k}{x^k} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} x^{18-3k} 2^k$$

O termo independente de x corresponde a $k = 6$, obtendo-se a parcela $\binom{9}{6} x^0 2^6$, cujo valor é 5376.

Exemplo 528 Soma dos elementos numa linha do triângulo de Pascal

$$\text{Como } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \text{ fazendo } a = b = 1, \text{ obtemos } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

Exemplo 529 (Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 1) Suponhamos que temos uma turma de 24 alunos e que o professor pretende formar 6 grupos de 4 alunos, para elaborarem

um trabalho. Esse trabalho irá incidir sobre seis temas, sendo sorteado um tema para cada grupo, pelo que grupos diferentes tratarão de temas diferentes. De quantas maneiras se podem distribuir os alunos pelos grupos e temas?

Resolução

Para o tema 1, temos de escolher 4 alunos entre 24. Logo, há $\binom{24}{4}$ hipóteses de fazer essa escolha; depois, vem $\binom{20}{4}$ hipóteses, para o Tema 2 e, assim sucessivamente, pelo que o número final de maneiras é

$$\binom{24}{4} \times \binom{20}{4} \times \binom{16}{4} \times \binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4}$$

ou seja, $\frac{24!}{20! \times 4!} \times \frac{20!}{16! \times 4!} \times \frac{16!}{12! \times 4!} \times \frac{12!}{8! \times 4!} \times \frac{8!}{4! \times 4!} \times 1$

Simplificando, obtemos $\frac{24!}{(4!)^6}$ maneiras.

O valor da expressão anterior é 3 246 670 537 110 000, o qual é um número muito grande.

Exemplo 530 (Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 2) Suponhamos que temos uma turma de 24 alunos e que o professor pretende formar 6 grupos de 4 alunos, para elaborarem um trabalho sobre um único tema. De quantas maneiras se podem distribuir os alunos?

Resolução

Esta questão não é fácil e qualquer pessoa pode ser induzida em erro, dando como resposta o número da questão anterior. É claro que depois de termos resolvido a questão anterior, sabemos que a resposta não pode ser essa.

Como passamos de um tema para seis temas? Fixando os grupos, basta permutar os 6 temas, pelo que a resposta pretendida é $\frac{24!}{(4!)^6 \times 6!}$, ou seja, 4509264634875.

Sugerimos ao leitor que resolva as questões anteriores, considerando uma turma de 4 ou 6 alunos e 2 grupos, o que permite fazer uma lista exhaustiva das hipóteses.

Esse trabalho irá convencer o leitor (que ainda não esteja convencido) das razões que nos levam a rejeitar uma resposta que, à primeira vista, pode parecer correcta, mas não o é.

Uma outra hipótese é o leitor considerar uma turma de 24 alunos, um único tema e grupos de 1 aluno. Parece claro que há uma única maneira: cada um faz o seu trabalho, o que corresponde a

$$\frac{\binom{24}{1} \times \binom{23}{1} \times \binom{22}{1} \times \cdots \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}}{24!} = 1$$

Consideremos, uma turma de 6 alunos e que pretendemos formar 3 grupos de 2 alunos para efectuarem um trabalho sobre um único tema. Vejamos as 90 hipóteses possíveis, de acordo com a resposta (errada):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Grupo 1	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,4	1,4
Grupo 2	3,4	3,5	3,6	4,5	4,6	5,6	2,4	2,5	2,6	4,5	4,6	5,6	2,3	2,5
Grupo 3	5,6	4,6	4,5	3,6	3,5	3,4	5,6	4,6	4,5	2,6	2,5	2,4	5,6	3,6

	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Grupo 1	1,4	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,6
Grupo 2	2,6	3,5	3,6	5,6	2,3	2,4	2,6	3,4	3,6	4,6	2,3	2,4	2,5	3,4
Grupo 3	3,5	2,6	2,5	2,3	4,6	3,6	3,4	2,6	2,4	2,3	4,5	3,5	3,4	2,5

	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
Grupo 1	1,6	1,6	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4	2,4
Grupo 2	3,5	4,5	1,4	1,5	1,6	4,5	4,6	5,6	1,3	1,5	1,6	3,5	3,6	5,6
Grupo 3	2,4	2,3	5,6	4,6	4,5	1,6	1,5	1,4	5,6	3,6	3,5	1,6	1,5	1,3

	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
Grupo 1	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	2,6	3,4	3,4
Grupo 2	1,3	1,4	1,6	3,4	3,6	4,6	1,3	1,4	1,5	3,4	3,5	4,5	1,2	1,5
Grupo 3	4,6	3,6	3,4	1,6	1,4	1,3	4,5	3,5	3,4	1,5	1,4	1,3	5,6	2,6

	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
Grupo 1	3,4	3,4	3,4	3,4	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,6	3,6	3,6	3,6
Grupo 2	1,6	2,5	2,6	5,6	1,2	1,4	1,6	2,4	2,6	4,6	1,2	1,4	1,5	2,4
Grupo 3	2,5	1,6	1,5	1,2	4,6	2,6	2,4	1,6	1,4	1,2	4,5	2,5	2,4	1,5

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
Grupo 1	3,6	3,6	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,6	4,6	4,6	4,6	4,6	4,6
Grupo 2	2,5	4,5	1,2	1,3	1,6	2,3	2,6	3,6	1,2	1,3	1,5	2,3	2,5	3,5
Grupo 3	1,4	1,2	3,6	2,6	2,3	1,6	1,3	1,2	3,5	2,5	2,3	1,5	1,3	1,2

	85	86	87	88	89	90
Grupo 1	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6	5,6
Grupo 2	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4
Grupo 3	3,4	2,4	2,3	1,4	1,3	1,2

O número 90 é obtido do seguinte modo: $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} = 90$.

Mas, estas 90 hipóteses não são distintas: são idênticas as hipóteses 1, 6, 55, 60, 85 e 90, por exemplo.

O mesmo acontece nos restantes casos. Logo, o número de hipóteses distintas é

$$\frac{\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}}{3!} = \frac{90}{6} = 15$$

Esperemos que todos os leitores tenham ficado convencidos! É claro que, se tivéssemos 3 temas

diferentes, um para cada grupo, o número de hipóteses seria 90, bastando, nas tabelas anteriores, substituir Grupo por Tema.

Exemplo 531 (*Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 3*) Suponhamos que temos uma turma de 24 alunos e que o professor pretende formar 6 grupos de 4 alunos, para elaborarem um trabalho. Esse trabalho irá incidir sobre oito temas, sendo sorteado um tema para cada grupo, pelo que grupos diferentes tratarão de temas diferentes. De quantas maneiras se podem distribuir os alunos pelos grupos e temas?

Resolução

É claro que basta escolher os 6 temas, após o que voltamos à versão 1. Logo, a resposta é $\binom{8}{6} \times \frac{24!}{(4!)^6}$, ou seja, 90 906 775 039 080 000.

Exemplo 532 (*Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 4*) Suponhamos que temos uma turma de 23 alunos e que o professor pretende formar 5 grupos de 4 alunos e um grupo de 3 alunos, para elaborarem um trabalho sobre um único tema. De quantas maneiras se podem distribuir os alunos pelos grupos e temas?

Resolução

Começamos por escolher os alunos que vão formar um grupo de 3. Temos $\binom{23}{3}$ maneiras de fazer a escolha, restando 20 alunos para 5 grupos de 4. O número total de maneiras é $\binom{23}{3} \times \frac{20!}{(4!)^5}$, ou seja, 541 111 756 185 000 maneiras.

Exemplo 533 (*Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 5*) Suponhamos que temos uma turma de 23 alunos e que o professor pretende formar 5 grupos de 4 alunos e um grupo de 3 alunos, para elaborarem um trabalho sobre seis temas, sendo que grupos diferentes tratam de temas diferentes. Quantas maneiras há de fazer isso?

Resolução

Imaginemos que tínhamos 5 alunos e dois temas e que queríamos formar um grupo de 2 e um grupo de 3. Ora, $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$, pelo que há dez maneiras de escolher um grupo de 2 alunos. Então, há 20 maneiras de escolher os grupos e os temas. A resposta seria $\binom{5}{2} \times 2 = 20$.

Voltemos à questão colocada. Há $\binom{23}{3} \times 6 = 10\,626$ maneiras de escolher o grupo de 3 alunos e o tema que esse grupo vai tratar. Restam 5 grupos de 4 e 5 temas. Para estes 20, a resposta é $\binom{20}{4} \times \binom{16}{4} \times \binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4} = 305\,540\,235\,000$. Logo, a resposta final é $10\,626 \times 305\,540\,235\,000 = 3\,246\,670\,537\,110\,000$.

Exemplo 534 (*Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 6*) Suponhamos que temos uma turma de 23 alunos e que o professor pretende formar 5 grupos de 4 alunos e um grupo de 3 alunos, para elaborarem um trabalho sobre um único tema. Quantas maneiras há de fazer isso?

Resolução

Começamos por escolher o grupo de 3 alunos, o que pode ser feito de $\binom{23}{3} = 1771$ maneiras. Depois, temos uma turma de 20, para formarmos 5 grupos de 4 (para um único tema). Esta segunda parte pode ser feita de $\frac{\binom{20}{4} \times \binom{16}{4} \times \binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4}}{5!} = 2546\,168\,625$. Então, a resposta à questão colocada é $1771 \times 2546\,168\,625 = 4509\,264\,634\,875$.

Exemplo 535 (*Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 7*) Suponhamos que temos uma turma de 21 alunos e que o professor pretende formar três grupos de 3 alunos e três grupos de 4 alunos, para elaborarem um trabalho. Há seis temas disponíveis e grupos diferentes ficam com temas diferentes. Quantas maneiras há de fazer isso?

Resolução

Começamos por escolher os temas destinados aos grupos de 3 elementos $\binom{6}{3} = 20$. Depois, escolhemos os 9 elementos que vão formar grupos de 3 pessoas. Isso corresponde a $\binom{21}{9} = 293\,930$ maneiras. Agora, temos uma "turma" de 9 elementos e uma "turma" de 12 elementos.

Para a "turma" de 9 elementos: $\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = 1680$

Depois, escolhemos os grupos de quatro elementos: $\binom{12}{4} \times \binom{8}{4} \times \binom{4}{4} = 34\,650$

Então, o número pretendido é $20 \times 293\,930 \times 1680 \times 34\,650$, ou seja 34 220 848 525 063 200 000.

Exemplo 536 (*Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 8*) Suponhamos que temos uma turma de 21 alunos e que o professor pretende formar três grupos de 3 alunos e três grupos de 4 alunos, para elaborarem um trabalho, havendo um único tema. Quantas maneiras há de fazer isso?

Resolução

Escolhidos os alunos que vão para grupos de 3, ficamos com duas "turmas" e um só tema.

Alunos que vão para os grupos de 3: $\binom{21}{9} = \binom{21}{12} = 293\,930$ maneiras.

Maneiras de formar os grupos de 3: $\frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{3!} = 280$

Maneiras de formar os grupos de 4: $\frac{\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}}{3!} = 5775$

Resposta: $293\,930 \times 280 \times 5775 = 475\,284\,810\,000$

Exemplo 537 (*Dividindo uma turma em grupos de trabalho, versão 9*) Suponhamos que temos uma turma de 21 alunos e que o professor pretende formar três grupos de 3 alunos e três grupos de 4 alunos, para elaborarem um trabalho. Há seis temas disponíveis, mas os temas 1, 2 e 3 são destinados aos grupos de 3 alunos e os temas 4, 5 e 6 são destinados aos grupos de 4 alunos. E, claro, grupos diferentes ficam com temas diferentes. Quantas maneiras há de fazer isso?

Resolução

Começamos por escolher os 9 alunos que vão formar os grupos de 3 alunos. Isso pode ser feito de $\binom{21}{9} = 293\,930$ maneiras.

Para a "turma" de 9 elementos, temos $\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3} = 1680$ maneiras.

Para a "turma" de 12 elementos, temos $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = 34\,650$ maneiras.

Então, a resposta é $293\,930 \times 1680 \times 34\,650 = 17\,110\,253\,160\,000$ maneiras

Anagramas

Anagrama de uma palavra é uma palavra, com ou sem significado, constituída pelas mesmas letras, eventualmente, por outra ordem.

ROMA e RAMO são anagramas da palavra AMOR.

Exemplo 538 Quantos anagramas admite a palavra REMAR?

A resposta é

$$\binom{5}{2} \times 3! = 60$$

Exemplo 539 Quantos anagramas admite a palavra COIMBRA, de modo que as vogais apareçam juntas e pela ordem OIA?

Resolução

A resposta é $5 \times 4! = 120$. Observe que as vogais podem aparecer nas posições 1, 2 e 3, ou 2, 3 e 4, até 5, 6 e 7, num total de 5 hipóteses.

Mais fácil, ainda, é interpretar o grupo de letras OIA como sendo um único símbolo, donde viria $5!$, para o número de anagramas.

Exemplo 540 Quantos números naturais podemos formar com os mesmos algarismos do número 22244555556666?

Resolução

O número dado é constituído por 14 algarismos, aparecendo três vezes o algarismo 2, duas vezes o algarismo 4, cinco vezes o algarismo 5 e quatro vezes o algarismo 6. Então, temos 14 posições disponíveis para colocar os três algarismos 2, etc.

Logo, a resposta é dada por

$$\binom{14}{3} \times \binom{11}{2} \times \binom{9}{5} \times \binom{4}{4} = \frac{14!}{11! \times 3!} \times \frac{11!}{9! \times 2!} \times \frac{9!}{4! \times 5!} \times 1 = \frac{14!}{3! \times 2! \times 5! \times 4!}$$

Observe-se que os números que aparecem no denominador (sem os sinais de factorial) são os números de vezes que aparecem cada um dos algarismos, pelo que a sua soma é o número que aparece no numerador (sem o sinal de factorial).

A expressão pode ser representada por $\binom{14}{3, 2, 5, 4}$, tendo-se que a expressão usual $\binom{m}{n}$ pode ser substituída por $\binom{m}{n, m-n}$.

Exemplo 541 Planos definidos pelos vértices dum cubo

Num cubo não há três vértices colineares, pelo que quaisquer três vértices definem um plano. Quantos planos (distintos) são definidos pelos vértices do cubo?

Resolução

Começemos por aceitar que o cubo tem uma face assente num plano horizontal (por exemplo, um cubo colocado sobre uma mesa). A esta face chamaremos face inferior e à face paralela chamaremos face superior.

Então, os oito vértices do cubo dividem-se em dois grupos: os vértices da face superior e os vértices da face inferior.

Vamos começar por determinar o número de planos que passam por quatro vértices do cubo:

1º caso: os 4 vértices escolhidos são os 4 vértices da face superior

Neste caso, os 4 vértices escolhidos definem um plano

2º caso: 3 dos 4 vértices escolhidos pertencem à face superior e o outro pertence à face inferior

Neste caso, os 4 vértices escolhidos não definem um plano.

3º caso: 3 dos 4 vértices escolhidos pertencem à face inferior e o outro pertence à face superior

Neste caso, os 4 vértices escolhidos não definem um plano.

4º caso: os 4 vértices escolhidos são os 4 vértices da face inferior

Neste caso, os 4 vértices escolhidos definem um plano

5º caso: 2 dos vértices escolhidos pertencem à face superior e os outros 2 pertencem à face inferior

Se os dois vértices duma face definirem uma diagonal, então é preciso que o mesmo aconteça com os dois pontos da outra face, tendo as duas diagonais de ser paralelas para que definam um plano. Temos, então, dois planos.

Se os dois vértices duma face definirem uma aresta, então há duas hipóteses favoráveis para os outros dois pontos (têm de definir uma aresta paralela à aresta considerada na outra face). Então, temos 8 planos a considerar.

O número de planos que passam por 4 vértices do cubo é, então, 12.

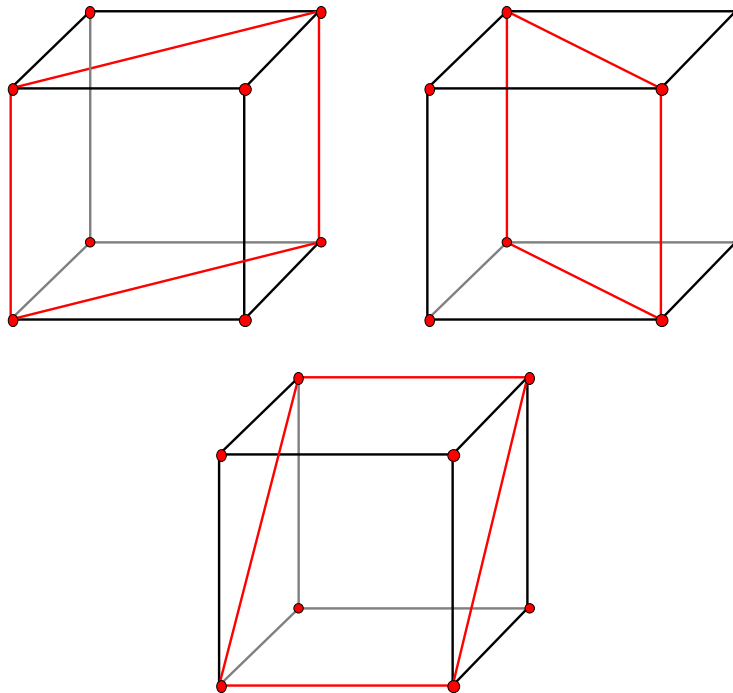
É evidente que nenhum plano passa por 5 ou mais vértices do cubo, pelo que nos resta contar os planos que passam por 3 e só 3 vértices.

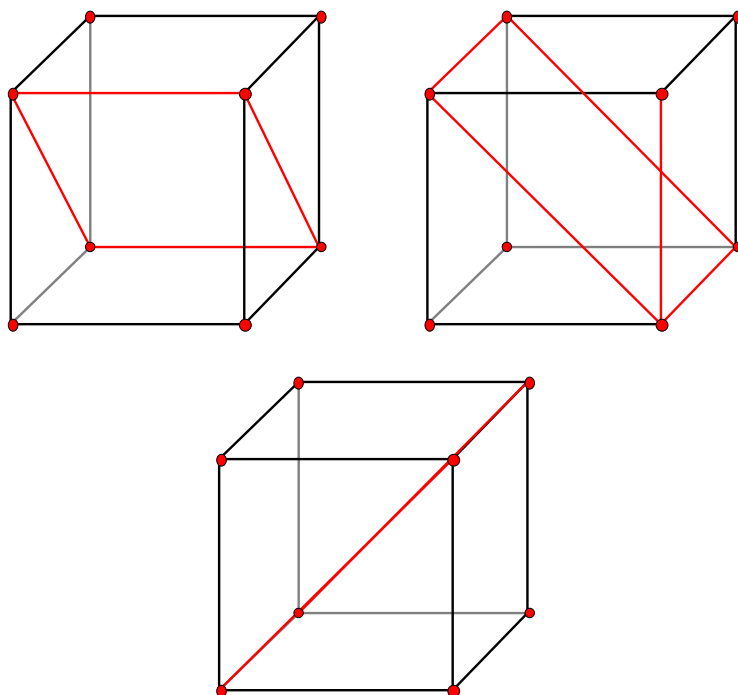
Como $\binom{4}{3} = 4$, cada um dos 12 planos que passam por 4 vértices é definido por 4 ternos não ordenados de pontos, o que corresponde a 48 ternos.

Mas $\binom{8}{3} = 56$, pelo que restam 8 ternos, os quais definem 8 planos.

Então, o número total de planos é 20.

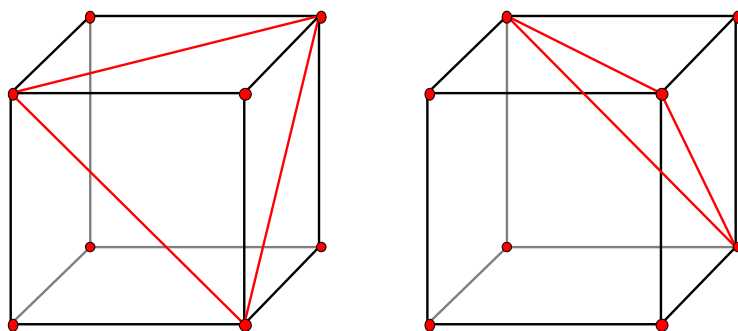
Seguidamente apresentamos alguns dos planos que passam por 4 vértices do cubo:





A última perspectiva é infeliz, mas dá para perceber qual é o plano.

Apresentamos, de seguida, dois dos oito planos que são definidos por três vértices do cubo e que não passam por nenhum outro vértice:



Podemos pensar da seguinte forma: em cada vértice do cubo, consideramos as três arestas concorrentes (nesse vértice); os quatro vértices das arestas definem um tetraedro em que uma das faces não está assente em nenhuma das faces do cubo. Tal face do tetraedro é um dos planos que passa por três e só três vértices do cubo. Como no cubo há oito vértices, temos os oito planos acima referidos.

Quem quiser fazer uma verificação exaustiva do número de planos pode considerar os 8 vértices do cubo num referencial cartesiano e obter equações cartesianas dos planos definidos por três vértices. Mas terá de fazê-lo 56 vezes!

Exemplo 542 *Quantas diagonais tem um polígono convexo de n lados?*

Resolução

É claro que $n \geq 3$. Um triângulo não tem diagonais, um quadrilátero tem duas diagonais, um pentágono tem 5 diagonais.

Podemos construir uma tabela:

Nº de lados	3	4	5	6	7
Nº de diagonais	0	2	5		

É fácil de prever os números que faltam na tabela: 9 e 14. As diferenças entre elementos consecutivos da segunda linha vai aumentando uma unidade.

Também é claro que a resolução anterior não é satisfatória, embora sirva para obter o termo geral da sucessão que dá o número de diagonais (ver capítulo sobre polinómios de colocação).

Outra maneira é a seguinte: dois vértices (distintos) do polígono definem uma diagonal ou um lado do polígono. Então, o número de diagonais dum polígono de n lados é $\binom{n}{2} - n$, ou seja, $\frac{n(n-1)}{2} - n$, ou ainda, $\frac{n(n-3)}{2}$.

Uma terceira resolução é: Por cada vértice passam $n-3$ diagonais (temos de descontar o próprio vértice e os dois adjacentes). Como há n vértices, podemos, à primeira vista, pensar que temos $n(n-3)$ diagonais. Mas, tal é incorrecto, porque cada diagonal conta duas vezes (uma em cada extremo da diagonal). Logo, o número de diagonais é $\frac{n(n-3)}{2}$.

Exemplo 543 *Quantas diagonais tem um prisma em que as bases são polígonos convexos de n lados?*

Resolução

O prisma considerado tem $2n$ vértices, $3n$ arestas e $n+2$ faces. Das faces, duas são as bases e as restantes n são as faces laterais, as quais são paralelogramos (rectângulos, no caso do prisma recto).

Em geral, há dois tipos de diagonais: faciais e espaciais, embora, no caso do prisma triangular, só haja diagonais faciais.

Então, há $2n$ diagonais faciais laterais e $n(n-3)$ diagonais faciais nas duas bases.

Quanto às diagonais espaciais, repare-se que as mesmas são segmentos de recta que unem um vértice duma base com um vértice da outra base. Mas os vértices não podem ser quaisquer: Para cada vértice duma base há um vértice da outra que define com o primeiro uma aresta e há dois que definem com o primeiro duas diagonais faciais. Então, por cada vértice duma das bases passam $n-3$ diagonais espaciais. Logo, o número de diagonais espaciais é $n(n-3)$. Antes de continuarmos, repare-se que o número de diagonais espaciais do prisma é igual ao número de diagonais faciais existentes nas duas bases. Voltaremos a esta questão.

Então, o prisma admite $2n(n-3) + 2n$ diagonais, ou seja, $2n^2 - 4n$ diagonais, sendo $n^2 - 3n$ diagonais espaciais e $n^2 - n$ diagonais faciais.

Outra maneira de contar as diagonais espaciais é a seguinte:

Os $2n$ vértices do prisma definem $\binom{2n}{2}$ segmentos de recta que podem ser arestas, diagonais faciais ou diagonais espaciais.

Como há $3n$ arestas e $2n + n(n - 3)$ diagonais faciais, então o número de diagonais espaciais do prisma é $\binom{2n}{2} - 3n - 2n - n(n - 3)$, ou seja, $\frac{2n(2n - 1)}{2} - 5n - n^2 + 3n$.

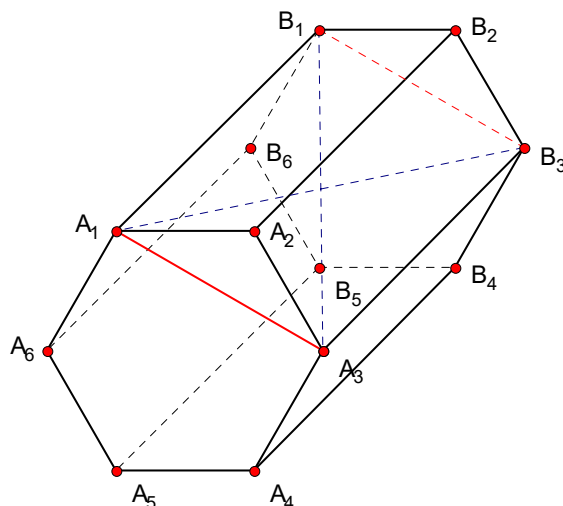
Mas, $\frac{2n(2n - 1)}{2} - 5n - n^2 + 3n = n^2 - 3n = n(n - 3)$, pelo que, no prisma, há $n(n - 3)$ diagonais espaciais.

Por que razão, o número de diagonais espaciais do prisma é igual ao número de diagonais (faciais) existentes nas duas bases?

Uma resposta será: são iguais, porque vimos que eram iguais! Mas haverá alguma razão lógica para isso (depois de sabermos que são iguais)?

Consideremos, numa base, uma diagonal que une dois vértices; consideremos os dois vértices da outra base que definem (com os dois anteriores) arestas. Os segundos vértices também definem uma diagonal (igual e paralela á anterior).

Para fixar ideias, suponhamos que A_1 e A_3 pertencem a uma base, que B_1 e B_3 pertencem a outra, que $[A_1B_1]$ e $[A_3B_3]$ são arestas e que $[A_1A_3]$ é uma diagonal (facial).



Então, $[A_1B_3]$ e $[A_3B_1]$ são diagonais espaciais. Então, por cada diagonal numa base há duas diagonais espaciais. Como, por este processo, contamos todas as diagonais espaciais, o número destas é o dobro do número de diagonais existente numa das bases, ou seja, o número de diagonais espaciais é igual ao número de diagonais existentes nas duas bases.

Exemplo 544 Ordenando os livros numa estante

Suponhamos que temos trinta livros, todos com títulos diferentes, e que queremos distribuí-los pelas três prateleiras duma estante, de modo que, em cada prateleira fiquem, da esquerda para a direita, dez livros ordenados por ordem alfabética ascendente.

$$\begin{aligned}
\binom{2n+1}{k+1} - \binom{2n+1}{k} &= \frac{(2n+1)!}{(k+1)!(2n-k)!} - \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \\
&= \frac{(2n+1)!(2n+1-k) - (2n+1)!(k+1)}{(k+1)!(2n+1-k)!} \\
&= \frac{(2n+1)!(2n+1-k-k-1)}{(k+1)!(2n+1-k)!} \\
&= \frac{(2n)!(2n-2k)}{(k+1)!(2n+1-k)!}
\end{aligned}$$

O sinal de $\frac{(2n)!(2n-2k)}{(k+1)!(2n+1-k)!}$ é o sinal de $2n-2k$, o que significa que a diferença é positiva para $k = 0, 1, \dots, n-1$, nula para $k = n$, e negativa para $k = n+1, \dots, 2n$.

Então, os elementos da linha $2n+1$ aumentam de $\binom{2n+1}{0}$ até $\binom{2n+1}{n}$, termo este que é igual a $\binom{2n+1}{n+1}$ e diminuem depois.

Exercício 546 Três elementos consecutivos duma linha do triângulo de Pascal são 80 730, 296 010 e 888 030. Determine a soma de todos os elementos dessa linha, bem como a soma de todos os elementos de todas as linhas até à linha anterior.

Resolução

Sejam $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n}{k+2}$ os números dados. Começemos por calcular $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$. Ora,

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)! \times (n-k-1)!} \times \frac{k! \times (n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}$$

Da igualdade anterior, substituindo k por $k+1$, conclui-se que $\frac{\binom{n}{k+2}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n-k-1}{k+2}$.

Então,

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \frac{n-k}{k+1} = \frac{296\,010}{80\,730} \\ \frac{n-k-1}{k+2} = \frac{888\,030}{296\,010} \end{array} \right\} &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{n-k}{k+1} = \frac{11}{3} \\ \frac{n-k-1}{k+2} = 3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3n-3k = 11k+11 \\ n-k = 3k+7 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12k+21-3k = 11k+11 \\ n = 4k+7 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10 = 2k \\ n = 4k+7 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = 5 \\ n = 27 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

A soma dos elementos da linha 27 é 2^{27} . E a soma de todos os elementos das linhas anteriores é $2^{27} - 1$.

Observe-se que $\sum_{i=0}^{26} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{26} = 2^{27} - 1$ (soma de termos consecutivos numa progressão geométrica de razão 2).

Note-se que $\sum_{i=0}^{26} 2^i = \frac{2^{27} - 1}{2 - 1} = 2^{27} - 1 = 134\,217\,727$.

Exercício 547 O quociente entre dois termos consecutivos numa linha do triângulo de Pascal é $\frac{7}{4}$. Qual é a linha?

Resolução

Ora,

$$\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = \frac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(p-1)!(n-p+1)!}{n!} = \frac{n-p+1}{p}$$

Então,

$$\frac{n-p+1}{p} = \frac{7}{4} \iff 4n - 4p + 4 = 7p \iff 4n = 11p - 4 \iff n = \frac{11p-4}{4}$$

Logo, $n = \frac{11p}{4} - 1$, donde vem que p tem de ser múltiplo de 4. Então, $p = 4t$, para certo natural t .

Então, $n = 11t - 1$, pelo que há infinitas linhas que satisfazem a condição do enunciado.

Note-se que, para obter uma solução da equação $\frac{n-p+1}{p} = \frac{7}{4}$, podemos fazer como certos alunos que igualam os numeradores e os denominadores:

$$\begin{cases} n-p+1 = 7 \\ p = 4 \end{cases}$$

Então, $p = 4 \wedge n = 10$. É claro que perdemos uma infinidade de soluções, mas obtivemos uma solução. Se quisermos obter todas as soluções, podemos fazer $\frac{n-p+1}{p} = \frac{7}{4} = \frac{7x}{4x}$, pelo que

$$\begin{cases} n-p+1 = 7x \\ p = 4x \end{cases}, \text{ ou seja, } p = 4x \wedge n = 11x - 1, \text{ com } x \in \mathbb{N}.$$

Exercício 548 O quociente entre dois termos consecutivos numa linha do triângulo de Pascal é k , com $k \in \mathbb{Q}^+$. Qual é a linha? Terá o problema sempre solução?

Resolução

Se k é um número natural, então existe uma linha em que os dois primeiros elementos são 1 e k , cujo quociente é k .

Partindo de $\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = k$, temos $\frac{n-p+1}{p} = k$, pelo que $n = k(p+1) - 1$, o que mostra que há infinitas soluções, com $k \in \mathbb{N}$.

No caso de termos um número fraccionário positivo vem $\frac{n-p+1}{p} = \frac{r}{s}$, com $r, s \in \mathbb{N}$ e r, s primos entre si, isto é, $\text{mdc}(r, s) = 1$.

Se quisermos mostrar que há, pelo menos, uma solução, basta-nos fazer $\begin{cases} n-p+1=r \\ p=s \end{cases}$.

Então, $\begin{cases} n=p+r-1 \\ p=s \end{cases}$.

Se quisermos mostrar que há infinitas soluções, fazemos $\begin{cases} n-p+1=rx \\ p=sx \end{cases}$, isto é,

$$\begin{cases} n=p+rx-1 \\ p=sx \end{cases}$$

Exercício 549 Três termos consecutivos de certa linha do triângulo de Pascal estão em progressão aritmética. Qual é a linha? Terá o problema infinitas soluções?

Resolução

Consideremos os termos $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ e $\binom{n}{k+2}$, com $n \geq k+2$. Ora,

$$\begin{aligned} \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k) - n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-k-k-1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Substituindo k por $k+1$, temos

$$\binom{n}{k+2} - \binom{n}{k+1} = \frac{n!(n-2k-3)}{(k+2)!(n-k-1)!}$$

Então,

$$\frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n-2k-3)}{(k+2)!(n-k-1)!}$$

Resolvamos a equação anterior:

$$\frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n-2k-3)}{(k+2)!(n-k-1)!} \iff \frac{n-2k-1}{n-k} = \frac{n-2k-3}{k+2}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{n-2k-1}{n-k} = \frac{n-2k-3}{k+2} &\iff n^2 - 2nk - 3n - nk + 2k^2 + 3k = nk + 2n - 2k^2 - 4k - k - 2 \\ &\iff n^2 - 4nk + 4k^2 - 5n + 8k + 2 = 0 \\ &\iff n = \frac{5}{2} + 2k \pm \frac{1}{2}\sqrt{8k+17} \end{aligned}$$

Então, $8k+17$ deve ser um quadrado perfeito ímpar. Logo, $8k+17 = (2x+3)^2$, com $x \in \mathbb{N}$.

$$\text{Então, } k = \frac{(2x+3)^2 - 17}{8} = \frac{4x^2 + 12x + 9 - 17}{8} = \frac{x^2 + 3x - 2}{2} = \frac{x(x+3)}{2} - 1.$$

Logo, $n = \frac{5}{2} + x^2 + 3x - 2 + \frac{1}{2}(2x + 3) \vee n = \frac{5}{2} + x^2 + 3x - 2 - \frac{1}{2}(2x + 3)$.

Logo, $n = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \vee n = x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$.

Logo, o problema tem infinitas soluções.

De $n = (x + 2)^2 - 2 \wedge k = \frac{x(x + 3)}{2} - 1$, vem:

$$x = 1 \implies \begin{cases} k = 1 \\ n = 7 \end{cases} ; \quad x = 3 \implies \begin{cases} k = 4 \\ n = 14 \end{cases} ; \quad x = 4 \implies \begin{cases} k = 8 \\ n = 23 \end{cases} ;$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	1	4	8	13	19	26	34	43	53
n	7	14	23	34	47	62	79	98	119

Alguns exemplos:

$$\begin{aligned} \binom{7}{3} - \binom{7}{2} &= 35 - 21 = 14; & \binom{7}{2} - \binom{7}{1} &= 21 - 7 = 14 \\ \binom{14}{6} - \binom{14}{5} &= 3003 - 2002 = 1001; & \binom{14}{5} - \binom{14}{4} &= 2002 - 1001 = 1001 \\ \binom{98}{45} &= 18\,434\,541\,364\,240\,853\,879\,016\,177\,888 \\ \binom{98}{44} &= 15\,362\,117\,803\,534\,044\,899\,180\,148\,240 \\ \binom{98}{43} &= 12\,289\,694\,242\,827\,235\,919\,344\,118\,592 \\ \binom{98}{45} - \binom{98}{44} &= 3072\,423\,560\,706\,808\,979\,836\,029\,648 \\ \binom{98}{44} - \binom{98}{43} &= 3072\,423\,560\,706\,808\,979\,836\,029\,648 \\ \binom{119}{55} - \binom{119}{54} &= 5323\,553\,660\,882\,471\,719\,158\,839\,565\,113\,262 \\ \binom{119}{54} - \binom{119}{53} &= 5323\,553\,660\,882\,471\,719\,158\,839\,565\,113\,262 \end{aligned}$$

De $n = (x + 1)^2 - 2 \wedge k = \frac{x(x + 3)}{2} - 1$, vem:

$$\begin{aligned} x = 2 &\implies \begin{cases} k = 4 \\ n = 7 \end{cases} ; & x = 3 &\implies \begin{cases} k = 8 \\ n = 14 \end{cases} ; & x = 4 &\implies \begin{cases} k = 13 \\ n = 23 \end{cases} ; \\ x = 5 &\implies \begin{cases} k = 19 \\ n = 34 \end{cases} \end{aligned}$$

Alguns exemplos:

$$\begin{aligned} \binom{7}{6} - \binom{7}{5} &= -14; & \binom{7}{5} - \binom{7}{4} &= -14 \\ \binom{14}{10} - \binom{14}{9} &= -1001; & \binom{14}{9} - \binom{14}{8} &= -1001 \\ \binom{23}{15} - \binom{23}{14} &= -326\,876; & \binom{23}{14} - \binom{23}{13} &= -326\,876 \end{aligned}$$

E, como estamos a verificar, obtemos diferenças que são simétricas das anteriores. Tal é absolutamente natural, pois resulta da simetria do Triângulo de Pascal.

27.1 Números de Bell

Nesta secção, vamos fazer referência aos números de Sterling de primeira e de segunda espécie e aos números de Bell.

Números de Sterling (de primeira espécie)

Consideremos o seguinte triângulo (que tem a mesma forma do triângulo de Pascal), mas sem valores concretos. Repare que podemos obter o triângulo de Pascal, fazendo $b_{nk} = b(n, k) = \binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{llll} s_{00} = s(0, 0) & & & \\ s_{10} = s(1, 0) & s_{11} = s(1, 1) & & \\ s_{20} = s(2, 0) & s_{21} = s(2, 1) & s_{22} = s(2, 2) & \\ s_{30} = s(3, 0) & s_{31} = s(3, 1) & s_{32} = s(3, 2) & s_{33} = s(3, 3) \end{array}$$

Vejamos os primeiros elementos:

$$\begin{array}{llll} s_{00} = 1 & & & \\ s_{10} = 0 & s_{11} = 1 & & \\ s_{20} = 0 & s_{21} = 1 & s_{22} = 1 & \\ s_{30} = 0 & s_{31} = 2 & s_{32} = 3 & s_{33} = 1 \end{array}$$

Ainda não temos nenhuma regra especial...

$$\begin{array}{llllll} s_{00} = 1 & & & & & \\ s_{10} = 0 & s_{11} = 1 & & & & \\ s_{20} = 0 & s_{21} = 1 & s_{22} = 1 & & & \\ s_{30} = 0 & s_{31} = 2 & s_{32} = 3 & s_{33} = 1 & & \\ s_{40} = 0 & s_{41} = 6 & s_{42} = 11 & s_{43} = 6 & s_{44} = 1 & \\ s_{50} = 0 & s_{51} = 24 & s_{52} = 50 & s_{53} = 35 & s_{54} = 10 & s_{55} = 1 \\ s_{60} = 0 & s_{61} = 120 & s_{62} = & s_{63} = & s_{64} = & s_{65} = & s_{66} = 1 \\ s_{70} = 0 & s_{71} = 720 & s_{72} = & s_{73} = & s_{74} = & s_{75} = & s_{76} = & s_{77} = 1 \end{array}$$

O triângulo ficou com algumas entradas por preencher, mas já podemos afirmar três coisas:

Na primeira coluna, temos 1 seguido de zeros. O último elemento de cada linha é 1.

E, na segunda coluna, temos $(k-1)!$

Vamos acrescentar uma coluna e uma linha (no início), para vermos bem os valores de n e de k :

	k	0	1	2	3	4	5	6	7
n									
0		1							
1		0	1						
2		0	1	1					
3		0	2	3	1				
4		0	6	$s_{42} = 11$	$s_{43} = 6$	1			
5		0	24	$s_{52} = 50$	$s_{53} = 35$	$s_{54} = 10$	1		
6		0	120	$s_{62} = 274$	$s_{63} =$	$s_{64} =$	$s_{65} =$	1	
7		0	720	$s_{72} = 1764$	$s_{73} =$	$s_{74} =$	$s_{75} =$	$s_{76} =$	1

Os elementos na coluna $k = 1$ são $(k-1)!$, embora se possam calcular duma maneira análoga aos restantes:

$$\begin{cases} s_{32} = 2s_{22} + s_{21} = 2 \times 1 + 1 = 3 \\ s_{42} = 3s_{32} + s_{31} = 3 \times 3 + 2 = 11 \\ s_{52} = 4s_{42} + s_{41} = 4 \times 11 + 6 = 50 \\ s_{62} = 5s_{52} + s_{51} = 5 \times 50 + 24 = 274 \\ s_{72} = 6s_{62} + s_{61} = 6 \times 274 + 120 = 1764 \end{cases}$$

Note-se que, por exemplo, $s_{41} = 3s_{31} + 0 = 3 \times 2 = 3!$ e $s_{51} = 4s_{41} + 0 = 4 \times 3! = 4!$
Para os elementos da coluna $k = 3$:

$$\begin{cases} s_{33} = 1 \\ s_{43} = 3s_{33} + s_{32} = 3 \times 1 + 3 = 6 \\ s_{53} = 4s_{43} + s_{42} = 4 \times 6 + 11 = 35 \\ s_{63} = 5s_{53} + s_{52} = 5 \times 35 + 50 = 225 \\ s_{73} = 6s_{63} + s_{62} = 6 \times 225 + 274 = 1624 \end{cases}$$

Para os elementos da coluna $k = 4$:

$$\begin{cases} s_{44} = 1 \\ s_{54} = 4s_{44} + s_{43} = 4 \times 1 + 6 = 10 \\ s_{64} = 5s_{54} + s_{53} = 5 \times 10 + 35 = 85 \\ s_{74} = 6s_{64} + s_{63} = 6 \times 85 + 225 = 735 \\ s_{84} = 7s_{74} + s_{73} = 7 \times 735 + 1624 = 6769 \end{cases}$$

Então, temos

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	$s_{42} = 11$	$s_{43} = 6$	1			
5	0	24	$s_{52} = 50$	$s_{53} = 35$	$s_{54} = 10$	1		
6	0	120	$s_{62} = 274$	$s_{63} = 225$	$s_{64} = 85$	$s_{65} = 15$	1	
7	0	720	$s_{72} = 1764$	$s_{73} = 1624$	$s_{74} = 735$	$s_{75} = 175$	$s_{76} = 1$	1

$$\begin{cases} s_{55} = 1 \\ s_{65} = 5s_{55} + s_{54} = 5 \times 1 + 10 = 15 \\ s_{75} = 6s_{65} + s_{64} = 6 \times 15 + 85 = 175 \\ s_{85} = 7s_{75} + s_{74} = 7 \times 175 + 735 = 1960 \\ s_{95} = 8s_{85} + s_{84} = 8 \times 1960 + 6769 = 22449 \end{cases}$$

Fórmula de recorrência, para encontrar $s(n+1, k+1)$, com $k < n$.

$$s(n+1, k+1) = n \times s(n, k+1) + s(n, k)$$

Para $k = n$, temos $s(n+1, k+1) = s(n+1, n+1) = 1 = s(n, n)$

Números de Sterling (de segunda espécie)

Números de Bell

Consideremos o seguinte triângulo (que tem a mesma forma do triângulo de Pascal), mas sem valores concretos. Repare que podemos obter o triângulo de Pascal, fazendo $b_{nk} = b(n, k) = \binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{ccccccc} b_{00} = b(0, 0) & & & & & & \\ b_{10} = b(1, 0) & b_{11} = b(1, 1) & & & & & \\ b_{20} = b(2, 0) & b_{21} = b(2, 1) & b_{22} = b(2, 2) & & & & \\ b_{30} = b(3, 0) & b_{31} = b(3, 1) & b_{32} = b(3, 2) & b_{33} = b(3, 3) & & & \end{array}$$

A formação do triângulo pode parecer estranha, mas é assim: começamos com $\frac{1}{1}$, na primeira coluna. Depois, temos que $b(1, 1) = b(0, 0) + b(1, 0) = 1 + 1 = 2$.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & & & & \\ & 1 & & 2 & & & \\ b_{20} = b(2, 0) & b_{21} = b(2, 1) & b_{22} = b(2, 2) & & & & \\ b_{30} = b(3, 0) & b_{31} = b(3, 1) & b_{32} = b(3, 2) & b_{33} = b(3, 3) & & & \end{array}$$

E obtivemos duas linhas já formadas.

A terceira linha começa com o último elemento da linha anterior, ou seja, 2. O segundo elemento é a soma dos dois últimos elementos da primeira coluna (já colocados). E o mesmo acontece com os restantes elementos da linha.

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & & & & \\ & 1 & & 2 & & & \\ & 2 & & 1 + 2 = 3 & & 2 + 3 = 5 & \\ b_{30} = b(3, 0) & b_{31} = b(3, 1) & b_{32} = b(3, 2) & b_{33} = b(3, 3) & & & \end{array}$$

E já temos 3 linhas. Passemos à quarta linha, a qual começa por 5:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & & & & \\ & 1 & & 2 & & & \\ & 2 & & 3 & & 5 & \\ 5 & 2 + 5 = 7 & 3 + 7 = 10 & 5 + 10 = 15 & & & \end{array}$$

Passemos à quinta linha:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & & & & \\ & 1 & & 2 & & & \\ & 2 & & 3 & & 5 & \\ 5 & 2 + 5 = 7 & 3 + 7 = 10 & 5 + 10 = 15 & & & \\ 15 & 5 + 15 = 20 & 7 + 20 = 27 & 10 + 27 = 37 & 15 + 37 = 52 & & \end{array}$$

Apresentemos o triângulo até à linha 10:

1									
1	2								
2	3	5							
5	7	10	15						
15	20	27	37	52					
52	67	87	114	151	203				
203	255	322	409	523	674	877			
877	1080	1335	1657	2066	2589	3263	4140		
4140	5017	6097	7432	9089	11155	13744	17007	21147	
21147	25287	30304	36401	43833	52922	64077	77821	94828	115975

A tabela foi construída com os números alinhados à direita, para ser mais fácil se somar (mentalmente).

Os números de Bell estão na tabela anterior, mas não são todos os números que lá estão, pois só interessam os números da primeira coluna.

A sucessão dos números de Bell é dada por

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, \dots$$

Ou seja, $B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52, B_6 = 203, \dots$

27.2 O Jogo do Dominó

Vamos apresentar alguns exemplos de questões relacionadas com este jogo que costuma ser do agrado de muitas pessoas idosas (e não só). Há muitas questões interessantes que podem ser colocadas, sendo que algumas das questões não são muito fáceis. Este jogo tem peças rectangulares, formadas por dois quadrados, havendo em cada um dos quadrados um número de zero a seis. Esses dois números podem ser iguais ou diferentes, havendo uma peça para qualquer combinação de dois números.

Neste texto, utilizaremos imagens das peças de dominó, tal qual elas aparecem no jogo real, mas também apresentaremos imagens como

4	1
---	---

.

Breve descrição do jogo:

O jogo pode ser jogado por 2, 3 ou 4 jogadores, mas só vamos descrevê-lo para quatro jogadores. As peças são colocadas numa mesa, com os números voltados para baixo e são baralhadas, após o que os jogadores escolhem as suas sete peças (ao mesmo tempo). Na primeira vez, quem começa a jogar é quem tiver ficado com a peça

6	6
---	---

, conhecida por "doblo seis" ou "doblo sena". Os quatro jogadores estão sentados numa mesa, sendo que os parceiros estão colocados frente a frente. Quando o jogador coloca o doble seis na mesa, o jogador à sua direita tem de colocar uma peça na mesa, mas que tenha o seis. Por exemplo, a peça seis-três. Os doubles, costumam ser colocados perpendicularmente à fila onde são colocadas as peças. No entanto, isso fica complicado para apresentar, pelo que colocamos uma fila com todas as peças justapostas. Assim, as duas primeiras jogadas deixarão, na mesa, as duas peças referidas com a seguinte disposição:

6	6	6	3
---	---	---	---

É claro que a peça colocada no lado direito pode ser colocada no lado esquerdo e isso não interfere com o jogo. Depois, joga o parceiro do jogador que iniciou e tem de colocar uma peça com seis ou uma peça com 3. Suponhamos que ele pretende colocar a peça seis-um:

1	6	6	6	6	3
---	---	---	---	---	---

E vamos seguindo a ordem. O próximo jogador tem de colocar uma peça com 1 ou uma peça com 3. Eventualmente, até pode colocar a peça 3-1. Nesse caso, tem duas opções: coloca-a na esquerda deixando 3 em ambas as extremidades, ou coloca-a na direita, deixando 1 em ambas as extremidades da fila.

1	6	<table><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr></table>	6	6	6	3	3	1
6								
6								

Como vemos, podemos colocar as peças na posição em que usualmente são colocadas, mas isso ocupa mais espaço.

Quando um jogador não tem nenhuma peça que possa colocar na fila, diz "passo" e dá a vez ao jogador seguinte (o que fica à sua direita).

Quando um jogador colocar a sétima (e última) peça na fila, ganha e é atribuído um ponto à sua equipa. A primeira equipa a somar quatro pontos ganha a partida e começam uma nova.

Por vezes, ninguém consegue colocar uma peça na fila, por já não haver peças com os números das extremidades da fila. Nesse caso, cada equipa soma os pontos das peças que não foram jogadas e ganha quem tiver menos pontos. Se tiverem o mesmo número de pontos, fazem novo jogo.

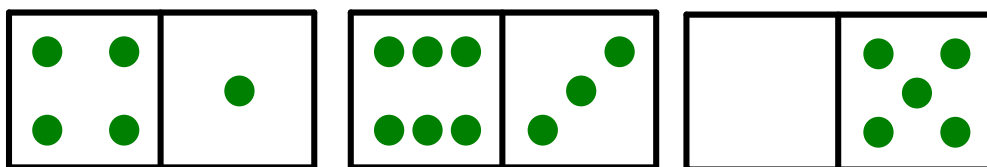
No segundo jogo, já não é quem tem o dobre seis que coloca a primeira peças, mas aquele que fica à direita do que colocou o dobre seis na vez anterior. E o processo continua...

Refira-se que há outras variantes do jogo do dominó, mas a que foi descrita é a mais popular (pelo menos na nossa Região).

Exemplo 550 *O jogo do dominó — O conhecido jogo do dominó utiliza 28 peças e, habitualmente, é jogado por quatro jogadores em equipas de dois jogadores: Norte e Sul contra Leste e Oeste.*

1. Quantos pontos existem nas 28 peças de dominó?
2. Imagine que queria aumentar o número de peças do dominó, para que se continuasse a jogar com quatro jogadores. Quantas peças pode ter esse dominó?
3. E se quisermos que haja seis jogadores (como sempre, utilizando todas as peças e todos com o mesmo número de peças)?

Resolução



1. Na figura anterior, temos três das peças de dominó. Na peça da esquerda, temos 5 pontos, na do meio, temos 9 pontos e, na da direita, temos 5 pontos.

Na linguagem habitual dos jogadores de dominó, as três peças da figura anterior são "quadra e ás", "sena e terno", "quina e branco".

Número de peças com uma "sena" (pelo menos):

As peças com uma sena (ou mais) são $(6, 0)$, $(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$ e $(6, 6)$. A ordem não é relevante, pelo que parece mais razoável considerar conjuntos: no entanto, como resolver o problema dos "dobles"? O doble sena é a peça $(6, 6)$, que tem duas senas (uma em cada metade da peça). Por isso, vamos utilizar a notação $\{x, y\}$, com uma ressalva importante: $\{x, x\}$ representa a peça doble x , ou seja, temos x pontos em cada uma das metades da peça. Note-se que é melhor usar o seguinte esquema $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ para a peça que tem os números x e y . É Claro que o doble x é representado por $\begin{bmatrix} x & x \end{bmatrix}$ e que a peça $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ é a mesma que $\begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}$.

Começemos pelo número de peças:

Há 7 peças com senas, como há sete peças com quinas e por aí adiante. No entanto, não podemos somar tudo, porque há peças que são contadas várias vezes. Assim, temos 7 peças com senas, 6 peças com quinas e sem senas, 5 peças com quadras e sem senas nem quinas, 4 peças com ternos (e sem senas, quinas e quadras), 3 peças com duques (e sem as anteriores), 2 peças com ases (sem contar as anteriores) e uma peça correspondente ao doble branco.

Então, o número de peças é dado por

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \sum_{k=1}^7 k = 28$$

Quanto ao número de pontos, a resposta pode parecer fácil, pois há 7 peças com cada uma das possibilidades: sete senas, sete quinas, etc...

Então, o número total de pontos, P , parece ser dado por $P = 7 \times (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0)$. No entanto, estamos a esquecer-nos dum pormenor importante: a existência de doubles.

Isso quer dizer que podemos considerar que há oito senas e não sete! E o mesmo se passa com as quinas, etc...

Então,

$$P = 8 \times (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) = 168$$

Observe o esquema seguinte:

$\begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 6 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}$	
$\begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}$		
$\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$			
$\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$				
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$					
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$						

Vejam os como associar as peças, para contarmos os pontos

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 1 \\ \hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 2 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 4 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 5 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 1 \\ \hline 6 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \right\} \end{array}$$

Note-se que, em cada caixa (chaveta), há duas peças e o número de pontos é 12.

O número de peças é $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

Imaginemos uma outra maneira de calcular a soma:

Peças com 12 pontos: Uma

Peças com zero pontos: Uma

Peças com 11 pontos: Uma

Peças com 1 pontos: Uma

Peças com 10 pontos: Duas

Peças com 2 pontos: Duas

Peças com 9 pontos: Duas

Peças com 3 pontos: Duas

Peças com 8 pontos: Três

Peças com 4 pontos: Três

Peças com 7 pontos: Três

Peças com 5 pontos: Três

Peças com 6 pontos: Quatro

Então, posso utilizar 14 caixas, colocando, em cada uma das caixas, duas peças com um total de 12 pontos. Então, temos 168 pontos no total ($14 \times 12 = 168$).

O esquema da maneira anterior é o seguinte:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 6 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 5 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 4 \\ \hline 0 & 2 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 5 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 3 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 2 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 3 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 1 \\ \hline 0 & 5 \\ \hline \end{array} \right\}, \\ \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 0 \\ \hline 5 & 1 \\ \hline \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \right\} \end{array}$$

Note-se que poderemos considerar que a peça "sena e quina" é complementar de "branco e ás", "doble sena" é complementar de "doble branco", ..., "quadra e terno" é complementar de "duque e terno" e assim por diante. No entanto, há peças que são complementares de si mesmas: precisamente as que têm 6 pontos. Assim, "sena e branco" é complementar de si mesma, o mesmo acontecendo com as outras três (de seis pontos).

De qualquer modo, podemos agrupar as peças duas a duas, de modo que a soma dos pontos de ambas as peças seja 12. Então, temos $14 \times 12 = 168$ pontos.

2. Se quisermos considerar peças com números de 0 a 7, significa que vamos ter 8 peças com 7, 7 peças com 6 (e sem 7), etc...

O número total de peças é $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$

Como 36 é múltiplo de 4, temos uma nova possibilidade para o jogo de dominó: cada jogador teria 9 peças. Neste caso, o número total de pontos seria de $9 \times (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) = 252$, o que corresponde a uma média de $\frac{252}{36} = 7$ pontos por peça. No caso anterior, a média é de 6.

Note-se que esta versão pode ser jogada por seis jogadores. Então, já temos uma resposta para a pergunta seguinte.

Tentemos resolver o caso geral: Suponhamos que temos peças com os números $0, 1, \dots, n$, continuando a haver as peças $\{k, 0\}, \{k, 1\}, \dots, \{k, n\}$, com $0 \leq k \leq n$ e k um número inteiro.

O número de peças é dado por $(n+1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1$, ou seja, por $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ora, dos números $n+1$ e $n+2$, um deles é par e o outro é ímpar. Se queremos que o jogo se destine a grupos de 4 jogadores, temos que $(n+1)(n+2)$ tem de ser um múltiplo de 8.

A primeira situação em que tal acontece é para $n = 6$, a segunda é para $n = 7$, a terceira é para $n = 14$, a quarta é para $n = 15$, pelo que basta somar 8 aos números já obtidos.

3. Já vimos que o caso $n = 7$ serve para quatro e seis jogadores.

Suponhamos que pretendemos um jogo para 6 pessoas (mas sem ser obrigatório que sirva para 4 pessoas).

Então, $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ deve ser múltiplo de 6. Logo, $(n+1)(n+2)$ deve ser múltiplo de 12.

Aqui temos um problema! Um dos números continua a ser par e outro ímpar, mas temos a questão do factor 3. Não é obrigatório que o número par seja múltiplo de 3, pois pode acontecer que o ímpar seja (múltiplo de 3).

Tentemos resolver o nosso problema sem usar congruências.

Queremos que a equação $(n+1)(n+2) = 12m$ tenha soluções inteiras, quando resolvida em ordem a n .

Então, temos

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2) = 12m &\iff n^2 + 3n + 2 - 12m = 0 \\ &\iff n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2 - 12m)}}{2} \\ &\iff n = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8 + 48m}}{2} \\ &\iff n = \frac{-3 \pm \sqrt{1 + 48m}}{2} \end{aligned}$$

Então, $1 + 48m$ deve ser um quadrado perfeito, ou seja, $1 + 48m = t^2$, para certos $t \in \mathbb{N}$.

Então, $m = \frac{(t-1)(t+1)}{48}$, pelo que t é ímpar. Logo $m = \frac{(2s+1-1)(2s+1+1)}{48} = \frac{s^2+s}{12} = \frac{s(s+1)}{12}$

1º caso: s é par. Então s é múltiplo de 4. Logo, $m = \frac{4u(4u+1)}{12} = \frac{u(4u+1)}{3}$, com $s = 4u$.

Há duas possibilidades: 3 divide u ou 3 divide $u+1$ (porque 3 divide $3u$).

Então, $u = 3x$ ou $u = 3x - 1$

Substituindo, vem $m = \frac{u(4u+1)}{3} = \frac{3x(12x+1)}{3} = 12x^2 + x$ ou $m = \frac{(3x-1)(12x-4+1)}{3} = 12x^2 - 7x + 1$.

Então, $48m + 1 = 48(12x^2 + x) + 1 = 576x^2 + 48x + 1 = (24x + 1)^2$

ou $48m + 1 = 48(12x^2 - 7x + 1) + 1 = 576x^2 - 336x + 49 = (24x - 7)^2$

Logo, $n = \frac{-3+24x+1}{2} \vee n = \frac{-3+24x-7}{2}$, ou seja, $n = 12x - 1 \vee n = 12x - 5$.

Para $x = 1$, temos $n = 11 \vee n = 7$. Note-se que já conhecíamos a solução $n = 7$.

2º caso: s é ímpar. Então, $s = 2u - 1$, com u um número natural.

$$\text{Então, } m = \frac{(2u-1)2u}{12} = \frac{u(2u-1)}{6}$$

Então, u deve ser par, pelo que temos $u = 2v$. Logo, $m = \frac{2v(4v-1)}{6} = \frac{v(4v-1)}{3}$.

Também há duas possibilidades: $v = 3x$ ou $v = 3x + 1$.

Então, $m = \frac{3x(4 \times 3x-1)}{3} \vee m = \frac{(3x+1)(4(3x+1)-1)}{3}$, donde vem $m = 12x^2 - x \vee m = 12x^2 + 7x + 1$.

Então, temos $1 + 48m = 1 + 48(12x^2 - x) = 576x^2 - 48x + 1 = (24x - 1)^2$

ou $1 + 48m = 1 + 48(12x^2 + 7x + 1) = 576x^2 + 336x + 49 = (24x + 7)^2$

Logo, $n = \frac{-3+24x-1}{2} = 12x - 2$ ou $n = \frac{-3+24x+7}{2} = 12x + 2$

Ordenando as soluções temos $12x - 5$, $12x - 2$, $12x - 1$, $12x + 2$, o que nos mostra que há quatro soluções fundamentais e as outras são obtidas, somando múltiplos de 12. É claro que tudo é mais fácil, utilizando congruências.

Vejam os quadros das soluções, até $n = 100$ (só falta a solução 2):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 12x - 5$	7	19	31	43	55	67	79	91
$n = 12x - 2$	10	22	34	46	58	70	82	94
$n = 12x - 1$	11	23	35	47	59	71	83	95
$n = 12x + 2$	14	26	38	50	62	74	86	98

Podemos fazer um quadro, onde coloquemos o número de peças, ao lado do número máximo existente nas peças.

x	1		2		3		4	
$12x - 5$	7	36	19	210	31	528	43	990
$12x - 2$	10	66	22	276	34	630	46	1128
$12x - 1$	11	78	23	300	35	666	47	1176
$12x + 2$	14	120	26	378	38	780	50	1326

E se quisermos que o jogo possa ser para quatro e para seis jogadores?

Para quatro jogadores:

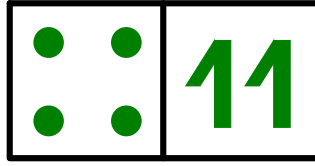
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 8x - 2$	6	14	22	30	38	46	54	62
$n = 8x - 1$	7	15	23	31	39	47	55	63

Procurando as soluções comuns, temos: $n = 7$, $n = 14$, $n = 22$, $n = 23$, $n = 31$, etc...

Como o mínimo múltiplo comum entre 8 e 12 é 24, a partir de 23, basta somar 24 aos valores já encontrados.

O caso $n = 7$ é interessante, porque pode ser jogado por 2, 3, 4, 6, 9, 12 ou 18 jogadores (dividindo todas as peças por todos os jogadores, de modo a que todos tenham o mesmo número de peças). Outro caso interessante é quando $n = 14$, pois temos 120 peças. Ora, 120 é um número com muitos divisores. Refira-se que, para $n = 14$, a peça com mais pontos é o "doblo"14, que tem 28 pontos. Uma maneira de concretizar um tal jogo, é usar as pequenas bolas para números até seis e, para números maiores, usar os nossos algarismos árabes.

Eis um exemplo duma tal peça:



É claro que podíamos ter utilizado outro número, em vez de 11, mas isso daria mais trabalho a desenhar. Assim, só tivemos que desenhar o 1 e copiar e colar.

Como alternativa, vamos resolver a questão anterior, usando congruências.

Queremos resolver a congruência quadrática $(n+1)(n+2) \equiv 0 \pmod{12}$. Ora,

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2) \equiv 0 \pmod{12} &\iff \begin{cases} n^2 + 3n + 2 \equiv 0 \pmod{3} \\ n^2 + 3n + 2 \equiv 0 \pmod{4} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ (n+1)(n+2) \equiv 0 \pmod{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $n+1$ e $n+2$ são inteiros consecutivos, um deles tem de ser ímpar, pelo que o outro tem de ser múltiplo de 4.

Então, devemos ter $\begin{cases} n \equiv \pm 1 \pmod{3} \\ n+1 \equiv 0 \pmod{4} \vee n+2 \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$. Logo, temos quatro possibilidades:

$$\begin{cases} n \equiv -1 \pmod{3} \\ n \equiv -1 \pmod{4} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv 1 \pmod{3} \\ n \equiv -1 \pmod{4} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv -1 \pmod{3} \\ n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv 1 \pmod{3} \\ n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\text{Então, } n \equiv -1 \pmod{12} \vee \begin{cases} n \equiv 7 \pmod{3} \\ n \equiv 7 \pmod{4} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv -2 \pmod{3} \\ n \equiv -2 \pmod{4} \end{cases}$$

Logo, $n \equiv -1 \pmod{12} \vee n \equiv 7 \pmod{12} \vee n \equiv 2 \pmod{12} \vee n \equiv -2 \pmod{12}$

E, por fim, $n = 12k - 1 \vee n = 12k + 7 \vee n = 12k + 2 \vee n = 12k - 2$.

Se quisermos harmonizar os valores a atribuir a k , podemos considerar $n = 12k - 1 \vee n = 12k - 5 \vee n = 12k - 10 \vee n = 12k - 2$, onde k é um número natural.

No entanto, a solução $n = 2$ origina um jogo sem grande interesse, pois só tem seis peças (uma peça a cada jogador). Então, podemos voltar a considerar $n = 12k + 2$ em vez de $n = 12k - 10$.

Note-se que, usando congruências, não tivemos quase nenhum trabalho, para resolver a questão.

Exemplo 551 *Determine o número de peças dum dominó que permita ser jogado por 4, 6 e 8 pessoas (todas as peças são distribuídas e os jogadores recebem o mesmo número de peças).*

Resolução

Vamos resolver esta questão, independentemente das resoluções anteriores e vamos usar congruências, para que tudo seja mais fácil.

Suponhamos que a peça com mais pontos tem $2n$ pontos. Trata-se do "doble" n , pelo que temos as peças $\begin{bmatrix} n & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n & 2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} n & n-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n & n \end{bmatrix}$, num total de $n+1$ peças com n .

Seguidamente, teremos as peças $\begin{bmatrix} n-1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n-1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} n-1 & 2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} n-1 & n-1 \end{bmatrix}$, não se considerando a peça $\begin{bmatrix} n-1 & n \end{bmatrix}$ que já foi contada. Nete caso, temos n peças. E, de cada vez,

vamos ter menos uma peça do que no caso anterior, pelo que temos uma soma de números naturais, começando em $n + 1$ e acabando em 1.

Então, o número de peças é dado por $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Como o mínimo múltiplo comum entre 4, 6 e 8 é 24, $(n+1)(n+2)$ tem de ser múltiplo de 48.

Como $48 = 2^4 \times 3$, devemos ter $\begin{cases} (n+1)(n+2) \equiv 0 \pmod{3} \\ (n+1)(n+2) \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$. Para o módulo 16, e como os factores são inteiros consecutivos, um deles é ímpar, pelo que o outro tem de ser par, logo tem de ser múltiplo de 16. Então, temos $\begin{cases} n \equiv -1 \pmod{3} \vee n \equiv -2 \pmod{3} \\ n \equiv -1 \pmod{16} \vee n \equiv -2 \pmod{16} \end{cases}$, pelo que temos quatro possibilidades.

$$\begin{cases} n \equiv -1 \pmod{3} \\ n \equiv -1 \pmod{16} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv -1 \pmod{3} \\ n \equiv -2 \pmod{16} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv -2 \pmod{3} \\ n \equiv -1 \pmod{16} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv -2 \pmod{3} \\ n \equiv -2 \pmod{16} \end{cases}$$

Então, devemos ter

$$n \equiv -1 \pmod{48} \vee \begin{cases} n \equiv 14 \pmod{3} \\ n \equiv 14 \pmod{16} \end{cases} \vee \begin{cases} n \equiv -17 \pmod{3} \\ n \equiv -17 \pmod{16} \end{cases} \vee n \equiv -2 \pmod{48}$$

E, por fim, temos

$$n \equiv -1 \pmod{48} \vee n \equiv 14 \pmod{48} \vee n \equiv -17 \pmod{48} \vee n \equiv -2 \pmod{48}$$

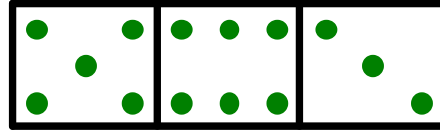
Então, devemos ter $n = 48k - 1 \vee n = 48k - 34 \vee n = 48k - 17 \vee n = 48k - 2$, com k um número natural. A solução com menos peças é a que corresponde a $n = 14$, tendo-se que o número de peças é $\frac{15 \times 16}{2} = 120$, como já tínhamos visto.

Exemplo 552 *Suponhamos que temos um jogo de dominó, onde as peças estão divididas em três partes (e não duas), estando em cada uma dessas partes representado um número de 0 a 6. Chamemos a este jogo "tridominó". Determine o número de peças do "tridominó".*

Resolução

Esta questão é mais fácil do que pode parecer. Apresentaremos várias resoluções que vão confirmar-se mutuamente. Numa questão deste género, podemos começar por simplificar o problema, diminuindo o número de peças (considerando números de 0 a 3, por exemplo) e procurar perceber o que está envolvido. A primeira vez que pensei nesta questão, nem pensei em diminuir o número de peças. Limitei-me a pensar o seguinte: No dominó, existem peças que só jogam duma maneira (o dobre seis – ou duplo seis – por exemplo). É claro que num jogo usual, temos uma única peça com o duplo 6. Mas o mesmo acontece com a peça "seis – cinco". Ninguém coloca na caixa do jogo a peça "seis – cinco" e a peça "cinco – seis". Isso mostra que os pares ordenados não traduzem bem a realidade das peças.

Mas, vamos à primeira maneira como resolvi esta questão. Dada uma peça do jogo "Dominó" usual, podemos colocar um "número" entre as duas partes, aumentando a peça. Se as peças eram assimétricas, continuam assimétricas, pelo que são necessárias no tridominó. Eis uma peça do tridominó: $\frac{7^3 + 7^2}{2} = 196$



Na peça $5 - 3$, do dominó, está colocada uma nova parte central, no caso, com o número 6. A peça inicial era assimétrica e a peça obtida também continua sendo, independentemente do número que seja acrescentado na parte central.

Digamos que a peça da figura anterior corresponde a $\{(5, 6, 3), (3, 6, 5)\}$. Só que a parte intercalada pode ter qualquer número de 0 a 6. Então, obtemos 7 peças a partir da peça inicial $5 - 3$. Ou seja, obtemos as configurações $5 - 0 - 3$, $5 - 1 - 3$, $5 - 2 - 3$, $5 - 3 - 3$, $5 - 4 - 3$, $5 - 5 - 3$, $5 - 6 - 3$. E todas estas peças são necessárias (mas não as suas "inversas").

Então, no tridominó, necessitamos de ter $7 \times 28 = 196$ peças.

A resolução anterior parece-me a mais fácil e tem pormenores que nem deviam ter sido considerados. Só que preferimos adiantar, por causa das resoluções seguintes.

Segunda resolução

No dominó, temos 7 peças simétricas, pelo que no tridominó, teremos 49 peças simétricas ($7 \times 7 \times 1 = 49$).

O número de ternos ordenados (triplas ou triplos) que podemos formar com os números de 0 a 6, é de $7^3 = 343$. Retirando as peças simétricas, ficamos com $343 - 49 = 294$ peças assimétricas, pelo que cada uma delas pode ser colocada em duas posições. Logo, temos $\frac{294}{2} = 147$ peças assimétricas. Então o número total de peças é $147 + 49 = 196$.

Terceira resolução

Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e consideremos $A^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in A\}$. Defina-se, em A^3 , a relação binária ρ , do seguinte modo: $(x, y, z) \rho (a, b, c)$ sse $\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \end{cases} \vee \begin{cases} x = c \\ y = b \\ z = a \end{cases}$.

É relativamente fácil mostrar que a relação ρ é reflexiva, simétrica e transitiva, pelo que se trata duma relação de equivalência.

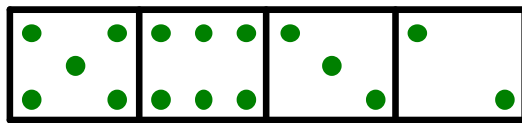
Seja $[(a, b, c)]_\rho = \{(x, y, z) \in A^3 : (x, y, z) \rho (a, b, c)\}$. Então, $[(a, b, c)]_\rho = \{(a, b, c), (c, b, a)\}$, havendo duas situações distintas. Se $a = c$, então $[(a, b, c)]_\rho = \{(a, b, a)\}$, havendo um só elemento na classe. Se $a \neq c$, então $[(a, b, c)]_\rho = \{(a, b, c), (c, b, a)\}$, havendo dois elementos na classe.

O número de elementos da forma (a, b, a) é 49, pelo que temos 49 classes de equivalência com um só elemento. E o número de elementos da forma (a, b, c) , com $a \neq c$ é $7 \times 7 \times 6 = 294$. Logo, temos 147 classes de equivalência com dois elementos, pelo que há necessidade de termos 147 peças assimétricas e 49 peças simétricas.

Logo, o número total de peças é de 196. É claro que esta terceira resolução é uma versão mais sofisticada da segunda.

Exemplo 553 Suponhamos que temos um jogo de tetradominó, onde as peças estão divididas em quatro partes, estando em cada uma dessas partes representado um número de 0 a 6. Determine o número de peças deste jogo.

Resolução



Na figura anterior, temos uma peça de tetradominó.

O número de peças simétricas é $7 \times 7 \times 1 \times 1 = 49$. Logo, o número de "posições" assimétricas é $7^4 - 49 = 2352$.

Este número tem de ser dividido por 2, obtendo-se $\frac{2352}{2} = 1176$. Então, precisamos de $1176 + 49 = 1225$ peças.

factorizando, obtemos $5^2 \times 7^2 = 1225$.

Note-se que, no dominó, temos $2^2 \times 7 = 28$ peças e, no tridominó, $196 = 2^2 \times 7^2$ peças.

Exemplo 554 Suponhamos que temos um jogo de pentadominó, onde as peças estão divididas em cinco partes, estando em cada uma dessas partes representado um número de 0 a 6. Determine o número de peças deste jogo.

Resolução

Número de peças simétricas: (x, y, z, y, x)

Neste caso, temos $7^3 = 343$ possibilidades (peças).

Restam as posições assimétricas: $7^5 - 343 = 16\,464$

Dividindo por 2, obtemos 8232. Logo, precisamos de $8232 + 343 = 8575 = 5^2 \times 7^3$ peças.

Exemplo 555 Suponhamos que temos um jogo de polidominó, onde as peças estão divididas em $2n$ partes ou em $2n + 1$ partes, estando em cada uma dessas partes representado um número de 0 a 6. Determine o número de peças deste jogo.

Resolução

Caso par: peças divididas em $2n$ partes.

Número de posições simétricas: $7^n \times 1^n = 7^n$

Número de posições assimétricas: $7^{2n} - 7^n$

Número de peças assimétricas: $\frac{7^{2n} - 7^n}{2} = \frac{7^n(7^n - 1)}{2}$

Número total de peças: $\frac{7^n(7^n - 1)}{2} + \frac{2 \times 7^n}{2} = \frac{7^n(7^n + 1)}{2}$

Para $n = 1$, há $\frac{7^n(7^n + 1)}{2} = 28$ peças (caso do dominó usual).

Para $n = 2$, há $\frac{7^n(7^n + 1)}{2} = 1225$ (caso do tetradominó).

Para $n = 3$, há $\frac{7^n(7^n + 1)}{2} = 58\,996$ (caso do hexadominó).

No caso ímpar, o jogo só tem interesse a partir do tridominó:

Com $2n + 1$ partes, temos que o número de peças simétricas é dado por $7^{n+1} \times 1^n = 7^{n+1}$

Então, temos $\frac{7^{2n+1} - 7^{n+1}}{2}$ peças assimétricas.

E o número total de peças é $\frac{7^{2n+1} - 7^{n+1}}{2} + \frac{2 \times 7^{n+1}}{2} = \frac{7^{n+1}(7^n - 1 + 2)}{2} = \frac{7^{n+1}(7^n + 1)}{2}$

Para $n = 1$, temos $\frac{7^{n+1}(7^n + 1)}{2} = 196$ peças (caso do tridominó).

Para $n = 2$, temos $\frac{7^{n+1}(7^n + 1)}{2} = 8575$ peças (caso do pentadominó).

Para $n = 3$, temos $\frac{7^{n+1}(7^n + 1)}{2} = 412\,972 = 2^2 \times 7^4 \times 43$ peças (caso do heptadominó).

Então, podemos afirmar que o número de peças dum $2n$ -dominó é $\frac{7^n(7^n+1)}{2}$, enquanto o número de peças dum $(2n+1)$ -dominó é $\frac{7^{n+1}(7^n+1)}{2}$.

Então, podemos definir a sucessão que dá o número de peças dum polidominó por:

$$\begin{cases} x_{2n} = \frac{7^n(7^n+1)}{2} \\ x_{2n+1} = \frac{7^{n+1}(7^n+1)}{2} \end{cases}$$

As igualdades anteriores estão definidas para $n = 0$, obtendo-se $x_0 = 1$ e $x_1 = 7$. O resultado não faz sentido para x_0 . Há duas maneiras de ultrapassar a questão. A primeira consiste em alterar a expressão que dá x_{2n-1} , mantendo x_{2n} . A segunda consiste em manter x_{2n+1} e substituir a expressão de x_{2n} pela expressão de x_{2n+2} .

A terceira maneira consiste em deixar como está, ressaltando que não faz sentido o valor $x_0 = 1$.

Observação 1

Há uma maneira interessante de descobrir o número de peças dum jogo de dominó (usual): o número 6 (por exemplo), aparece em 7 peças (de $6-0$, até $6-6$). Então, há oito metades de peças com o número seis. E o mesmo acontece com os restantes números. Como há 7 números (de 0 a 6), temos que há 56 metades de dominó. Logo, há 28 peças (inteiras).

Será que este processo serve para o tridominó?

Peças com um único 6:

Da forma

6	x	y
---	-----	-----

, temos 36 peças; da forma,

x	6	y
-----	---	-----

, teríamos 36 peças, mas algumas estão a contar duas vezes. As peças simétricas são 6, pelo que restam metade de 30 (as peças

3	6	4
---	---	---

 e

4	6	3
---	---	---

 são a mesma peça). Então, temos 21 peças com 6 na parte central.

Peças com três 6: uma

Peças com dois 6 (nos extremos): 6

Peças do tipo

6	6	y
---	---	-----

: 6

Então, 6 aparece de forma isolada $36 + 21$ vezes.

Aparece duas vezes em 12 peças, pelo que 6 aparece 24 vezes nessas peças.

E aparece 3 vezes numa única peça. Somando, obtemos $57 + 24 + 3 = 84$

E o mesmo acontece com os restantes números.

Então, temos 7×84 terças partes de peças, pelo que o número de peças é $7 \times \frac{84}{3} = 196$.

Exemplo 556 *Uma ideia que me ocorreu foi a de considerar dominós do tipo $n \times 2$, $n \times 3, \dots, n \times m, \dots$. Assim, no caso de peças do tipo 2×2 , temos peças

a	b
c	d

, com $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quantas peças terá este dominó?*

Resolução

Se os números a, b, c, d forem todos diferentes, cada peça pode ocupar 4 posições diferentes.

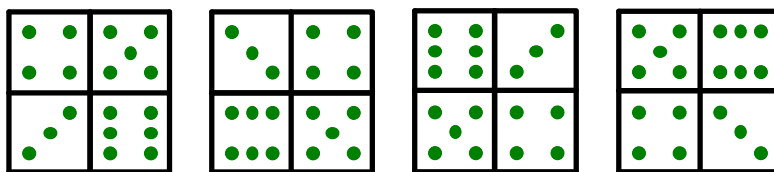
Já a peça

a	a
a	a

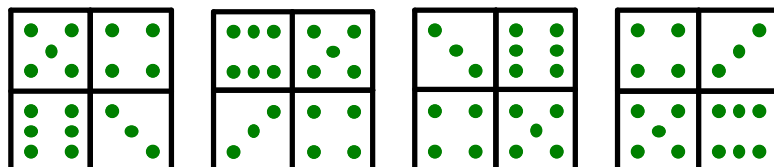
 só ocupa uma posição. Ao rodar um múltiplo de 90° , acaba por ficar na mesma. Dito de outro modo, as peças deste tipo têm de ser construídas, enquanto que as peças do tipo

a	b
c	d

 levantam alguns problemas, para que não sejam construídas a dobrar (ou a triplicar ou a quaduplicar). Eis o exemplo duma mesma peça em 4 posições.

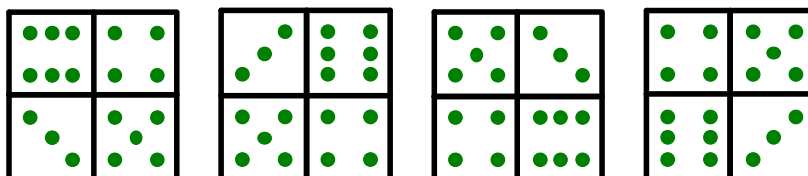


É claro que terá de haver outras peças com os mesmos números 3-4-5-6. O número de tais peças é de $\frac{4!}{4} = 3! = 6$. Recorde as permutações circulares.

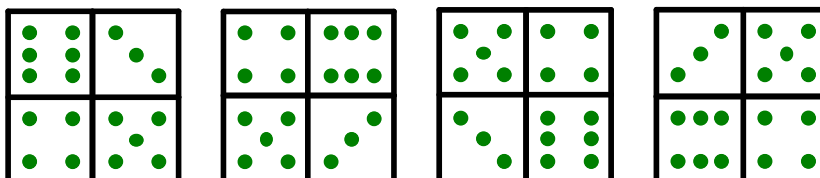


Esta peça é distinta da anterior: se percorrer as faces 3,4,5,6, num caso segue no sentido horário e no outro caso, segue no sentido anti-horário.

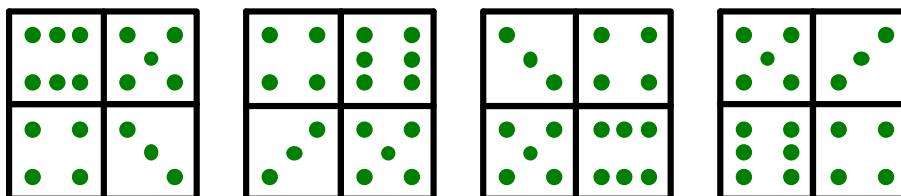
Outra possibilidade:



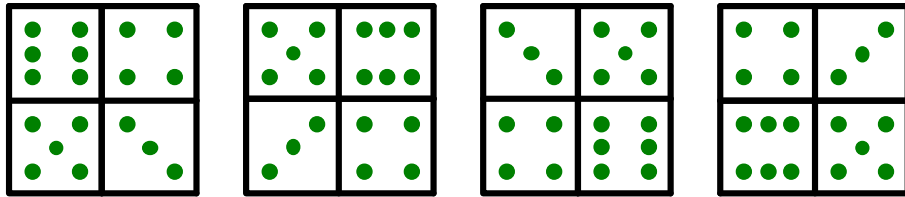
Os números no sentido inverso ao anterior:



Faltam os casos em que 6 e 3 ficam em posições simétricas em relação ao centro de simetria da peça.



E no sentido inverso do anterior:



Quantas peças são constituídas por 4 números diferentes?

A escolha dos números é feita de $\binom{7}{4} = 35$ maneiras. Logo, temos $35 \times 6 = 210$ peças com 4 números diferentes.

O caso mais fácil é aquele em que há quatro números iguais. Há 7 peças nestas condições.

Outro caso fácil é aquele em que temos três números iguais e um diferente: $\begin{bmatrix} a & a \\ a & b \end{bmatrix}$, com $b \neq a$.

Há $7 \times 6 = 42$ peças.

Caso em que temos dois pares de números iguais (os pares são diferentes): $\begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Atenção! Este caso pode ser enganador:

<table><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td></tr></table>	6	6	5	5	<table><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr></table>	6	6	4	4	<table><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr></table>	6	6	3	3	<table><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	6	6	2	2	<table><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	6	6	1	1	<table><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	6	6	0	0	<table><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr></table>	5	5	4	4	<table><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr></table>	5	5	3	3	<table><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	5	5	2	2	<table><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	5	5	1	1					
6	6																																																					
5	5																																																					
6	6																																																					
4	4																																																					
6	6																																																					
3	3																																																					
6	6																																																					
2	2																																																					
6	6																																																					
1	1																																																					
6	6																																																					
0	0																																																					
5	5																																																					
4	4																																																					
5	5																																																					
3	3																																																					
5	5																																																					
2	2																																																					
5	5																																																					
1	1																																																					
<table><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	5	5	0	0	<table><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr></table>	4	4	3	3	<table><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	4	4	2	2	<table><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	4	4	1	1	<table><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	4	4	0	0	<table><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table>	3	3	2	2	<table><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	3	3	1	1	<table><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	3	3	0	0	<table><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	2	2	1	1	<table><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	2	2	0	0	<table><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	1	0	0
5	5																																																					
0	0																																																					
4	4																																																					
3	3																																																					
4	4																																																					
2	2																																																					
4	4																																																					
1	1																																																					
4	4																																																					
0	0																																																					
3	3																																																					
2	2																																																					
3	3																																																					
1	1																																																					
3	3																																																					
0	0																																																					
2	2																																																					
1	1																																																					
2	2																																																					
0	0																																																					
1	1																																																					
0	0																																																					

Logo, só há 21 peças, em cada caso, ou seja, há 42 peças.

Caso em que temos um par de números iguais e os outros diferentes entre si e diferentes dos dois que são iguais.

Escolha do que se repete: 7. Escolha dos números que não se repetem: $\binom{6}{2} = 15$. Logo, há 105 maneiras de fazer a escolha.

$\begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & a \\ c & b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ com a, b, c distintos dois a dois.

Escolhido o número que se repete e os outros dois, há 3 casos. Então, o número de peças é 315.

Então, o número de peças é dado pela soma $210 + 7 + 42 + 42 + 315 = 616$.

Existe uma maneira de confirmar se o resultado obtido está certo?

Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Então, $(a, b, c), (c, b, a)$. Então, $A^4 = \{(x, y, z, w) : x, y, z, w \in A\}$ tem $7^4 = 2401$ elementos. É claro que pretendemos que, de alguma forma, todos os elementos de A^4 originem uma peça do nosso domínio. No entanto, pretendemos que não haja peças repetidas, pelo que temos de ser muito cuidadosos.

Consideremos uma peça como a seguinte: $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Se rodarmos a peça de 90° , no sentido dos

ponteiros do relógio, obtemos a seguinte posição $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Nova rotação de 90° , no sentido dos

ponteiros do relógio e obtemos $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$. E, com nova rotação, obtemos $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$. É claro que a peça

é sempre a mesma, pelo que só nos interessa ter a peça uma única vez. Consideremos que cada elemento de A^4 é representado do seguinte modo:

1º elemento	2º elemento
4º elemento	3º elemento

Então, a sequência $(4, 2, 5, 1)$ é representada por

4	2
1	5

. E a sequência, $(2, 5, 1, 4)$ é represen-

tada por

2	5
4	1

. Estas duas sequências são diferentes, mas originam a mesma peça de dominó.

Aliás, há quatro sequências que originam a peça de dominó associada a essas 4 sequências: $(4, 2, 5, 1)$, $(2, 5, 1, 4)$, $(5, 1, 4, 2)$ e $(1, 4, 2, 5)$.

Então, podemos considerar que a peça de dominó será $\{(4, 2, 5, 1), (2, 5, 1, 4), (5, 1, 4, 2), (1, 4, 2, 5)\}$. É uma maneira um pouco estranha de arranjar uma peça de dominó, pelo que podemos pensar que são as quatro maneiras como podemos colocar uma peça, assente num plano horizontal e com os números colocados nas 4 regiões voltados para o observador. De maneira mais sofisticada, podemos dizer que é uma classe de equivalência relativa a certa equivalência definida em A^4 .

Que relação é essa? Dados dois elementos (x, y, z, w) e (a, b, c, d) dizemos que $(x, y, z, w) \rho (a, b, c, d)$ se
$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c \\ w = d \end{cases} \vee \begin{cases} x = b \\ y = c \\ z = d \\ w = a \end{cases} \vee \begin{cases} x = c \\ y = d \\ z = a \\ w = b \end{cases} \vee \begin{cases} x = d \\ y = a \\ z = b \\ w = c \end{cases}.$$

Com maior ou menor dificuldade, demonstra-se que ρ é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva). E a classe de (a, b, c, d) é $\{(a, b, c, d), (b, c, d, a), (c, d, a, b), (d, a, b, c)\}$. Então, todas as classes de equivalência têm quatro elementos? A resposta é NÃO.

Representemos a classe de (a, b, c, d) por $[(a, b, c, d)]_\rho$. Então, $[(2, 2, 2, 2)]_\rho = \{(2, 2, 2, 2)\}$, mesmo que se escreva $\{(2, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 2)\}$.

1. Peças constituídas por 4 números diferentes, como 1, 2, 3, 4: cada peça origina 4 sequências, pelo que cada classe tem 4 elementos. Como $4! = 24$, isso quer dizer que temos seis classes e, por isso, seis peças.
2. Peças constituídas por 2 números iguais e dois diferentes entre si e diferentes dos que são iguais. Com exemplos, temos

1	2
2	3

 e

5	6
4	4

.

A primeira peça das duas anteriores corresponde a $(1, 2, 3, 2)$, tendo-se

$$[(1, 2, 3, 2)]_\rho = \{(1, 2, 3, 2), (2, 3, 2, 1), (3, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 3)\}$$

No caso

5	6
4	4

, temos $[(5, 6, 4, 4)]_\rho = \{(5, 6, 4, 4), (6, 4, 4, 5), (4, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 4)\}$.

Em ambos os casos, temos classes com quatro elementos.

3. Peças constituídas por dois pares de números iguais:

(a) Peças como

1	1
4	4

: $[(1, 1, 4, 4)]_\rho = \{(1, 1, 4, 4), (1, 4, 4, 1), (4, 4, 1, 1), (4, 1, 1, 4)\}$

Novamente, tivemos 4 elementos na classe de equivalência:

(b) Peças como

1	4
4	1

:

$$[(1, 4, 1, 4)]_\rho = \{(1, 4, 1, 4), (4, 1, 4, 1), (1, 4, 1, 4), (4, 1, 4, 1)\} = \{(1, 4, 1, 4), (4, 1, 4, 1)\}$$

E obtivemos uma classe com dois elementos.

4. Peças como

1	2
2	2

: $[(1, 2, 2, 2)]_\rho = \{(1, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 1, 2), (2, 1, 2, 2)\}$

Novamente, obtivemos classes com quatro elementos.

5. Resta o caso em que todos os elementos são iguais:

0	0
0	0

Agora, $[(0, 0, 0, 0)]_\rho = \{(0, 0, 0, 0)\}$, pelo que temos 7 classes com um só elemento.

Resumindo: as classes têm quatro elementos, menos nos casos em que temos situações dum de dois tipos:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Quando, todos os elementos são iguais, há 7 possibilidades e 7 classes com uma sequência.

As classes do tipo

a	b
b	a

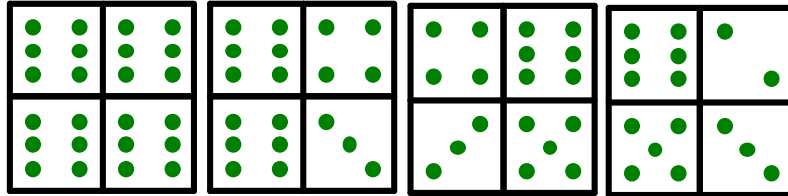
, com $a \neq b$, têm dois elementos e o número dessas classes é $\binom{7}{2} = 21$.

Logo, temos 28 classes especiais, sendo o número de elementos nessas classes de $2 \times 21 + 7 = 49$.

Restam $7^4 - 49 = 2352$ sequências que vão formar $\frac{2352}{4} = 588$ classes de equivalência.

Logo, há $588 + 21 + 7 = 616$ classes de equivalência, pelo que o número de peças é 616.

Terminamos com uma possibilidade para as primeiras quatro jogadas dum jogo de dominó com peças do tipo 2×2 .



Com recurso às tabelas, temos que as quatro jogadas anteriores podem ser representadas da seguinte maneira:

6	6	6	4	4	6	6	2
6	6	6	3	3	5	5	4

Exemplo 557 Determine o número de peças do dominó de tipo 2×3 .

Resolução

Continuamos a considerar que neste dominó, as seis "casas" apresentam um número de 0 a 6.

A peça com mais pontos é a seguinte:

6	6	6
6	6	6

No caso deste jogo, a situação é mais fácil do que no exemplo anterior, porque as classes de equivalência só contêm uma ou duas sequências. A razão é simples: as rotações de 90° conduzem a "outra" peça. Vamos admitir que só podemos formar filas de largura "dois". Ou seja, da seguinte maneira.

6	6	6	6	1	5	5	6	0
6	6	6	6	3	2	2	4	1

Uma rotação de 90° de uma peça conduz a uma posição que não acerta com a fila já formada. E o mesmo acontecia se o jogo fosse do seguinte tipo:

6	6	6	1	1	4
6	6	6	3	3	2
6	6	6	0	0	5

É claro que podemos criar regras que permitam jogar em mais do que uma fila, por exemplo, da seguinte maneira:

			1	0	3			
			1	0	3			
			1	0	3			
			6	6	6			
			6	6	6			
			6	6	6			
			6	6	6			
			5	2	4			
			5	2	4			
			1	0	2			
4	3	1						
0	3	2						
			1	3	6			
			2	0	6			
						6	1	5
						6	3	2
						5	6	0
						2	4	1

Consideremos que a cada peça, na posição

a	b	c
f	e	d

, corresponde a sequência (a, b, c, d, e, f) .

Se rodarmos a peça de 180° , obtemos a posição

d	e	f
c	b	a

, pelo que, em princípio, obtemos duas posições por peça. Mas há casos em que só obtemos uma posição:

a	a	a
a	a	a

,

a	b	a
a	b	a

,

b	a	b
b	a	b

Vamos definir, em A^6 , uma relação binária do seguinte modo: $(a, b, c, d, e, f) \rho (u, v, x, y, z, w)$ se

$$\left\{ \begin{array}{l} a = u \\ b = v \\ c = x \\ d = y \\ e = z \\ f = w \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} a = y \\ b = z \\ c = w \\ d = u \\ e = v \\ f = x \end{array} \right. .$$

Repare no seguinte esquema: $\left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline f & e & d \\ \hline d & e & f \\ \hline c & b & a \\ \hline \end{array} \right\}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & v & x \\ \hline w & z & y \\ \hline u & v & x \\ \hline w & z & y \\ \hline \end{array}$

Quais as peças que só correspondem a uma posição?

Para começar, aquelas em que todos os seis números são iguais. Mas, também, aquelas do tipo

a	b	c
c	b	a

. E não mais peças que correspondam a uma só posição. Então, só temos que contar as várias possibilidades: $7 \times 7 \times 7 = 343$.

Cuidado com a tentação de considerar a metade superior como uma peça de tridominó! As peças

a	b	c
-----	-----	-----

e

c	b	a
-----	-----	-----

são iguais, enquanto as peças

a	b	c
c	b	a

e

c	b	a
a	b	c

são diferentes.

Então, temos que o número de peças é dado por

$$\frac{7^6 - 7^3}{2} + 7^3 = \frac{7^6 + 7^3}{2} = 58\,996$$

Não parece boa ideia jogar este dominó: para quatro jogadores, temos 14 749 peças a cada um!

E qual o número total de pontos?

Questão fácil: em cada uma das seis partes do dominó, temos um número de 0 a 6. A média é 3, pelo que a média de pontos por peça é 18. Logo, temos $58\,996 \times 18 = 1\,061\,928$ pontos.

Capítulo 28

Probabilidades

Os jogos e a vontade de ganhar conduziram ao aparecimento da Teoria das Probabilidades. Este é um ramo da Matemática relativamente recente, mas que teve um desenvolvimento muito grande, estando, normalmente, associado à Estatística.

A Teoria das Probabilidades tem três vertentes: a regra de Laplace, a noção frequentista e a noção axiomática.

Neste capítulo, falaremos da primeira e da última.

O lançamento duma moeda, para tentarmos acertar no resultado, é um facto muito habitual. Se a moeda for equilibrada, estima-se que a probabilidade de acertar seja $\frac{1}{2}$, o que significa que não há maneira de prever o resultado ou de escolher uma face em detrimento de outra.

No lançamento dum dado equilibrado, a probabilidade de sair uma dada face é $\frac{1}{6}$, tendo-se que não há qualquer razão lógica que nos leve a escolher uma face e não outra.

Mas há uma questão pertinente: o que são moedas e dados equilibrados?

Vamos ter de passar sobre esta questão e dar algumas definições, tendo por base as moedas e os dados, mas que se generalizam facilmente.

Espaço amostral e acontecimentos

Se lançarmos uma moeda de 1 Euro, temos duas possibilidades: ou sai a face comum (C) ou sai a face nacional (N).

Neste caso, o espaço amostral (ou espaço de resultados) é o conjunto $\Omega = \{C, N\}$, enquanto que acontecimento é qualquer subconjunto do espaço amostral Ω , ou seja, acontecimento é qualquer elemento de $P(\Omega)$, onde $P(\Omega)$ é o conjunto das partes (ou subconjuntos) de Ω .

Se Ω for um conjunto finito, então $\#P(\Omega) = 2^{\#\Omega}$.

No caso da moeda, temos $\#\Omega = 2$, pelo que $\#P(\Omega) = 2^2 = 4$.

Note-se que $P(\Omega) = \{\emptyset, \{C\}, \{N\}, \{C, N\}\}$.

Já no caso do dado, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pelo que $\#\Omega = 6$ e $\#P(\Omega) = 2^6 = 64$.

Neste caso, devido ao número de elementos, não vamos escrever exhaustivamente $P(\Omega)$.

Se lançarmos duas moedas, em simultâneo, o espaço amostral é dado por

$$\Omega = \{(C, C), (C, N), (N, C), (N, N)\}$$

E os 16 acontecimentos são:

- | | |
|-------------------------|--|
| 1. \emptyset | 9. $\{(C, N), (N, C)\}$ |
| 2. $\{(C, C)\}$ | 10. $\{(C, N), (N, N)\}$ |
| 3. $\{(C, N)\}$ | 11. $\{(N, C), (N, N)\}$ |
| 4. $\{(N, C)\}$ | 12. $\{(C, C), (C, N), (N, C)\}$ |
| 5. $\{(N, N)\}$ | 13. $\{(C, C), (C, N), (N, N)\}$ |
| 6. $\{(C, C), (C, N)\}$ | 14. $\{(C, C), (N, C), (N, N)\}$ |
| 7. $\{(C, C), (N, C)\}$ | 15. $\{(C, N), (N, C), (N, N)\}$ |
| 8. $\{(C, C), (N, N)\}$ | 16. $\{(C, C), (C, N), (N, C), (N, N)\}$ |

A cada um dos acontecimentos anteriores corresponde uma probabilidade.

Por exemplo, $p(\emptyset) = 0$, $p(\{(C, C)\}) = \frac{1}{4}$, $p(\Omega) = 1$.

A probabilidade de saírem faces iguais nas duas moedas é $p(\{(C, C), (N, N)\}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Observe-se que, muitas vezes, escrevemos $p((C, C), (N, N))$ em vez de $p(\{(C, C), (N, N)\})$.

A regra de Laplace

Definição 558 A probabilidade dum acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando os casos possíveis são equiprováveis.

No exemplo anterior vimos que a probabilidade de saírem faces iguais num lançamento de duas moedas era $\frac{1}{4}$.

Os casos favoráveis são (C, C) e (N, N) , enquanto que os casos possíveis são (C, C) , (C, N) , (N, C) e (N, N) , pelo que a probabilidade é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Se considerarmos o lançamento de dois dados, temos 36 casos possíveis, como podemos ver na seguinte tabela de dupla entrada:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Repare-se que, neste caso, o número de acontecimentos é 2^{36} .

Qual a probabilidade de sair soma 6, quando se lançam dois dados?

Os casos favoráveis são $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$ e $(5, 1)$, enquanto que os casos possíveis são 36. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{5}{36}$.

Finalmente, refira-se que a regra de Laplace tem um problema sério: Como saber se dois casos (acontecimentos) são equiprováveis, antes de calcular as suas probabilidades?

Exemplo 559 Considere o lançamento simultâneo de três dados (numerados de 1 a 6). Qual o acontecimento mais provável, sair soma 11 ou sair soma 12?

Resolução

Maneiras de obter soma 11:

$1 + 4 + 6$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$1 + 5 + 5$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

$2 + 3 + 6$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$2 + 4 + 5$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$3 + 3 + 5$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

$3 + 4 + 4$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

Logo, há 27 maneiras diferentes de obter soma 11.

Maneiras de obter soma 12:

$1 + 5 + 6$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$2 + 4 + 6$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$2 + 5 + 5$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

$3 + 3 + 6$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

$3 + 4 + 5$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$4 + 4 + 4$, que corresponde a 1 maneira;

Logo, há 25 maneiras diferentes de obter soma 12.

O número de casos possíveis é $6 \times 6 \times 6 = 216$, sendo que todos estes casos são equiprováveis.

Então, a probabilidade de obter soma 11 é $\frac{27}{216}$, enquanto que a probabilidade de obter soma 12 é $\frac{25}{216}$.

Logo, é mais provável obter soma 11 do que obter soma 12.

Exemplo 560 Considere o lançamento simultâneo de três dados (numerados de 1 a 6). Qual o acontecimento mais provável, sair soma 9 ou sair soma 10?

Resolução

Maneiras de obter soma 9:

$1 + 2 + 6$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$1 + 3 + 5$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$1 + 4 + 4$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

$2 + 2 + 5$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

$2 + 3 + 4$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$3 + 3 + 3$, que corresponde a 1 maneira;

Logo, há 25 maneiras diferentes de obter soma 9.

Maneiras de obter soma 10:

$1 + 3 + 6$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$1 + 4 + 5$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$2 + 2 + 6$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

$2 + 3 + 5$, que corresponde a 6 maneiras diferentes;

$2 + 4 + 4$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

$3 + 3 + 4$, que corresponde a 3 maneiras diferentes;

Logo, há 27 maneiras diferentes de obter soma 10.

O número de casos possíveis é $6 \times 6 \times 6 = 216$, sendo que todos estes casos são equiprováveis.

Então, a probabilidade de obter soma 9 é $\frac{25}{216}$, enquanto que a probabilidade de obter soma 10 é $\frac{27}{216}$.

Logo, é mais provável obter soma 10 do que obter soma 9.

Comparando com o exemplo anterior, vemos que obter soma 10 tem a mesma probabilidade do que obter soma 11, o mesmo acontecendo com as somas 9 e 12.

Exemplo 561 Considere uma urna onde estão colocadas 4 bolas brancas e 6 bolas verdes, todas idênticas, exceptuando a cor. Tira-se, ao acaso, 3 bolas da urna. Qual a probabilidade de saírem 2 bolas brancas e uma bola verde?

Resolução

Maneiras de saírem 2 bolas brancas e uma bola verde:

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = 6 \times 6 = 36$$

Maneiras de saírem 3 bolas:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

Os casos possíveis são equiprováveis, pelo que a probabilidade pedida é $\frac{36}{120}$, ou seja, $\frac{3}{10}$.
Observe-se que esta questão pode ser resolvida com arranjos:

$$p(B, B, V) = \frac{4 \times 3 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{10}$$

Analogamente, $p(B, V, B) = p(V, B, B) = \frac{4 \times 3 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{10}$, pelo que a probabilidade pretendida é $\frac{1}{10} \times 3 = \frac{3}{10}$.

Exemplo 562 Ainda a regra de Laplace Seja Ω um espaço amostral finito, com todos os casos equiprováveis. Sejam $A, B \subseteq \Omega$. Então:

- a) $p(\emptyset) = 0$
- b) $p(\Omega) = 1$
- c) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- d) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Demonstração

Suponhamos que $\#\Omega = n$.

- a) $p(\emptyset) = \frac{\#\emptyset}{n} = \frac{0}{n} = 0$
- b) $p(\Omega) = \frac{\#\Omega}{n} = \frac{n}{n} = 1$
- c) Seja $m = \#A$. Então, $p(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - p(A)$
- d) $p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{n} = \frac{\#A + \#B - \#(A \cap B)}{n} = \frac{\#A}{n} + \frac{\#B}{n} - \frac{\#(A \cap B)}{n} = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Note-se que, no caso dos conjuntos A e B serem disjuntos, temos $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Finalmente, note-se que algumas das propriedades anteriores serão, mais adiante, utilizadas na definição axiomática de probabilidade.

Exemplo 563 A probabilidade da intersecção e a probabilidade condicionada Suponhamos que temos uma urna com 3 bolas brancas e 4 bolas azuis. Retira-se uma bola e, depois, mais outra. Qual a probabilidade da primeira bola ser branca e a segunda azul?

A resposta $\frac{3 \times 4}{7 \times 6} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6}$ pode ser interpretada da seguinte maneira:

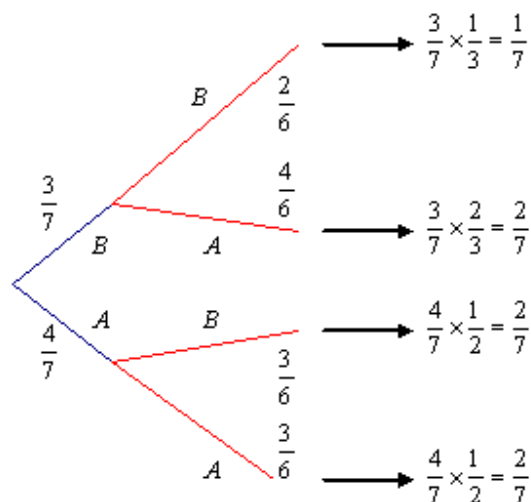
$\frac{3}{7}$ é a probabilidade da primeira bola ser branca e $\frac{4}{6}$ é a probabilidade da segunda bola ser azul, supondo que a primeira bola foi branca.

Simbolicamente, temos $p(A \cap B) = p(A) \times p(B | A)$, onde $p(B | A)$ significa a probabilidade de ocorrer o acontecimento B , supondo que ocorreu o acontecimento A .

Note-se que, $A \cap B = B \cap A$, pelo que $p(A \cap B) = p(B) \times p(A | B)$.

Das igualdades anteriores, vem $p(B | A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$, com $p(A) \neq 0$ e $p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, com $p(B) \neq 0$.

Exemplo 564 *O diagrama da árvore* Suponhamos que temos uma urna com 3 bolas brancas e 4 bolas azuis. Retira-se uma bola e, depois, outra. Qual a probabilidade da segunda bola ser branca?



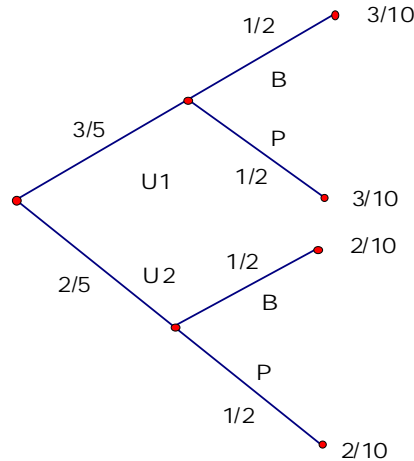
Então, a probabilidade da segunda bola ser branca é $\frac{3}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$.

Exemplo 565 *Ainda o diagrama da árvore* Suponhamos que temos duas urnas e que em cada urna, há 3 bolas brancas e 2 bolas pretas. Retiramos uma bola, ao acaso, da urna 1 e, depois de verificarmos a cor da bola, colocamo-la na urna 2. Em seguida, retiramos uma outra bola, de acordo com a seguinte regra:

Se a primeira bola tiver sido branca, retiramos a segunda bola da urna 1; se a primeira bola tiver sido preta, retiramos a segunda bola da urna 2.

1. Qual a probabilidade da segunda bola ser branca?
2. Sabendo que a segunda bola foi branca, qual a probabilidade dessa bola ter sido retirada da urna 1?

Resolução



1. A probabilidade da segunda bola ser branca é, de acordo com o diagrama anterior, $\frac{3}{10} + \frac{2}{10}$, ou seja, $\frac{1}{2}$.
2. Representando por B_2 o acontecimento "a segunda bola é branca" e por U_1 "a segunda bola é retirada da urna 1", pretendemos calcular a probabilidade condicionada $p(U_1 | B_2)$. Então,

$$p(U_1 | B_2) = \frac{p(U_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{p(U_1) \times p(B_2 | U_1)}{\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Exemplo 566 *Tabela de distribuição de probabilidades (1)* Considere uma urna com 7 bolas idênticas, sendo 3 brancas e 4 pretas. Da urna, são extraídas, simultaneamente e ao acaso, três bolas. Por cada bola branca extraída, colocamos 1 euro no mealheiro do Rui e, por cada bola preta extraída, colocamos 50 cêntimos no mesmo mealheiro. Seja X , o valor, em euros, colocado no mealheiro. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

Resolução

A probabilidade de extrair três bolas brancas é $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{35}$

A probabilidade de extrair duas bolas brancas e uma preta é $\frac{\binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{12}{35}$

A probabilidade de extrair uma bola branca e duas pretas é $\frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \times 6}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{18}{35}$

A probabilidade de extrair três bolas pretas é $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{4}{35}$

No primeiro caso (três bolas brancas), temos $X = 3$.

No segundo caso, temos $X = 2,50$.

No terceiro caso, temos $X = 2$.

No quarto caso, temos $X = 1,50$.

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1,50	2	2,50	3
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

Exemplo 567 *Tabela de distribuição de probabilidades (2)* Considere uma urna com 5 bolas idênticas, sendo 3 brancas e 2 pretas. Da urna, são extraídas, simultaneamente e ao acaso, três bolas. Por cada bola branca extraída, colocamos 1 euro no mealheiro do Rui e, por cada bola preta extraída, colocamos 50 centimos no mesmo mealheiro. Seja X , o valor, em euros, colocado no mealheiro. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

Resolução

A probabilidade de extrair três bolas brancas é $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{\frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{10}$, sendo $X = 3$.

A probabilidade de extrair duas bolas brancas e uma preta é $\frac{\binom{2}{2} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, sendo $X = 2, 50$.

A probabilidade de extrair uma bola branca e duas pretas é $\frac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$, sendo $X = 2$.

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	2	2,50	3
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

Exercício 568 Considere o lançamento dum dado equilibrado. Seja X a variável aleatória "número da face que fica voltada para cima". Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável X e determine o valor médio, a variância e o desvio padrão de X .

Resolução

Tabela de distribuição de probabilidade da variável X :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

O valor médio da variável X , que se representa por \bar{X} ou por μ , é dado por

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 \\ &= \frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \times 21 = \frac{7}{2} = 3,5\end{aligned}$$

Quanto à variância, a qual se representa por σ^2 ou por s^2 , temos

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{6} \times \left[\left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{6} \times \left[\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \right) \\ &= \frac{1}{6} \times \left(\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} \right) = \frac{1}{6} \times \frac{70}{4} = \frac{35}{12}\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} = \sqrt{\frac{105}{36}} = \frac{\sqrt{105}}{6}.$$

Exercício 569 Simplifique a expressão que dá a variância, a partir das frequências relativas ou das probabilidades.

Resolução

Consideremos uma variável aleatória X que toma os valores x_i com as probabilidades p_i , para $i = 1, 2, \dots, n$.

Então, $\mu = \sum_{i=1}^n p_i x_i$. Da definição de variância vem

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) = \sum_{i=1}^n (p_i x_i^2 - 2\mu p_i x_i + p_i \mu^2) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n p_i x_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - \mu^2\end{aligned}$$

Então, no exercício anterior, o cálculo da variância podia ser efectuado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{6} \times 1^2 + \frac{1}{6} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 + \frac{1}{6} \times 4^2 + \frac{1}{6} \times 5^2 + \frac{1}{6} \times 6^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6} \times (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \frac{49}{4} = \frac{1}{6} \times 91 - \frac{49}{4} \\ &= \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}\end{aligned}$$

Exercício 570 Simplifique a expressão que dá a variância, a partir das frequências absolutas.

Resolução

Consideremos uma variável aleatória X que toma os valores x_i com as frequências absolutas F_i , para $i = 1, 2, \dots, n$.

Então, $\mu = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{N}$, com $N = \sum_{i=1}^n F_i$. O problema é que há duas definições de

variância que são utilizadas com alguma frequência:

$$1^a \text{ definição: } \sigma_N^2 = \frac{\sum_{i=1}^n F_i (x_i - \mu)^2}{N}. \quad 2^a \text{ definição (a mais consensual): } \sigma_{N-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n F_i (x_i - \mu)^2}{N-1}.$$

$$\text{É claro que } \sigma_{N-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n F_i (x_i - \mu)^2}{N} \times \frac{N}{N-1} = \frac{N}{N-1} \times \sigma_N^2.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \sigma_N^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n (F_i x_i^2 - 2\mu F_i x_i + F_i \mu^2)}{N} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i^2}{N} - 2\mu \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{N} + \mu^2 \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i^2}{N} - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i^2}{N} - 2\mu^2 + \mu^2 = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i^2}{N} - \mu^2
 \end{aligned}$$

Logo, $\sigma_{N-1}^2 = \frac{N}{N-1} \times \sigma_N^2 = \frac{N}{N-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i^2}{N} - \mu^2 \right)$.

É claro que também podemos calcular o desvio padrão (também há dois...):

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i^2}{N} - \mu^2}, \quad \sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i^2}{N} - \mu^2}$$

Exercício 571 Considere um lançamento dum dado equilibrado. Seja X a variável aleatória "número de divisores do número da face que fica voltada para cima". Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável X e determine o valor médio, a variância e o desvio padrão de X .

Resolução

Distribuição de probabilidade:

Face	1	2	3	4	5	6
x_i (nº de divisores)	1	2	2	3	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Valor médio:

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 \\
 &= \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+6+3+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

Variância:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{1}{6} \times 1^2 + \frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 + \frac{1}{6} \times 4^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{6} + 2 + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} - \frac{49}{9} = \frac{3+36+27+48-98}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}
 \end{aligned}$$

Desvio padrão: $\sigma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Observe-se que, no caso, das frequências relativas, apenas há uma definição de variância (e de desvio padrão), pelo que é preciso algum cuidado, antes de transformar frequências absolutas em frequências relativas: podemos fazê-lo, se quisermos calcular σ_N , mas, se quisermos calcular σ_{N-1} , temos de calcular σ_N e depois calcular σ_{N-1} , usando a fórmula que relaciona σ_{N-1} Com σ_N .

Exemplo 572 *O Totobola* Suponhamos que o Totobola é constituído por 13 jogos. Qual a probabilidade de acertar em 13 resultados, quando se faz uma única aposta?

A resposta é $\frac{1}{3^{13}} = 6,272\,254\,744 \times 10^{-7}$. Se tivermos n apostas diferentes, a probabilidade será $\frac{n}{3^{13}}$.

Exemplo 573 *O Totoloto* é um jogo no qual se pretende acertar em 6 números, os quais são sorteados entre 49 (de 1 a 49). Qual a probabilidade de acertar nos 6 números sorteados, quando se faz uma única aposta?

A resposta é: $\frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7,151\,123\,842 \times 10^{-8}$

Esta probabilidade é cerca de 8,77 vezes inferior à probabilidade de acertar no Totobola (uma única aposta em ambos os casos).

Exemplo 574 *O Euromilhões* Este jogo consiste em acertar em cinco números sorteados entre 50 (de 1 a 50) e em duas estrelas numeradas de 1 a 9. Qual a probabilidade de acertar nos 7 números sorteados, quando se faz uma única aposta?

A resposta é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{50}{5}} \times \frac{1}{\binom{9}{2}} &= \frac{45! \times 5! \times 7! \times 2!}{50! \times 9!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 9 \times 8} \\ &= \frac{1}{10 \times 49 \times 8 \times 47 \times 46 \times 9} = \frac{1}{76\,275\,360} \end{aligned}$$

Esta probabilidade é cerca de 47,8 vezes inferior à probabilidade de acertar no Totobola de 13 jogos e cerca de 5,45 vezes inferior à probabilidade de acertar no Totoloto (uma única aposta em todos os casos).

Note-se que $\binom{50}{5} \times \binom{9}{2}$ é o número (máximo) de apostas diferentes que podem ser feitas no Euromilhões.

Exemplo 575 *Mais sobre o Euromilhões* Determine a probabilidade de, numa única aposta, acertar:

1. nos 7 resultados (5 números e 2 estrelas)
2. em 5 números e 1 estrela
3. em 5 números e nenhuma estrela
4. em 4 números e 2 estrelas

5. em 4 números e 1 estrela
6. em 4 números e nenhuma estrela
7. em 3 números e 2 estrelas
8. em 3 números e 1 estrela
9. em 3 números e nenhuma estrela
10. em 2 números e 2 estrelas
11. em 2 números e 1 estrela
12. em 2 números e nenhuma estrela
13. em 1 número e 2 estrelas
14. em 1 número e 1 estrela
15. em 1 número e nenhuma estrela
16. em nenhum número e 2 estrelas
17. em nenhum número e 1 estrela
18. em nenhum número e nenhuma estrela

Resolução

1. $p(5N, 2E) = \frac{1}{76\,275\,360}$, conforme verificado no exercício anterior.
2. $p(5N, 1E) = \frac{\binom{5}{5} \times \binom{2}{1} \times \binom{7}{1}}{76\,275\,360} = \frac{14}{76\,275\,360} = \frac{1}{5448\,240}$
3. $p(5N, 0E) = \frac{\binom{5}{5} \times \binom{7}{2}}{76\,275\,360} = \frac{21}{76\,275\,360} = \frac{1}{3632\,160}$
4. $p(4N, 2E) = \frac{\binom{5}{4} \times \binom{45}{1} \times \binom{2}{2}}{76\,275\,360} = \frac{225}{76\,275\,360} = \frac{5}{1695\,008}$
5. $p(4N, 1E) = \frac{\binom{5}{4} \times \binom{45}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{7}{1}}{76\,275\,360} = \frac{3150}{76\,275\,360} = \frac{5}{121\,072}$
6. $p(4N, 0E) = \frac{\binom{5}{4} \times \binom{45}{1} \times \binom{7}{2}}{76\,275\,360} = \frac{4725}{76\,275\,360} = \frac{15}{242\,144}$
7. $p(3N, 2E) = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{45}{2} \times \binom{2}{2}}{76\,275\,360} = \frac{9900}{76\,275\,360} = \frac{55}{423\,752}$
8. $p(3N, 1E) = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{45}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{7}{1}}{76\,275\,360} = \frac{138\,600}{76\,275\,360} = \frac{55}{30\,268}$
9. $p(3N, 0E) = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{45}{2} \times \binom{7}{2}}{76\,275\,360} = \frac{207\,900}{76\,275\,360} = \frac{165}{60\,536}$
10. $p(2N, 2E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{45}{3} \times \binom{2}{2}}{76\,275\,360} = \frac{141\,900}{76\,275\,360} = \frac{2365}{1271\,256}$

Observemos que, neste ponto, se verifica uma irregularidade, pois a probabilidade é inferior à do caso anterior.

$$11. p(2N, 1E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{45}{3} \times \binom{2}{1} \times \binom{7}{1}}{76\,275\,360} = \frac{1986\,600}{76\,275\,360} = \frac{2365}{90\,804}$$

$$12. p(2N, 0E) = \frac{\binom{5}{2} \times \binom{45}{3} \times \binom{7}{2}}{76\,275\,360} = \frac{2979\,900}{76\,275\,360} = \frac{2365}{60\,536}$$

$$13. p(1N, 2E) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{45}{4} \times \binom{2}{2}}{76\,275\,360} = \frac{744\,975}{76\,275\,360} = \frac{2365}{242\,144}$$

$$14. p(1N, 1E) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{45}{4} \times \binom{2}{1} \times \binom{7}{1}}{76\,275\,360} = \frac{10\,429\,650}{76\,275\,360} = \frac{2365}{17\,296}$$

$$15. p(1N, 0E) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{45}{4} \times \binom{7}{2}}{76\,275\,360} = \frac{15\,644\,475}{76\,275\,360} = \frac{7095}{34\,592}$$

$$16. p(0N, 2E) = \frac{\binom{45}{5} \times \binom{2}{2}}{76\,275\,360} = \frac{1221\,759}{76\,275\,360}$$

$$17. p(0N, 1E) = \frac{\binom{45}{5} \times \binom{2}{1} \times \binom{7}{1}}{76\,275\,360} = \frac{17\,104\,626}{76\,275\,360} = \frac{19\,393}{86\,480}$$

$$18. p(0N, 0E) = \frac{\binom{45}{5} \times \binom{7}{2}}{76\,275\,360} = \frac{25\,656\,939}{76\,275\,360} = \frac{58\,179}{172\,960}$$

É claro que a soma de todas as probabilidades anteriores é 1, conforme se pode confirmar:

$$1 + 14 + 21 + 225 + 3150 + 4725 + 9900 + 138600 + 207900 = 364\,536$$

$$141900 + 1986600 + 2979900 + 744975 + 10429650 = 16\,283\,025$$

$$15644475 + 1221759 + 17\,104\,626 + 25\,656\,939 = 59\,627\,799$$

$$364\,536 + 16\,283\,025 + 59\,627\,799 = 76\,275\,360$$

A partir das probabilidades anteriores, podemos ordenar os prémios:

1º Prémio: $5N, 2E$

2º Prémio: $5N, 1E$

3º Prémio: $5N, 0E$

4º Prémio: $4N, 2E$

5º Prémio: $4N, 1E$

6º Prémio: $4N, 0E$

7º Prémio: $3N, 2E$

8º Prémio: $3N, 1E$

9º Prémio: $2N, 2E$

10º Prémio: $3N, 0E$

11º Prémio: $1N, 2E$

12º Prémio: $0N, 2E$

13º Prémio: $2N, 1E$

14º Prémio: $2N, 0E$

15º Prémio: $1N, 1E$

16º Prémio: $1N, 0E$

17º Prémio: $0N, 1E$

18º Prémio: $0N, 0E$

No jogo real, apenas há os primeiros 12 prémios e, caso extraordinário, o 12º prémio está mal atribuído, uma vez que as apostas premiadas são as que acertam em 2 números e 1 estrela, quando deviam ser as que acertam em zero números e 2 estrelas.

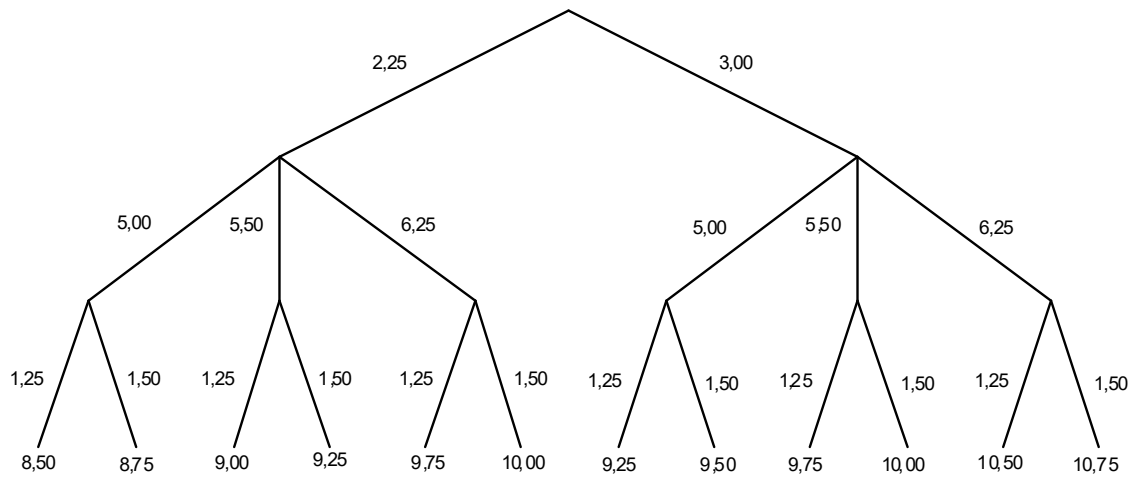
Este facto insólito levou a uma revisão de todos os cálculos e raciocínios anteriores, para ver se havia algum lapso, mas tal não acontece.

O erro (?) é dos organizadores do concurso Euromilhões. Até na Europa...

Exemplo 576 *Indecisão no restaurante (*)* O João vai a um restaurante e está indeciso sobre qual a ementa a escolher, pelo que resolve escolher ao acaso a entrada, o prato e a sobremesa. A bebida é grátis. Pode escolher uma de 2 entradas as quais custam 2,25 Euro e 3,00 Euro, respectivamente, um de 3 pratos a 5,00 Euro, 5,50 Euro, e 6,25 Euro, cada um e, ainda, uma de 2 sobremesas a 1,25 Euro e 1,50 Euro. Qual a probabilidade de 9,50 Euro chegarem para pagar a refeição?

Resolução

Consideremos o seguinte diagrama em árvore, no qual estão indicados os preços das várias refeições possíveis.



Podemos ver que há 6 casos em que o preço não excede 9,50€, num total de 12 casos possíveis e igualmente prováveis.

Então, a probabilidade do preço da refeição não exceder 9,50€ é de $\frac{1}{2}$.

Exemplo 577 Consideremos um jogo que consiste em atirar consecutivamente uma moeda ao ar e verificar se sai cara ou coroa. Cada jogador termina a sua participação, quando sair a mesma face da moeda, duas vezes consecutivas. Ganha quem tiver lançado mais vezes a moeda ao ar. Qual a distribuição de probabilidade?

Resolução

Seja X a variável "número de vezes que dado jogador lança a moeda ao ar, até que uma das faces saia duas vezes consecutivas".

O menor valor de X é 2, não havendo valor máximo para X .

$$p(X = 2) = p(\text{cara, cara}) + p(\text{coroa, coroa}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p(X = 3) = p(\text{coroa, cara, cara}) + p(\text{cara, coroa, coroa}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p(X = 4) = p(\text{cara, coroa, cara, cara}) + p(\text{coroa, cara, coroa, coroa}) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

Antes de continuarmos, vamos prestar atenção à situação. O jogo termina, quando sair a mesma face da moeda, duas vezes consecutivas, pelo que em todos os lançamentos anteriores a esses dois, sai alternadamente cara e coroa (ou coroa e cara).

$$\text{Então, } p(X = n + 2) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \text{ É claro que } p(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Logo, temos uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e cujo "primeiro termo" é $\frac{1}{4}$.

$$\text{Então, } p(X \leq 20) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{19}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{19}} = 1 - \frac{2}{2^{20}}$$

$$\text{No caso geral, temos } p(X \leq n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{2}{2^n}$$

Note-se que o jogo pode prolongar-se indefinidamente, tendo-se que a probabilidade disso acontecer é zero, uma vez que $p(X > n) = \frac{2}{2^n}$, cujo limite é zero.

Exemplo 578 Consideremos um jogo análogo ao anterior, mas em que temos um cubo (dado) equilibrado, onde quatro faces foram pintadas de branco e duas faces foram pintadas de vermelho. Lançamos consecutivamente o dado até que saia a mesma cor duas vezes consecutivas, contando-se o número de lançamentos, X . Qual a distribuição de probabilidade da variável X ?

Resolução

Representando branco por B e vermelho por V , temos:

$$p(X=2) = p(B, B) + p(V, V) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{9}$$

$$p(X=3) = p(V, B, B) + p(B, V, V) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Agora, a situação já parece mais complicada do que no caso do lançamento da moeda (exemplo anterior).

Para já, representemos $p(X=n) = p_n$ e separemos o caso par do caso ímpar.

Caso par

$$\begin{cases} p_2 = p(X=2) = \frac{5}{9} \\ p_4 = p(B, V, B, B) + p(V, B, V, V) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{5}{9} \\ p_6 = p(B, V, B, V, B, B) + p(V, B, V, B, V, V) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ \quad = \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times \frac{5}{9} \\ p_8 = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{9}\right)^3 \times \frac{5}{9} \\ p_{2n+2} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{9}\right)^n \times \frac{5}{9} \end{cases}$$

Podemos optar por escolher $p_{2n} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \times \frac{5}{9}$

É claro que se trata duma progressão geométrica.

Caso ímpar

$$\begin{cases} p_3 = p(X=3) = \frac{2}{9} \\ p_5 = p(V, B, V, B, B) + p(B, V, B, B, V, V) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{81} = \left(\frac{2}{9}\right)^2 \\ p_7 = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{729} = \left(\frac{2}{9}\right)^3 \\ p_{2n+1} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{cases}$$

E, mais uma vez, obtivemos a expressão geral (neste caso, para os termos de ordem ímpar).

$$\text{Resumindo, temos } \begin{cases} p_{2n} = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \times \frac{5}{9} \\ p_{2n+1} = \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{cases}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Vejamos uma aplicação do que vimos:

Qual a probabilidade do número de lançamentos (até que saia a mesma cor duas vezes consecutivas) ser menor ou igual a 20?

Esta questão já não é tão fácil como a do exemplo anterior, porque temos duas expressões (uma para os termos de ordem ímpar e outra para os termos de ordem par).

Como X não pode ser 1, temos 19 possibilidades para X , sendo que X é par, em 10 casos, e X é ímpar, em 9 casos.

$$\text{Nos casos ímpares, temos } \sum_{k=1}^9 \left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^9}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{2}{9} \times \frac{9}{7} \left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^9\right) = \frac{2}{7} \left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^9\right) = \frac{110\,691\,422}{387\,420\,489}$$

Nos casos pares, temos $\sum_{k=1}^{10} \frac{5}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1} = \frac{5}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{5}{7} \left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{10}\right) = \frac{2490\,559\,555}{3486\,784\,401}$

Então, $p(X \leq 20) = \frac{110\,691\,422}{387\,420\,489} + \frac{2490\,559\,555}{3486\,784\,401} = 0,999\,999\,412\,6$

Observação 1

É claro que podemos pensar no caso em que o cubo tem 5 faces brancas e uma face vermelha.

Neste caso, temos, para os termos de ordem par:

Para os termos de ordem ímpar:

Vejamos uma maneira de raciocinarmos:

Um caso par : há duas possibilidades

Um caso ímpar : há duas possibilidades

Neste caso, podemos verificar que as "letras" alternam, menos a última (que é igual à penúltima).

Em termos de probabilidades, temos

Observação 2

Relativamente a este exemplo (acabado de resolver), podemos colocar três questões:

1. Qual a probabilidade da variável ser um número par?
2. Qual a probabilidade da variável ser um número ímpar?
3. Os dois acontecimentos anteriores são complementares?

Na questão 1, temos a "soma" de todos os termos duma progressão geométrica

Na questão 2, temos

Na questão 3, temos que a soma das duas probabilidades (a probabilidade do número de lançamentos

efectuados ser par ou ímpar) é 1.

No entanto, os dois acontecimentos não são complementares, pois existe um terceiro acontecimento

que é possível, embora a sua probabilidade seja zero. Trata-se da situação em que vão saindo cores alternadas. Embora não se possa excluir essa possibilidade, isso seria certamente um caso muitíssimo estranho (mesmo no caso em que houvesse três faces duma cor e três faces doutra cor).

Exemplo 579 Consideremos um jogo que consiste em atirar consecutivamente uma moeda ao ar e verificar se sai cara ou coroa. Cada jogador termina a sua participação, quando sair a mesma face da moeda, três vezes consecutivas. Ganha quem tiver lançado mais vezes a moeda ao ar. Qual a distribuição de probabilidade?

Resolução

Seja X o número de lançamentos da moeda, até que termine o jogo. É claro que $X \geq 3$. Seja $p_n = p(X = n)$, a probabilidade do jogo terminar após n lançamentos.

O caso mais fácil é aquele em que $n = 3$, tendo-se $p_3 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$.

Vamos representar as duas faces da moeda por A e B . Então, o caso $n = 3$, corresponde a probabilidade $p_3 = p(X = 3) = p(A, A, A) + p(B, B, B)$.

Se $n = 4$, temos duas possibilidades: A, A, A, A e B, B, B, B .

Então, $p_4 = p(X = 4) = p(B, A, A, A) + p(A, B, B, B) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^3}$

Para $n = 5$, temos várias possibilidades. Os últimos três lançamentos (quando termina o jogo em 5 lances) são: A, A, A ou B, B, B . Antes, terão de aparecer duas letras. Centremos a nossa atenção no caso que termina em A, A, A , pois o outro caso tem o mesmo número de hipóteses. Teremos algo do género $YZAAA$.

É claro que Z não pode ser A , pelo que tem de ser B . Então, temos $YBAAA$, havendo duas hipóteses para Y . Logo, temos duas maneiras distintas: $ABAAA$ e $BBAAA$.

Então, o número total de possibilidades é 4, pelo que $p_5 = p(X = 5) = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^3}$.

Cálculo de p_6 :

Se terminarmos com AAA , falta colocar três letras. Ora, $3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$.

E vamos ter as seguintes possibilidades (para as seis letras): $BABAAA$, $ABBAAA$ e $AABAAA$.

No total, teremos seis casos, pelo que $p_6 = p(X = 6) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{3}{2^5}$.

Passemos ao cálculo de $p_7 = p(X = 7)$. Consideremos o caso em que as três últimas letras são AAA . Então, falta colocar quatro letras, antes do bloco AAA .

Ora, $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 2 + 2$. O caso $1 + 1 + 1 + 1$ corresponde a colocar as quatro letras (iniciais) da seguinte maneira: $ABAB$.

O caso $2 + 2$ corresponde a $AABB$. Falta o caso mais complicado: $4 = 1 + 1 + 2$. Há três possibilidades, uma vez que $4 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1$.

E os blocos de quatro letras correspondentes são $BABB$, $BAAB$ e $BBAB$.

Então, temos as seguintes possibilidades terminadas em AAA :

$$\left\{ \begin{array}{l} ABABAAA \\ AABBBAAA \\ BABBBAAA \\ BAABBBAAA \\ BBABBBAAA \end{array} \right.$$

É claro que temos mais cinco possibilidades (correspondentes aos casos em que a sequência termina em BBB).

Logo, há 10 casos, pelo que $p_7 = p(X = 7) = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{5}{2^6}$.

Quando cheguei a este ponto, fiquei um pouco preocupado: não descobria nenhuma maneira de calcular p_n , a não ser decompondo $n - 3$ em parcelas que só podem ser 1 ou 2.

Tentei separar o caso par do caso ímpar, mas não vou fazer isso.

Calculemos p_8 :

Vamos ter que decompor 5 em parcelas. Ora, continuando a supor que a sequência termina em AAA , temos $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2$.

É claro que há um caso para as cinco parcelas, quatro casos para as quatro parcelas e três casos para as três parcelas.

Vamos escrever as primeiras cinco letras dos oito casos:

$$\left\{ \begin{array}{l} BABAB \\ ABABB \\ ABAAB \\ ABBAB \\ AABAB \\ BAABB \\ BBABB \\ BBAAB \end{array} \right.$$

No total, temos 16 casos, pelo que $p_8 = p(X = 8) = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{2^4}$.

Calculemos p_9 :

Vamos continuar a supor que a sequência termina em AAA . Agora, vamos decompor 6 em parcelas. Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \\ 6 = 1 + 1 + 2 + 2 \\ 6 = 2 + 2 + 2 \end{array} \right.$$

A primeira igualdade, da lista anterior, corresponde a um caso; a segunda igualdade, corresponde a 5 casos, a terceira corresponde a 6 casos e a quarta igualdade corresponde a um só caso. Note-se que $\binom{4}{2} = 6$. No total, temos $2 \times (1+5+6+1) = 26$ casos, pelo que $p_9 = p(X=9) = 26 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{13}{2^8}$.

Ainda calculei p_{10} , antes de ter saltado para p_{23} . Deixo aqui o resultado de p_{10} :

$$p_{10} = p(X=10) = 26 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{26}{2^9}$$

Para calcular p_{23} , é preciso decompor 20 em parcelas. Para facilitar, vamos usar multiplicações: por exemplo, em vez de $2+2+2+2+2$ escrevemos 5×2 .

$$20 = 20 \times 1 = 20, \quad 20 = 18 \times 1 + 1 \times 2, \quad 20 = 16 \times 1 + 2 \times 2, \quad 20 = 14 \times 1 + 3 \times 2$$

$$20 = 12 \times 1 + 4 \times 2, \quad 20 = 10 \times 1 + 5 \times 2, \quad 20 = 8 \times 1 + 6 \times 2$$

$$20 = 6 \times 1 + 7 \times 2, \quad 20 = 4 \times 1 + 8 \times 2, \quad 20 = 2 \times 1 + 9 \times 2, \quad 20 = 10 \times 2$$

Para $20 = 20 \times 1$, temos 1 maneira (acabando em AAA)

Para $20 = 18 \times 1 + 1 \times 2$, temos $\binom{19}{1}$ maneiras

Para, $20 = 16 \times 1 + 2 \times 2$, temos $\binom{18}{2} = 153$ maneiras

Para, $20 = 14 \times 1 + 3 \times 2$, temos $\binom{17}{3} = 680$ maneiras

E já descobrimos a regra!

Para, $20 = 12 \times 1 + 4 \times 2$, temos $\binom{16}{4} = 1820$ maneiras

Para, $20 = 10 \times 1 + 5 \times 2$, temos $\binom{15}{5} = 3003$ maneiras

Para, $20 = 8 \times 1 + 6 \times 2$, temos $\binom{14}{6} = 3003$ maneiras

Para, $20 = 6 \times 1 + 7 \times 2$, temos $\binom{13}{7} = 1716$ maneiras

Para, $20 = 4 \times 1 + 8 \times 2$, temos $\binom{12}{8} = 495$ maneiras

Para, $20 = 2 \times 1 + 9 \times 2$, temos $\binom{11}{9} = 55$ maneiras

Para, $20 = 10 \times 2$, temos $\binom{10}{10} = 1$ maneira

O número total de casos (terminando em AAA) é:

$$\binom{20}{0} + \binom{19}{1} + \binom{18}{2} + \binom{17}{3} + \binom{16}{4} + \binom{15}{5} + \binom{14}{6} + \binom{13}{7} + \binom{12}{8} + \binom{11}{9} + \binom{10}{10}$$

A expressão anterior pode ser condensada:

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{20-k}{k} = 10\,946$$

Note-se bem que o número final é o dobro do anterior, ou seja, 21 892.

Então,

$$p_{23} = p(X=23) = 21\,892 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{23} = \frac{5473}{2097\,152}$$

Neste ponto, centrei a minha atenção no triângulo de Pascal e em $\sum_{k=0}^{10} \binom{20-k}{k}$.

É claro que não pretendia chegar à linha (de 23), pelo que imaginei uma situação mais simples (por causa do espaço).

$$S = \sum_{k=0}^5 \binom{10-k}{k} = \binom{10}{0} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3} + \binom{6}{4} + \binom{5}{5}$$

1												
1	1											
1	2	1										
1	3	3	1									
1	4	6	4	1								
1	5	10	10	5	1							
1	6	15	20	15	6	1						
1	7	21	35	35	21	7	1					
1	8	28	56	70	56	28	8	1				
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Para calcular, a soma anterior, o melhor é calcular cada parcela e somar o resultado:

Então, $S = 1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$. Repare que as parcelas estão numa "diagonal" do triângulo de Pascal.

É claro que nem liguei ao caso ímpar, pois pretendia descobrir alguma maneira de calcular a soma anterior, sem ser parcela a parcela.

E descobri algumas coisas. Por exemplo,

$$S = 1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = (1 + 8 + 21 + 20 + 5) + (1 + 7 + 15 + 10 + 1)$$

Mas, isso não me satisfaz, pois pareceu-me que tinha a ver com o facto dum elemento duma linha ser a soma de dois elementos da linha anterior, pelo que a demonstração devia ser fácil. Depois, resolvi calcular as somas das várias "diagonais":

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

E, claro, lá estava ela, a sucessão de Fibonacci. E fiquei com o problema resolvido. Por um lado, existe o termo geral da sucessão que eu pretendia; por outro lado, esse termo geral não é muito manipulável para fazer cálculos, porque envolve potências do número de ouro.

Entretanto, eu tinha descoberto outras coisas, ao olhar para o triângulo de Pascal (ainda antes de resolver calcular a soma das várias "diagonais").

Por exemplo, o resultado 89 pode ser decomposto em $89 = 8^2 + 5^2$.

Na diagonal anterior, temos $1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55$, valor este que não pode decompor-se numa soma de quadrados.

Passei ao anterior $1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 = 5^2 + 3^2$, pelo que pensei nos casos pares e nos casos ímpares. Além disso, comecei a olhar para as expressões $8^2 + 5^2$ e $5^2 + 3^2$.

As bases são números de Fibonacci.

Qual a diagonal imediatamente anterior?

$$1 + 5 + 6 + 1 = 13 = 3^2 + 2^2$$

Tudo funciona como previsto!

$$1 + 3 + 1 = 5 = 2^2 + 1^2$$

E diagonais com mais elementos?

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 \binom{12-k}{k} &= \binom{12}{0} + \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \binom{9}{3} + \binom{8}{4} + \binom{7}{5} + \binom{6}{6} \\ &= 1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1 = 233 = 13^2 + 8^2 \end{aligned}$$

Então, o valor da soma é um termo da sucessão de Fibonacci, mas esses termos aparecem alternadamente. Contrariamente às bases que aparecem pela ordem habitual.

Quanto às diagonais que só têm um 1, há algo de interessante:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1^2 \\ 1 + 4 + 3 = 8 = 3^2 - 1^2 \\ 1 + 6 + 10 + 4 = 21 = 5^2 - 2^2 \\ 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55 = 8^2 - 3^2 \\ \binom{11}{0} + \binom{10}{1} + \binom{9}{2} + \binom{8}{3} + \binom{7}{4} + \binom{6}{5} = 144 = 13^2 - 5^2 = F_7^2 - F_5^2 \end{array} \right.$$

Então, parece que $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1-k}{k} = F_{n+2}^2 - F_n^2$. No caso anterior, teremos $\sum_{k=0}^n \binom{2n-k}{k} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

Note-se que a outra representação do Triângulo de Pascal não é adequada à presente situação.

Nesta altura, convenci-me que o caso par devia ser tratado separado do caso ímpar, embora não imaginasse se isso seria verdade ou não.

Mas, resolvi deixar em paz as probabilidades e só olhava para o Triângulo de Pascal e para as "diagonais".

Se somarmos os elementos das tais diagonais, temos a seguinte sucessão

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

Ou seja, a sucessão de Fibonacci. Já há muitos anos que conheço a sucessão de Fibonacci, mas não tenho ideia de ter interpretado os seus termos como somas de elementos do triângulo de Pascal. Até porque não é costume apresentar o Triângulo de Pascal com o anterior.

Resolvida a questão do caso em que o jogo termina, quando sair três vezes a mesma face, pensei no caso em que o jogo só termina, quando sair quatro vezes a mesma face.

A minha primeira ideia foi: será que obtemos a sucessão de Tribonacci?

De qualquer modo, antes de passarmos à sucessão de Tribonacci, vamos fazer uma demonstração.

Consideremos a sucessão que dá a somas das "diagonais" do triângulo de Pascal:

$$\text{Sejam } D_0 = \binom{0}{0} = 1, D_1 = \binom{1}{0} = 1, D_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2, D_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3$$

Estamos a obter os termos da sucessão de Fibonacci, embora com uma pequena nuance: os índices diferem de uma unidade.

Vejamos que $D_{n+2} = D_{n+1} + D_n$.

Exercício 580 Mostre que $D_{2n+2} = D_{2n+1} + D_{2n}$ e que $D_{2n+3} = D_{2n+2} + D_{2n+1}$, para todo o número inteiro não negativo. A sucessão $(D_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é aquela que foi definida anteriormente.

Resolução

Vamos resolver este exercício de forma intuitiva, aplicando o método de indução.

Para $n = 0$, temos $D_2 = D_1 + D_0$ e que $D_3 = D_2 + D_1$, o que é verdadeiro, porque $D_0 = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, $D_3 = 3$.

Hipótese de indução: $\begin{cases} D_{2n+2} = D_{2n+1} + D_{2n} \\ D_{2n+3} = D_{2n+2} + D_{2n+1} \end{cases}$

Tese: $\begin{cases} D_{2n+4} = D_{2n+3} + D_{2n+2} \\ D_{2n+5} = D_{2n+4} + D_{2n+3} \end{cases}$

Ora,

$$\begin{aligned} D_{2n+4} &= \binom{2n+4}{0} + \binom{2n+3}{1} + \binom{2n+2}{2} + \cdots + \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+2}{n+2} \\ &= 1 + \binom{2n+2}{0} + \binom{2n+2}{1} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{n+2}{n} + \binom{n+2}{n+1} + 1 \\ &= \binom{2n+3}{0} + \binom{2n+2}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{n+2}{n+1} \\ &\quad + \binom{2n+2}{0} + \binom{2n+1}{1} + \cdots + \binom{n+2}{n} + \binom{n}{n} \\ &= D_{2n+3} + D_{2n+2} \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} D_{2n+5} &= \binom{2n+5}{0} + \binom{2n+4}{1} + \binom{2n+3}{2} + \cdots + \binom{n+4}{n+1} + \binom{n+3}{n+2} \\ &= 1 + \binom{2n+3}{0} + \binom{2n+3}{1} + \binom{2n+2}{1} + \binom{2n+2}{2} + \cdots \\ &\quad + \binom{n+3}{n} + \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+2}{n+2} \\ &= \binom{2n+4}{0} + \binom{2n+3}{1} + \binom{2n+2}{2} + \cdots + \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+2}{n+2} \\ &\quad + \binom{2n+3}{0} + \binom{2n+2}{1} + \cdots + \binom{n+3}{n} + \binom{n+2}{n+1} \\ &= D_{2n+4} + D_{2n+3} \end{aligned}$$

Então, está demonstrada a Tese, pelo que as igualdades são válidas para todos os números inteiros não negativos.

A demonstração da Tese pode ser feita utilizando somatórios, o que torna a demonstração mais "rigorosa", por causa das reticências utilizadas na demonstração intuitiva.

Só que a demonstração fica um pouco mais maçadora.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 D_{2n+4} &= \sum_{k=0}^{n+2} \binom{2n+4-k}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{2n+4-k}{k} + 1 \\
 &= 1 + \sum_{k=0}^n \binom{2n+4-k-1}{k+1} + 1 = 1 + \sum_{k=0}^n \binom{2n+3-k}{k+1} + 1 \\
 &= 1 + \sum_{k=0}^n \left[\binom{2n+2-k}{k+1} + \binom{2n+2-k}{k} \right] + 1 \\
 &= \binom{2n+3}{0} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+2-k}{k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+2-k}{k} + \binom{n+1}{n+1} \\
 &= \binom{2n+3}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{2n+2-k+1}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2-k}{k} \\
 &= \binom{2n+3}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{2n+3-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2-k}{k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+3-k}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2-k}{k} \\
 &= D_{2n+3} + D_{2n+2}
 \end{aligned}$$

Note-se que $D_0 = 1 = F_1$, $D_1 = 1 = F_2$, $D_2 = 2 = F_3, \dots$

Logo, podemos concluir que $D_n = F_{n+1}$, para todo o número inteiro não negativo.

Exemplo 581 Consideremos um jogo que consiste em atirar consecutivamente uma moeda ao ar e verificar se sai cara ou coroa. Cada jogador termina a sua participação, quando sair a mesma face da moeda, quatro vezes consecutivas. Ganha quem tiver lançado mais vezes a moeda ao ar. Qual a distribuição de probabilidade?

Resolução

Seja X o número de lançamentos da moeda, até que termine o jogo. Vamos chamar A e B às faces da moeda.

É claro que $X \geq 4$. Seja $p_n = p(X = n)$, a probabilidade do jogo terminar após n lançamentos.

O caso mais fácil é aquele em que $n = 4$, tendo-se $p_4 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^3}$, correspondente aos casos $AAAA$ e $BBBB$.

Daqui em diante, só vamos contar os casos terminados em $AAAA$ e multiplicamos o resultado por 2.

Para $X = 5$, há um único caso terminado em $AAAA$. Trata-se do caso $BAAAA$. Logo, há dois casos, pelo que $p_5 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^4}$.

Para que X seja 6, tem de haver dois lançamentos anteriores aos quatro últimos, sendo que o segundo tem de ser diferente dos quatro últimos.

Então, vamos ter $YBAAAA$, onde Y pode ser A ou B . Logo, temos quatro casos no total, sendo $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ a probabilidade de cada caso.

Então, $p_6 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^4} = \frac{2}{2^5}$.

Se a nossa intuição não nos enganar, vamos ter $p_7 = p(X = 7) = \frac{1+1+2}{2^6}$.

Calculemos p_7 :

Pensemos nas primeiras três letras YZB , porque as quatro últimas são $AAAA$.

Decomponhamos 3 em parcelas: $3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 0 + 3$.

O caso $3 = 1 + 1 + 1$ corresponde a $BABAAAA$.

O caso $3 = 1 + 2 = 2 + 1$ corresponde a duas possibilidades: $ABBAAAA$ e $AABAAAA$.

O caso $3 = 0 + 3$, corresponde a $BBBAAAA$.

Logo, temos 4 maneiras acabadas em $AAAA$ e outras 4 maneiras terminadas em $BBBB$.

Então, $p_7 = p(X = 7) = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{4}{2^6}$. A nossa intuição funcionou bem.

Calculemos p_8 :

Temos de decompor 4 em parcelas (de 1 a 3). Ora, $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 3 = 2 + 2$

$1 + 1 + 1 + 1$ corresponde a 1 caso: $ABAB$, seguindo-se $AAAA$.

$1 + 1 + 2$ corresponde a 3 casos: $BABB$, $BAAB$ e $BBAB$, seguindo-se $AAAA$, em qualquer deles.

$1 + 3$ corresponde a 2 casos: $ABBB$ e $AAAB$, seguindo-se $AAAA$.

$2 + 2$ corresponde a 1 caso: $AABB$, seguindo-se $AAAA$.

Então, vamos ter 14 casos (já contando os que terminam em $BBBB$).

Então, $p_8 = p(X = 8) = 14 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{2^7} = \frac{1+2+4}{2^7}$. E parece que tudo está a funcionar lindamente!

É altura de pensarmos na sucessão T_n cujos três primeiros termos são 1, 1, 2 e em que cada termo (depois destes) é a soma dos três termos anteriores. Ou seja,

$$\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_2 = 1 \\ T_3 = 2 \\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \end{cases}$$

A esta sucessão é costume chamar sucessão de Tribonacci. E podemos generalizar para sucessão de Polibonacci, nos casos em que temos mais parcelas (quatro ou mais).

Assim, teremos sucessões de Tetrabonacci, de Pentabonacci, Hexabonacci, etc...

Cálculo de p_9 :

Decomposição de 5 numa soma de parcelas:

$$\begin{cases} 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 & 1 \text{ caso} \\ 5 = 1 + 1 + 1 + 2 & 4 \text{ casos} \\ 5 = 1 + 1 + 3 & 3 \text{ casos} \\ 5 = 1 + 2 + 2 & 3 \text{ casos} \\ 5 = 2 + 3 & 2 \text{ casos} \end{cases}$$

Então, o número total de casos é $2 \times 13 = 26$.

Logo, $p_9 = p(X = 9) = 26 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{13}{2^8}$.

Note-se que $T_6 = T_5 + T_4 + T_3 = 7 + 4 + 2 = 13$

Vejamos um caso mais difícil, calculando p_{33} .

Se $X = 33$, então temos 29 posições "livres", pelo que vamos decompor 29 em parcelas (de 1 a 3). É claro que não vamos escrever 29 como soma de 29 parcelas, pelo que vamos usar o sinal de multiplicação. Só vamos contar os casos terminados em $AAAA$.

1. 29 parcelas iguais a 1: $29 = 29 \times 1$ Só há 1 caso
2. 28 parcelas iguais a 1: impossível (a outra teria de ser 1)
3. 27 parcelas iguais a 1: $27 \times 1 + 2 = 29$, $\binom{28}{1}$
4. 26 parcelas iguais a 1: $26 \times 1 + 3 = 29$, $\binom{27}{1}$
5. 25 parcelas iguais a 1: $25 \times 1 + 2 \times 2 = 29$ $\binom{27}{2} = 351$
6. 24 parcelas iguais a 1: $24 \times 1 + 2 + 3 = 29$, $\binom{26}{1} \times \binom{25}{1} \times \binom{24}{24} = 650$
7. 23 parcelas iguais a 1:
 - (a) $23 \times 1 + 3 \times 2 = 29$, $\binom{26}{3} = 2600$
 - (b) $23 \times 1 + 2 \times 3 = 29$, $\binom{25}{2} = 300$
8. 22 parcelas iguais a 1: $22 \times 1 + 2 \times 2 + 3 = 29$, $\binom{25}{1} \times \binom{24}{2} \times \binom{22}{22} = 6900$
9. 21 parcelas iguais a 1:
 - (a) $21 \times 1 + 4 \times 2 = 29$, $\binom{25}{4} = 12\,650$
 - (b) $21 \times 1 + 2 + 2 \times 3 = 29$, $\binom{24}{1} \times \binom{23}{2} \times \binom{21}{21} = 6072$
10. 20 parcelas iguais a 1:
 - (a) $20 \times 1 + 3 \times 2 + 3 = 29$, $\binom{24}{1} \times \binom{23}{3} \times \binom{20}{20} = 42\,504$
 - (b) $20 \times 1 + 3 \times 3 = 29$, $\binom{23}{3} = 1771$
11. 19 parcelas iguais a 1:
 - (a) $19 \times 1 + 5 \times 2 = 29$, $\binom{24}{5} = 42\,504$
 - (b) $19 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 = 29$, $\binom{23}{2} \times \binom{21}{2} \times \binom{19}{19} = 53\,130$
12. 18 parcelas iguais a 1:
 - (a) $18 \times 1 + 4 \times 2 + 3 = 29$, $\binom{23}{1} \times \binom{22}{4} = 168\,245$
 - (b) $18 \times 1 + 2 + 3 \times 3 = 29$, $\binom{22}{3} \times \binom{19}{1} = 29\,260$
13. 17 parcelas iguais a 1:
 - (a) $17 \times 1 + 6 \times 2 = 29$, $\binom{23}{6} = 100\,947$
 - (b) $\binom{22}{2} \times \binom{20}{3} = 263\,340$
 - (c) $17 \times 1 + 4 \times 3 = 29$, $\binom{21}{4} = 5985$
14. 16 parcelas iguais a 1:
 - (a) $16 \times 1 + 5 \times 2 + 3 = 29$, $\binom{22}{1} \times \binom{21}{5} = 447\,678$

$$(b) \quad 16 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 29, \quad \binom{21}{2} \times \binom{19}{3} = 203\,490$$

15. 15 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 15 \times 1 + 7 \times 2 = 29, \quad \binom{22}{7} = 170\,544$$

$$(b) \quad 15 \times 1 + 4 \times 2 + 2 \times 3 = 29, \quad \binom{21}{2} \times \binom{19}{4} = 813\,960$$

$$(c) \quad 15 \times 1 + 2 + 4 \times 3 = 29, \quad \binom{20}{1} \times \binom{19}{4} = 77\,520$$

16. 14 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 14 \times 1 + 6 \times 2 + 3 = 29, \quad \binom{21}{1} \times \binom{20}{6} = 813\,960$$

$$(b) \quad 14 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 = 29, \quad \binom{20}{3} \times \binom{17}{3} = 775\,200$$

$$(c) \quad 14 \times 1 + 5 \times 3 = 29, \quad \binom{19}{5} = 11\,628$$

17. 13 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 13 \times 1 + 8 \times 2 = 29, \quad \binom{21}{8} = 203\,490$$

$$(b) \quad 13 \times 1 + 5 \times 2 + 2 \times 3 = 29, \quad \binom{20}{2} \times \binom{18}{3} = 155\,040$$

$$(c) \quad 13 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 3 = 29, \quad \binom{19}{2} \times \binom{17}{4} = 406\,980$$

18. 12 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 12 \times 1 + 7 \times 2 + 3 = 29, \quad \binom{20}{1} \times \binom{19}{7} = 1007\,760$$

$$(b) \quad 12 \times 1 + 4 \times 2 + 3 \times 3 = 29, \quad \binom{19}{3} \times \binom{16}{4} = 1763\,580$$

$$(c) \quad 12 \times 1 + 2 + 5 \times 3 = 29, \quad \binom{18}{1} \times \binom{17}{5} = 111\,384$$

19. 11 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 11 \times 1 + 9 \times 2 = 29, \quad \binom{20}{9} = 167\,960$$

$$(b) \quad 11 \times 1 + 6 \times 2 + 2 \times 3 = 29, \quad \binom{19}{2} \times \binom{17}{6} = 2116\,296$$

$$(c) \quad 11 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 = 29, \quad \binom{18}{3} \times \binom{15}{4} = 1113\,840$$

$$(d) \quad 11 \times 1 + 6 \times 3 = 29, \quad \binom{17}{6} = 12\,376$$

20. 10 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 10 \times 1 + 8 \times 2 + 3 = 29, \quad \binom{19}{1} \times \binom{18}{8} = 831\,402$$

$$(b) \quad 10 \times 1 + 5 \times 2 + 3 \times 3 = 29, \quad \binom{18}{3} \times \binom{15}{5} = 2450\,448$$

$$(c) \quad 10 \times 1 + 2 \times 2 + 5 \times 3 = 29, \quad \binom{17}{2} \times \binom{15}{5} = 408\,408$$

21. 9 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 9 \times 1 + 10 \times 2 = 29, \quad \binom{19}{9} = 92\,378$$

$$(b) \quad 9 \times 1 + 7 \times 2 + 2 \times 3 = 29, \quad \binom{18}{2} \times \binom{16}{7} = 1750\,320$$

$$(c) \quad 9 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 3 = 29, \quad \binom{17}{4} \times \binom{13}{4} = 1701\,700$$

$$(d) \quad 9 \times 1 + 2 + 6 \times 3 = 29, \quad \binom{16}{1} \times \binom{15}{6} = 80\,080$$

22. 8 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 8 \times 1 + 9 \times 2 + 3 = 29, \quad \binom{18}{1} \times \binom{17}{8} = 437\,580$$

$$(b) \quad 8 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 3 = 29, \quad \binom{17}{3} \times \binom{14}{6} = 2042\,040$$

$$(c) \quad 8 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 3 = 29, \quad \binom{16}{3} \times \binom{13}{5} = 720\,720$$

$$(d) \quad 8 \times 1 + 7 \times 3 = 29, \quad \binom{15}{7} = 6435$$

23. 7 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 7 \times 1 + 11 \times 2 = 29, \quad \binom{18}{7} = 31\,824$$

$$(b) \quad 7 \times 1 + 8 \times 2 + 2 \times 3 = 29, \quad \binom{17}{2} \times \binom{15}{7} = 875\,160$$

$$(c) \quad 7 \times 1 + 5 \times 2 + 4 \times 3 = 29, \quad \binom{16}{4} \times \binom{12}{5} = 1441\,440$$

$$(d) \quad 7 \times 1 + 2 \times 2 + 6 \times 3 = 29, \quad \binom{15}{2} \times \binom{13}{6} = 180\,180$$

24. 6 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 6 \times 1 + 10 \times 2 + 3 = 29, \quad \binom{17}{1} \times \binom{16}{6} = 136\,136$$

$$(b) \quad 6 \times 1 + 7 \times 2 + 3 \times 3 = 29, \quad \binom{16}{3} \times \binom{13}{6} = 960\,960$$

$$(c) \quad 6 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 3 = 29, \quad \binom{15}{4} \times \binom{11}{5} = 630\,630$$

$$(d) \quad 6 \times 1 + 2 + 7 \times 3 = 29, \quad \binom{14}{1} \times \binom{13}{6} = 24\,024$$

25. 5 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 5 \times 1 + 12 \times 2 = 29, \quad \binom{17}{5} = 6188$$

$$(b) \quad 5 \times 1 + 9 \times 2 + 2 \times 3 = 29, \quad \binom{16}{2} \times \binom{14}{5} = 240\,240$$

$$(c) \quad 5 \times 1 + 6 \times 2 + 4 \times 3 = 29, \quad \binom{15}{4} \times \binom{11}{5} = 630\,630$$

$$(d) \quad 5 \times 1 + 3 \times 2 + 6 \times 3 = 29, \quad \binom{14}{3} \times \binom{11}{5} = 168\,168$$

$$(e) \quad 5 \times 1 + 8 \times 3 = 29, \quad \binom{13}{5} = 1287$$

26. 4 parcelas iguais a 1:

$$(a) \quad 4 \times 1 + 11 \times 2 + 3 = 29, \quad \binom{16}{1} \times \binom{15}{4} = 21\,840$$

$$(b) \quad 4 \times 1 + 8 \times 2 + 3 \times 3 = 29, \quad \binom{15}{3} \times \binom{12}{4} = 225\,225$$

$$(c) \quad 4 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 = 29, \quad \binom{14}{5} \times \binom{9}{4} = 252\,252$$

$$(d) \quad 4 \times 1 + 2 \times 2 + 7 \times 3 = 29, \quad \binom{13}{2} \times \binom{11}{4} = 25\,740$$

27. 3 parcelas iguais a 1:

- (a) $3 \times 1 + 13 \times 2 = 29$, $\binom{16}{3} = 560$
 (b) $3 \times 1 + 10 \times 2 + 2 \times 3 = 29$, $\binom{15}{2} \times \binom{13}{3} = 30\,030$
 (c) $3 \times 1 + 7 \times 2 + 4 \times 3 = 29$, $\binom{14}{3} \times \binom{11}{4} = 120\,120$
 (d) $3 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 3 = 29$, $\binom{13}{3} \times \binom{10}{4} = 60\,060$
 (e) $3 \times 1 + 2 + 8 \times 3 = 29$, $\binom{12}{1} \times \binom{11}{3} = 1980$

28. 2 parcelas iguais a 1:

- (a) $2 \times 1 + 12 \times 2 + 3 = 29$, $\binom{15}{1} \times \binom{14}{2} = 1365$
 (b) $2 \times 1 + 9 \times 2 + 3 \times 3 = 29$, $\binom{14}{2} \times \binom{12}{3} = 20\,020$
 (c) $2 \times 1 + 6 \times 2 + 5 \times 3 = 29$, $\binom{13}{2} \times \binom{11}{5} = 36\,036$
 (d) $2 \times 1 + 3 \times 2 + 7 \times 3 = 29$, $\binom{12}{2} \times \binom{10}{3} = 7920$
 (e) $2 \times 1 + 9 \times 3 = 29$, $\binom{11}{2} = 55$

29. 1 parcela igual a 1:

- (a) $1 + 14 \times 2 = 29$, $\binom{15}{1} = 15$
 (b) $1 + 11 \times 2 + 2 \times 3 = 29$, $\binom{14}{1} \times \binom{13}{2} = 1092$
 (c) $1 + 8 \times 2 + 4 \times 3 = 29$, $\binom{13}{1} \times \binom{12}{4} = 6435$
 (d) $1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 = 29$, $\binom{12}{1} \times \binom{11}{5} = 5544$
 (e) $1 + 2 \times 2 + 8 \times 3 = 29$, $\binom{11}{1} \times \binom{10}{2} = 495$

30. Nenhuma parcela igual a 1:

- (a) $13 \times 2 + 3 = 29$, $\binom{14}{1} = 14$
 (b) $10 \times 2 + 3 \times 3 = 29$, $\binom{13}{3} = 286$
 (c) $7 \times 2 + 5 \times 3 = 29$, $\binom{12}{5} = 792$
 (d) $4 \times 2 + 7 \times 3 = 29$, $\binom{11}{4} = 330$
 (e) $2 + 9 \times 3 = 29$, $\binom{10}{1} = 10$

Agora, teríamos de somar todos os valores encontrados, depois multiplicar por 2 e multiplicar por $\left(\frac{1}{2}\right)^{37}$, ou se preferirmos, multiplicamos a soma encontrada por $\left(\frac{1}{2}\right)^{36}$.

Exemplo 582 *Suponhamos que queremos decompor 100 numa soma de parcelas, todas elas entre 1 e 3. De quantas maneiras podemos fazer essa decomposição?*

Resolução

Como não podemos usar parcelas maiores que 3, seria uma maravilha que já tivéssemos as decomposições dos números anteriores a 100: 99, 98 e 97.

Às decomposições de 99, basta juntar uma parcela igual a 1, obtendo-se o mesmo número de decomposições (de 100). É claro que não obtivemos todas as decomposições.

Partindo das decomposições de 98, basta juntar uma parcela igual a 2, obtendo-se tantas decomposições de 100, quantas as decomposições de 98. Finalmente, partindo das decomposições de 97, basta juntarmos uma parcela igual a 3.

Então, representando por d_n , o número de decomposições de n , temos que $d_{100} = d_{99} + d_{98} + d_{97}$.

No caso geral, teremos $d_{n+3} = d_{n+2} + d_{n+1} + d_n$, pelo que a sucessão fica definida se conhecermos os primeiros três termos. Mas, já conhecemos esses termos!

Logo, a sucessão fica definida (por recorrência).

Podemos usar matrizes, num processo semelhante ao caso da sucessão de Fibonacci:

$$\begin{bmatrix} d_{n+3} \\ d_{n+2} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Partindo de } \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ obtemos } \begin{bmatrix} d_4 \\ d_3 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Este processo é um desperdício, porque aparecem dois termos repetidos (já conhecidos).

É mais rápido calcularmos A^3

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Agora, temos } A^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } \begin{bmatrix} d_6 \\ d_5 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{E o processo pode repetir-se: } \begin{bmatrix} d_9 \\ d_8 \\ d_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 44 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Então, temos

$$\begin{bmatrix} d_{n+5} \\ d_{n+4} \\ d_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{n+2} \\ d_{n+1} \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_n + 3d_{n+1} + 4d_{n+2} \\ d_n + 2d_{n+1} + 2d_{n+2} \\ d_n + d_{n+1} + d_{n+2} \end{bmatrix}$$

Podemos obter o termo geral da sucessão de Tribonacci, se conhecermos os valores próprios da matriz A , ou se conhecermos as soluções da equação $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

Os valores próprios da matriz A coincidem com as soluções da equação anterior, infelizmente, esses valores são "intragáveis": Eis um dos valores (próprios):

$$\frac{4}{9 \sqrt[3]{\frac{1}{27} \sqrt{11} \sqrt{27} + \frac{19}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} \sqrt{11} \sqrt{27} + \frac{19}{27}} + \frac{19}{27} + \frac{1}{3}$$

Logo, é preferível desistir de tentar obter o termo geral da sucessão.

A axiomática das probabilidades

A Matemática começa por se desenvolver com base na intuição dos seres humanos, nos seus interesses e nas suas necessidades, mas acaba por chegar a uma fase em que é construída com base

em axiomas, os quais podem ser entendidos como os preconceitos dos matemáticos, uma vez que depois de aceites não são discutidos. Os matemáticos apenas se preocupam com os teoremas (as consequências dos axiomas) e com a coerência de toda construção.

Os axiomas também chegaram às Probabilidades (pelas mãos de Kolmogorov).

Seja Ω um conjunto não vazio. Para cada subconjunto X , de Ω , existe um número real, chamado probabilidade de X e que se denota por $p(X)$, que satisfaz os seguintes três axiomas:

A1) $p(X) \geq 0, \forall X \in \mathcal{P}(\Omega)$

A2) $p(\Omega) = 1$

A3) Se A e B são dois subconjuntos de Ω e são disjuntos, então temos $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

O símbolo $\mathcal{P}(\Omega)$ significa o conjunto de todos os subconjuntos de Ω .

Exemplo 583 *Teoremas sobre probabilidades* *Seja Ω , um espaço amostral. Sejam $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$. Então:*

1. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
2. $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$
3. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
4. $p(\emptyset) = 0$
5. Se $A \subset B$, então $p(A) \leq p(B)$

Demonstração

$$1. A \cup B = A \cup (B \cap \Omega) = A \cup (B \cap (A \cup \overline{A})) = A \cup (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A})$$

Mas, A e $B \cap \overline{A}$ são conjuntos disjuntos. Então,

$$p(A \cup B) = p(A \cup (B \cap \overline{A})) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$$

Mas, $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, tendo-se que $B \cap A$ e $B \cap \overline{A}$ são disjuntos, pois $B \cap A \cap B \cap \overline{A} = \emptyset$.

Logo, $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$, donde se conclui que $p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(B \cap A)$

Então,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

2.

$$\begin{aligned} q &= p(A \cup B \cup C) = p(A \cup (B \cup C)) = p(A) + p(B \cup C) - p(A \cap (B \cup C)) \\ &= p(A) + p(B) + p(C) - p(B \cap C) - p((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= p(A) + p(B) + p(C) - p(B \cap C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) + p(A \cap B \cap C) \\ &= p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$3. \text{ Como } \Omega = A \cup \overline{A}, \text{ com } A \cap \overline{A} = \emptyset, \text{ temos que } 1 = p(\Omega) = p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A})$$

$$\text{Então, } p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

$$4. p(\emptyset) = p(\overline{\Omega}) = 1 - p(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

5. Se $A \subset B$, então $B = A \cup (B \cap \overline{A})$, tendo-se que A e $B \cap \overline{A}$ são conjuntos disjuntos.

Então, $p(B) = p(A \cup (B \cap \overline{A})) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$.

Mas, $p(B \cap \overline{A}) \geq 0$, pelo que $p(B) \geq p(A)$, ou seja, $p(A) \leq p(B)$.

Exemplo 584 *A distribuição normal A altura dos 1210 alunos duma escola segue a lei normal. O valor médio das alturas é 170 cm, enquanto que o desvio padrão é 5 cm. Escolhe-se um aluno ao acaso. Determine:*

1. A probabilidade da altura desse aluno estar entre 175 cm e 180 cm.
2. A probabilidade da altura desse aluno ser superior a 180 cm.

Resolução

1. Sejam μ e σ o valor médio e o desvio padrão duma variável aleatória X que segue a distribuição normal. Então:

A probabilidade de termos $\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma$ é 0,6826894921 (aproximadamente) enquanto que a probabilidade de termos $\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$ é 0,9544997361. A diferença entre os dois valores anteriores é 0,271810244.

Então, a probabilidade de termos $\mu + \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma$ é metade do valor anterior, ou seja, 0,135905122. Podemos chegar ao valor anterior, na Calculadora Casio, escrevendo $R(1) - R(2)$, ou $Q(2) - Q(1)$, ou $\frac{1}{2} - Q(1) - R(2)$.

$Q(1)$ representa $p(\mu \leq X \leq \mu + \sigma)$ e $R(2)$ representa $p(X \geq \mu + 2\sigma)$.

Dum modo geral, se $a \geq 0$, então $Q(a) = p(\mu \leq X \leq \mu + a\sigma)$ e $R(a) = p(X \geq \mu + a\sigma)$.

Existe uma terceira função, $P(a)$, que nos dá $p(X \leq \mu - a\sigma)$.

Nalguns modelos, podemos introduzir os valores inicial e final, o valor médio e o desvio padrão, tendo-se a resposta imediata.

2. A probabilidade de ser $\mu \leq X \leq \mu + 2\sigma$ é metade de 0,9544997361, ou seja, 0,4772498681.

Então, a probabilidade de termos $X \geq \mu + 2\sigma$ é $0,5 - 0,4772498681$, ou seja, 0,0227501319.

Os valores apresentados podem ser obtidos através duma calculadora, introduzindo os intervalos pretendidos e lendo o resultado.

Podem ser obtidos, através do integral da função $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (que é a função que nos dá a distribuição normal de valor médio 0 e desvio padrão 1).

Assim, no primeiro caso, temos $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,1359051219$, enquanto que, no segundo caso, temos $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_2^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,02275013194$, valores que são ligeiramente diferentes dos que foram apresentados anteriormente, por questões de arredondamento.

É claro que todos os valores apresentados são aproximados e podem aparecer na calculadora com menos algarismos. É evidente que na calculadora não podemos usar $+\infty$, sendo este símbolo substituído por um número razoavelmente grande (neste caso, basta usar o valor 7).

Resolução na Casio fx 9860: STAT, DIST, NORM, Ncd, ...

Exemplo 585 *Urnas 1* Considere uma urna com 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. Da urna, extraímos três bolas, simultaneamente e ao acaso.

1. Calcule a probabilidade dos três números extraídos serem ímpares.
1. Calcule a probabilidade da soma dos três números extraídos ser ímpar.
2. Calcule a probabilidade da soma dos três números extraídos ser 9.

Resolução

1. Um produto é ímpar se e só se todos os factores são ímpares. Então:

Casos favoráveis: $5 \times 4 \times 3$ Casos possíveis: $10 \times 9 \times 8$

Como todos os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade dos três números serem ímpares é $\frac{5 \times 4 \times 3}{10 \times 9 \times 8}$, ou seja, $\frac{1}{12}$.

Há outra resolução alternativa:

Casos favoráveis: $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ Casos possíveis: $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

Como todos os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade dos três números extraídos serem ímpares é $\frac{10}{120}$, ou seja, $\frac{1}{12}$.

2. Para que a soma de três números seja ímpar, temos duas hipóteses: os três números são ímpares ou há um número ímpar e dois números pares. Neste último caso, o número ímpar pode ser o primeiro, ou o segundo, ou o terceiro.

Se ligarmos à ordem dos números:

$$\begin{aligned} p(I, I, I) &= \frac{5 \times 4 \times 3}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{12} \\ p(I, P, P) &= \frac{5 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(P, I, P) &= \frac{5 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{5}{36} \\ p(P, P, I) &= \frac{5 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

Então, a probabilidade da soma dos três números extraídos ser ímpar é $\frac{1}{12} + 3 \times \frac{5}{36} = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Se não ligarmos à ordem dos números:

$$p(\text{sair três números ímpares}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$p(\text{sair um número ímpar e dois pares}) = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \times 10}{120} = \frac{5}{12}$$

Então, a probabilidade da soma dos três números extraídos ser ímpar é $\frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$.

$$3. 9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$$

Observe-se que todas as parcelas têm de diferentes, porque não há bolas com o mesmo número nem reposição.

Se ligarmos à ordem dos números:

Com os números 1, 2 e 6, há 6 casos a considerar. E o mesmo acontece, nas outras duas hipóteses. Então, o número de casos favoráveis é 18. O número de casos possíveis é $10 \times 9 \times 8 = 720$.

Então, a probabilidade da soma dos três números ser 9 é $\frac{18}{720} = \frac{1}{40}$.

Se não ligarmos à ordem, o número de casos favoráveis é 3 e o número de casos possíveis é $\binom{10}{3}$.

Então, a probabilidade da soma dos três números ser 9 é $\frac{3}{120} = \frac{1}{40}$.

Exemplo 586 *Urnas 2* Considere uma urna com 7 bolas idênticas, sendo 3 brancas e 4 pretas. Da urna, são extraídas, simultaneamente e ao acaso, três bolas. Por cada bola branca extraída, colocamos 1 euro no mealheiro do Rui e, por cada bola preta extraída, colocamos 50 centimos no mesmo mealheiro. Seja X , o valor, em euros, colocado no mealheiro. Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

Resolução

A probabilidade de extrair três bolas brancas é $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{1}{35}$

A probabilidade de extrair duas bolas brancas e uma preta é $\frac{\binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{12}{35}$

A probabilidade de extrair uma bola branca e duas pretas é $\frac{\binom{3}{1} \times \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \times 6}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{18}{35}$

A probabilidade de extrair três bolas pretas é $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{4}{35}$

No primeiro caso (três bolas brancas), temos $X = 3$.

No segundo caso, temos $X = 2,50$.

No terceiro caso, temos $X = 2$.

No quarto caso, temos $X = 1,50$.

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória é:

x_i	3	2,50	2	1,50
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Exemplo 587 *Urnas 3* Considere uma urna com 12 bolas idênticas, numeradas de 1 a 12. Da urna, extraímos três bolas, simultaneamente e ao acaso. Qual a probabilidade da soma dos três números saídos ser 8?

Resolução

Seja S a soma dos três números. Ora, $8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$, não havendo outras possibilidades, a não ser a troca da ordem das parcelas. Então:

$$p(S = 8) = \frac{2}{\binom{12}{3}} = \frac{2}{\frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{2 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = \frac{1}{110}$$

Exemplo 588 *Escolhendo 4 vértices dum cubo* Escolhemos quatro vértices dum cubo, ao acaso. Qual a probabilidade de que esses quatro vértices definam um plano?

Resolução

É claro que estamos a considerar que todos os vértices têm a mesma probabilidade de serem escolhidos.

O número de casos possíveis é $\binom{8}{4}$, ou seja, 70.

O número de casos favoráveis é mais complicado:

Começemos por aceitar que o cubo tem uma face assente num plano horizontal (por exemplo, um cubo colocado sobre uma mesa). A esta face chamaremos face inferior e à face paralela chamaremos face superior.

Então, os vértices do cubo dividem-se em dois grupos: os vértices da face superior e os vértices da face inferior.

1º caso: os 4 vértices escolhidos são os 4 vértices da face superior

Neste caso, os 4 vértices escolhidos definem um plano

2º caso: 3 dos 4 vértices escolhidos pertencem à face superior e o outro pertence à face inferior

Neste caso, os 4 vértices escolhidos não definem um plano.

3º caso: 3 dos 4 vértices escolhidos pertencem à face inferior e o outro pertence à face superior

Neste caso, os 4 vértices escolhidos não definem um plano.

4º caso: os 4 vértices escolhidos são os 4 vértices da face inferior

Neste caso, os 4 vértices escolhidos definem um plano

5º caso: 2 dos vértices escolhidos pertencem à face superior e os outros 2 pertencem à face inferior

Se os dois vértices duma face definirem uma diagonal, então é preciso que o mesmo aconteça com os dois pontos da outra face, tendo as duas diagonais de ser paralelas para que definam um plano. Temos, então, dois planos.

Se os dois vértices duma face definirem uma aresta, então há duas hipóteses favoráveis para os outros dois pontos (têm de definir uma aresta paralela à aresta considerada na face superior). Então, temos 8 planos a considerar.

O número de casos favoráveis é, então, $1 + 1 + 2 + 8 = 12$.

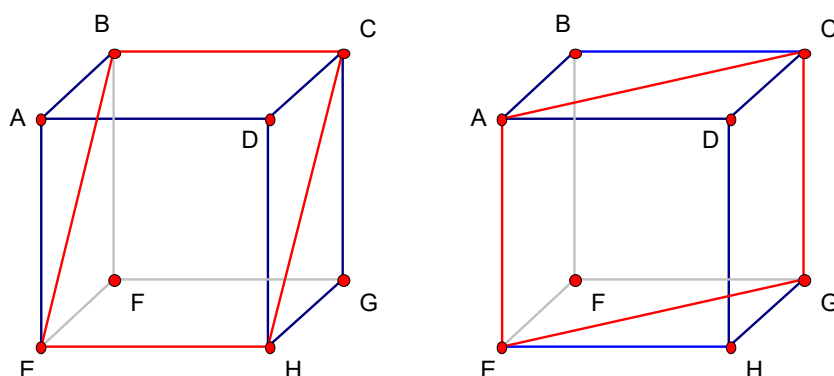
Neste caso, os 4 vértices escolhidos definem um plano

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{12}{70}$, ou seja, $\frac{6}{35}$.

Finalmente, observe-se que existe uma resolução mais rápida, para os casos favoráveis: $6 + 6$.

A primeira parcela corresponde aos planos que contêm as seis faces do cubo e a segunda parcela corresponde aos 6 planos definidos pelos 6 pares de diagonais faciais paralelas. Note que há duas diagonais por face e que as seis faces são agrupadas duas a duas, formando três grupos de duas faces paralelas.

A seguir, apresentamos duas imagens que ilustram o que estivemos a afirmar:



Exemplo 589 Escolhendo um ramo de rosas (*) De um conjunto de flores formado por 5 rosas vermelhas, 4 rosas brancas e 3 rosas amarelas, pretendemos formar um ramo com 4 destas flores escolhidas ao acaso. Calcule a probabilidade de:

1. O ramo ter exactamente 3 rosas vermelhas
2. O ramo ter pelo menos uma rosa vermelha

Resolução

$$1. p = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{7}{1}}{\binom{12}{4}} = \frac{10 \times 7}{\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{70 \times 24}{12 \times 11 \times 10 \times 9} = \frac{14}{99}$$

$$2. p = 1 - \frac{\binom{7}{4}}{\binom{12}{4}} = 1 - \frac{\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = 1 - \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{12 \times 11 \times 10 \times 9} = 1 - \frac{7}{99} = \frac{92}{99}$$

Exemplo 590 Escolhendo peças de fruta (*) Num saco há 16 peças de fruta, 4 laranjas, 4 pêras, 4 maçãs e 4 kiwis. Tiram-se duas peças ao acaso. Qual a probabilidade de que sejam:

1. da mesma espécie
2. uma laranja e um kiwi

Resolução

$$1. \text{ A probabilidade de escolher 2 laranjas é } \frac{\binom{4}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{6}{\frac{16 \times 15}{2}} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

Como há 4 espécies de fruta com 4 peças, a probabilidade de escolher duas peças da mesma espécie é $4 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$.

2. Nesta situação, podemos ter uma laranja e depois um kiwi ou a ordem inversa, pelo que a probabilidade será dada por $2 \times \frac{4 \times 4}{16 \times 15} = \frac{2}{15}$.

Exemplo 591 *Duas obras de Saramago (*) Num conjunto de 8 livros encontram-se duas obras de Saramago. Ao acaso, forma-se um pacote com 5 desses livros. Qual a probabilidade dessas duas obras estarem incluídas no pacote?*

Resolução

Queremos que o pacote contenha as duas obras e mais três dos outros 6 livros. Então,

$$p = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{6}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{1 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}}{\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{6 \times 5 \times 4}{8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{14}$$

Exemplo 592 *Com os algarismos 5, 4, 3, 2 e 1 formam-se números de 4 algarismos todos diferentes. Qual a probabilidade de esses números serem pares? (*)*

Resolução

Há 24 números de quatro algarismos (diferentes) terminados em 2 e 24 números terminados em 4. $4 \times 3 \times 2 = 24$

Há 120 números de quatro algarismos. Então, a probabilidade pretendida é $\frac{48}{120}$, ou seja, $\frac{2}{5}$.

Outro processo: Como temos 5 algarismos para ocupar o lugar do algarismo das unidades, mas só 2 é que são favoráveis, a probabilidade pretendida é $\frac{2}{5}$.

Exemplo 593 *Uma banda musical Uma banda musical é constituída por 14 jovens de 3 nacionalidades diferentes: 6 portugueses, 5 cabo-verdianos e 3 angolanos. Forma-se ao acaso um grupo de 6 jovens. Qual a probabilidade de ter 3 portugueses, 2 cabo-verdianos e 1 angolano?*

Resolução

Número de casos favoráveis:

$$\binom{6}{3} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 3 = 20 \times 10 \times 3 = 600$$

Número de casos possíveis:

$$\binom{14}{6} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 13 \times 11 \times 3 = 3003$$

Probabilidade pretendida:

$$p = \frac{600}{3003} = \frac{200}{1001}$$

Exemplo 594 *Um jogo de dados (*) Lançam-se cinco dados. Para ganharmos tem de sair o número 5 nalgum dos dados, mas não pode sair o 6 em nenhum. Qual é a probabilidade de ganhar?*

Resolução

Número de casos possíveis: $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 7776$

Número de casos em que não sai 6: $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$

Número de casos em que não sai 6, nem 5: $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$

Número de casos números em que sai 5 e não sai 6: $3125 - 1024 = 2101$

Então, a probabilidade de ganhar é $\frac{2101}{7776} = 0,2702$.

A probabilidade de ganhar o jogo é praticamente igual a 27%.

Exemplo 595 *O Problema dos aniversários* Suponhamos que estamos numa sala com 20 pessoas. Qual é a probabilidade de não haver duas pessoas a fazer anos no mesmo dia?

Resolução

Vamos assumir que o ano tem 365 dias e que a taxa de nascimentos é constante ao longo do ano, de modo a poder admitir que qualquer dia do ano é igualmente provável para ser o aniversário de uma pessoa.

A 1ª pessoa pode fazer anos em qualquer dia, a 2ª pessoa não pode fazer anos no mesmo dia da primeira, etc..

Casos favoráveis: $365 \times 364 \times \cdots \times 347 \times 346 = \frac{365!}{345!}$

Casos possíveis: 365^{20}

Então, a probabilidade de não haver duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é

$$\frac{365 \times 364 \times \cdots \times 347 \times 346}{365^{20}} = \frac{\frac{365!}{345!}}{365^{20}} \approx 0,588\,561\,616\,4$$

Podemos calcular a probabilidade para diversos números de pessoas:

N	$p(N)$	N	$p(N)$	N	$p(N)$
1	1	11	0,858 858 621 7	21	0,556 311 664 8
2	0,997 260 274	12	0,832 975 211 2	22	0,524 304 692 3
3	0,991 795 834 1	13	0,805 589 724 8	23	0,492 702 765 7
4	0,983 644 087 5	14	0,776 897 488	24	0,461 655 742 1
5	0,972 864 426 3	15	0,747 098 680 2	25	0,431 300 296
6	0,959 537 516 4	16	0,716 395 994 7	26	0,401 759 179 9
7	0,943 764 296 9	17	0,684 992 334 7	27	0,373 140 717 7
8	0,925 664 707 6	18	0,653 088 582 1	28	0,345 538 527 7
9	0,905 376 166 1	19	0,620 881 474	29	0,319 031 462 5
10	0,883 051 822 3	20	0,588 561 616 4	30	0,293 683 757 3

Vemos então que bastam 23 pessoas para que a probabilidade de haver duas pessoas a festejar o aniversário no mesmo dia seja superior a 50%. O resultado é surpreendentemente baixo. Para 30 pessoas, a probabilidade já é superior a 70%.

Refira-se que a partir de 40 pessoas, o crescimento da probabilidade de haver duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é muito lento, tendo-se para 300 pessoas, o valor de 99,8732339%.

Exemplo 596 *O Problema dos chapéus (*)* Numa festa, há 100 pessoas e cada uma põe o respectivo chapéu numa caixa. À saída, um empregado entrega a cada pessoa, um chapéu, escolhido ao acaso.

1. Qual a probabilidade de uma certa pessoa receber o próprio chapéu?
2. Qual a probabilidade de que, pelo menos, uma pessoa receba o chapéu correcto?

Resolução

1. Qualquer pessoa recebe um chapéu, pelo que a probabilidade de receber o seu próprio chapéu é de $\frac{1}{100}$.

Outro processo consiste em pensar na 1ª pessoa a receber um chapéu, sendo que a probabilidade de receber o seu próprio chapéu é de $\frac{1}{100}$. Para a segunda pessoa receber o chapéu correcto, é preciso que o seu chapéu não seja entregue à primeira pessoa, pelo que a probabilidade pedida é de $\frac{99}{100} \times \frac{1}{99} = \frac{1}{100}$, ou seja, a probabilidade não se alterou, relativamente à primeira pessoa.

Para a terceira pessoa receber o chapéu correcto, é preciso que o seu chapéu não seja entregue às duas primeiras pessoas, pelo que a probabilidade pedida é de $\frac{99}{100} \times \frac{98}{99} \times \frac{1}{98} = \frac{1}{100}$. E assim sucessivamente, pelo que a probabilidade duma certa pessoa receber o seu chapéu é de 1%.

2. Esta questão é mais complicada do que a anterior.

Comecemos por supor que temos duas pessoas, em vez de 100. Sejam P_1 e P_2 as duas pessoas, seja A_1 o acontecimento P_1 recebe o chapéu correcto e seja A_2 o acontecimento P_2 recebe o chapéu correcto.

Ora, $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2)$, pelo que $p(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1 = 1 - \frac{1}{2}$. Para 3 pessoas, teremos de modo análogo:

$$\begin{aligned} q &= p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_1 \cap A_2) - p(A_1 \cap A_3) - p(A_2 \cap A_3) + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \end{aligned}$$

Para 4 pessoas:

$$\begin{aligned} p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \\ p(A_1 \cap A_2) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}; \quad p(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{12}; \quad p(A_1 \cap A_4) = \frac{1}{12}; \\ p(A_2 \cap A_3) &= \frac{1}{12}; \quad p(A_2 \cap A_4) = \frac{1}{12}; \quad p(A_3 \cap A_4) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

A soma das seis probabilidades anteriores é $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{1}{2!}$.

$$\begin{aligned} p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}; \quad p(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}; \\ p(A_1 \cap A_3 \cap A_4) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}; \quad p(A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A soma das quatro probabilidades anteriores é $4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{1}{3!}$.

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4!}$$

Então,

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

Para 100 pessoas, teremos:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{100}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{99!} - \frac{1}{100!} = \sum_{k=1}^{100} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \approx 1 - \frac{1}{e}$$

Note-se que o valor da probabilidade varia com o número de pessoas (N), mas, a partir de 7 pessoas essa variação é muito pequena, quase parecendo que $p(N)$ é constante, a partir do 12º termo:

N	$p(N)$	N	$p(N)$	N	$p(N)$
1	1	6	0,631944444	11	0,632120561
2	0,5	7	0,632142857	12	0,632120559
3	0,666666667	8	0,632118056	13	0,632120559
4	0,625	9	0,632120811	14	0,632120559
5	0,633333333	10	0,632120536	15	0,632120559

Por curiosidade, apresentamos os resultados com mais casas decimais, para 16 e 20 pessoas.

16...0,632120558828555, 20...0,632120558828558

O último valor é o mesmo que é indicado pelo computador para $1 - \frac{1}{e}$, com 15 dígitos.

Observe-se que $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{50}}{50!} + \dots$, pelo que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{50!} + \dots$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{50!} - \frac{1}{51!} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \dots + \frac{1}{49!} - \frac{1}{50!} + \dots$$

Finalmente, registre-se que a probabilidade de nenhuma pessoa receber o seu próprio chapéu é de, aproximadamente, $\frac{1}{e}$.

Exemplo 597 *A secretária e os envelopes (*) Uma secretária muito desarrumada tinha 5 cartas para meter em 5 envelopes, mas caiu tudo ao chão e ela meteu as cartas nos envelopes sem tomar atenção aos nomes. Uma das cartas era para o Senhor Silva.*

1. Qual a probabilidade de ele receber a carta que lhe era dirigida?
2. Qual é a probabilidade de, pelo menos, uma pessoa receber a carta que lhe era destinada?

Resolução

1. A probabilidade do Senhor Silva receber a carta correcta é $\frac{1}{5}$.
2. $\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{19}{30} \approx 0,633333333$

Exemplo 598 *Troca de lembranças numa festa de Natal Dez professores estão a jantar num restaurante, alguns dias antes do Natal. Combinaram que cada um compraria uma pequena prenda de valor não superior a 5 Euros, prendas essas que seriam sorteadas no fim do jantar. Qual a probabilidade de nenhum dos professores receber a própria prenda?*

Resolução

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} = \frac{16\,481}{44\,800} \approx 0,367\,879\,464\,3$$

Observe-se que $\frac{1}{e} \approx 0,367\,879\,441\,2$.

Exemplo 599 *Um encontro de Professores (*) Quatro professores de Matemática decidiram encontrar-se no Grande Hotel das Termas. Acontece que se esqueceram de especificar o nome das termas. Considerando que há 4 hotéis com o mesmo nome em quatro termas distintas, qual a probabilidade dos quatro professores escolherem termas diferentes?*

Resolução

$$p = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = \frac{3}{32}$$

Exemplo 600 *Concurso de Televisão (*)* Num concurso televisivo um concorrente ganha um prémio, consoante as cores das bolas que retira de uma urna, na qual estão 3 bolas vermelhas, duas brancas e 1 azul. Ele pode tirar três bolas da urna. Se as três bolas retiradas forem distintas ganha um andar. Se forem duas iguais e uma distinta ganha um automóvel. Se forem três iguais não ganha nada. Qual a probabilidade de

1. ganhar um andar
2. ganhar um automóvel
3. não ganhar nada.
4. Suponha que o concorrente pode, no início do jogo, escolher se quer repor as bolas que saíram ou não. O que é mais vantajoso para ele?

Resolução

$$1. \frac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3 \times 2 \times 1}{\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{3 \times 2 \times 1}{20} = \frac{3}{10}$$

$$2. \frac{\binom{3}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{2}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3 \times 3 + 1 \times 4}{20} = \frac{13}{20}$$

$$3. \frac{\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{20}$$

4. Suponhamos que há reposição das bolas retiradas.

$$p(A, B, V) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{36}; \quad 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

Então, a probabilidade de ganhar o andar é muito menor (era $\frac{9}{30}$ e, agora, é $\frac{5}{30}$).

$$p(A, A, A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

$$p(B, B, B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} = \frac{8}{216}$$

$$p(V, V, V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \frac{27}{216}$$

A probabilidade de não ganhar nada é $\frac{36}{216}$, ou seja, $\frac{1}{6}$, pelo que esta probabilidade aumentou.

A probabilidade de ganhar o automóvel é $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. Esta probabilidade é maior do que a anterior.

À primeira vista, é melhor não repor as bolas.

Um método de decidir qual é a melhor opção consiste em calcular o valor médio do prémio:

Suponhamos que o andar vale 100000 Euros e que o automóvel vale 15000 Euros.

Então, o valor médio do prémio, no primeiro caso, é

$$\frac{3}{10} \times 100000 + \frac{13}{20} \times 15000 = 39\,750$$

E, no segundo caso, é

$$\frac{1}{6} \times 100000 + \frac{2}{3} \times 15000 \approx 26667$$

Então, mais vale não repor as bolas retiradas.

Exemplo 601 *O adivinho (*)* Dois amigos fazem uma experiência para ver se "conseguem" fazer transmissão de pensamentos. Põem numa urna quatro bolas vermelhas e quatro pretas. Um deles retira as bolas da urna, uma a uma, sem as repor. De cada vez que tira uma bola vê a cor mas não a comunica ao parceiro, pedindo-lhe que adivinhe a cor da bola. Qual a probabilidade do parceiro (que sabe qual a composição da urna) adivinhar a cor de, exactamente, seis das 8 bolas?

Resolução

Se conhecermos a ordem em que saem as bolas vermelhas, então ficamos a saber a ordem em que saem as bolas pretas. O número de casos possíveis é $\binom{8}{4} \times \binom{4}{4}$, ou seja, 70.

Vamos supor que o adivinho dá 8 respostas ao acaso, indicando 4 vezes a palavra vermelha e 4 vezes a palavra preta, não optando por outra estratégia.

Para acertar em 6 bolas, o adivinho tem de falhar a cor de duas. Essas duas bolas não podem ser da mesma cor, pois se acertar em 4 bolas duma cor, tem de acertar em todas. Então, ele tem de falhar numa bola preta e numa vermelha.

Os casos favoráveis são: $\binom{4}{3} \times 4 \times 1 = 16$

$\binom{4}{3} \times 4$ é o número de casos favoráveis para acertar nas 3 bolas pretas e falhar uma bola vermelha (que ele diz ser preta). Nas restantes só há um caso favorável, pois restam 3 bolas vermelhas e uma preta para adivinhar e o adivinho aposta em quatro vermelhas).

Então, a probabilidade do adivinho acertar na cor de, exactamente, seis das 8 bolas é $\frac{16}{70} = \frac{8}{35}$.

Exemplo 602 *O Jogo do Bridge (*)* Num jogo de Bridge, distribuem-se as 52 cartas por 4 jogadores, recebendo cada jogador 13 cartas. Qual a probabilidade de, numa determinada jogada, sair um ás a cada jogador?

Resolução

Casos favoráveis: $\binom{48}{12} \times 4 \times \binom{36}{12} \times 3 \times \binom{24}{12} \times 2 \times \binom{12}{12} \times 1$

Casos possíveis: $\binom{52}{13} \times \binom{39}{13} \times \binom{26}{13} \times \binom{13}{13}$

Então, a probabilidade de, sair um ás a cada jogador é $\frac{2197}{20825} = 0,1054981993$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{48!}{36! \times 12!} \times \frac{36!}{24! \times 12!} \times \frac{24!}{12! \times 12!} \times 24}{\frac{52!}{39! \times 13!} \times \frac{39!}{26! \times 13!} \times \frac{26!}{13! \times 13!}} &= \frac{\frac{48! \times 24}{12! \times 12! \times 12! \times 12!}}{\frac{52!}{13! \times 13! \times 13! \times 13!}} = \frac{(13!)^4}{(12!)^4} \times \frac{48! \times 24}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48!} \\ &= 13^4 \times \frac{1}{13 \times 17 \times 25 \times 49} \\ &= \frac{13^3}{17 \times 25 \times 49} = \frac{2197}{20825} \approx 0,1055 \end{aligned}$$

Exemplo 603 *O Pescador (*)* Um pescador apanhou 10 peixes, dos quais 2 tinham um tamanho inferior ao permitido pela lei. Depois, foi abordado por um fiscal que resolveu inspeccionar dois deles, escolhendo-os, aleatoriamente entre, os dez peixes apanhados. Qual a probabilidade do pescador ser mandado em paz?

Resolução

Casos favoráveis (ao pescador): $\binom{8}{2}$

Casos possíveis: $\binom{10}{2}$

Então, a probabilidade do pescador ser mandado em paz é $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{8 \times 7}{2}}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{28}{45}$.

Outra maneira: $p = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$

Exemplo 604 *Três médicos (*)* Imagine uma localidade onde há três médicos, Dr. António, Dr. Bernardo e Dr. Carlos, todos igualmente do agrado dos residentes. Num determinado dia de inverno seis residentes chamaram um médico, escolhendo o nome ao acaso. Qual a probabilidade de o Dr. António receber 3 chamadas, o Dr. Bernardo receber duas chamadas e o Dr. Carlos receber uma?

Resolução

Casos favoráveis: $\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 1 = 20 \times 3 = 60$

Casos possíveis: $3^6 = 729$

Então, a probabilidade pedida é $\frac{60}{729} = \frac{20}{243}$

Exemplo 605 *Três bilhetes de cinema (*)* A professora de História resolveu levar os seus 15 alunos a ver um filme. Como o cinema tem filas de precisamente 15 cadeiras, comprou uma fila inteira e distribuiu os bilhetes ao acaso pelos alunos. A Ana, a Bela e a Carla são muito amigas e gostavam de ficar as três juntas e numa das pontas da fila. Qual é a probabilidade de isso acontecer?

Resolução

Fazer um esquema ajuda muitas vezes a visualizar melhor o que se passa.

As três amigas querem ficar nos lugares 1, 2 e 3 ou 13, 14 e 15. Existem pelo menos quatro processos de resolver o problema.

1º Processo

Vamos pensar apenas nos três bilhetes destinados às três amigas, não nos interessando a ordem como elas ocuparão depois esses três lugares.

O espaço de resultados é o conjunto dos ternos não ordenados. Por exemplo, um dos seus elementos é o terno $\{5, 7, 15\}$, que corresponde às três amigas receberem os bilhetes 5, 7 e 15 embora não interesse o lugar exacto em que cada uma delas se vai sentar.

Os casos possíveis são as diferentes maneiras de elas receberem os 3 bilhetes de um conjunto de 15, ou seja, todos os ternos não ordenados formados a partir do conjunto de 15 bilhetes.

Casos Possíveis: $\binom{15}{3}$ Casos favoráveis: 2 Então, a probabilidade de ficarem juntas, numa ponta, é

$$\frac{2}{\binom{15}{3}} = \frac{2}{\frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{2}{5 \times 7 \times 13} = \frac{2}{455}$$

2º Processo

Vamos pensar nos três bilhetes destinados às três amigas, mas interessando-nos agora a ordem como elas ocuparão depois esses três lugares. Continuamos a ignorar os outros 12 bilhetes.

O espaço de resultados é o conjunto dos ternos ordenados. Por exemplo, um dos seus elementos é o terno (5, 7, 15), ou seja, a Ana fica no lugar 5, a Bela no 7 e a Carla no 15.

Os casos possíveis são portanto as diferentes maneiras de elas receberem 3 bilhetes de um conjunto de 15, mas em que a ordem por que recebem os bilhetes é importante.

Casos Possíveis: $15 \times 14 \times 13$ Casos favoráveis: $2 \times 3!$

Então, a probabilidade de ficarem juntas, numa ponta, é

$$\frac{2 \times 3 \times 2}{15 \times 14 \times 13} = \frac{2}{5 \times 7 \times 13} = \frac{2}{455}$$

3º Processo

Desta vez vamos considerar todas as maneiras como os 15 alunos se podem sentar nos 15 lugares. O espaço de resultados é constituído por todas as permutações dos 15 alunos pelas cadeiras. Os casos possíveis são portanto as permutações de 15.

Se as três amigas ficarem nos lugares 1, 2 e 3, podem permutar entre si, e os outros 12 alunos também. O mesmo se passa se ficarem nos três últimos lugares. Casos Favoráveis: $2 \times 3! \times 12!$

Então, a probabilidade de ficarem juntas, numa ponta, é

$$\frac{2 \times 3! \times 12!}{15!} = \frac{2 \times 3 \times 2 \times 12!}{15 \times 14 \times 13 \times 12!} = \frac{2}{5 \times 7 \times 13} = \frac{2}{455}$$

4º Processo

Vamos calcular a probabilidade pedida admitindo que os bilhetes vão ser entregues um a um às três amigas.

A primeira vai receber o seu bilhete. Dos 15 lugares, há 6 que lhe servem (os três primeiros e os três últimos).

Chegou a vez da segunda. Há 14 bilhetes e a ela só servem os dois lugares que restam na ponta onde a primeira ficou.

Finalmente, a terceira, dos 13 bilhetes restantes, tem de receber o único que sobra na ponta onde estão as amigas.

Então, a probabilidade de ficarem juntas numa ponta é

$$\frac{6}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{13} = \frac{2}{455}$$

Exemplo 606 *Bolbos de narcisos (*) Uma senhora comprou 4 bolbos de narcisos, tendo a florista garantido que havia uma probabilidade de 75% de cada um florescer para a primavera seguinte. Estude a variável que representa o número de narcisos que a senhora irá obter.*

Resolução

O número de bolbos que florescem pode ser igual a 0, 1, 2, 3 ou 4.

$$\begin{aligned}
p(X=0) &= \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} & p(X=3) &= \binom{4}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64} \\
p(X=1) &= \binom{4}{1} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{64} & p(X=4) &= \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256} \\
p(X=2) &= \binom{4}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 6 \times \frac{9}{256} = \frac{27}{128}
\end{aligned}$$

Os resultados anteriores podem ser condensados do seguinte modo:

$$p(X=k) = \binom{4}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{4-k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^k, k=0, 1, 2, 3, 4$$

Convém chamar a atenção que esta distribuição não é simétrica, pois $p(X=0) = \frac{1}{256} \neq \frac{81}{256} = p(X=4)$.

A distribuição seria simétrica, no caso da probabilidade dos bolbos florescerem ser $\frac{1}{2}$.

Nesse caso, teríamos:

$$\begin{aligned}
p(X=0) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} & p(X=3) &= \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
p(X=1) &= \binom{4}{1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} & p(X=4) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \\
p(X=2) &= \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Abreviadamente, vem

$$p(X=k) = \binom{4}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \binom{4}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\binom{4}{k}}{16}, k=0, 1, 2, 3, 4$$

Exemplo 607 *Coelhos pretos e coelhos brancos* Suponha que tem quinze coelhos pretos e cinco coelhos brancos, numa coelheira, e que os deixa sair um a um. Qual a probabilidade de não saírem dois coelhos brancos consecutivamente?

Primeira resolução

É claro que vamos supor que a ordem de saída depende, apenas, do acaso.

Este é um problema interessante e aconselhamos o leitor a resolver casos mais simples, por exemplo, quatro coelhos pretos e dois coelhos brancos.

Mas, voltemos ao nosso exemplo, começando por concentrar a nossa atenção nos cinco coelhos brancos. O número de maneiras diferentes da ordem relativa entre eles é $5!$ (um deles há-de ser o primeiro branco a sair, etc.). Entre os coelhos brancos, têm de ficar quatro coelhos pretos, para que não saiam dois coelhos brancos seguidos. Então, há 15 hipóteses para o coelho preto que sai imediatamente a seguir ao 1º coelho branco, 14 hipóteses para o coelho (preto) que sai imediatamente a seguir ao 2º coelho branco, 13 hipóteses para o coelho que sai imediatamente a seguir ao 3º coelho branco e 12 hipóteses para o coelho que sai imediatamente a seguir ao 4º coelho branco. Agora, temos de fixar os primeiros quatro grupos de dois coelhos (um branco e um preto), para que não haja repetições na contagem. O que nós temos, agora, são 16 lugares para colocar os 4 pares de coelhos formados (ficando um par em cada um dos quatro lugares), 1 coelho branco e 11 coelhos pretos. Uma possibilidade é a seguinte:

	BP		BP			BP	BP				B		
--	----	--	----	--	--	----	----	--	--	--	---	--	--

Então, a probabilidade de não saírem dois coelhos brancos seguidos é

$$\frac{5! \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times \binom{16}{5} \times 11!}{20!} = \frac{5! \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 16! \times 11!}{20! \times 11! \times 5!} \\ = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{7 \times 13}{19 \times 17} = \frac{91}{323}$$

Segunda resolução

Coloca-se os coelhos brancos em 5 de 16 malas, o que pode ser feito de ${}^{16}A_5$ maneiras; agora colocam-se os 15 coelhos pretos em 15 das malas (um em cada mala, deixando o último coelho branco sozinho): $15!$ maneiras.

Então, o número de casos favoráveis é $15! \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12$.

$$\text{Logo, } p = \frac{15! \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{20!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{91}{323}.$$

Terceira resolução

Uma resolução mais fácil é a seguinte: Pretende-se colocar em 16 quadrículas, cinco letras B; isso pode ser feito de $\binom{16}{5}$ maneiras. Depois, acrescenta-se um P à direita de cada um dos primeiros quatro B (mas nas mesmas quadrículas), o que pode ser feito duma única maneira. E, finalmente, acrescentam-se os restantes P (uma única maneira). Uma das possibilidades é a seguinte:

	B		B				B	B					B		
	BP		BP				BP	BP					B		
P	BP	P	BP	P	P	P	BP	BP	P	P	P	P	B	P	P

Então, a probabilidade de não saírem dois coelhos brancos seguidos é

$$\frac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16} = \frac{7 \times 13}{19 \times 17} = \frac{91}{323}$$

Quarta resolução

Consideremos uma fila com os 15 coelhos pretos e suponhamos que não nos interessa a ordem dos coelhos. Então temos uma única maneira de distribuir os coelhos pretos. Os coelhos brancos têm de ser colocados entre dois pretos ou no princípio ou no fim da fila, pelo que o primeiro coelho tem 16 hipóteses, o segundo 15, o terceiro 14, o quarto 13 e o quinto 12. É claro, que o número de maneiras de intercalar os coelhos brancos era $16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12$, se interessasse a ordem, pelo que, não interessando a ordem, aquele número tem de ser dividido por $5!$.

$$\text{Mas, } \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{5!} = \binom{16}{5}, \text{ pelo que a probabilidade pretendida é } \frac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{91}{323}.$$

Repare-se que, ao fim e ao cabo, temos 16 opções (lugares) para escolher 5.

Quinta resolução

Esta resolução (bastante fácil) é análoga à anterior, mas considerando que importa a ordem dos coelhos.

O número de maneiras de colocar os 15 coelhos pretos é $15!$. Para colocar os 5 coelhos brancos, temos $16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12$ maneiras. O número de casos possíveis é $20!$. Então, a probabilidade pretendida é $15! \times \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{20!}$, ou seja, $\frac{91}{323}$.

Sexta resolução

Outra maneira de resolver este problema consiste em determinar quantos coelhos pretos ficam entre cada par de coelhos brancos.

Se temos cinco coelhos brancos, os coelhos pretos podem ser divididos em quatro grupos ou em cinco grupos ou em seis grupos.

Se tivermos quatro grupos (de coelhos pretos), então teremos em primeiro lugar um coelho branco, depois um grupo de coelhos pretos, depois um coelho branco, depois novo grupo de coelhos pretos e assim sucessivamente, terminando num coelho branco.

Se tivermos cinco grupos (de coelhos pretos), temos duas hipóteses: ou começamos por um coelho branco e terminamos num grupo de coelhos pretos, ou começamos por um grupo de coelhos pretos e terminamos num coelho branco. É claro que, por simetria, o número de maneiras é igual nas duas situações, pelo que basta fazer a contagem num dos casos.

Se tivermos seis grupos (de coelhos pretos), temos de começar por um grupo de coelhos pretos, depois um coelho branco e assim por diante, acabando num grupo de coelhos pretos.

O nosso problema consiste em decompor 15 numa soma de 4, 5 ou 6 parcelas inteiras e positivas.

Decomposição de 15 em 4 parcelas:

1	1	1	12	4
1	1	2	11	12
1	1	3	10	12
1	1	4	9	12
1	1	5	8	12
1	1	6	7	12
1	2	2	10	12
1	2	3	9	24
1	2	4	8	24

1	2	5	7	24
1	2	6	6	12
1	3	3	8	12
1	3	4	7	24
1	3	5	6	24
1	4	4	6	12
1	4	5	5	12
2	2	2	9	4
2	2	3	8	12

2	2	4	7	12
2	2	5	6	12
2	3	3	7	12
2	3	4	6	24
2	3	5	5	12
2	4	4	5	12
3	3	3	6	4
3	3	4	5	12
3	4	4	4	4

A primeira linha da primeira tabela significa que há 4 maneiras de decompor 15 como soma de quatro parcelas, sendo uma das parcelas 12 e as outras iguais a 1.

Assim, $15 = 1 + 1 + 1 + 12 = 1 + 1 + 12 + 1 = 1 + 12 + 1 + 1 = 12 + 1 + 1 + 1$.

O número total de hipóteses (para 4 parcelas) é 364.

E analogamente para as restantes linhas.

Decomposição de 15 em 5 parcelas:

1	1	1	1	11	5
1	1	1	2	10	20
1	1	1	3	9	20
1	1	1	4	8	20
1	1	1	5	7	20
1	1	1	6	6	10
1	1	2	2	9	30
1	1	2	3	8	60
1	1	2	4	7	60
1	1	2	5	6	60

1	1	3	3	7	30
1	1	3	4	6	60
1	1	3	5	5	30
1	1	4	4	5	30
1	2	2	2	8	20
1	2	2	3	7	60
1	2	2	4	6	60
1	2	2	5	5	30
1	2	3	3	6	60
1	2	3	4	5	120

1	2	4	4	4	20
1	3	3	3	5	20
1	3	3	4	4	30
2	2	2	2	7	5
2	2	2	3	6	20
2	2	2	4	5	20
2	2	3	3	5	30
2	2	3	4	4	30
2	3	3	3	4	20
3	3	3	3	3	1

O número total de hipóteses (para 5 parcelas) é 1001.

Decomposição de 15 em 6 parcelas:

1	1	1	1	1	10	6
1	1	1	1	2	9	30
1	1	1	1	3	8	30
1	1	1	1	4	7	30
1	1	1	1	5	6	30
1	1	1	2	2	8	60
1	1	1	2	3	7	120
1	1	1	2	4	6	120
1	1	1	2	5	5	60

1	1	1	3	3	6	60
1	1	1	3	4	5	120
1	1	1	4	4	4	20
1	1	2	2	2	7	60
1	1	2	2	3	6	180
1	1	2	2	4	5	180
1	1	2	3	3	5	180
1	1	2	3	4	4	180

1	1	3	3	3	4	60
1	2	2	2	2	6	30
1	2	2	2	3	5	120
1	2	2	2	4	4	60
1	2	2	3	3	4	180
1	2	3	3	3	3	30
2	2	2	2	2	5	6
2	2	2	2	3	4	30
2	2	2	3	3	3	20

O número total de hipóteses (para 6 parcelas) é 2002.

Então, o número de casos favoráveis é $2002 + 2 \times 1001 + 364$, ou seja, 4368.

O número de casos possíveis é $\binom{20}{5}$. Então, a probabilidade é $\frac{4368}{\binom{20}{5}}$, isto é, $\frac{91}{323}$.

Um pequeno comentário final

Este problema parece-me bastante difícil, quando aparece pela primeira vez, mas pode tornar-se bastante fácil, dependendo da estratégia utilizada para a sua resolução.

Há outra maneira de resolver este problema e que tem a ver com os chamados "*Separadores*". O próximo Capítulo é totalmente dedicado a este tema que corresponde à última resolução apresentada (decomposição de um número natural numa soma de um dado número de parcelas).

Exemplo 608 *Coelhos pretos e coelhos brancos* *Suponha que tem m coelhos pretos e n coelhos brancos, numa coelheira, e que os deixa sair um a um. Qual a probabilidade de não saírem dois coelhos brancos consecutivamente?*

Resolução

Se $m < n - 1$, a probabilidade é zero.

Se $m \geq n - 1$, a probabilidade p , de não saírem dois coelhos brancos, é dada por

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{Pm \times A_n^{m+1}}{P(m+n)} = \frac{m! \times (m+1) \times m \times \cdots \times (m-n+2)}{(m+n)!} \\
 &= \frac{m! \times (m+1)!}{(m+n)! \times (m-n+1)!} = \frac{\frac{(m+1)!}{(m-n+1)! \times n!}}{\frac{(m+n)!}{n! \times m!}} \\
 &= \frac{\binom{m+1}{n}}{\binom{m+n}{n}} = \frac{\binom{m+1}{n}}{\binom{m+n}{m}}
 \end{aligned}$$

Note-se que temos m coelhos pretos, pelo que há $m+1$ posições para colocar n coelhos brancos, enquanto que, relativamente aos casos possíveis, temos $m+n$ posições para colocar n coelhos brancos (ou m coelhos pretos).

É claro que raciocinando em termos de combinações, é tudo mais fácil: uma hipótese para os m coelhos pretos, ficando $m + 1$ posições para colocar os n coelhos brancos, pelo que o número de hipóteses é $\binom{m+1}{n}$.

Quanto ao número de casos possíveis, vem $\binom{m+n}{n}$ ou $\binom{m+n}{m}$.

Exemplo 609 *Concurso de Televisão (2)* Um concorrente tem de escolher uma de três portas, ganhando o prémio que estiver por detrás da porta escolhida. Numa das portas está um automóvel, enquanto que nas outras duas estão dois pacotes de rebuçados. O apresentador do Concurso sabe onde está o automóvel e, segundo o regulamento do concurso, depois da escolha da porta feita pelo concorrente, abre uma das outras duas portas, mostrando que aí não está o automóvel e diz ao concorrente que ele pode mudar a sua escolha. Deve o concorrente mudar ou manter a sua aposta? Ou será indiferente?

Resolução

Contrariamente ao que se possa pensar, a probabilidade de o concorrente ganhar, caso não altere a sua aposta, é de $\frac{1}{3}$ e não de $\frac{1}{2}$. O apresentador limitou-se a dizer que, nas duas portas não escolhidas havia, pelo menos, uma vazia e disse qual (o que não é nada pouco). Se o leitor tem muitas dúvidas, imagine que havia 1000 portas e só uma tinha prémio. Se apostarmos na porta nº 1, a probabilidade de ganharmos é de $\frac{1}{1000}$ e de perdermos é de $\frac{1}{1000}$. Então, mais vale apostar nas restantes 999 portas. E se o apresentador nos disser que o prémio não está nas 998 portas que ele vai abrindo, o automóvel está praticamente ganho: basta-nos mudar de opinião e apostar na outra porta.

Exemplo 610 *Ainda o Totoloto* Qual a probabilidade da chave do próximo concurso aparecer por ordem crescente.

Resolução

Como é sabido, os primeiros seis números sorteados são colocados por ordem crescente, pelo que a probabilidade dos sete números estarem por ordem crescente é a probabilidade do maior número da chave ser o último a ser sorteado (o número suplementar). Ora, essa probabilidade é de $\frac{1}{7}$, uma vez que o maior número pode ser o primeiro a sair, ou o segundo, etc..

Exemplo 611 *Num saco (que vamos apelidar de saco 1), temos 10 bolas azuis, 15 bolas brancas e 15 bolas cinzentas. As bolas são indistinguíveis (a não ser pela cor). Retira-se, ao acaso, uma bola do saco 1 e colocamo-la no saco 2, onde inicialmente temos três bolas, uma bola de cada uma das três cores referidas. Depois de colocada a bola retirada do saco 1, retira-se uma bola do saco 2, ao acaso.*

- Qual a probabilidade desta última bola retirada ser azul?
- Qual a probabilidade desta última bola retirada ser branca?
- Qual a probabilidade da bola retirada do saco 2 ser cinzenta?
- Qual a probabilidade de sair duas bolas brancas?
- Qual a probabilidade de sair duas bolas da mesma cor?

- f) Qual a probabilidade da bola retirada do saco 1 ter sido branca, supondo que a segunda bola retirada foi azul?
- g) Qual a probabilidade da bola retirada do saco 1 ter sido branca, supondo que a segunda bola retirada foi branca?

Resolução

- a) Podemos construir o diagrama da árvore, mas podemos responder de imediato. Também podemos considerar duas parcelas em vez de três, se considerarmos que a primeira bola pode ser branca ou não branca.

$$\begin{aligned} p(2^{\text{a}} \text{ bola é azul}) &= p(1^{\text{a}} \text{ azul}, 2^{\text{a}} \text{ azul}) + p(1^{\text{a}} \text{ branca}, 2^{\text{a}} \text{ azul}) + p(1^{\text{a}} \text{ cinzenta}, 2^{\text{a}} \text{ azul}) \\ &= \frac{10}{40} \times \frac{2}{4} + \frac{15}{40} \times \frac{1}{4} + \frac{15}{40} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p(2^{\text{a}} \text{ bola é branca}) &= p(1^{\text{a}} \text{ branca}, 2^{\text{a}} \text{ branca}) + p(1^{\text{a}} \text{ não é branca}, 2^{\text{a}} \text{ branca}) \\ &= \frac{15}{40} \times \frac{2}{4} + \frac{25}{40} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{4} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{32} \end{aligned}$$

- c) É claro que esta terceira probabilidade é $\frac{11}{32}$, mas podemos chegar ao mesmo resultado, calculando $1 - \frac{5}{16} - \frac{11}{32} = \frac{11}{32}$.

d) $p(\text{branca,branca}) = \frac{15}{40} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{16}$

e) $p(\text{azul,azul}) = \frac{10}{40} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$ $p(\text{cinzenta,cinzenta}) = \frac{15}{40} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{16}$

Logo, a probabilidade de saírem duas bolas da mesma cor é $\frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}$, ou seja, $\frac{1}{2}$.

- f) A probabilidade condicionada pedida é a probabilidade da intersecção (1^a bola branca, segunda bola azul) a dividir pela probabilidade da segunda bola ser azul, ou seja, é $\frac{\frac{15}{40} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{10}$.

- g) A probabilidade pedida é a probabilidade das duas bolas serem brancas a dividir pela probabilidade da segunda bola ser branca, ou seja, $\frac{\frac{15}{40} \times \frac{2}{4}}{\frac{11}{32}} = \frac{6}{11}$

Exercício 612 Numa urna, temos cinco bolas azuis, numeradas de 1 a 5, e seis bolas vermelhas, numeradas de 6 a 11, todas elas indistinguíveis a não ser pela cor. Retira-se duas bolas da urna, ao acaso, consecutivamente e sem reposição. Determine:

1. A probabilidade da segunda bola ser azul
2. A probabilidade da segunda bola ser vermelha
3. A probabilidade da segunda bola ter um número par
4. A probabilidade da segunda bola ter um número ímpar
5. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola foi azul

6. A probabilidade da segunda bola ser azul, supondo que a primeira bola teve um número par
7. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola foi vermelha
8. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola tinha um número par
9. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola tinha um número ímpar
10. A probabilidade da primeira bola ter um número ímpar, supondo que a segunda bola foi azul
11. A probabilidade da primeira bola ter um número ímpar, supondo que a segunda bola foi azul e tem um número par
12. A probabilidade da segunda bola ser azul e ter um número par, supondo que a primeira bola tem número par
13. A probabilidade da primeira bola ser azul, supondo que a segunda bola foi azul

Resolução

1. $p(\text{azul, azul}) + p(\text{vermelha, azul}) = \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{20+30}{110} = \frac{5}{11}$
2. É claro que a probabilidade pedida é $1 - \frac{6}{11}$. No entanto, esta pergunta pode ser colocada, sem antes ter sido colocada a pergunta anterior. Então, vamos resolver a questão, como se não tivéssemos resolvido a pergunta anterior.

$$p(\text{azul, vermelha}) + p(\text{vermelha, vermelha}) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{60}{110} = \frac{6}{11}$$
3. $p(\text{par, par}) + p(\text{ímpar, par}) = \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{20+30}{110} = \frac{5}{11}$
4. $1 - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}$ ou $p(\text{par, ímpar}) + p(\text{ímpar, ímpar}) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{6}{11}$
5. Queremos encontrar a probabilidade da primeira bola ter sido par, supondo que a segunda bola foi azul.
6. Consideremos os acontecimentos $\begin{cases} A: \text{a primeira bola tem número par} \\ B: \text{a segunda bola é azul} \\ C: \text{a segunda bola tem número par} \end{cases}$.

Então, $p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$. Ora, $p(\text{par, azul})$ é a soma de $p(1^{\text{a}} \text{ par e azul}, 2^{\text{a}} \text{ azul})$ com $p(1^{\text{a}} \text{ par e vermelha}, 2^{\text{a}} \text{ azul})$.

$$\text{Logo, } p(A \cap B) = \frac{2}{11} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{23}{110}, \text{ pelo que } p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{23}{110}}{\frac{5}{11}} = \frac{23}{50}.$$

$$7. p(B | A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{23}{110}}{\frac{5}{11}} = \frac{23}{50}.$$

Neste exemplo, temos $p(B | A) = p(A | B)$, porque $p(A) = p(B)$.

8. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola foi vermelha

$$\text{Então, } p(A | \overline{B}) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \frac{\frac{5}{11} - \frac{23}{110}}{1 - \frac{5}{11}} = \frac{\frac{50-23}{110}}{\frac{60}{110}} = \frac{9}{20}$$

9. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola tinha um número par

Directamente, temos $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Utilizando a fórmula da probabilidade condicionada, temos

$$p(A | C) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{5}{11} \times \frac{4}{10}}{\frac{5}{11}} = \frac{2}{5}$$

10. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola tinha um número ímpar

Directamente, temos $p = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Pela fórmula da probabilidade condicionada, temos

$$p(A | \overline{C}) = \frac{p(A \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \frac{p(A) - p(A \cap C)}{1 - \frac{5}{11}} = \frac{\frac{5}{11} - \frac{5}{11} \times \frac{4}{10}}{1 - \frac{5}{11}} = \frac{\frac{50-20}{110}}{\frac{6}{11}} = \frac{1}{2}$$

11. A probabilidade da primeira bola ter um número ímpar, supondo que a segunda bola foi azul

$$\text{Então, } p(\overline{A} | B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{5}{11} - \frac{23}{110}}{\frac{5}{11}} = \frac{\frac{50-23}{110}}{\frac{5}{11}} = \frac{27}{50}$$

12. A probabilidade da primeira bola ter um número ímpar, supondo que a segunda bola foi azul e tem um número par

Directamente, temos $p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (se a segunda bola foi par, só há 10 bolas, sendo 6 ímpares e 4 pares).

Se quisermos complicar a resolução:

Com o significado acima introduzido, temos $p(\overline{A} | B \cap C) = \frac{p(\overline{A} \cap B \cap C)}{p(B \cap C)}$. É claro que

podemos considerar $B \cap C = D$, obtendo-se $p(\overline{A} | D) = \frac{p(\overline{A} \cap D)}{p(D)}$, não havendo nenhuma alteração no significado.

Pretendemos saber qual a probabilidade da segunda bola ser azul e ter um número par, ou seja, qual a probabilidade da segunda bola ter o número 2 ou o número 4.

Temos três possibilidades para a primeira bola: tem o nº 2, tem o nº 4, não tem o nº 2 nem o nº 4.

$$\text{Então, } p(D) = \frac{1}{11} \times \frac{1}{10} + \frac{1}{11} \times \frac{1}{10} + \frac{9}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{1+1+18}{110} = \frac{2}{11}$$

$$\text{Logo, } p(\overline{A} | D) = \frac{p(\overline{A} \cap D)}{p(D)} = \frac{p(D) - p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{2}{11} - p(A \cap D)}{\frac{2}{11}}$$

Mas, $p(A \cap D)$ é a probabilidade da primeira bola ser par e a segunda bola ser par e azul. Isso corresponde a duas situações. Situação 1: a primeira bola é par e azul, o mesmo acontecendo

com a segunda bola; Situação 2: a primeira bola é par e vermelha e a segunda bola é par e azul

Situação 1: $\frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{55}$; Situação 2: $\frac{3}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{3}{55}$. Logo, $p(A \cap D) = \frac{1}{55} + \frac{3}{55} = \frac{4}{55}$

Por fim, temos $p(\bar{A} | D) = \frac{\frac{2}{11} - p(A \cap D)}{\frac{2}{11}} = \frac{\frac{2}{11} - \frac{4}{55}}{\frac{2}{11}} = \frac{\frac{10-4}{55}}{\frac{2}{11}} = \frac{6}{55} \times \frac{11}{2} = \frac{3}{5}$

13. A probabilidade da segunda bola ser azul e ter um número par, supondo que a primeira bola tem número par

Com a notação anterior, temos $p(D | A) = \frac{p(D \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{4}{55}}{\frac{5}{11}} = \frac{4}{55} \times \frac{11}{5} = \frac{4}{25}$

14. A probabilidade da primeira bola ser azul, supondo que a segunda bola foi azul

Então, temos $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Ou, $p = \frac{p(\text{azul, azul})}{p(B)} = \frac{\frac{5}{11} \times \frac{4}{10}}{\frac{5}{11}} = \frac{2}{5}$

Exercício 613 Resolva as mesmas questões do exercício anterior, supondo que, na urna, temos sete bolas azuis, numeradas de 1 a 7, e doze bolas vermelhas, numeradas de 8 a 19, todas elas indistinguíveis a não ser pela cor. Retira-se duas bolas da urna, ao acaso, consecutivamente e sem reposição.

1. A probabilidade da segunda bola ser azul

$$(a) p(\text{azul, azul}) + p(\text{vermelha, azul}) = \frac{7}{19} \times \frac{6}{18} + \frac{12}{19} \times \frac{7}{18} = \frac{7}{19}$$

2. A probabilidade da segunda bola ser vermelha

$$(a) 1 - \frac{7}{19} = \frac{12}{19} \text{ ou } p(\text{azul, vermelha}) + p(\text{vermelha, vermelha}) = \frac{7}{19} \times \frac{12}{18} + \frac{12}{19} \times \frac{11}{18} = \frac{12}{19}$$

3. A probabilidade da segunda bola ter um número par

$$(a) p(\text{par, par}) + p(\text{ímpar, par}) = \frac{9}{19} \times \frac{8}{18} + \frac{10}{19} \times \frac{9}{18} = \frac{4}{19} + \frac{5}{19} = \frac{9}{19}$$

4. A probabilidade da segunda bola ter um número ímpar

$$(a) p(\text{par, ímpar}) + p(\text{ímpar, ímpar}) = \frac{9}{19} \times \frac{10}{18} + \frac{10}{19} \times \frac{9}{18} = \frac{5}{19} + \frac{5}{19} = \frac{10}{19} = 1 - \frac{9}{19}$$

5. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola foi azul

$$(a) \text{ Acontecimentos: } \begin{cases} A: \text{ a primeira bola tem número par} \\ B: \text{ a segunda bola é azul} \\ C: \text{ a segunda bola tem número par} \end{cases}$$

$$p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A \cap B)}{\frac{7}{19}}$$

Como calcular $p(A \cap B)$? Se a primeira bola é par, ela pode ser azul ou vermelha. Então, a primeira bola pode ser azul e par ou vermelha e par.

$$p(A \cap B) = \frac{3}{19} \times \frac{6}{18} + \frac{6}{19} \times \frac{7}{18} = \frac{7}{57}. \text{ Então, } p(A | B) = \frac{\frac{7}{57}}{\frac{7}{19}} = \frac{1}{3}$$

6. A probabilidade da segunda bola ser azul, supondo que a primeira bola teve um número par

$$(a) \quad p(1^a \text{ bola ser par}) = \frac{9}{19} \quad p(B | A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{7}{57}}{\frac{9}{19}} = \frac{7}{27}$$

7. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola foi vermelha

$$(a) \quad p(A | \overline{B}) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} = \frac{\frac{9}{19} - \frac{7}{57}}{1 - \frac{7}{19}} = \frac{\frac{20}{57}}{\frac{12}{19}} = \frac{20}{57} \times \frac{19}{12} = \frac{5}{9}$$

8. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola tinha um número par

$$(a) \quad p(A | C) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

9. A probabilidade da primeira bola ter um número par, supondo que a segunda bola tinha um número ímpar

$$(a) \quad p(A | \overline{C}) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

10. A probabilidade da primeira bola ter um número ímpar, supondo que a segunda bola foi azul

$$(a) \quad p(\overline{A} | B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{7}{19} - \frac{7}{57}}{\frac{7}{19}} = \frac{\frac{14}{57}}{\frac{7}{19}} = \frac{2}{3}$$

11. A probabilidade da primeira bola ter um número ímpar, supondo que a segunda bola foi azul e tem um número par

$$(a) \quad p = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

12. A probabilidade da segunda bola ser azul e ter um número par, supondo que a primeira bola tem número par

$$\begin{aligned} p(A \cap B \cap C) &= p(1^a \text{ bola par}, 2^a \text{ bola par e azul}) \\ &= p(1^a \text{ bola par e azul}, 2^a \text{ bola par e azul}) \\ &\quad + p(1^a \text{ bola par e vermelha}, 2^a \text{ bola par e azul}) \\ &= \frac{3}{19} \times \frac{2}{18} + \frac{6}{19} \times \frac{3}{18} = \frac{4}{57} \\ p(B \cap C | A) &= \frac{\frac{4}{57}}{\frac{9}{19}} = \frac{4}{27} \end{aligned}$$

13. A probabilidade da primeira bola ser azul, supondo que a segunda bola foi azul

$$(a) \quad p = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 614 Numa urna, temos $2n$ bolas azuis, numeradas de 1 a $2n$, e $2m + 1$ bolas vermelhas, numeradas de $2n + 1$ a $2n + 2m + 1$, todas elas indistinguíveis a não ser pela cor. Retira-se duas bolas da urna, ao acaso, consecutivamente e sem reposição. Vamos dar a resposta a várias questões análogas às dos dois exemplos anteriores.

1. Calculemos as seguintes probabilidades:

- (a) Probabilidade da 1ª bola ser par: $\frac{n + m}{2n + 2m + 1}$
- (b) Probabilidade da 1ª bola ser ímpar: $\frac{n + m + 1}{2n + 2m + 1} = 1 - \frac{n + m}{2n + 2m + 1}$
- (c) Probabilidade da primeira bola ser azul: $\frac{2n}{2n + 2m + 1}$
- (d) Probabilidade da primeira bola ser vermelha: $\frac{2m + 1}{2n + 2m + 1}$
- (e) Probabilidade da primeira bola ser vermelha e par: $\frac{m}{2n + 2m + 1}$
- (f) Probabilidade da primeira bola ser vermelha e ímpar: $\frac{m + 1}{2n + 2m + 1}$
- (g) Probabilidade da primeira bola ser azul e par: $\frac{n}{2n + 2m + 1}$
- (h) Probabilidade da primeira bola ser azul e ímpar: $\frac{n}{2n + 2m + 1}$

2. Calculemos as probabilidades de acontecimentos um pouco mais complexos:

- (a) Probabilidade das duas bolas terem número par:

$$\frac{n + m}{2n + 2m + 1} \times \frac{n + m - 1}{2n + 2m} = \frac{n + m - 1}{2(2n + 2m + 1)}$$
- (b) Probabilidade das duas bolas terem número ímpar:

$$\frac{n + m + 1}{2n + 2m + 1} \times \frac{n + m}{2n + 2m} = \frac{n + m + 1}{2(2n + 2m + 1)}$$
- (c) Probabilidade da primeira bola ser par e a segunda ser ímpar

$$\frac{n + m}{2n + 2m + 1} \times \frac{n + m + 1}{2n + 2m}$$
- (d) Probabilidade das duas bolas terem um número par e um número ímpar:

$$\frac{n + m}{2n + 2m + 1} \times \frac{n + m + 1}{2n + 2m} + \frac{n + m + 1}{2n + 2m + 1} \times \frac{n + m}{2n + 2m} = \frac{n + m + 1}{2n + 2m + 1}$$
- (e) Probabilidade do produto dos números das duas bolas tiradas da urna, ser um número par

$$1 - \frac{n + m + 1}{2(2n + 2m + 1)} = \frac{4n + 4m + 2 - n - m - 1}{2(2n + 2m + 1)} = \frac{3n + 3m + 1}{2(2n + 2m + 1)}$$

3. Calculemos as probabilidades de outros acontecimentos com maior dificuldade do que os anteriores

- (a) Probabilidade da primeira bola ser azul e a segunda ter um número par

Neste caso, a probabilidade da segunda bola ser par depende da primeira bola (que é azul) ter um número par ou ímpar. Por isso, temos de colocar duas hipóteses: 1ª bola azul e ímpar, 1ª bola azul e par

$$\begin{cases} p(1^a \text{ bola azul e ímpar}, 2^a \text{ bola par}) = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} \\ p(1^a \text{ bola azul e par}, 2^a \text{ bola par}) = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m-1}{2n+2m} \end{cases}$$

Logo,

$$p(1^a \text{ bola azul e } 2^a \text{ bola par}) = \frac{n^2 + nm + n^2 + nm - n}{(2n+2m+1)(2n+2m)} = \frac{2n^2 + 2nm - n}{2(2n+2m+1)(n+m)}$$

- (b) Probabilidade da primeira bola ser vermelha e a segunda ter um número par

$$\begin{cases} p(1^a \text{ bola vermelha e ímpar}, 2^a \text{ bola par}) = \frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} \\ p(1^a \text{ bola vermelha e par}, 2^a \text{ bola par}) = \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{n+m-1}{2n+2m} \end{cases}$$

Logo,
$$\begin{cases} p(1^a \text{ bola vermelha e } 2^a \text{ bola par}) = \frac{mn + m^2 + n + m + mn + m^2 - m}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ = \frac{2m^2 + 2mn + n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{cases}$$

- (c) Probabilidade da primeira bola ser azul e a segunda ter um número ímpar

$$\begin{cases} p(1^a \text{ bola azul e ímpar}, 2^a \text{ bola ímpar}) = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} \\ p(1^a \text{ bola azul e par}, 2^a \text{ bola ímpar}) = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m-1}{2n+2m} \end{cases}$$

Logo,

$$p(1^a \text{ bola azul e } 2^a \text{ bola ímpar}) = \frac{n^2 + nm + n^2 + nm + n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2n^2 + 2nm + n}{2(2n+2m+1)(n+m)}$$

- (d) Probabilidade da primeira bola ser vermelha e a segunda ter um número ímpar

$$\begin{cases} p(1^a \text{ bola vermelha e ímpar}, 2^a \text{ bola ímpar}) = \frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} \\ p(1^a \text{ bola vermelha e par}, 2^a \text{ bola ímpar}) = \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{n+m-1}{2n+2m} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p(1^a \text{ bola vermelha e } 2^a \text{ bola ímpar}) &= \frac{mn + m^2 + n + m + mn + m^2 + m}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ &= \frac{2m^2 + 2mn + 2m + n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{aligned}$$

Se somarmos as quatro probabilidades (destas quatro questões), obtemos 1.

4. Calculemos algumas probabilidades que podem vir a ser necessárias para o cálculo de probabilidades condicionadas.

Antes da resolução, convém começar por representar os acontecimentos por variáveis (letras).

$$\begin{cases} A: \text{a } 1^{\text{a}} \text{ bola é azul} \\ B: \text{a } 1^{\text{a}} \text{ bola é ímpar} \\ C: \text{a } 2^{\text{a}} \text{ bola é azul} \\ D: \text{a } 2^{\text{a}} \text{ bola é ímpar} \end{cases}$$

- (a) $p(A) = \frac{2n}{2n+2m+1}$, $p(B) = \frac{n+m+1}{2n+2m+1}$, $p(\overline{A}) = 1 - \frac{2n}{2n+2m+1} = \frac{2m+1}{2n+2m+1}$
- (b) $p(C) = \frac{2n}{2n+2m+1}$, embora possa parecer que o cálculo não é imediato
- (c) $p(D) = \frac{2n}{2n+2m+1} = \frac{n+m+1}{2n+2m+1}$, embora possa não parecer que o cálculo é imediato
- (d) $p(A \cap B) = \frac{n}{2n+2m+1}$
- (e) $p(A \cap C) = \frac{2n}{2n+2m+1} \times \frac{2n-1}{2n+2m} = \frac{2n^2-n}{(2n+2m+1)(n+m)}$
- (f) $p(C \cap D) = \frac{n}{2n+2m+1}$
- (g) $p(B \cap D) = \frac{n+m+1}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} = \frac{n^2+m^2+2mn+m+n}{2(2n+2m+1)(n+m)}$
- (h)

$$\begin{aligned} p(A \cap D) &= p(1^{\text{a}} \text{ bola azul}, 2^{\text{a}} \text{ bola ímpar}) \\ &= p(1^{\text{a}} \text{ bola azul e ímpar}, 2^{\text{a}} \text{ ímpar}) + p(1^{\text{a}} \text{ bola azul e par}, 2^{\text{a}} \text{ ímpar}) \\ &= \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} + \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m+1}{2n+2m} \\ &= \frac{n^2+nm+n^2+nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2n^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{aligned}$$

5. Cálculo de probabilidades condicionadas

- (a) Probabilidade da segunda bola ser vermelha, supondo que a primeira bola foi azul

$$p(\overline{C} | A) = \frac{2m+1}{2n+2m} = \frac{2m+1}{2(n+m)}$$

- (b) Probabilidade da primeira bola ter sido azul, supondo que a segunda bola foi vermelha

$$\begin{aligned} p(A | \overline{C}) &= \frac{p(A \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \frac{p(A \cap \overline{C})}{1 - p(C)} = \frac{\frac{2n}{2n+2m+1} \times \frac{2m+1}{2n+2m}}{1 - \frac{2n}{2n+2m+1}} = \frac{\frac{n(2m+1)}{(2n+2m+1)(n+m)}}{\frac{2m+1}{2n+2m+1}} \\ &= \frac{n(2m+1)}{(2n+2m+1)(n+m)} \times \frac{2n+2m+1}{2m+1} = \frac{n}{n+m} \end{aligned}$$

Note-se que o cálculo desta probabilidade é imediato, porque é como se estivéssemos a retirar a primeira bola, supondo que lá não temos a bola vermelha que saiu em segundo lugar. Note que $p = \frac{n}{n+m} = \frac{2n}{2n+2m}$.

- (c) Probabilidade da segunda bola ser azul, supondo que a primeira foi vermelha

$$p = \frac{2n}{2n+2m} = \frac{n}{n+m}$$

- (d) Probabilidade da primeira bola ter sido vermelha, supondo que a segunda bola foi azul

$$p = \frac{2m+1}{2n+2m}$$

- (e) Probabilidade da segunda bola ser azul e ímpar, supondo que a primeira bola foi azul e ímpar

$$p(C \cap D \mid A \cap B) = \frac{n-1}{2n+2m}$$

- (f) Probabilidade da segunda bola ser azul, supondo que a primeira bola foi ímpar

$$p(C \mid B) = \frac{p(C \cap B)}{p(B)} = \frac{p(C \cap B)}{\frac{n+m+1}{2n+2m+1}} \quad \text{Mas, para calcularmos } p(C \cap B), \text{ é conveniente decompor } B, \text{ em dois acontecimentos disjuntos.}$$

Então, $B = B_1 \cup B_2$, onde $\begin{cases} B_1: \text{ a } 1^{\text{a}} \text{ bola é ímpar e vermelha} \\ B_2: \text{ a } 1^{\text{a}} \text{ bola é ímpar e azul} \end{cases}$

Logo, $C \cap B = C \cap (B_1 \cup B_2) = (C \cap B_1) \cup (C \cap B_2)$. Logo,

$$\begin{aligned} p(C \mid B) &= \frac{p(C \cap B)}{\frac{n+m+1}{2n+2m+1}} = \frac{p((C \cap B_1) \cup (C \cap B_2))}{\frac{n+m+1}{2n+2m+1}} = \frac{p(B_1 \cap C) + p(B_2 \cap C)}{\frac{n+m+1}{2n+2m+1}} \\ &= \frac{\frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{2n}{2n+2m} + \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2n-1}{2n+2m}}{\frac{n+m+1}{2n+2m+1}} = \frac{\frac{2nm+2n}{2n+2m} + \frac{2n^2-n}{2n+2m}}{n+m+1} \\ &= \frac{2nm+n+2n^2}{2(n+m+1)(n+m)} \end{aligned}$$

- (g) Probabilidade da primeira bola ser azul, supondo que a segunda bola foi par

$$\text{Então, } p(A \mid \overline{D}) = \frac{p(A \cap \overline{D})}{p(\overline{D})}. \text{ Sejam } \begin{cases} A_1: \text{ a } 1^{\text{a}} \text{ bola é azul e par} \\ A_2: \text{ a } 1^{\text{a}} \text{ bola é azul e ímpar} \\ E_1: \text{ a } 2^{\text{a}} \text{ bola é par e vermelha} \\ E_2: \text{ a } 2^{\text{a}} \text{ bola é par e azul} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } A \cap \overline{D} = (A_1 \cup A_2) \cap (E_1 \cup E_2) = (A_1 \cap E_1) \cup (A_1 \cap E_2) \cup (A_2 \cap E_1) \cup (A_2 \cap E_2)$$

$$\begin{cases} p(A_1 \cap E_1) = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2m}{2n+2m} \\ p(A_1 \cap E_2) = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n-1}{2n+2m} \\ p(A_2 \cap E_1) = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2m}{2n+2m} \\ p(A_2 \cap E_2) = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n}{2n+2m} \end{cases}$$

Então, como os denominadores são os mesmos nos quatro casos, temos

$$p(A \cap \overline{D}) = \frac{2nm+n^2-n+2nm+n^2}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2n^2+4nm-n}{2(2n+2m+1)(n+m)}$$

Recordamos que a probabilidade da segunda bola ser par é imediata: $\frac{n+m}{2n+2m+1}$

Por fim, temos

$$\begin{aligned}
 p(A | \overline{D}) &= \frac{p(A \cap \overline{D})}{p(\overline{D})} = \frac{\frac{2n^2 + 4nm - n}{2(2n+2m+1)(n+m)}}{\frac{n+m}{2n+2m+1}} \\
 &= \frac{2n^2 + 4nm - n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \times \frac{2n+2m+1}{n+m} \\
 &= \frac{2n^2 + 4nm - n}{2(n+m)} \times \frac{1}{n+m} = \frac{2n^2 + 4nm - n}{2n^2 + 4mn + 2m^2}
 \end{aligned}$$

Exemplo 615 Numa urna, temos $2n$ bolas azuis, numeradas de 1 a $2n$, e $2m+1$ bolas vermelhas, numeradas de $2n+1$ a $2n+2m+1$, todas elas indistinguíveis a não ser pela cor. Retira-se duas bolas da urna, ao acaso, consecutivamente e sem reposição. Considere os seguintes acontecimentos:

$$\begin{cases} A: \text{a } 1^{\text{a}} \text{ bola é azul} \\ B: \text{a } 1^{\text{a}} \text{ bola é ímpar} \\ C: \text{a } 2^{\text{a}} \text{ bola é azul} \\ D: \text{a } 2^{\text{a}} \text{ bola é ímpar} \end{cases}$$

Este é o exemplo anterior, mas vamos resolver as questões de forma mais organizada.

1. Questões com um único acontecimento

- (a) Calcule $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(D)$
- (b) Calcule $p(\overline{A})$, $p(\overline{B})$, $p(\overline{C})$, $p(\overline{D})$

2. Questões com dois dos acontecimentos, envolvendo uma única bola

- (a) Calcule $p(A \cap B)$, $p(A \cap \overline{B})$, $p(\overline{A} \cap B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$, $p(C \cap D)$, $p(C \cap \overline{D})$, $p(\overline{C} \cap D)$, $p(\overline{C} \cap \overline{D})$
- (b) Calcule $p(A \cup B)$, $p(A \cup \overline{B})$, $p(\overline{A} \cup B)$, $p(\overline{A} \cup \overline{B})$, $p(C \cup D)$, $p(C \cup \overline{D})$, $p(\overline{C} \cup D)$, $p(\overline{C} \cup \overline{D})$

3. Questões com dois dos acontecimentos, envolvendo duas bolas e só cores

- (a) Calcule $p(A \cap C)$, $p(A \cap \overline{C})$, $p(\overline{A} \cap C)$, $p(\overline{A} \cap \overline{C})$
- (b) Calcule $p(A \cup C)$, $p(A \cup \overline{C})$, $p(\overline{A} \cup C)$, $p(\overline{A} \cup \overline{C})$

4. Questões com dois dos acontecimentos, envolvendo duas bolas e só paridade

- (a) Calcule $p(B \cap D)$, $p(B \cap \overline{D})$, $p(\overline{B} \cap D)$, $p(\overline{B} \cap \overline{D})$
- (b) Calcule $p(B \cup D)$, $p(B \cup \overline{D})$, $p(\overline{B} \cup D)$, $p(\overline{B} \cup \overline{D})$

5. Questões com dois dos acontecimentos, envolvendo duas bolas, paridade e cores

- (a) $p(A \cap D)$, $p(A \cap \overline{D})$, $p(\overline{A} \cap D)$, $p(\overline{A} \cap \overline{D})$, $p(B \cap C)$, $p(B \cap \overline{C})$, $p(\overline{B} \cap C)$, $p(\overline{B} \cap \overline{C})$
- (b) $p(A \cup D)$, $p(A \cup \overline{D})$, $p(\overline{A} \cup D)$, $p(\overline{A} \cup \overline{D})$, $p(B \cup C)$, $p(B \cup \overline{C})$, $p(\overline{B} \cup C)$, $p(\overline{B} \cup \overline{C})$

6. Algumas questões com probabilidades condicionadas

- (a) Calcule $p(A | B)$, $p(A | C)$, $p(C | A)$, $p(D | \bar{A})$, $p(\bar{A} | \bar{C})$, $p(A \cap B | C)$, $p(A \cap C | D)$, $p(A \cap \bar{C} | \bar{D})$
- (b) Calcule $p(A \cup B | C)$, $p(A \cup C | B)$, $p(C | A \cup B)$
- (c) Calcule $p(A | A \cup B)$, $p(A | A \cap B)$, $p(A | C \cup D)$, $p(A | C \cap D)$

Resolução

1. Questões com um único acontecimento

- (a) $p(A) = \frac{2n}{2n+2m+1}$ $p(B) = \frac{n+m+1}{2n+2m+1}$ $p(C) = \frac{2n}{2n+2m+1}$ $p(D) = \frac{n+m+1}{2n+2m+1}$
- (b) $\begin{cases} p(\bar{A}) = 1 - \frac{2n}{2n+2m+1} = \frac{2m+1}{2n+1} & p(\bar{B}) = \frac{n+m}{2n+2m+1} \\ p(\bar{C}) = \frac{2m+1}{2n+2m+1} & p(\bar{D}) = \frac{2n}{2n+2m+1} \end{cases}$

2. Questões com dois dos acontecimentos, envolvendo uma única bola

(a) Intersecções

$$\begin{cases} p(A \cap B) = \frac{n}{2n+2m+1} & p(C \cap D) = \frac{n}{2n+2m+1} \\ p(A \cap \bar{B}) = \frac{n}{2n+2m+1} & p(C \cap \bar{D}) = \frac{n}{2n+2m+1} \\ p(\bar{A} \cap B) = \frac{m+1}{2n+2m+1} & p(\bar{C} \cap D) = \frac{m+1}{2n+2m+1} \\ p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{m}{2n+2m+1} & p(\bar{C} \cap \bar{D}) = \frac{m}{2n+2m+1} \end{cases}$$

(b) Reuniões

$$\begin{aligned} \text{i. } & \begin{cases} p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{m}{2n+2m+1} = \frac{2n+m+1}{2n+2m+1} \\ p(A \cup \bar{B}) = 1 - p(\bar{A} \cap B) = 1 - \frac{m+1}{2n+2m+1} = \frac{2n+m}{2n+2m+1} \\ p(\bar{A} \cup B) = 1 - p(A \cap \bar{B}) = 1 - \frac{n}{2n+2m+1} = \frac{n+2m+1}{2n+2m+1} \\ p(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{n}{2n+2m+1} = \frac{n+2m+1}{2n+2m+1} \end{cases} \\ \text{ii. } & \begin{cases} p(C \cup D) = 1 - p(\bar{C} \cap \bar{D}) = 1 - \frac{m}{2n+2m+1} = \frac{2n+m+1}{2n+2m+1} \\ p(C \cup \bar{D}) = 1 - p(\bar{C} \cap D) = 1 - \frac{m+1}{2n+2m+1} = \frac{2n+m}{2n+2m+1} \\ p(\bar{C} \cup D) = 1 - p(C \cap \bar{D}) = 1 - \frac{n}{2n+2m+1} = \frac{n+2m+1}{2n+2m+1} \\ p(\bar{C} \cup \bar{D}) = 1 - p(C \cap D) = 1 - \frac{n}{2n+2m+1} = \frac{n+2m+1}{2n+2m+1} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Questões com dois dos acontecimentos, envolvendo duas bolas e só cores

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{cases} p(A \cap C) = \frac{2n}{2n+2m+1} \times \frac{2n-1}{2n+2m} = \frac{2n^2-n}{(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(A \cap \bar{C}) = \frac{2n}{2n+2m+1} \times \frac{2m+1}{2n+2m} = \frac{2nm+n}{(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\bar{A} \cap C) = \frac{2m+1}{2n+2m+1} \times \frac{2n}{2n+2m} = \frac{2nm+n}{(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\bar{A} \cap \bar{C}) = \frac{2m+1}{2n+2m+1} \times \frac{2m}{2n+2m} = \frac{2m^2+m}{(2n+2m+1)(n+m)} \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \begin{cases} p(A \cup C) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{C}) = 1 - \frac{2m^2+m}{(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2n^2+4nm+n}{(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(A \cup \bar{C}) = 1 - p(\bar{A} \cap C) = 1 - \frac{2nm+n}{(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2m^2+2mn+m+2n^2}{(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\bar{A} \cup C) = 1 - p(A \cap \bar{C}) = 1 - \frac{2nm+n}{(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2m^2+2mn+m+2n^2}{(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\bar{A} \cup \bar{C}) = 1 - p(A \cap C) = 1 - \frac{2n^2-n}{(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2m^2+4mn+m+2n}{(2n+2m+1)(n+m)} \end{cases} \end{aligned}$$

4. Questões com dois dos acontecimentos, envolvendo duas bolas e só paridade

$$(a) \begin{cases} p(B \cap D) = \frac{n+m+1}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} = \frac{n+m+1}{4n+4m+2} \\ p(B \cap \overline{D}) = \frac{n+m+1}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} = \frac{n+m+1}{4n+4m+2} \\ p(\overline{B} \cap D) = \frac{n+m}{2n+2m+1} \times \frac{n+m+1}{2n+2m} = \frac{n+m+1}{4n+4m+2} \\ p(\overline{B} \cap \overline{D}) = \frac{n+m}{2n+2m+1} \times \frac{n+m-1}{2n+2m} = \frac{m^2+n^2+2mn-m-n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} p(B \cup D) = 1 - p(\overline{B} \cap \overline{D}) = 1 - \frac{m^2+n^2+2mn-m-n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ \quad = \frac{3m^2+6mn+3m+3n^2+3n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(B \cup \overline{D}) = 1 - p(\overline{B} \cap D) = 1 - \frac{n+m+1}{4n+4m+2} = \frac{3n+3m+1}{4n+4m+2} \\ p(\overline{B} \cup D) = 1 - p(B \cap \overline{D}) = 1 - \frac{n+m+1}{4n+4m+2} = \frac{3n+3m+1}{4n+4m+2} \\ p(\overline{B} \cup \overline{D}) = 1 - p(B \cap D) = 1 - \frac{n+m+1}{4n+4m+2} = \frac{3n+3m+1}{4n+4m+2} \end{cases}$$

5. Questões com dois dos acontecimentos, envolvendo duas bolas, paridade e cores

(a) Intersecções

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \begin{cases} p(A \cap D) = p(1^a \text{ azul}, 2^a \text{ ímp}) \\ \quad = p(1^a \text{ azul par}, 2^a \text{ ímp}) + p(1^a \text{ azul ímp}, 2^a \text{ ímp}) \\ \quad = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m+1}{2n+2m} + \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} = \frac{2n^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(A \cap \overline{D}) = p(1^a \text{ azul}, 2^a \text{ par}) \\ \quad = p(1^a \text{ azul par}, 2^a \text{ par}) + p(1^a \text{ azul ímpar}, 2^a \text{ par}) \\ \quad = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m-1}{2n+2m} + \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} = \frac{2n^2+2nm-n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{cases} \\ \text{ii.} \quad & \begin{cases} p(\overline{A} \cap D) = p(1^a \text{ verm}, 2^a \text{ ímp}) \\ \quad = p(1^a \text{ verm par}, 2^a \text{ ímp}) + p(1^a \text{ verm ímp}, 2^a \text{ ímp}) \\ \quad = \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{n+m+1}{2n+2m} + \frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} = \frac{2m^2+2mn+2m+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\overline{A} \cap \overline{D}) = p(1^a \text{ verm}, 2^a \text{ par}) \\ \quad = p(1^a \text{ verm par}, 2^a \text{ par}) + p(1^a \text{ verm ímp}, 2^a \text{ par}) \\ \quad = \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{n+m-1}{2n+2m} + \frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} = \frac{2m^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{cases} \\ \text{iii.} \quad & \begin{cases} p(B \cap C) = p(1^a \text{ ímp}, 2^a \text{ azul}) \\ \quad = p(1^a \text{ ímp azul}, 2^a \text{ azul}) + p(1^a \text{ ímp verm}, 2^a \text{ azul}) \\ \quad = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2n-1}{2n+2m} + \frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{2n}{2n+2m} = \frac{2n^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(B \cap \overline{C}) = p(1^a \text{ ímpar}, 2^a \text{ vermelha}) \\ \quad = p(1^a \text{ ímpar azul}, 2^a \text{ verm}) + p(1^a \text{ ímpar verm}, 2^a \text{ verm}) \\ \quad = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2m+1}{2n+2m} + \frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{2m}{2n+2m} = \frac{2m^2+2nm+2m+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{iv.} \left\{ \begin{array}{l} p(B \cap C) = p(1^a \text{ ímp}, 2^a \text{ azul}) \\ \quad = p(1^a \text{ ímp azul}, 2^a \text{ azul}) + p(1^a \text{ ímp verm}, 2^a \text{ azul}) \\ \quad = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2n-1}{2n+2m} + \frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{2n}{2n+2m} = \frac{2n^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(B \cap \overline{C}) = p(1^a \text{ ímpar}, 2^a \text{ vermelha}) \\ \quad = p(1^a \text{ ímpar azul}, 2^a \text{ verm}) + p(1^a \text{ ímpar verm}, 2^a \text{ verm}) \\ \quad = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2m+1}{2n+2m} + \frac{m+1}{2n+2m+1} \times \frac{2m}{2n+2m} = \frac{2m^2+2mn+2m+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\overline{B} \cap C) = p(1^a \text{ par}, 2^a \text{ azul}) \\ \quad = p(1^a \text{ par azul}, 2^a \text{ azul}) + p(1^a \text{ par verm}, 2^a \text{ azul}) \\ \quad = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2n-1}{2n+2m} + \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{2n}{2n+2m} = \frac{2n^2+2mn-n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\overline{B} \cap \overline{C}) = p(1^a \text{ par}, 2^a \text{ verm}) \\ \quad = p(1^a \text{ par azul}, 2^a \text{ verm}) + p(1^a \text{ par verm}, 2^a \text{ verm}) \\ \quad = \frac{n}{2n+2m+1} \times \frac{2m+1}{2n+2m} + \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{2m}{2n+2m} = \frac{2m^2+2mn+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{array} \right.$$

- (b) A probabilidade da reunião de dois acontecimentos pode ser resolvida de duas maneiras. Uma delas consiste em aplicar a fórmula $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$. A outra é através da probabilidade do acontecimento complementar: $p(X \cup Y) = 1 - p(\overline{X} \cap \overline{Y})$. Neste exemplo, vamos usar a segunda fórmula, uma vez que temos as probabilidades de todas as intersecções de dois acontecimentos que nos interessam.

$$\text{i.} \left\{ \begin{array}{l} p(A \cup D) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{D}) = 1 - \frac{2m^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2m^2+6mn+2m+4n^2+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(A \cup \overline{D}) = 1 - p(\overline{A} \cap D) = 1 - \frac{2m^2+2mn+2m+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2m^2+6mn+4n^2+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\overline{A} \cup D) = 1 - p(A \cap \overline{D}) = 1 - \frac{2n^2+2nm-n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{4m^2+6mn+2m+2n^2+3n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\overline{A} \cup \overline{D}) = 1 - p(A \cap D) = 1 - \frac{2n^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{4m^2+6mn+2m+2n^2+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{array} \right.$$

$$\text{ii.} \left\{ \begin{array}{l} p(B \cup C) = 1 - p(\overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - \frac{2m^2+2mn+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2m^2+6mn+2m+4n^2+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(B \cup \overline{C}) = 1 - p(\overline{B} \cap C) = 1 - \frac{2n^2+2mn-n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{4m^2+6mn+2m+2n^2+3n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\overline{B} \cup C) = 1 - p(B \cap \overline{C}) = 1 - \frac{2m^2+2nm+2m+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2m^2+6mn+4n^2+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(\overline{B} \cup \overline{C}) = 1 - p(B \cap C) = 1 - \frac{2n^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{4m^2+6mn+2m+2n^2+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} \end{array} \right.$$

6. Agora, apresentamos algumas questões com probabilidades condicionadas. Nalgumas questões, podemos aplicar a fórmula ou podemos calcular a probabilidade, interpretando o significado de probabilidade condicionada. Por exemplo, $p(A | B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2n+2m+1}{2n+2m+1}}{\frac{n+m+1}{2n+2m+1}} = \frac{n}{m+n+1}$, mas é mais fácil raciocinar do seguinte modo: a probabilidade da primeira bola ser azul, supondo que ela é ímpar é a razão entre o número de bolas simultaneamente azuis e ímpares e o número de bolas ímpares, ou seja, $p(A | B) = \frac{n}{m+n+1}$.

Neste (longo) exemplo, em particular, estão calculadas as probabilidades das várias intersecções com dois acontecimentos, pelo que muitas das probabilidades condicionadas são fáceis de calcular. Mas podemos colocar questões do género de $p(A \cup C | B)$.

Vejamos alguns exemplos:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{llll} p(A | B) = \frac{n}{m+n+1} & p(B | A) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} & p(C | D) = \frac{n}{m+n+1} & p(D | C) = \frac{n}{2n} \\ p(\overline{A} | B) = \frac{m+1}{m+n+1} & p(B | \overline{A}) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} & p(\overline{C} | D) = \frac{m+1}{m+n+1} & p(D | \overline{C}) = \frac{m+1}{m+n+1} \\ p(C | A) = \frac{2n-1}{2n+2m} & p(A | C) = \frac{2n-1}{2n+2m} & p(\overline{C} | A) = \frac{2m+1}{2n+2m} & p(A | \overline{C}) = \frac{2n}{2n+2m} \\ p(\overline{A} | C) = \frac{2m+1}{2m+2n} & p(C | \overline{A}) = \frac{2n}{2n+2m} & p(\overline{C} | \overline{A}) = \frac{2m}{2n+2m} & p(\overline{A} | \overline{C}) = \frac{m}{n+m} \end{array} \right.$$

Convém referir que, por exemplo, $p(\bar{C} | A) = 1 - p(C | A) = 1 - \frac{2n-1}{2n+2m} = \frac{2n+2m-2n+1}{2n+2m} = \frac{2m+1}{2n+2m}$. Nos casos em que o cálculo é imediato, esta regra não é de grande utilidade, mas será útil, nos casos em que o cálculo é mais complicado.

$$(b) \begin{cases} p(C | B) = \frac{p(C \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2n^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)}}{\frac{n+m+1}{2n+2m+1}} = \frac{2n^2+2nm+n}{2(n+m)(n+m+1)} \\ p(\bar{C} | B) = 1 - \frac{2n^2+2nm+n}{2(n+m)(n+m+1)} = \frac{2m^2+2mn+2m+n}{2(n+m)(n+m+1)} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} p(A | D) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} \\ p(\bar{A} | D) = 1 - p(A | D) \end{cases} \text{ . Agora, basta substituir } p(A \cap D) \text{ e } p(D) \text{ pelos valores que já foram encontrados.}$$

$$(d) \begin{cases} p(A \cup B | D) = \frac{p((A \cup B) \cap D)}{p(D)} = \frac{p((A \cap D) \cup (B \cap D))}{p(D)} = \frac{p(A \cap D) + p(B \cap D) - p(A \cap B \cap D)}{p(D)} \\ p(A \cup B | D) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B} | D) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap D) \end{cases}$$

O segundo processo parece ser mais promissor, principalmente se não tivermos calculado previamente $p(A \cap D)$ e $p(B \cap D)$.

Ora, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap D$ corresponde ao acontecimento "a 1ª bola é vermelha, a 1ª bola é par, a 2ª bola é ímpar". Então, $p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap D) = \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{n+m+1}{2n+2m}$, pelo que vem

$$\begin{aligned} p(A \cup B | D) &= 1 - \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{n+m+1}{2n+2m} \\ &= \frac{4m^2 + 8mn + 4n^2 + 2m + 2n - mn - m^2 - m}{(2n+2m+1)(n+m)} \\ &= \frac{3m^2 + 7mn + 4n^2 + m + 2n}{(2n+2m+1)(n+m)} \end{aligned}$$

$$(e) p(A \cup D | B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{D} | B) = 1 - \frac{p(\bar{A} \cap \bar{D} \cap B)}{p(B)}$$

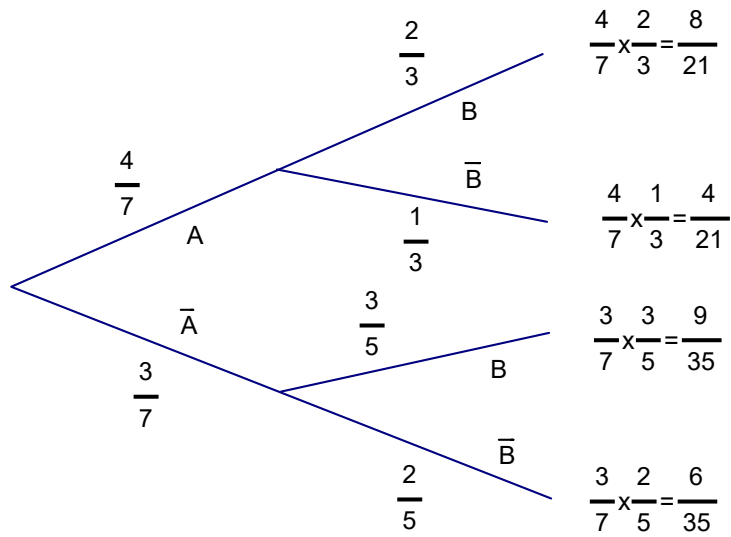
"A 1ª bola é vermelha, a 2ª bola é par e a 1ª é ímpar", ou seja, a primeira bola é ímpar e vermelha e a segunda bola é par". Então, $p(\bar{A} \cap \bar{D} \cap B) = \frac{2m+1}{2n+2m+1} \times \frac{n+m}{2n+2m} = \frac{2m+1}{4n+4m+2}$

$$(f) \begin{aligned} p(A \cup B | C) &= 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B} | C) = 1 - \frac{p(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)}{p(C)} = 1 - \frac{m}{2n+2m+1} \times \frac{2n}{2n+2m} \\ &= \frac{(2n+2m+1)(n+m) - mn}{(2n+2m+1)(n+m)} = \frac{2m^2+3mn+m+2n^2+n}{(2n+2m+1)(n+m)} \\ p(B | \bar{C}) &= \frac{p(B \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} = \frac{\frac{2m^2+2nm+2m+n}{2(2n+2m+1)(n+m)}}{\frac{2m+1}{2n+2m+1}} = \frac{(2m^2+2nm+2m+n)(2n+2m+1)}{2(2n+2m+1)(n+m)(2m+1)} \\ &= \frac{2m^2+2nm+2m+n}{2(n+m)(2m+1)} \end{aligned}$$

$$(g) \begin{cases} p(\bar{B} | C) = \frac{p(\bar{B} \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{2n^2+2mn-n}{2(2n+2m+1)(n+m)}}{\frac{2n}{2n+2m+1}} = \frac{(2n^2+2mn-n)(2n+2m+1)}{2(2n+2m+1)(n+m)2n} = \frac{2n+2m-1}{4(n+m)} \\ p(\bar{B} | \bar{C}) = \frac{p(\bar{B} \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} = \frac{\frac{2m^2+2mn+n}{2(2n+2m+1)(n+m)}}{\frac{2m+1}{2n+2m+1}} = \frac{(2m^2+2mn+n)(2n+2m+1)}{2(2n+2m+1)(n+m)(2m+1)} = \frac{2m^2+2mn+n}{2(n+m)(2m+1)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(A \cup C | B) &= \frac{p((A \cup C) \cap B)}{p(B)} = \frac{p((A \cap B) \cup (C \cap B))}{p(B)} \\ &= \frac{p(A \cap B) + p(C \cap B) - p(A \cap B \cap C)}{p(B)} \\ &= \frac{p(A \cap B) + p(C \cap B) - p(A \cap B \cap C)}{p(B)} \\ &= \frac{\frac{n}{2n+2m+1} + \frac{2n^2+2nm+n}{2(2n+2m+1)(n+m)} - \frac{n(2n-1)}{(2n+2m+1)(2n+2m)}}{\frac{n+m+1}{2n+2m+1}} = \frac{n + \frac{2n^2+2nm+n}{2n+2m} - \frac{n(2n-1)}{2n+2m}}{n+m+1} \\ &= \frac{2n^2+2mn+2n^2+2nm+n-2n^2+n}{2(n+m+1)(n+m)} = \frac{n^2+2mn+n}{(n+m+1)(n+m)} \end{aligned}$$

Exemplo 616 Considere o seguinte diagrama da árvore



Determine $p(A \cap B)$, $p(A \cap \overline{B})$, $p(\overline{A} \cap B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$, $p(B)$, $p(\overline{B})$, $p(B | A)$, $p(B | \overline{A})$, $p(\overline{B} | A)$, $p(\overline{B} | \overline{A})$, $p(A | B)$, $p(A | \overline{B})$, $p(B | A)$, $p(B | \overline{A})$, $p(A \cup B)$, $p(A \cup \overline{B})$, $p(\overline{A} \cup B)$, $p(\overline{A} \cup \overline{B})$, $p(A \cap B | A)$, $p(A \cap B | B)$

Resolução

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{21} & p(A \cap \overline{B}) &= \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21} \\ p(\overline{A} \cap B) &= \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{35} & p(\overline{A} \cap \overline{B}) &= \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = \frac{8}{21} + \frac{9}{35} = \frac{67}{105} \\ p(\overline{B}) = 1 - \frac{67}{105} = \frac{38}{105} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(B | A) &= \frac{2}{3} & p(B | \overline{A}) &= \frac{3}{5} \\ p(\overline{B} | A) &= \frac{1}{3} & p(\overline{B} | \overline{A}) &= \frac{2}{5} \\ p(A | B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{8}{21}}{\frac{67}{105}} = \frac{40}{67} \\ p(A | \overline{B}) &= \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{38}{105}} = \frac{10}{19} \\ p(B | A) &= \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{8}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{3} \\ p(B | \overline{A}) &= \frac{p(B \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \frac{\frac{9}{35}}{\frac{3}{7}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{7} + \frac{67}{105} - \frac{8}{21} = \frac{29}{35} \\
p(A \cup \overline{B}) &= p(A) + p(\overline{B}) - p(A \cap \overline{B}) = \frac{4}{7} + \frac{38}{105} - \frac{4}{21} = \frac{26}{35} \\
p(\overline{A} \cup B) &= 1 - p(A) + p(B) - p(\overline{A} \cap B) = \frac{3}{7} + \frac{67}{105} - \frac{9}{35} = \frac{17}{21} \\
p(\overline{A} \cup \overline{B}) &= 1 - p(A) + p(\overline{B}) - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{7} + \frac{67}{105} - \frac{9}{35} = \frac{17}{21} \\
\begin{cases} p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A}) + p(\overline{B}) - p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{7} + \frac{38}{105} - \frac{6}{35} = \frac{45+38-18}{105} = \frac{65}{105} = \frac{13}{21} \\ p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{8}{21} = \frac{13}{21} \end{cases} \\
p(A \cap B \mid A) &= \frac{p(A \cap B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B \mid A) = \frac{2}{3} \\
p(A \cap B \mid B) &= \frac{p(A \cap B \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A \mid B) = \frac{40}{67}
\end{aligned}$$

Capítulo 29

Separadores e Funções Geradoras

Neste Capítulo vamos ver que questões aparentemente difíceis podem ser resolvidas de maneira fácil. É tudo uma questão de conhecimentos. Depois, as coisas vão tomando o seu lugar e a Matemática fica mais bonita e mais simples. Antes de começarmos, vamos colocar duas questões: Além das permutações habituais, há as chamadas permutações circulares.

Quem conhece Bridge, sabe que o lugar de Norte, na mesa, é irrelevante. O que é preciso é que se saiba qual dos quatro lugares é para o jogador Norte, ficando os outros três lugares para os restantes jogadores; desde que mantenham as mesmas posições relativas, tudo ficará certo. Ou seja, podemos jogar numa sala circular que rode permanentemente, sem que isso levante algum problema, a não ser eventuais dores de cabeça causadas pelo movimento de rotação.

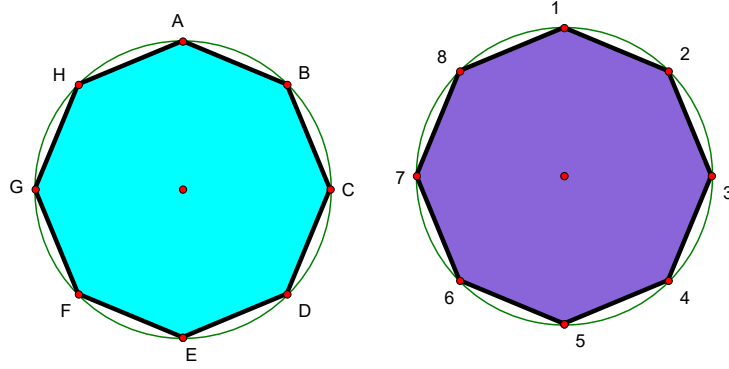
Neste capítulo abordaremos ainda os dois lemas de Kaplansky e as Permutações caóticas ou desarranjos.

Exemplo

De quantas maneiras podemos formar uma roda, com 8 crianças? É claro que, as crianças podem rodar, não alterando a posição relativa. Assim, o lugar da primeira criança é irrelevante, pelo que só interessa os lugares relativos das outras crianças. Então, a resposta é $5! = 120$.

Representando as permutações circulares de n objectos por $P_C(n)$, temos $P_C(n) = (n-1)!$, ou seja, factorial de $n-1$.

A outra questão relacionada com esta, é podermos considerar que, na lista, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, os números 1 e 8 são consecutivos. Basta imaginarmos um octógono regular inscrito numa circunferência e pensarmos em vértices adjacentes:



Na figura anterior, os vértices adjacentes a A são B e H , enquanto os vértices adjacentes ao vértice 1 são os vértices 2 e 8.

Note-se que há muitas situações análogas às anteriores. Por exemplo, os dias 1 e 31 são consecutivos (ou podem ser). Assim, o dia 1 de Fevereiro vem imediatamente a seguir a 31 de Janeiro. Nos dias da semana, acontece o mesmo: sábado e domingo são dias consecutivos, embora o sábado seja o último dia da semana e o domingo seja o primeiro.

29.1 Decomposição em somas

Nesta secção, vamos determinar o número de maneiras de decompor um número natural numa soma de números naturais, definindo ou não, o número de parcelas.

Começamos por recordar que, para todo o número natural n , temos que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$.

Assim, por exemplo, a soma dos primeiros 100 números naturais é $\frac{100 \times 101}{2} = 5050 = \binom{101}{2}$.

Logo, 5050 pode decompor-se numa soma de 100 parcelas todas diferentes.

Feita esta pequena observação, vamos determinar o número de soluções de certas equações, envolvendo números naturais. Trata-se de equações do tipo

$$\sum_{k=1}^N x_k = m$$

em que $m, N, x_k \in \mathbb{N} (k = 1, \dots, N)$.

Resolução

Note-se que só teremos soluções se $m \geq N$.

É claro que o caso $N = 1$ é trivial, pois corresponde a ter $x_1 = m$, equação esta que tem uma única solução. Então, para $N = 1$, temos uma única solução.

Passemos ao caso $N = 2$. Então, queremos saber o número de soluções para a equação

$$x_1 + x_2 = m$$

Se $m = 1$, temos $x_1 + x_2 = 1$, pelo que não há soluções.

Se $m = 2$, temos $x_1 + x_2 = 2$, havendo uma única solução ($x_1 = x_2 = 1$). Ou seja, temos a solução $(1, 1)$.

Se $m = 3$, temos $x_1 + x_2 = 3$, havendo duas soluções: $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

Se $m = 4$, temos $x_1 + x_2 = 4$, havendo três soluções: $(1, 3)$, $(2, 2)$ e $(3, 1)$.

Agora, é óbvio que o número de soluções da equação dada é $m - 1$.

Passemos ao caso $N = 3$:

$$x_1 + x_2 + x_3 = m$$

A equação anterior só tem soluções para $m \geq 3$.

Se $m = 3$, temos $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, havendo a única solução $(1, 1, 1)$.

Se $m = 4$, temos $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, havendo as soluções $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$. Logo, temos 3 soluções.

Podemos verificar que, para $x_3 = 2$, temos uma única solução (correspondente a $(1, 1, 2)$) e que para $x_3 = 1$, temos duas soluções, correspondentes a $(1, 2, 1)$ e $(2, 1, 1)$. Repare-se que, ao fixarmos a variável x_3 , ficamos com o caso anterior (caso de duas parcelas):

$$x_1 + x_2 = z$$

Se $m = 5$, temos $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. Agora, podemos atribuir valores a x_3 :

Se $x_3 = 1$, então temos $x_1 + x_2 = 4$, tendo-se que esta equação tem 3 soluções.

Se $x_3 = 2$, então temos $x_1 + x_2 = 3$, tendo-se que esta equação tem 2 soluções.

Se $x_3 = 3$, então temos $x_1 + x_2 = 2$, tendo-se que esta equação tem 1 solução.

E não há mais soluções, pelo que o número de soluções é 6 ($1 + 2 + 3 = 6$).

Se $m = 6$, concluímos que temos 10 soluções ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$).

Então, no caso geral, a equação $x_1 + x_2 + x_3 = m$, com $m \geq 3$, tem S soluções, com

$$S = \sum_{j=1}^{m-2} j = \frac{(m-2)(m-1)}{2} = \binom{m-1}{2}$$

No quadro seguinte, temos um resumo da situação:

	$x_1 + x_2 + x_3 = m$	
Valor de m	Número de soluções	Valor de $\binom{m-1}{2}$
3	1	$\binom{3-1}{2} = 1$
4	3	$\binom{4-1}{2} = 3$
5	6	$\binom{5-1}{2} = 6$
6	10	$\binom{6-1}{2} = 10$
7	15	$\binom{7-1}{2} = 15$
8	21	$\binom{8-1}{2} = 21$
9	28	$\binom{9-1}{2} = 28$
10	36	$\binom{10-1}{2} = 36$

Talvez seja boa ideia recordar o Triângulo de Pascal:

É claro que já prevemos o que vai acontecer com o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = m$$

Vejamos o triângulo de Pascal, com outra disposição (mais adequada à poupança de espaço/papel):

1												
1	1											
1	2	1										
1	3	3	1									
1	4	6	4	1								
1	5	10	10	5	1							
1	6	15	20	15	6	1						
1	7	21	35	35	21	7	1					
1	8	28	56	70	56	28	8	1				
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Além da poupança de espaço, torna-se mais fácil verificar a seguinte propriedade: a partir da segunda coluna, qualquer elemento é a soma de todos os elementos da coluna que fica imediatamente à sua esquerda e ficam nas linhas anteriores. Assim, por exemplo, $252 = 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126$. Qual a razão deste facto?

É bem sabido que $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. Então,

$$\begin{aligned} \binom{10}{5} &= \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{9}{4} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{4} + \binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} \\ &= \binom{9}{4} + \binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{9}{4} + \binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{6}{4} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} \\ &= \binom{9}{4} + \binom{8}{4} + \binom{7}{4} + \binom{6}{4} + \binom{5}{4} + \binom{4}{4} = \sum_{k=4}^9 \binom{k}{4} \end{aligned}$$

Outro exemplo

Calculemos $\sum_{k=10}^{20} \binom{k}{10}$

Ora, $\sum_{k=10}^{20} \binom{k}{10} = \binom{21}{11} = 352\,716$

Seja $X = \sum_{k=10}^{20} \binom{k}{10}$. Então, calculando cada uma das parcelas, temos

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=10}^{20} \binom{k}{10} \\ &= \binom{10}{10} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10} + \binom{14}{10} + \binom{15}{10} + \binom{16}{10} + \binom{17}{10} + \binom{18}{10} + \binom{19}{10} + \binom{20}{10} \\ &= 1 + 11 + 66 + 286 + 1001 + 3003 + 8008 + 19448 + 43758 + 92378 + 184756 = 352\,716 \end{aligned}$$

No caso geral, teremos $\binom{n+1}{m+1} = \sum_{k=m}^n \binom{k}{m}$, com $n \geq m$.

Demonstração do caso geral (por indução em n)

Seja m um número natural fixo. Para $n = m$, temos $\binom{m+1}{m+1} = 1 = \binom{m}{m} = \sum_{k=m}^m \binom{k}{m}$

Hipótese de indução: Suponhamos que $\binom{n+1}{m+1} = \sum_{k=m}^n \binom{k}{m}$, para certo $n \geq m$

Note-se que a afirmação faz sentido para $n = m$, pois, como já vimos, $\binom{m+1}{m+1} = 1 = \binom{m}{m}$.

Tese: $\binom{n+2}{m+1} = \sum_{k=m}^{n+1} \binom{k}{m}$

Ora, $\binom{n+2}{m+1} = \binom{n+1}{m} + \binom{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m} + \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n+1} \binom{k}{m}$

Está, assim, demonstrada a Tese, o que significa que a propriedade é válida para qualquer número natural n , desde que $n \geq m$.

Esta última igualdade tem a vantagem de incluir o caso $m = 1$

No triângulo acima apresentado, reparemos no número 495, por baixo de 330.

Então,

$$\begin{aligned} 495 &= 165 + 330 = 165 + 120 + 210 = 165 + 120 + 84 + 126 \\ &= 165 + 120 + 84 + 56 + 70 = 165 + 120 + 84 + 56 + 35 + 35 \\ &= 165 + 120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 15 \\ &= 165 + 120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 5 \\ &= 165 + 120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1 \end{aligned}$$

Note-se que o mesmo número 495 pode ser obtido de maneira diferente (considerando-o noutra coluna):

$$495 = 330 + 165 = 330 + 120 + 45 = 330 + 120 + 36 + 9 = 330 + 120 + 36 + 8 + 1$$

Repare-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{12}{12} = 495 = \binom{12}{8} \\ \binom{12}{12} = \binom{11}{3} + \binom{10}{3} + \binom{9}{3} + \binom{8}{3} + \binom{7}{3} + \binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 495 \\ \binom{12}{8} = \binom{11}{7} + \binom{10}{7} + \binom{9}{7} + \binom{8}{7} + \binom{7}{7} = 495 \end{array} \right.$$

Observação

O número de soluções da equação $\sum_{k=1}^N x_k = m$ (com todas as parcelas números naturais arbitrários) é

$$\binom{m-1}{N-1}, \text{ com } m \geq N$$

Exercício 617 *Suponhamos que temos cinco bolas vermelhas (idênticas) e dez bolas brancas (também idênticas). De quantas maneiras diferentes podemos colocar as quinze bolas, lado a lado, numa fila, de modo que não fiquem duas bolas vermelhas seguidas.*

Resolução

A ideia da resolução consiste em colocar pelo menos uma bola branca entre duas bolas vermelhas, podendo haver (ou não haver) alguma bola branca, no início e no fim da fila.

Vejamos o seguinte esquema:

$$I \quad V \quad x_1 \quad V \quad x_2 \quad V \quad x_3 \quad V \quad x_4 \quad V \quad F$$

No esquema anterior, V representa uma bola vermelha, I é o número de bolas brancas, no início da fila, F é o número de bolas brancas, no fim da fila, enquanto x_1, x_2, x_3, x_4 são os números de bolas brancas, entre duas bolas vermelhas. Assim, por exemplo, x_3 é o número de bolas brancas existentes entre a terceira e a quarta bolas vermelhas (a contar da esquerda para a direita).

Então, devemos ter $I + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + F = 10$. É claro que $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ e $I, F \in \mathbb{N}_0$. Ou seja, I, F têm uma natureza ligeiramente diferente das restantes variáveis. A situação corrige-se muito facilmente, fazendo $I + 1 = x_0$ e $F + 1 = x_5$. Então, teremos $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{N}$, com $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$.

Então, o número de variáveis é 6, enquanto o valor da soma é 12. Logo, o valor pretendido é $\binom{11}{5}$, ou seja, 462.

Logo, há 462 maneiras diferentes de colocar as quinze bolas dadas, da maneira indicada.

Exercício 618 *Suponhamos que temos cinco bolas vermelhas, sete bolas azuis e três bolas brancas. De quantas maneiras diferentes podemos colocar as quinze bolas, lado a lado, numa fila, de modo que não fiquem duas bolas vermelhas seguidas.*

Resolução

Pelo exercício anterior, temos 462 maneiras. Mas, as dez bolas não vermelhas não são da mesma cor. Então, podemos substituir sete bolas brancas (das dez do exercício anterior) por sete bolas azuis. Isso pode ser feito de $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$ maneiras diferentes.

Logo o número total de maneiras diferentes de colocar as quinze bolas é de $462 \times 120 = 55\,440$.

Observação

Como vimos no penúltimo exercício, o caso em que as variáveis podem assumir o valor zero, resolve-se (facilmente), recorrendo a novas variáveis que resultam das anteriores, somando-se uma unidade a cada uma das variáveis.

Assim, se tivermos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, com $x_k \in \mathbb{N}_0$, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, basta fazermos $y_k = 1 + x_k$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), obendo-se a seguinte equação

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 25$$

Note-se que $x_k = y_k - 1$, pelo que a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ se transforma em

$$y_1 - 1 + y_2 - 1 + y_3 - 1 + y_4 - 1 + y_5 - 1 = 20$$

Com esta mudança de variáveis, temos sempre uma situação que envolve apenas números inteiros positivos (números naturais). É claro que só substituímos as variáveis que podem assumir o valor zero!

Caso geral

Suponhamos que temos m bolas brancas e n bolas vermelhas e que pretendemos formar uma fila com as $m + n$ bolas, de modo a não termos duas bolas vermelhas em posições consecutivas. De quantas maneiras podemos colocar as bolas, de modo a obtermos situações essencialmente distintas?

Resolução

Como temos n bolas vermelhas, precisamos, no mínimo, de $n - 1$ bolas brancas. Logo, $m \geq n - 1$.

Neste caso, teremos $n - 1 + 2 = n + 1$ separadores, em que o primeiro e o último podem ser nulos. Com o significado dos exemplos anteriores, teremos

$$I + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + F = m$$

Fazendo $x_0 = I + 1$ e $x_n = F + 1$, obtemos

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = m + 2$$

Neste último caso, todas as parcelas do somatório são números naturais. Como temos $n + 1$ parcelas e a soma é $m + 2$, o número de soluções é dado por

$$\binom{m+1}{n}$$

Assim, para $m = 4$ e $n = 5$, temos $\binom{5}{5}$ maneiras de colocar as 9 bolas, para que não fiquem duas bolas vermelhas consecutivamente.

Para $m = 6$ e $n = 5$, temos $\binom{7}{5} = 21$ maneiras.

Para $m = 10$ e $n = 5$, temos $\binom{11}{5} = 462$ maneiras (exemplo anteriormente resolvido).

Exemplo 619 *Suponhamos que temos 8 bolas vermelhas, 7 bolas brancas e 6 bolas amarelas. De quantas maneiras podemos colocar as 21 bolas numa fila, de modo a que não tenhamos duas bolas vermelhas em posições consecutivas?*

Resolução

Suponhamos que tínhamos 8 bolas vermelhas e 13 bolas cinzentas. Então, a resposta seria $\binom{14}{8} = 3003$.

Agora, temos de substituir as 13 bolas cinzentas por 7 bolas brancas e 6 bolas amarelas. Isso corresponde a $\binom{13}{6} = 1716$.

Logo, o número pretendido é de $\binom{14}{8}\binom{13}{6} = 3003 \times 1716 = 5\,153\,148$.

Exemplo 620 *Suponhamos que temos um grupo de 16 pessoas, sendo 6 homens e 10 mulheres. Queremos formar uma fila, para uma fotografia, de modo que não fiquem dois homens em posições consecutivas. De quantas maneiras isso pode ser feito?*

Resolução

Sabendo que a resposta para o caso de bolas de duas cores é $\binom{11}{6} = 462$, temos que a resposta a esta questão é $\binom{11}{6} \times 6! \times 10! = 1207\,084\,032\,000$.

Note-se que $\frac{\binom{11}{6} \times 6! \times 10!}{16!} = \frac{3}{52}$, o que significa que a probabilidade de não haver duas mulheres lado a lado é de $\frac{3}{52}$, quando a distribuição é feita ao acaso.

Exemplo 621 *Suponhamos que temos 8 bolas vermelhas, 7 bolas brancas e 6 bolas amarelas. De quantas maneiras podemos colocar as 21 bolas numa fila, de modo a que tenhamos duas e só duas bolas vermelhas em posições consecutivas (as restantes têm de ficar separadas entre si e separadas das duas que estão juntas)?*

Resolução

Vamos começar por supor que temos 8 bolas vermelhas e 13 bolas cinzentas. Guardemos uma bola vermelha e coloquemos as restantes 20 bolas numa fila, de modo a não haver bolas vermelhas seguidas. Já sabemos que isso pode ser feito de $\binom{14}{7}$ maneiras.

Agora, basta juntar a bola vermelha que foi guardada, a uma das bolas vermelhas da fila. Isso pode ser feito de 7 maneiras.

Logo, temos $\binom{14}{7} \times 7$. Mas, as bolas não são cinzentas, pelo que vamos substituir 7 das bolas cinzentas por bolas brancas.

Então, temos $\binom{13}{7}$ maneiras, não havendo necessidade de pensar em substituir as restantes bolas cinzentas.

Então, o número final de maneiras diferentes é

$$\binom{14}{7} \times 7 \times \binom{13}{7} = 41\,225\,184$$

Exemplo 622 *Suponhamos que estamos numa pastelaria e queremos comprar 10 bolos, entre pastéis de nata, queijadas e tarte de maçã, com pelo menos dois bolos de cada qualidade.*

Resolução

Como nós resolvemos as questões deste tipo com números naturais, a partir de 1, em vez de considerarmos a equação $x + y + z = 10$, consideramos a equação $X + Y + Z = 7$, onde X, Y, Z são números naturais. Então, o número de soluções é $\binom{7-1}{2} = 15$. Tal significa que há quinze maneiras de escolher 4 bolos entre as três qualidades, podendo ser todos da mesma qualidade.

4 + 0 + 0 3 maneiras

3 + 1 + 0 6 maneiras

2 + 1 + 1 3 maneiras

2 + 2 + 0 3 maneiras

Relembramos que o número de soluções da equação $\sum_{k=1}^N x_k = m$ (com todas as parcelas números naturais arbitrários) é

$$\binom{m-1}{N-1}, \text{ com } m \geq N$$

Exemplo 623 *Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$, com x_1, x_2, x_3 números naturais?*

Resolução

Este exemplo concreto pode ser resolvido com as equações $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ tem uma única solução, a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ tem três soluções e a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ tem $\binom{4}{2} = 6$ soluções.

Então, o número de soluções é 10.

E se em vez de $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ tivéssemos $x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$? Neste caso, não era boa ideia considerar os casos em que a soma era 3, 4, ... até 50.

Começamos por notar que a inequação dada é equivalente a $x_1 + x_2 + x_3 < 51$, porque estamos a trabalhar com números inteiros.

Então, podemos obter a seguinte equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 51$, com $x_4 \in \mathbb{N}$, em que x_4 é o que "falta" para 51.

Logo, o número de soluções desta equação é $\binom{51-1}{4-1} = \binom{50}{3} = 19\,600$, número este que é o mesmo das soluções de $x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$, com x_1, x_2, x_3 números naturais.

No caso de $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$, com x_1, x_2, x_3 números naturais, temos $x_1 + x_2 + x_3 < 6$ e $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, com $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$, pelo que o número de soluções é $\binom{6-1}{4-1} = \binom{5}{3} = 10$.

Exemplo 624 *Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, com x_1, x_2, x_3 números inteiros não negativos?*

Resolução

Esta questão pode ser transformada noutra: Quantas soluções tem a equação $y_1 + y_2 + y_3 = 18$, com y_1, y_2, y_3 números naturais, cuja resposta é $\binom{17}{2} = 136$.

Exemplo 625 Quantas soluções tem a equação $\sum_{k=1}^N x_k = m$, com x_k números inteiros não negativos?

Resolução

Esta questão transforma-se em saber quantas soluções tem a equação $\sum_{k=1}^N y_k = m + N$, com y_k números naturais. Então, a resposta é

$$\binom{m+N-1}{N-1} = \binom{m+N-1}{m}$$

29.2 Generalização de Combinações e Arranjos

Uma situação que é muito útil, consiste em generalizar $\binom{\alpha}{k}$ aos casos que α é um número real arbitrário. Como definir $\binom{\frac{5}{2}}{2}$?

Recordamos que, por exemplo, $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times (7-1) \times (7-2)}{3 \times 2 \times 1} = 35$

Então, vamos definir $\binom{\frac{5}{2}}{2}$ como sendo $\frac{\frac{5}{2} \times (\frac{5}{2}-1)}{2 \times 1} = \frac{15}{8}$

E $\binom{-\frac{5}{2}}{5}$? Ora, $\binom{-\frac{5}{2}}{5} = \frac{(-\frac{5}{2}) \times (-\frac{7}{2}) \times (-\frac{9}{2}) \times (-\frac{11}{2}) \times (-\frac{13}{2})}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = -\frac{3003}{256}$

E $\binom{-3}{5}$? Então,

$$\binom{-3}{5} = \frac{(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) \times (-7)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = -\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = -\binom{7}{5} = -21$$

E $\binom{-3}{6}$?

$$\begin{aligned} \binom{-3}{6} &= \frac{(-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) \times (-7) \times (-8)}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \binom{8}{6} = 28 \end{aligned}$$

E $\binom{-n}{k}$, com $n, k \in \mathbb{N}$?

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \frac{(-n) \cdot (-n-1) \cdots (-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1) \cdots (n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(n+k-1) \cdots (n+1)n}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

Ou seja, fazendo $n = 3, k = 5$, temos $\binom{-3}{5} = (-1)^5 \binom{3+5-1}{5} = -\binom{7}{5} = -21$, como obtido anteriormente.

Note-se que em $\binom{\alpha}{k}$, tem de ser $k \in \mathbb{N}_0$, mas α pode ser um número real arbitrário. Repare-se que $\binom{\alpha}{0} = 1$.

De forma análoga, também podemos generalizar a noção de Arranjos. Aliás, é costume começar por generalizar os arranjos e, depois, passar à generalização das combinações.

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Define-se "arranjos de α , k a k ", como sendo o número $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. Este número pode ser representado por $(\alpha)_k$.

Então, $(-5)_3 = (-5) \times (-6) \times (-7) = -7 \times 6 \times 5 = -(7)_3$.

As calculadoras costumam usar uma notação que é nPr que poderá ser substituída por $P(n, r)$. Em inglês, é costume usar P_r^n . Em Português, costuma usar-se a letra A (da palavra Arranjos), enquanto se usa a letra P para o caso particular de arranjos de n a n . Ou seja, costumamos usar a notação $Pn = n!$

Logo, podemos usar $A(n, r)$, para os arranjos de n , r a r . Também é costume usarmos nA_r e poderíamos usar A_r^n , por causa das limitações da escrita em computador.

Logo, a notação $(a)_k$ corresponde a A_k^a . Segundo tenho visto, no Brasil, trocam os índices e escrevem $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$. E o mesmo para as Combinações.

Atenção: Não se define $\binom{-3}{-3}$, pois (na definição apresentada) o número inferior tem de ser um inteiro maior ou igual a zero.

Para que serve a generalização apresentada? Em Matemática, tudo serve para alguma coisa, havendo definições que se aplicam nas mais variadas situações.

Vejamos um exemplo:

Como desenvolver em série de potências, a função $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$?

Se tivermos $(1+x)^5$, a resposta é fácil:

$$\begin{aligned}(1+x)^5 &= \binom{5}{0}1^5x^0 + \binom{5}{1}1^4x^1 + \binom{5}{2}1^3x^2 + \binom{5}{3}1^2x^3 + \binom{5}{4}1^1x^4 + \binom{5}{5}1^0x^5 \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5\end{aligned}$$

Para a função $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, a situação complica-se.

Calculemos as sucessivas derivadas de $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ f'''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ f^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right)(1+x)^{-\frac{7}{2}} \\ f^{(5)}(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right)(1+x)^{-\frac{9}{2}} \\ \vdots \end{array} \right.$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(0) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \\ f'''(0) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8} \\ f^{(4)}(0) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{16} \\ f^{(5)}(0) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{105}{32} \\ \vdots \end{array} \right.$$

Então, para valores de x convenientes, temos que

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \\
 &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \cdots \\
 &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16}\frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \cdots \\
 &= \binom{\frac{1}{2}}{0}x^0 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \binom{\frac{1}{2}}{4}x^4 + \binom{\frac{1}{2}}{5}x^5 + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{k}x^k + \cdots \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k}x^k
 \end{aligned}$$

Os valores convenientes para x são os do intervalo $] -1, 1[$, ou seja, devemos ter $-1 < x < 1$, para que a série seja convergente. No entanto, podemos interpretar a série $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k}x^k$ como sendo uma série formal, não interessando saber se é convergente ou não. Nesse caso, não estamos interessados em saber qual o valor da soma, pelo que os valores de x não são a nossa preocupação.

Série Geométrica

Dado um número real r , temos que $1, r, r^2, r^3, \dots, r^k, \dots$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é r .

A soma de n termos consecutivos é dada por $S_n = 1 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, desde que $r \neq 1$.

Se tivermos $-1 < r < 1$, então $\lim S_n = \lim \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$.

Se usarmos x em vez de r , temos que $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Para muitos efeitos, é preferível usar a expressão $\frac{1}{1-x}$ em vez de $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots$ ou de $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$.

A $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots$, damos o nome de série geométrica.

Há situações ligeiramente diferentes, mas com a mesma ideia base. Por exemplo, as séries

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^{+\infty} x^k &= x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots = x^2 (1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots) = \frac{x^2}{1-x} \\
 \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} &= 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + \cdots = \frac{1}{1-x^2} \\
 \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k+1} &= x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2k+1} + \cdots = \frac{x}{1-x^2}
 \end{aligned}$$

Vejamos um exemplo curioso sobre a potência duma série geométrica:

Exemplo 626 Seja $f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, com $n \in \mathbb{N}$. Como obter os coeficientes c_k ?

Resolução

Há um coeficiente que é imediato: $c_0 = 1$. Vejamos como aproveitar o que estivemos a considerar:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$\text{Então, } f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$$

Então, temos uma potência dum binómio, pelo que podemos aplicar a fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton, num caso mais especial: o expoente não é um número natural (embora seja um número inteiro).

$$\begin{aligned}(1-x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-n}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{k+n-1}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{k} x^k\end{aligned}$$

Então, $c_k = \binom{k+n-1}{k}$, ou seja, temos as combinações usuais.

Então,

$$\begin{aligned}c_0 &= \binom{0+n-1}{0} = 1, c_1 = \binom{1+n-1}{1} = n, c_2 = \binom{2+n-1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1) \\ c_3 &= \binom{3+n-1}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

E assim por diante.

Note-se que, da igualdade $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots$, vem que $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots)$, ou seja

$$\frac{d}{dx} \left((1-x)^{-1} \right) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + kx^{k-1} + (k+1)x^k + \cdots$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + kx^{k-1} + (k+1)x^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+1}{1} x^k\end{aligned}$$

A esta propriedade, eu costumo chamar "regra 1, 2, 3".

Derivando, de novo, obtemos

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + (k+2)(k+1)x^k + \cdots$$

Então,

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + \frac{(k+2)(k+1)}{2} x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

Derivando mais uma vez, obtemos

$$\frac{3}{(1-x)^4} = 3 + 12x + 30x^2 + \dots + \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{2}x^k + \dots$$

Então,

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \frac{6}{6} + \frac{24}{6}x + \frac{60}{6}x^2 + \dots + \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}x^k + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+3}{3} x^k$$

Como podemos ver, é muito mais cómodo conhecer a fórmula

$$\frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

Note-se que, para $n = 1$, obtemos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1+k-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

29.3 Funções geradoras

Há vários tipos de funções geradoras, sendo o mais simples o caso das funções polinomiais. Os polinómios são casos muito particulares de séries (de potências).

Então, podemos considerar o caso geral, o das séries de potências de x . Há uma pequena diferença, na maneira de escrever séries e polinómios: nas séries, escrevemos os termos por ordem crescente das potências, como em $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. Nos polinómios numa variável, podemos escrever numa forma ou de outra, consoante se entenda conveniente.

Convém chamar a atenção para a maneira como se multiplicam séries e polinómios.

Consideremos os seguintes polinómios: $\begin{cases} A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \end{cases}$

Representando o produto $A(x)B(x)$ por $(AB)(x)$, temos

$$(AB)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + a_2b_2x^4$$

No caso dos polinómios, o número de parcelas dos coeficientes do polinómio produto, começa por aumentar, mas depois diminui.

No caso das séries, o número de parcelas vai aumentando sempre.

No presente capítulo, vamos usar polinómios especiais, pois os casos mais importantes são aqueles em que os coeficientes são 0 ou 1. Mas há outros casos de especial relevância.

Exemplos: $1 + x + x^2 + x^3$, $x + x^2 + x^3$, $x + x^3 + x^4$,...

Calculemos $(1 + x + x^2 + x^3)^2 = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Considerando o caso acima apresentado, temos

$$\begin{aligned} (AB)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + a_2b_2x^4 \\ &= 1 \times 1 + (1 \times 1 + 1 \times 1)x + (1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1)x^2 + (1 \times 1 + 1 \times 1)x^3 + 1 \times 1x^4 \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 \end{aligned}$$

percebemos uma regra curiosa, quando todos os coeficientes de são iguais a 1. Note-se que, neste caso, temos um quadrado dum polinómio, pois os dois polinómios são iguais.

Repare-se que $(1+x+x^2+x^3)^2 = 1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$. A esta regra, chamaremos "regra um, dois, três".

Esta "regra" permite-nos escrever a seguinte propriedade (basta considerar $x = 10$):

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 11^2 = 121 \\ 111^2 = 12321 \\ 1111^2 = 1234321 \\ 11111^2 = 123454321 \\ \dots \\ 111111111^2 = 12345678987654321 \end{array} \right.$$

A partir daqui, a regra destoa um pouco, porque estamos na base dez e vai haver "transporte" para a casa situada à esquerda.

Neste momento, já somos capazes de calcular o quadrado dum polinómio deste tipo, mesmo que tenha muitas parcelas:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12})^2$$

Então,

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 9x^8 + 10x^9 + 11x^{10} + 12x^{11} + 13x^{12} + 12x^{13} + 11x^{14} + 10x^{15} + 9x^{16} + 8x^{17} + 7x^{18} + 6x^{19} + 5x^{20} + 4x^{21} + 3x^{22} + 2x^{23} + x^{24}$$

No caso geral, teremos

$$\begin{aligned} P(x) &= (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n)^2 \\ &= 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+(n+1)x^n+nx^{n+1}+\cdots+2x^{2n-1}+x^{2n} \end{aligned}$$

É claro que, se faltarem alguns termos, a situação complica-se:

$$(1 + x + x^3 + x^5)^2 = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 2x^8 + x^{10}$$

Imagine a seguinte conta de multiplicar (que tanto pode referir-se ao produto de dois números, como ao produto de dois polinómios):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & \times & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 \hline
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\
 \hline
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & &
 \end{array}$$

Agora, somam-se os coeficientes, em diagonal, obtendo-se os coeficientes da série produto:
É claro que podíamos ter trocado a posição dos coeficientes.

Exemplo 627 Multiplique os polinómios $A(x) = 2 + 3x - 4x^2 + 3x^4$ e $B(x) = 1 - 2x - 3x^3 + 2x^4$, usando o processo acabado de descrever

Resolução

	1	-2	0	-3	2
2	2	-4	0	-6	4
3	3	-6	0	-9	6
-4	-4	8	0	12	-8
0	0	0	0	0	0
3	3	-6	0	-9	6

Então,

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= 2 + (-4 + 3)x + (-6 - 4)x^2 + (-6 + 8)x^3 + (4 - 9 + 3)x^4 \\ &\quad + (6 + 12 - 6)x^5 + (-8)x^6 + (-9)x^7 + 6x^8 \\ &= 2 - x - 10x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 12x^5 - 8x^6 - 9x^7 + 6x^8 \end{aligned}$$

29.3.1 Funções Geradoras Ordinárias

Nesta secção vamos considerar séries (e polinómios) do tipo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, onde $a_k \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 628 Consideremos uma pergunta frequente e simples sobre Análise Combinatória: Dado um conjunto de 10 pessoas, quantos subconjuntos diferentes podemos formar, sendo que esses subconjuntos devem ter 5 pessoas.

A resposta é imediata: $\binom{10}{5} = 252$

Ou seja, há 252 maneiras diferentes de escolher 5 pessoas entre 10.

E se tivéssemos que formar um subconjunto de 4 pessoas? Claro: $\binom{10}{4} = 210$

Mas há uma maneira alternativa (pelo menos). Se conhece o binómio de Newton, sabe que lá estão as respostas para os vários expoentes.

Assim, temos

$$\begin{aligned} (x+y)^{10} &= x^{10} + 10x^9y + 45x^8y^2 + 120x^7y^3 + 210x^6y^4 + 252x^5y^5 \\ &\quad + 210x^4y^6 + 120x^3y^7 + 45x^2y^8 + 10xy^9 + y^{10} \end{aligned}$$

E lá temos a resposta para ambas as perguntas formuladas. Na realidade, temos as respostas para qualquer número de pessoas do subconjunto pretendido:

Se quisermos saber quantos são os subconjuntos com 3 elementos, até podemos escolher entre o expoente 3 de x e o expoente 3 de y . Em qualquer caso, a resposta é 120. Ora, $\binom{10}{3} = 120$, pelo que tudo está a correr bem. O único problema está no cálculo de $(x+y)^{10}$. Mas, se tivermos um computador que faça isso, a resposta é mais rápida do que andar a pedir, ao computador, as várias combinações que nos sejam solicitadas.

O desenvolvimento anterior pode ser modificado, usando uma só variável, se calcularmos $(1+x)^{10}$ em vez de $(x+y)^{10}$. Deste modo, usamos os polinómios de que temos vindo a falar. Logo, não faz grande sentido usar o desenvolvimento de $(x+y)^n$, se podemos usar o desenvolvimento de $(1+x)^n$.

Ora,

$$(1+x)^{10} = x^{10} + 10x^9 + 45x^8 + 120x^7 + 210x^6 + 252x^5 + 210x^4 + 120x^3 + 45x^2 + 10x + 1$$

E os coeficientes continuam lá, sendo que a expressão fica um pouco mais fácil, pois só inclui uma variável.

Então, $(1+x)^{10}$ gera as combinações de 10, k a k , enquanto $(1+x)^n$ gera as combinações de n , k a k , para os valores de k admissíveis.

No que se segue, e por comodidade, vamos dizer que um subconjunto com k elementos dum conjunto inicial (com k ou mais elementos) é um k -subconjunto.

Agora, podemos fazer a seguinte pergunta: de quantas maneiras podemos escolher um 8-subconjunto, quando o conjunto inicial tem 15 elementos?

Ora,

$$(1+x)^{15} = x^{15} + 15x^{14} + 105x^{13} + 455x^{12} + 1365x^{11} + 3003x^{10} + 5005x^9 + 6435x^8 + 6435x^7 + 5005x^6 + 3003x^5 + 1365x^4 + 455x^3 + 105x^2 + 15x + 1$$

De $6435x^8$, vem que a resposta é 6435. E $\binom{15}{8} = 6435$, o que confirma o resultado. Note-se que temos a resposta para todos os k -subconjuntos e não só para os subconjuntos com 8 elementos.

No entanto, parece que não temos nada de novo, nem nada que nos faça poupar trabalho.

Mas voltemos atrás.

Dada uma sucessão de números reais (ou complexos), podemos formar uma série de potências (de x).

Se os termos da sucessão forem nulos, a partir de certa ordem, temos um polinómio.

Vejamos alguns exemplos:

Consideremos a sucessão definida por $u_n = 1$, para todo o número natural n . A série de potências correspondente é $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$.

Esta série é conhecida por série geométrica, por estar ligada à soma de termos consecutivos duma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão x .

Seja $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$. Então, $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, tendo-se que $\lim S_n = \lim \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$, com $-1 < x < 1$.

Logo, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$, com $-1 < x < 1$.

Então, vamos dizer que $\frac{1}{1-x}$ é a função geradora de $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$

A partir de $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$, podemos obter outras funções geradoras:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \rightarrow (0, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \\ \frac{x^2}{1-x} = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \rightarrow (0, 0, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \\ \frac{x^3}{1-x} = x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \rightarrow (0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \\ \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots \rightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots) \\ \frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots \rightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots) \\ \frac{x^2}{1-x^2} = x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots \rightarrow (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots) \\ \frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3n} + \cdots \rightarrow (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots) \end{array} \right.$$

No caso de sequências finitas, obtemos polinômios.

Exemplos: $(1, 1, 1, 1, 1)$ gera o polinômio $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$. Agora, trata-se da soma dos primeiros 5 termos duma progressão geométrica, tendo-se $\sum_{k=0}^4 x^k = \frac{1-x^5}{1-x}$, expressão esta que é válida para todo o número real x diferente de 1. Para $x = 1$, a soma é 5.

Analogamente, temos $\sum_{k=0}^7 x^k = \frac{1-x^8}{1-x}$ e $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Podemos obter outras funções geradoras, multiplicando por x , por x^2 , etc...

Assim, temos $\sum_{k=2}^7 x^k = x^2 \sum_{k=0}^5 x^k = x^2 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) = x^2 \frac{1-x^6}{1-x}$.

Esta função corresponde à sequência (finita) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ e à sucessão (sequência infinita) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Após esta breve introdução, passemos a alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 629 Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$?

Já sabemos que a resposta é $\binom{10}{2} = 45$.

Note que qualquer das variáveis só toma valores de 1 a 9.

Calculemos $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^3$:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^3 \\ &= x^{27} + 3x^{26} + 6x^{25} + 10x^{24} + 15x^{23} + 21x^{22} + 28x^{21} + 36x^{20} \\ &\quad + 52x^{18} + 57x^{17} + 60x^{16} + 61x^{15} + 60x^{14} + 57x^{13} + 45x^{19} + 52x^{12} \\ &\quad + 45x^{11} + 36x^{10} + 28x^9 + 21x^8 + 15x^7 + 10x^6 + 6x^5 + 3x^4 + x^3 \end{aligned}$$

E lá temos o termo $45x^{11}$, o qual nos mostra a solução (45).

Como é que obtemos o termo $45x^{11}$?

Multiplicando x^1 por x^1 e por x^9 , x^1 por x^2 e por x^8 , ou seja, a soma dos expoentes tem de dar 11. Note que um dos expoentes vem do primeiro polinômio, o outro vem do segundo polinômio (igual ao primeiro) e o terceiro expoente vem do terceiro polinômio (ainda o mesmo). Então, temos de considerar todas as maneiras da soma dar 11.

Vejamos este assunto mais em pormenor. Consideremos a equação $x_1 + x_2 = 0$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$. É claro que só há uma maneira da soma dar zero: $0 + 0 = 0$, ou seja, temos $x_1 = x_2 = 0$. Isto corresponde ao termo $a_0 b_0$ do produto (de duas séries).

Se tivermos $x_1 + x_2 = 1$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$, já temos duas possibilidades: $0 + 1 = 1 + 0 = 1$. E isto resulta do termo $a_0 b_1 + a_1 b_0$. É claro que tudo fica mais claro se fizermos $a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 1$. Logo, fazemos todos os coeficientes de ambas as séries iguais a 1, pelo que as duas séries são a mesma.

Então, quando queremos saber quantas soluções (inteiras não negativas) tem a equação $x_1 + x_2 = n$, basta considerarmos o quadrado da série $1 + x + x^2 + \dots$ e verificarmos qual o coeficiente do termo em x^n .

Se tivermos três variáveis, em vez de duas, consideramos o cubo da série e assim sucessivamente.

Se quisermos encontrar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 12$, calculamos $(1 + x + x^2 + \dots)^7$ e vemos qual o coeficiente do termo em x^{12} .

É claro que os termos x^{13}, x^{14}, \dots não contribuem para a formação do termo em x^{12} , pelo que nos basta calcular $(1 + x + x^2 + \dots + x^{12})^7$. E neste cálculo, não nos interessam os termos de grau superior a 12. Ora, os termos de grau menor ou igual a 12 formam o seguinte polinómio:

$$18\,564x^{12} + 12\,376x^{11} + 8\,008x^{10} + 5\,005x^9 + 3\,003x^8 + 1\,716x^7 + 924x^6 + 462x^5 + 210x^4 + 84x^3 + 28x^2 + 7x + 1$$

Logo, temos que há 18 564 soluções (inteiras e não negativas). Note-se que o número de soluções é dado por $\binom{18}{6} = 18\,564$.

O polinómio obtido também dá o número de soluções para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 11$: $12\,376 = \binom{17}{6} = 12\,376$, etc...

Calculemos as várias "combinações":

$$\begin{array}{lll} \binom{18}{6} = 18\,564 & \binom{13}{6} = 1\,716 & \binom{8}{6} = 28 \\ \binom{17}{6} = 12\,376 & \binom{12}{6} = 924 & \binom{7}{6} = 7 \\ \binom{16}{6} = 8\,008 & \binom{11}{6} = 462 & \binom{6}{6} = 1 \\ \binom{15}{6} = 5\,005 & \binom{10}{6} = 210 & \\ \binom{14}{6} = 3\,003 & \binom{9}{6} = 84 & \end{array}$$

Note-se que, de $(1 + x + x^2 + \dots + x^{12})^7$, não podemos determinar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 13$.

Exemplo 630 Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$?

Esta questão pode ser resolvida mudando as variáveis, de modo a que todas elas pertençam a \mathbb{N} . Foi assim, que este assunto foi tratado, embora tivéssemos feito referência aos dois processos.

Utilizando as funções geradoras, temos o polinómio $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, para cada uma das variáveis, pelo que calculamos $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^3$

O computador ajuda-nos, fornecendo o resultado

$$x^{15} + 3x^{14} + 6x^{13} + 10x^{12} + 15x^{11} + 21x^{10} + 25x^9 + 27x^8 + 27x^7 + 25x^6 + 21x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$$

Agora, só temos que procurar o termo de grau 5: $21x^5$

Logo, há 21 maneiras de obtermos a soma 5. Existe uma maneira de chegarmos imediatamente ao resultado: $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

Exemplo 631 Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 11$, com $x_i \in \mathbb{N}$ (para $i = 1, 2, \dots, 7$)?

Já sabemos que a resposta é $\binom{10}{6} = 210$.

Vejamos uma maneira de obtermos o mesmo resultado, usando as "funções geradoras ordinárias":

Nenhuma variável pode assumir valores superiores a 5. Note-se que esta questão é mais fácil de ver, quando as variáveis podem ser zero (podem ser qualquer número maior ou igual a zero, satisfazendo uma dada equação).

Considere o polinómio $P(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

Então,

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^7 = x^{35} + 7x^{34} + 28x^{33} + 84x^{32} \\ &\quad + 210x^{31} + 455x^{30} + 875x^{29} + 1520x^{28} + 2415x^{27} \\ &\quad + 3535x^{26} + 4795x^{25} + 6055x^{24} + 7140x^{23} + 7875x^{22} \\ &\quad + 8135x^{21} + 7875x^{20} + 7140x^{19} + 6055x^{18} + 4795x^{17} \\ &\quad + 3535x^{16} + 2415x^{15} + 1520x^{14} + 875x^{13} \\ &\quad + 455x^{12} + 210x^{11} + 84x^{10} + 28x^9 + 7x^8 + x^7 \end{aligned}$$

E lá temos $210x^{11}$.

A única questão relevante é que dá muito trabalho, calcular $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^7$.

Observação

Note que $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^7 = x^7 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7$

Como procuramos o termo de grau 11, só nos interessa saber o termo de grau 4, no desenvolvimento de $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7$

Ora, $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^2 = x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

Deste polinómio, só nos interessa a parte $5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$$\begin{aligned} (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)^2 &= 25x^8 + 40x^7 + 46x^6 + 44x^5 \\ &\quad + 35x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

Novamente, só nos interessa a parte $35x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3 &\longrightarrow (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \\ &= 5x^8 + 9x^7 + 12x^6 + 14x^5 + 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \\ &= 15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^7 &\longrightarrow (35x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 4x + 1)(15x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1) \\ &= 525x^8 + 650x^7 + 560x^6 + 385x^5 + 210x^4 + 84x^3 \\ &\quad + 28x^2 + 7x + 1 \end{aligned}$$

Logo, temos $210x^4$, o qual multiplicado por x^7 dá $210x^{11}$. E a resposta é 210.

A principal questão é que sinal usar, para esta eliminação de termos de ordem superior a um dado número.

Como isso corresponde a eliminar todos os termos de ordem superior a dado número, pensei na seguinte notação:

$\lceil 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \rceil^{(3)} = 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3$, isto é, eliminamos todos os termos de grau superior a 3.

E se precisarmos de eliminar os termos de grau inferior a certo valor. Daí, a seguinte notação: $\lfloor 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \rfloor_{(2)} = 5x^4 + 5x^3 + 3x^2$.

É claro que podemos utilizar os dois símbolos:

$$\left[\left[5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \right]^{(3)} \right]_{(2)} = 5x^3 + 3x^2$$

Notação

Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, com $a_i \in \mathbb{A}$, onde \mathbb{A} é um anel e $0 \leq i \leq n$, com $n \in \mathbb{N}_0$.

Seja r um número natural tal que $1 \leq r < n - 1$.

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \right]^{(r)} = a_0 + a_1x + \cdots + a_rx^r \\ \left[a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \right]_{(r)} = a_rx^r + a_{r+1}x^{r+1} + \cdots + a_nx^n \end{array} \right.$$

É claro que poderíamos definir esta operação para $r = 0$ e para $r \geq n$, mas não obtínhamos nada de interessante:

$\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \right]^{(n)}$ seria $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

E $\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \right]^{(0)}$ seria a_0

E analogamente para

$$\begin{aligned} \left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \right]_{(n)} &= a_nx^n \\ \left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \right]_{(0)} &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \end{aligned}$$

Outra possibilidade será utilizar o único sinal $\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \right]$ e colocar um índice ou um expoente (ou ambos).

Outra maneira interessante seria colocar índice e expoente em todas as circunstâncias:

Por exemplo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \right]_{(2)}^{(4)} = 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 \\ \left[2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \right]_{(0)}^{(4)} = 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \\ \left[2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \right]_{(2)}^{(5)} = 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 \end{array} \right.$$

É esta notação que vamos utilizar daqui em diante.

Convenção

Vamos convencionar que $\left[2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x \right]_{(0)}^{(0)} = 0$

Qual o problema que nos levou a esta convenção? A questão do grau de zero!

Este problema pode ser ultrapassado, considerando que o índice inferior só é utilizado, quando é maior ou igual a um. Quando não existir é porque se pode considerar $-\infty$.

Ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \right]^{(4)} = 5x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \\ \left[2x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 6x \right]^{(4)} = 2x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 6x \end{array} \right.$$

Exemplo 632 Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 20$, com as variáveis números inteiros não negativos e $x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \geq 4$.

Já sabemos que podemos alterar as condições, substituindo as variáveis dadas por outras que irão começar em 1. No entanto, vamos deixar tudo como está.

O maior valor de x_1 é 13 (e o menor é 2), pelo que consideramos o polinómio

$$P_1(x) = x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2$$

O maior valor de x_2 é 14, pelo que consideramos o polinómio

$$P_2(x) = x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3$$

O maior valor de x_3 é 15, pelo que consideramos o polinómio

$$P_3(x) = x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4$$

O maior valor de x_4 (e das restantes variáveis) é 11 (e o menor é 0), pelo que consideramos o polinómio

$$P_4(x) = x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Começamos por calcular $(P_4(x))^4$:

Só nos interessam os termos de expoente menor ou igual a 20, pelo que os restantes foram eliminados.

Note-se que podemos começar por calcular $(P_4(x))^2$.

Então, temos

$$\begin{aligned} \left[(P_4(x))^2 \right]^{(20)} &= \left[(x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 \right]^{(20)} \\ &= 3x^{20} + 4x^{19} + 5x^{18} + 6x^{17} + 7x^{16} + 8x^{15} + 9x^{14} + 10x^{13} \\ &\quad + 11x^{12} + 12x^{11} + 11x^{10} + 10x^9 + 9x^8 + 8x^7 + 7x^6 \\ &\quad + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[(P_4(x))^4 \right]^{(20)} &= 1111x^{20} + 1060x^{19} + 994x^{18} + 916x^{17} + 829x^{16} + 736x^{15} \\ &\quad + 640x^{14} + 544x^{13} + 451x^{12} + 364x^{11} + 286x^{10} + 220x^9 \\ &\quad + 165x^8 + 120x^7 + 84x^6 + 56x^5 + 35x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

Calculemos $P_1(x)P_2(x)P_3(x) = P_5(x)$, eliminando os termos de grau superior a 20:

$$\begin{aligned} [P_5(x)]^{(20)} &= P_1(x)P_2(x)P_3(x) = 78x^{20} + 66x^{19} + 55x^{18} + 45x^{17} + 36x^{16} \\ &\quad + 28x^{15} + 21x^{14} + 15x^{13} + 10x^{12} + 6x^{11} + 3x^{10} + x^9 \end{aligned}$$

E, por fim, calculamos os produtos destes dois polinómios encontrados, mas, no primeiro, podemos eliminar os termos de grau superior a 11, porque em $P_5(x)$, só temos termos de grau maior ou igual a 9.

$$\begin{aligned} P_6(x) &= [P_5(x)]^{(11)} = 364x^{11} + 286x^{10} + 220x^9 + 165x^8 + 120x^7 \\ &\quad + 84x^6 + 56x^5 + 35x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\ P_6(x)P_5(x) &= 12376x^{20} + 8008x^{19} + 5005x^{18} + 3003x^{17} + 1716x^{16} \\ &\quad + 924x^{15} + 462x^{14} + 210x^{13} + 84x^{12} + 28x^{11} + 7x^{10} + x^9 \end{aligned}$$

Como a soma é 20, a resposta é 12 376 soluções (escolhe-se o coeficiente do termo de grau 20). Confirmemos, mudando as variáveis.

$$x_1 = 1 + X_1, x_2 = 2 + X_2, x_3 = 3 + X_3, x_i = X_i - 1, (i = 4, 5, 6, 7)$$

$$\text{Então, } 1 + X_1 + 2 + X_2 + 3 + X_3 + X_4 - 1 + X_5 - 1 + X_6 - 1 + X_7 - 1 = 20$$

$$\text{Logo, } X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 = 18$$

O resultado é $\binom{17}{6} = 12\,376$, o que coincide com o valor encontrado antes.

É claro que podemos mudar as variáveis, de modo que elas possam assumir o valor zero. É tudo uma questão de gosto pessoal e de qual a fórmula que pretendemos fixar.

Neste momento, podemos garantir que conhecemos duas maneiras de resolver esta última questão: a primeira maneira, dá um trabalho imenso, enquanto a segunda se resolve num instante. Só que há que ter algum cuidado com as afirmações. Nem sempre as restrições são tão convenientes como as dos exemplos anteriores.

O exemplo seguinte vai mostrar a importância daquilo que temos vindo a fazer.

Exemplo 633 *Suponhamos que queremos encontrar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$, onde $x_1 \in \{1, 3, 6\}$, $x_2 \in \{2, 3, 4\}$, $x_3 \in \{1, 3, 4\}$ e as restantes variáveis são números naturais arbitrários.*

Começamos por reparar que a arbitrariedade referida não é assim tão grande. O valor mínimo de $x_1 + x_2 + x_3$ é 4, pelo que a maior possibilidade para $x_4 + x_5$ é 5.

Então, estas duas variáveis só podem tomar valores de 1 a 4.

Então, vamos considerar os seguintes polinómios:

$$\begin{cases} P_1(x) = x + x^3 + x^6 \\ P_2(x) = x^2 + x^3 + x^4 \\ P_3(x) = x + x^3 + x^4 \\ Q(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 \end{cases}$$

Agora, calculamos $P_1(x)P_2(x)P_3(x)Q(x)Q(x)$. O polinómio $Q(x)$ aparece duas vezes, porque há duas variáveis que tomam valores entre 1 e 4 (qualquer desses valores).

Podemos apresentar o cálculo de maneira mais suave:

$$\begin{aligned} A(x) &= P_1(x)P_2(x)P_3(x) \\ &= x^4(1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 2x^8 + 2x^9 + x^{10}) \\ A_1(x) &= 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 2x^8 + 2x^9 + x^{10} \\ B(x) &= (Q(x))^2 = x^2(1 + x + x^2 + x^3)^2 \\ &= x^2(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6) \\ B_1(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5 + x^6 \end{aligned}$$

Falta multiplicar os dois polinómios $A_1(x)$ e $B_1(x)$:

$$\begin{aligned} A_1(x)B_1(x) &= x^{16} + 4x^{15} + 9x^{14} + 17x^{13} + 26x^{12} + 35x^{11} \\ &\quad + 44x^{10} + 50x^9 + 54x^8 + 53x^7 + 47x^6 \\ &\quad + 38x^5 + 26x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

Por fim, falta multiplicar o resultado por x^6 .

Mas, nós andamos à procura do termo de grau 9, pelo que nos basta ter atenção o termo de grau 3, ou seja, $16x^3$, pois falta multiplicar por x^6 .

Logo, o número de soluções é 16.

Até podemos apresentar as soluções:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Soma	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	2	1	1	4	9	1	3	1	2	2
1	2	1	2	3	9	1	3	1	3	1
1	2	1	3	2	9	1	3	3	1	1
1	2	1	4	1	9	1	4	1	1	2
1	2	3	1	2	9	1	4	1	2	1
1	2	3	2	1	9	3	2	1	1	2
1	2	4	1	1	9	3	2	1	2	1
1	3	1	1	3	9	3	3	1	1	1

Note-se que podíamos "truncar" os polinómios, desprezando os termos de grau superior a 9, em $A(x)$ e em $B(x)$. Isso corresponde em eliminar os termos de grau superior a 5, em $A_1(x)$ e em $B_1(x)$.

$$A_1(x) = 1 + x + 3x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 4x^5$$

$$B_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^5$$

$$A_1(x)B_1(x) = 8x^{10} + 20x^9 + 34x^8 + 43x^7 + 43x^6 + 38x^5 + 26x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 3x + 1$$

Multiplicando por x^6 , temos

$$8x^{16} + 20x^{15} + 34x^{14} + 43x^{13} + 43x^{12} + 38x^{11} + 26x^{10} + 16x^9 + 8x^8 + 3x^7 + x^6$$

E, de novo, obtemos 16 (coeficiente do termo em x^9).

E "parece" que há uma maneira de obter soma igual a 6 ($1 + 2 + 1 + 1 + 1$)

Três maneiras de obter soma 7 ($1 + 2 + 1 + 1 + 2$, $1 + 2 + 1 + 2 + 1$ e $1 + 3 + 1 + 1 + 1$)

E oito maneiras de obter soma 8 ($1 + 2 + 1 + 1 + 3$, $1 + 2 + 1 + 2 + 2$, $1 + 2 + 1 + 3 + 1$, $1 + 2 + 3 + 1 + 1$, $1 + 3 + 1 + 1 + 2$, $1 + 3 + 1 + 2 + 1$, $1 + 4 + 1 + 1 + 1$ e $3 + 2 + 1 + 1 + 1$).

Então, parece que temos um bónus: não só resolvemos o caso em que a soma é 9, como "parece" que resolvemos o caso em que a soma é inferior a 9.

Exemplo 634 Determine o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 20$, onde $x_1 \in \{1, 3, 6\}$, $x_2 \in \{2, 3, 4\}$, $x_3 \in \{1, 3, 4\}$ e as restantes variáveis são números naturais arbitrários.

O valor mínimo de $x_1 + x_2 + x_3$ é 4, pelo que a maior possibilidade para $x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ é 16.

No entanto, trata-se de números naturais, Logo, o maior valor que uma destas últimas variáveis pode assumir, é 13.

Usando as "funções geradoras", temos

$$\begin{cases} P_1(x) = x + x^3 + x^6 \\ P_2(x) = x^2 + x^3 + x^4 \\ P_3(x) = x + x^3 + x^4 \\ P_i(x) = \sum_{k=1}^{13} x^k \quad (4 \leq i \leq 7) \\ Q(x) = \left(\sum_{k=1}^{13} x^k \right)^4 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} P_1(x) P_2(x) P_3(x) &= x^{14} + 2x^{13} + 2x^{12} + 3x^{11} + 3x^{10} + 4x^9 + 4x^8 + 3x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 \\ &= x^4 (x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 3x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Recorrendo ao computador, temos

$$\begin{aligned} A(x) &= P_1(x) P_2(x) P_3(x) Q(x) = x^{66} + 6x^{65} + 20x^{64} + 51x^{63} \\ &\quad + 110x^{62} + 212x^{61} + 376x^{60} + 624x^{59} + 981x^{58} + 1473x^{57} \\ &\quad + 2127x^{56} + 2970x^{55} + 4029x^{54} + 5327x^{53} + 6879x^{52} + 8692x^{51} \\ &\quad + 10761x^{50} + 13069x^{49} + 15583x^{48} + 18254x^{47} + 21021x^{46} \\ &\quad + 23811x^{45} + 26547x^{44} + 29148x^{43} + 31533x^{42} + 33621x^{41} \\ &\quad + 35337x^{40} + 36618x^{39} + 37413x^{38} + 37689x^{37} + 37431x^{36} \\ &\quad + 36648x^{35} + 35373x^{34} + 33657x^{33} + 31569x^{32} + 29184x^{31} \\ &\quad + 26583x^{30} + 23847x^{29} + 21057x^{28} + 18290x^{27} + 15615x^{26} \\ &\quad + 13093x^{25} + 10773x^{24} + 8692x^{23} + 6871x^{22} + 5315x^{21} \\ &\quad + 4017x^{20} + 2958x^{19} + 2115x^{18} + 1461x^{17} + 969x^{16} + 612x^{15} \\ &\quad + 364x^{14} + 201x^{13} + 101x^{12} + 45x^{11} + 17x^{10} + 5x^9 + x^8 \end{aligned}$$

Então, o termo de grau 20 é $4017x^{20}$, pelo que há 4017 soluções para a equação dada.

Note-se que

$$\begin{aligned} [A(x)]_{(0)}^{(20)} &= 4017x^{20} + 2958x^{19} + 2115x^{18} + 1461x^{17} + 969x^{16} + 612x^{15} \\ &\quad + 364x^{14} + 201x^{13} + 101x^{12} + 45x^{11} + 17x^{10} + 5x^9 + x^8 \end{aligned}$$

E se quisermos usar papel e lápis, para a resolução?

Digamos que não é uma boa ideia, embora isso possa ser feito.

É uma daquelas maneiras que eu dizia que só utilizaria num exame e se tal fosse obrigatório. Mas, tenho de corrigir, pois há uma outra situação: quando se escreve um livro!

Vamos ao cálculo com papel e lápis:

$$\begin{aligned} P_1(x) P_2(x) P_3(x) &= (x + x^3 + x^6) (x^2 + x^3 + x^4) (x + x^3 + x^4) \\ &= (x^6 + x^3 + x) (x^4 + x^3 + x^2) (x^4 + x^3 + x) \\ &= x^4 (x^5 + x^2 + 1) (x^2 + x + 1) (x^3 + x^2 + 1) \end{aligned}$$

O cálculo é relativamente fácil e podemos apresentá-lo, da maneira como se ensina a multiplicar polinómios, no Ensino Básico:

$$\begin{array}{cccccccc}
& & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
& & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
& & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
& & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
& & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
& & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
& & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
& & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
& 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1
\end{array}$$

Ou desta maneira:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
& & & & & x^5 & & & & x^2 & & 1 \\
& & & & & & & & & x^2 & & x & 1 \\
& & & & & \hline
& & & & & x^5 & & & & x^2 & & 1 \\
& & & & x^6 & & & & x^3 & & & x \\
& & & x^7 & & & & x^4 & & x^2 & & \\
& & & \hline
& & & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & 2x^2 & x & 1 \\
& & & & & & & x^3 & x^2 & & 1 \\
& & & \hline
& & & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & 2x^2 & x & 1 \\
& & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & 2x^4 & x^3 & x^2 & & \\
& & \hline
x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & 2x^5 & x^4 & x^3 & & & & \\
\hline
x^{10} & 2x^9 & 2x^8 & 3x^7 & 3x^6 & 4x^5 & 4x^4 & 3x^3 & 3x^2 & x & 1
\end{array}$$

O resultado é $x^{10} + 2x^9 + 2x^8 + 3x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1$. Mas, falta multiplicar por x , embora isso possa ser evitado (com alguma vantagem). Note-se que omitimos o sinal $+$.

Então,

$$\begin{aligned}
P_1(x) P_2(x) P_3(x) &= x^4 (x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + 3x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1) \\
&= x^{14} + 2x^{13} + 3x^{12} + 3x^{11} + 3x^{10} + 4x^9 + 4x^8 + 3x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4
\end{aligned}$$

Quadrado de $\sum_{k=1}^{13} x^k$, ou seja, $\left(\sum_{k=1}^{13} x^k\right)^2 = x^2 \left(\sum_{k=0}^{12} x^k\right)^2$:

A "conta" é fácil (a regra de 1,2,3,..., não esquecendo x^2):

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{13} x^k\right)^2 &= x^{26} + 2x^{25} + 3x^{24} + 4x^{23} + 5x^{22} + 6x^{21} + 7x^{20} + 8x^{19} + 9x^{18} \\
&\quad + 10x^{17} + 11x^{16} + 12x^{15} + 13x^{14} + 12x^{13} + 11x^{12} + 10x^{11} \\
&\quad + 9x^{10} + 8x^9 + 7x^8 + 6x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2
\end{aligned}$$

Agora, temos que elevar novamente ao quadrado, o que não é muito fácil.

$$\begin{aligned}
[Q(x)]_{(0)}^{(16)} &= 11x^{16} + 12x^{15} + 13x^{14} + 12x^{13} + 11x^{12} + 10x^{11} + 9x^{10} \\
&\quad + 8x^9 + 7x^8 + 6x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2
\end{aligned}$$

Note-se que só precisamos dos termos de ordem menor ou igual a 16, por causa de x^4 ser o termo de grau mínimo do produto $P_1(x)P_2(x)P_3(x)$.

Agora, falta-nos calcular o quadrado deste polinómio obtido, de que só vamos deixar o resultado com os termos de grau menos ou igual a 16:

$$R(x) = 455x^{16} + 364x^{15} + 286x^{14} + 220x^{13} + 165x^{12} + 120x^{11} + 84x^{10} + 56x^9 + 35x^8 + 20x^7 + 10x^6 + 4x^5 + x^4$$

Por fim, falta-nos multiplicar este último polinómio por $P_1(x)P_2(x)P_3(x)$, ou seja, falta multiplicar por $x^{14} + 2x^{13} + 2x^{12} + 3x^{11} + 3x^{10} + 4x^9 + 4x^8 + 3x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4$.

Então, temos para esse produto

$$\begin{aligned} &455x^{30} + 1274x^{29} + 1924x^{28} + 2885x^{27} + 3634x^{26} + 4660x^{25} + 5448x^{24} \\ &+ 5584x^{23} + 5651x^{22} + 4759x^{21} + 4017x^{20} + 2958x^{19} + 2115x^{18} + 1461x^{17} \\ &+ 969x^{16} + 612x^{15} + 364x^{14} + 201x^{13} + 101x^{12} + 45x^{11} + 17x^{10} + 5x^9 + x^8 \end{aligned}$$

Note-se que não era necessário calcular o produto, bastava calcular o termo de grau 20:

x^{14}	$2x^{13}$	$2x^{12}$	$3x^{11}$	$3x^{10}$	$4x^9$	$4x^8$	$3x^7$	$3x^6$	x^5	x^4
$10x^6$	$20x^7$	$35x^8$	$56x^9$	$84x^{10}$	$120x^{11}$	$165x^{12}$	$220x^{13}$	$286x^{14}$	$364x^{15}$	$455x^{16}$
10	40	70	168	252	480	660	660	858	364	455

Somando os elementos da última linha, temos

$$10 + 40 + 70 + 168 + 252 + 480 + 660 + 660 + 858 + 364 + 455 = 4017$$

Outra maneira era definir convenientemente dois vectores e achar o produto interno.

$$\begin{aligned} u &= (10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455) \\ v &= (1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 1, 1) \\ u \cdot v &= 4017 \end{aligned}$$

Exemplo 635 Determine o número de soluções da equação $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 19$, onde as variáveis x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) são números naturais arbitrários.

Resolução

Percebemos melhor a resolução, se mudarmos de variáveis, fazendo $X_1 = 2x_1$, $X_2 = 3x_2$, $X_3 = 4x_3$, $X_4 = x_4$, $X_5 = x_5$, $X_6 = x_6$ e $X_7 = x_7$.

Note-se que o valor mínimo de $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ é 13, pelo resta 6, para ser distribuído pelas diversas variáveis.

Então, $X_1 \in \{2, 4, 6, 8\}$, $X_2 \in \{3, 6, 9\}$, $X_3 \in \{4, 8\}$, $X_4, X_5, X_6, X_7 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Logo, vamos considerar os seguintes polinómios:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 = x^2(1 + x^2 + x^4 + x^6) \\ P_2(x) = x^3 + x^6 + x^9 = x^3(1 + x^3 + x^6) \\ P_3(x) = x^4 + x^8 = x^4(1 + x^4) \\ Q(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \\ P(x) = P_1(x)P_2(x)P_3(x)Q(x)Q(x)Q(x)Q(x) \\ P(x) = P_1(x)P_2(x)P_3(x)(Q(x))^4 \end{array} \right.$$

É claro que pretendemos o coeficiente do termo em x^{19} . Então,

$$\begin{aligned} P(x) &= P_1(x) P_2(x) P_3(x) Q(x) Q(x) Q(x) Q(x) \\ &= x^{13} (1 + x^2 + x^4 + x^6) (1 + x^3 + x^6) (1 + x^4) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 \end{aligned}$$

Então, pretendemos descobrir o termo em x^6 do produto

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6) (1 + x^3 + x^6) (1 + x^4) (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$$

Sejam

$$\begin{cases} A_1(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \\ A_2(x) = 1 + x^3 + x^6 \\ A_3(x) = 1 + x^4 \\ A_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \end{cases}$$

Calculemos o produto $A_1(x) A_2(x) A_3(x)$, por etapas:

$$\begin{aligned} [A_1(x) A_2(x)]^{(6)} &= [(1 + x^2 + x^4 + x^6) (1 + x^3 + x^6)]^{(6)} \\ &= [1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{12}]^{(6)} \\ &= 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 \\ A_1(x) A_2(x) A_3(x) &= (1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6) (1 + x^4) \\ &= 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + 3x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + 2x^{10} \\ [A_1(x) A_2(x) A_3(x)]^{(6)} &= 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + 3x^6 \end{aligned}$$

E faça-se o mesmo para $(A_4(x))^4$

$$\begin{aligned} [(A_4(x))^2]^{(6)} &= [(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2]^{(6)} \\ &= [1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 6x^7 + \dots]^{(6)} \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 \\ [(A_4(x))^4]^{(6)} &= [(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6)^2]^{(6)} \\ &= [1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + 84x^6 + \dots]^{(6)} \\ &= 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + 84x^6 \end{aligned}$$

Agora, basta multiplicarmos o polinómio $1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + 3x^6$ pelo polinómio $1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + 84x^6$.

No entanto, podemos limitar-nos a calcular o termo em x^6 :

$$(84 + 35 + 20 + 20 + 4 + 3)x^6 = 166x^6$$

Logo, o número de soluções é 166.

Exemplo 636 Determine o número de soluções da equação $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 29$, onde as variáveis x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) são números naturais.

Resolução

A primeira observação que podemos fazer é que x_2 tem de ser um número ímpar.

É conveniente sabermos o valor máximo de cada variável, para não usarmos polinómios de grau superior ao estritamente necessário.

O valor mínimo de $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4$ é 15 (quando as quatro variáveis são iguais a 1). Como falta 14 para 29, esse número 14 pode ser "distribuído" por uma ou mais variáveis. Então, o maior valor para x_1 é 16, o maior valor de x_2 é 15, o maior valor de x_3 é 16 e o maior valor de x_4 é 18.

Mudemos de variáveis, fazendo

$$\begin{cases} X_1 = 2x_1 \\ X_2 = 3x_2 \\ X_3 = 4x_3 \\ X_4 = 6x_4 \end{cases}$$

Então, obtemos a equação $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 29$, com $\begin{cases} X_1 \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \\ X_2 \in \{3, 9, 15\} \\ X_3 \in \{4, 8, 12, 16\} \\ X_4 \in \{6, 12, 18\} \end{cases}$.

Polinómios associados: $\begin{cases} P_1(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + x^{16} \\ \quad = x^2(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14}) \\ P_2(x) = x^3 + x^9 + x^{15} = x^3(1 + x^6 + x^{12}) \\ P_3(x) = x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} = x^4(1 + x^4 + x^8 + x^{12}) \\ P_4(x) = x^6 + x^{12} + x^{18} = x^6(1 + x^6 + x^{12}) \end{cases}$.

Então, sejam $\begin{cases} Q_1(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} \\ Q_2(x) = 1 + x^6 + x^{12} \\ Q_3(x) = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} \\ Q_4(x) = 1 + x^6 + x^{12} \end{cases}$

Pretendemos descobrir o coeficiente do termo em x^{29} do produto dos quatro polinómios $P_i(x)$.

Ora, isso corresponde a encontrar o coeficiente do termo em x^{14} de $\prod_{i=1}^4 Q_i(x)$.

Ora, $Q_1(x)Q_3(x) = 1 + x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 3x^8 + 3x^{10} + 4x^{12} + 4x^{14} + \dots$

E $Q_2(x)Q_4(x) = 1 + 2x^6 + 3x^{12} + 2x^{18} + x^{24}$, pelo que temos

$$\begin{cases} [Q_1(x)Q_3(x)]^{(14)} = 1 + x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 3x^8 + 3x^{10} + 4x^{12} + 4x^{14} \\ [Q_2(x)Q_4(x)]^{(14)} = 1 + 2x^6 + 3x^{12} \end{cases}$$

E, representando $[Q_1(x)Q_3(x)]^{(14)}$ por $A(x)$ e $Q_2(x)Q_4(x)$ por $B(x)$, temos

$$[A(x)B(x)]^{(14)} = 13x^{14} + 11x^{12} + 7x^{10} + 5x^8 + 4x^6 + 2x^4 + x^2 + 1$$

Logo, o número de soluções da equação inicial é 13.

Exemplo 637 Quantas soluções tem a condição $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 12$, com $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0$?

Resolução

Começemos por mudar as variáveis, fazendo $\begin{cases} X_1 = 2x_1 \\ X_2 = 3x_2 \\ X_3 = 4x_3 \\ X_4 = x_4 \end{cases}$. Então, podemos afirmar que

$$\begin{cases} X_1 \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\} \\ X_2 \in \{0, 3, 6, 9, 12\} \\ X_3 \in \{0, 4, 8, 12\} \\ 0 \leq X_4 \leq 12 \end{cases}.$$

Polinômios associados:

$$\begin{cases} P_1(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} \\ P_2(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} \\ P_3(x) = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} \\ P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} \end{cases}$$

Ora, $P_2(x)P_3(x) = 1 + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + \dots$

$P_1(x)P_4(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + 6x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + \dots$

$[P_2(x)P_3(x)]^{(12)} = 1 + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + 2x^{12}$

$[P_1(x)P_4(x)]^{(12)} = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + 6x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12}$

Sejam $A(x) = [P_2(x)P_3(x)]^{(12)}$ e $B(x) = [P_1(x)P_4(x)]^{(12)}$

Então,

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 11x^7 + 15x^8 \\ &\quad + 18x^9 + 23x^{10} + 27x^{11} + 34x^{12} + \dots \end{aligned}$$

Donde se conclui que

$$\begin{aligned} [A(x)B(x)]^{(12)} &= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 11x^7 + 15x^8 \\ &\quad + 18x^9 + 23x^{10} + 27x^{11} + 34x^{12} \end{aligned}$$

Então, o número de soluções é dado pela soma de todos os coeficientes:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + 23 + 27 + 34 = 155$$

Logo, há 155 soluções.

Eis algumas das soluções

X_1	X_2	X_3	X_4	Soma
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	0	2	2
2	0	0	0	2
0	0	0	3	3
0	3	0	0	3
2	0	0	1	3
0	0	0	4	4
0	0	4	0	4

X_1	X_2	X_3	X_4	Soma
0	3	0	1	4
2	0	0	2	4
4	0	0	0	4
0	0	0	5	5
0	0	4	1	5
0	3	0	2	5
2	0	0	3	5
2	3	0	0	5
4	0	0	1	5

Exemplo 638 Quantas soluções tem a equação $x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 83$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$?

Resolução

Tentemos uma resolução subtil: $x_1 = 5X_1 + 3$. Então, vem $5X_1 + 3 + 5X_2 + 10X_3 = 83$, com $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{N}_0$. Estamos a supor que $X_2 = x_2$ e $X_3 = x_3$.

Logo, $X_1 + X_2 + 2X_3 = 16$. Então, X_1 e X_2 são ambos pares ou ambos ímpares.

Suponhamos que são ambos pares: então, temos $2Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 = 16$, com $X_1 = 2Y_1$, $X_2 = 2Y_2$ e $X_3 = Y_3$. Note-se que $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathbb{N}_0$, podendo assumir qualquer valor (apenas limitado pela equação).

Então, temos a equação $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 8$ e o número de soluções é $\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$.

Suponhamos que X_1 e X_2 são ambos ímpares: então, $X_1 = 2Y_1 + 1$, $X_2 = 2Y_2 + 1$.

Logo, temos $2Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 = 14$, donde vem $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 7$.

Logo, o número de soluções (desta última equação) é $\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$.

Então, o número de soluções da equação inicial é $45 + 36 = 81$.

Outra resolução

Consideremos o produto de três polinómios

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{83}) (1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{80}) (1 + x^{10} + \dots + x^{80}) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{83} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{16} x^{5k} \right) \times \left(\sum_{k=0}^8 x^{10k} \right) \end{aligned}$$

Do produto anterior, só precisamos do coeficiente do termo em x^{83} .

Esse coeficiente não se altera se colocarmos termos de graus superiores nos três polinómios considerados acima. Em particular, podemos usar as seguintes séries:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) (1 + x^5 + x^{10} + \dots) (1 + x^{10} + \dots) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{5k} \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{10k} \right) \\ &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^{10}} \end{aligned}$$

Sejam (A_n) , (B_n) , (C_n) , as sucessões associadas a $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5}$ e $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^{10}}$.

Ora, já sabemos que $A_n = 1$, para todo o inteiro não negativo n .

Por outro lado, a função $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5} \times (1-x^5) = \frac{1}{1-x}$ gera A_n .

De $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5} = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots$, vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots) (1 - x^5) \\ &= B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + (B_5 - B_0)x^5 + \dots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots \end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{cases} B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 1 \\ B_5 - B_0 = 1, B_6 - B_1 = 1, B_7 - B_2 = 1, B_8 - B_3 = 1, B_9 - B_4 = 1 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 1 \\ B_5 = B_6 = B_7 = B_8 = B_9 = 2 \end{cases}$$

Continuando, temos

$$\begin{cases} B_{10} - B_5 = 1, B_{11} - B_6 = 1, B_{12} - B_7 = 1, B_{13} - B_8 = 1, B_{14} - B_9 = 1 \\ B_{10} = B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{14} = 3 \end{cases}$$

E teremos $B_{15} = B_{16} = B_{17} = B_{18} = B_{19} = 4$.

É fácil de encontrar o termo geral da sucessão $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$: $B_n = 1 + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$, onde $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ é o maior inteiro não superior a $\frac{n}{5}$.

Assim, por exemplo, $B_{73} = 1 + \left\lfloor \frac{73}{5} \right\rfloor = 15$.

Já a sucessão $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dá mais trabalho.

De $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^{10}} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \dots$ vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5} &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^{10}} \times (1-x^{10}) \\ &= (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + \dots) (1-x^{10}) \\ &= C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_9x^9 + (C_{10} - C_0)x^{10} + (C_{11} - C_1)x^{11} + \dots \\ &= B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + \dots \end{aligned}$$

Então, devemos ter

$$\begin{cases} C_0 = B_0 = 1, C_1 = B_1 = 1, C_2 = B_2 = 1, C_3 = B_3 = 1, C_4 = B_4 = 1 \\ C_5 = B_5 = 2, C_6 = B_6 = 2, C_7 = B_7 = 2, C_8 = B_8 = 2, C_9 = B_9 = 2 \\ C_{10} = B_{10} + C_0 = 3 + 1 = 4, C_{11} = B_{11} + C_1 = 3 + 1 = 4 \\ C_{12} = B_{12} + C_2 = 3 + 1 = 4, C_{13} = B_{13} + C_3 = 3 + 1 = 4 \\ C_{14} = B_{14} + C_4 = 3 + 1 = 4 \end{cases}$$

Os próximos cinco coeficientes também são iguais:

$$\begin{cases} C_{15} = B_{15} + C_5 = 4 + 2 = 6, C_{16} = B_{16} + C_6 = 4 + 2 = 6 \\ C_{17} = B_{17} + C_7 = 4 + 2 = 6, C_{18} = B_{18} + C_8 = 4 + 2 = 6 \\ C_{19} = B_{19} + C_9 = 4 + 2 = 6 \end{cases}$$

Os próximos cinco coeficientes também são iguais:

$$\begin{cases} C_{20} = B_{20} + C_{10} = 5 + 4 = 9, C_{21} = B_{21} + C_{11} = 5 + 4 = 9 \\ C_{22} = B_{22} + C_{12} = 5 + 4 = 9, C_{23} = B_{23} + C_{13} = 5 + 4 = 9 \\ C_{24} = B_{24} + C_{14} = 5 + 4 = 9 \end{cases}$$

E assim sucessivamente:

O termo geral obtém-se da seguinte maneira:

De C_{10n} até C_{10n+4} , o valor é $(n+1)^2$, enquanto que de C_{10n+5} até C_{10n+9} , o valor é $(n+1)^2 + n + 1 = (n+2)(n+1)$.

Então,

$$C_n = \left(1 + \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right)^2 + \left\lfloor \frac{n - 10 \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor}{5} \right\rfloor \left(1 + \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor\right)$$

Talvez seja mais fácil definir a sucessão do seguinte modo:

$$\begin{cases} C_{10n} = C_{10n+1} = C_{10n+2} = C_{10n+3} = C_{10n+4} = (n+1)^2 \\ C_{10n+5} = C_{10n+6} = C_{10n+7} = C_{10n+8} = C_{10n+9} = (n+1)^2 + n + 1 = (n+2)(n+1) \end{cases}$$

Calculemos C_{83} :

$$C_{83} = C_{10 \times 8 + 3} = (1+8)^2 = 81$$

E obtivemos o mesmo valor encontrado pelo outro processo.

Se quisermos encontrar C_{87} , fazemos

$$C_{87} = C_{8 \times 10 + 7} = 10 \times 9 = 90$$

Exemplo 639 Consideremos a progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 2. Qual a função geradora associada a esta sucessão?

Resolução

Consideremos a série de potências $1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^k x^k + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x^k = f(x)$.

Então, $2xf(x) = 2x + 4x^2 + \dots + 2^{k+1}x^{k+1} + \dots = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x^k$

Logo,

$$\begin{aligned} 1 + 2xf(x) &= 1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^{k+1}x^{k+1} + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x^k \\ &= 2^0 x^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k x^k = f(x) \end{aligned}$$

Então, $1 + 2xf(x) = f(x)$, donde se conclui que $1 = (1 - 2x)f(x)$ e, por fim, que $f(x) = \frac{1}{1-2x}$, resultado este que todos conhecem das séries geométricas, com $|2x| < 1$, ou seja, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Exemplo 640 Considere a sucessão, análoga à sucessão de Fibonacci, definida por recorrência da seguinte maneira: $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = 4 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$. Qual a função geradora associada a esta sucessão?

Resolução

Consideremos a função $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_kx^k + \dots$

Então,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k + \cdots \\
 &= a_0 + a_1x + (a_1 + a_0)x^2 + (a_2 + a_1)x^3 + (a_3 + a_2)x^4 + \cdots + (a_{k+1} + a_k)x^{k+2} + \cdots \\
 &= a_0 + a_1x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots + a_{k+1}x^{k+2} + \cdots \\
 &\quad + a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_kx^k + \cdots \\
 &= a_0 + a_1x + x(-a_0 + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots) \\
 &\quad + x^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{k-2}x^{k-2} + \cdots) \\
 &= a_0 + a_1x - a_0x + xf(x) + x^2f(x) \\
 &= a_0 + (a_1 - a_0)x + xf(x) + x^2f(x) \\
 &= 3 + (4 - 3)x + xf(x) + x^2f(x) \\
 &= 3 + x + xf(x) + x^2f(x)
 \end{aligned}$$

Então, $f(x) - xf(x) - x^2f(x) = x + 3$, donde se conclui que $f(x) = \frac{3+x}{1-x-x^2} = -\frac{x+3}{x^2+x-1}$.

Observação

Há uma maneira de obtermos a série, a partir de $\frac{3+x}{1-x-x^2}$:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3 \quad x \\
 -3 \quad 3x \quad 3x^2 \\
 \hline
 \quad 4x \quad 3x^2 \\
 \quad -4x \quad 4x^2 \quad 4x^3 \\
 \hline
 \quad \quad 7x^2 \quad 4x^3 \\
 \quad \quad -7x^2 \quad 7x^3 \quad 7x^4 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 11x^3 \quad 7x^4 \\
 \quad \quad \quad -11x^3 \quad 11x^4 \quad 11x^5 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 18x^4 \quad 11x^5
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{r}
 1 \quad -x \quad -x^2 \\
 \hline
 3 \quad 4x \quad 7x^2 \quad 11x^3
 \end{array} \right.$$

E o processo continua, nunca terminando.

Note-se que os termos da sucessão dada são 3, 4, 7, 11, 18, 25, ...

Se quisermos obter o caso geral, basta deixarmos a_0 e a_1 , obtendo-se:

$$f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + xf(x) + x^2f(x)$$

Então, $f(x) - xf(x) - x^2f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x$, donde vem $f(x) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0)x}{1 - x - x^2}$.

No caso acabado de resolver, tínhamos $a_0 = 3$ e $a_1 = 4$, pelo que obtemos $f(x) = \frac{3+x}{1-x-x^2}$.

No caso da sucessão de Fibonacci, $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, pelo que obtemos $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$.

Note-se que se considerarmos $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$, a função geradora é diferente: $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

É evidente que a série de potência associada também é diferente.

Exemplo 641 Há dois problemas do Capítulo dedicado ao jornal escolar Choque Mate que têm soluções análogas. Em ambos os problemas, aparece a sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por recorrência da seguinte maneira:

seguinte maneira: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Vamos adaptar ligeiramente, a sucessão, definindo-a por $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$. A única diferença reside em que esta segunda sucessão tem mais um termo. Determine o termo geral da sucessão e a função geradora associada.

Resolução

O termo geral pode ser obtido de várias maneiras, sendo que uma delas é a seguinte:

Seja $b_n = k + a_n$. Então, $\begin{cases} b_0 = k + a_0 = k \\ b_1 = k + a_1 = k + 1 \\ b_2 = k + a_2 = k + 3 \end{cases}$. Determinemos k , de modo que $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_1}{b_0}$:

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_1}{b_0} &\iff \frac{k+3}{k+1} = \frac{k+1}{k} \iff k^2 + 3k = k^2 + 2k + 1 \\ &\iff 3k = 2k + 1 \iff k = 1 \end{aligned}$$

Então, $\begin{cases} b_n = 1 + a_n \\ b_{n+1} = 1 + a_{n+1} = 1 + 2a_n + 1 = 2 + 2a_n = 2(1 + a_n) \end{cases}$, pelo que $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2(1+a_n)}{1+a_n} =$

2, para todo o número inteiro não negativo. Logo, trata-se duma progressão geométrica de razão

2. Então, $b_n = b_0 \times 2^n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

E, podemos determinar o termo geral $a_n = b_n - 1 = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

A série de potências associada é $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$, ou seja, a série $f(x) = 0 + x + 3x^2 + 7x^3 + \dots + (2^k - 1)x^k + (2^{k+1} - 1)x^{k+1} + \dots$

Então, $xf(x) = x^2 + 3x^3 + 7x^4 + \dots + (2^k - 1)x^{k+1} + \dots$, pelo que

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) &= x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \dots + (2^{k+1} - 1 - 2^k + 1)x^{k+1} + \dots \\ &= x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \dots + 2^k x^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

Trata-se duma série geométrica, cujo primeiro termo é x e cuja razão é 2.

Então, temos $f(x) - xf(x) = \frac{x}{1-2x}$, donde vem $(1-x)f(x) = \frac{x}{1-2x}$ e, por fim, $f(x) = \frac{\frac{x}{1-2x}}{(1-x)(1-x)} = \frac{x}{2x^2-3x+1}$.

Exemplo 642 Considere a sucessão definida por $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = bx_n + c, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$, com a, b, c números reais "convenientes". Determine o termo geral da sucessão.

Resolução

Ora, $\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = ba + c \\ x_2 = b(ba + c) + c \end{cases}$, pelo que vamos considerar a sucessão em que todos os termos são

os de (x_n) somados de k .

Então, $\begin{cases} y_0 = a + k \\ y_1 = ba + c + k \\ y_2 = b(ba + c) + c + k \end{cases}$. Pretendemos que esta última sucessão seja uma progressão

geométrica de razão b , pelo que devemos ter

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y_0 = a + k \\ y_1 = ba + c + k = ab + bk \\ y_2 = b(ba + c) + c + k = ab^2 + b^2k \end{cases} \implies \begin{cases} y_0 = a + k \\ c + k = bk \\ b^2a + bc + c = ab^2 + b^2k - k \end{cases} \\ \implies &\begin{cases} c = bk - k \\ bc + c = (b^2 - 1)k \end{cases} \implies \begin{cases} c = k(b - 1) \\ c(b + 1) = (b - 1)(b + 1)k \end{cases} \\ \implies &k = \frac{c}{b - 1}, \text{ com } b \neq 1 \wedge b \neq -1 \wedge b \neq 0 \end{aligned}$$

Então, $y_0 = a + k = a + \frac{c}{b-1}$, pelo que o termo geral da progressão geométrica é $y_n = \left(a + \frac{c}{b-1}\right) b^n$.

Então,

$$x_n = \left(a + \frac{c}{b-1}\right) b^n - \frac{c}{b-1}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Note-se que, em rigor, nada foi demonstrado. Temos de mostrar (como no exemplo anterior) que $\frac{y_{n+1}}{y_n} = b, \forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{k + x_{n+1}}{k + x_n} = \frac{k + bx_n + c}{k + x_n} = \frac{\frac{c}{b-1} + bx_n + c}{\frac{c}{b-1} + x_n} = \frac{c + b(b-1)x_n + cb - c}{c + (b-1)x_n} \\ &= \frac{b(b-1)x_n + bc}{c + (b-1)x_n} = b \times \frac{(b-1)x_n + c}{c + (b-1)x_n} = b \end{aligned}$$

Uma maneira mais simples de encontrar k , consiste em partir do princípio que a razão da progressão geométrica será b , bastando fazer $\frac{y_1}{y_0} = k$.

Dessa maneira, teríamos

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{y_0} &= b \iff \frac{ab + c + k}{a + k} = b \iff ab + c + k = ab + bk \\ &\iff k - bk = c \iff k(1 - b) = c \iff k = \frac{c}{1 - b} \end{aligned}$$

Note-se que não há nada de estranho, pois temos de mostrar que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma progressão geométrica.

Note-se que os valores "inconvenientes" são $b = -1, b = 0, b = 1$. Se $b = 0$, obtemos um caso trivial (sucessão constante, a partir do segundo termo). Se $b = -1$, temos

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_1 = c - a \\ x_2 = a - c + c = a \\ x_3 = c - a \end{cases} .$$

E o termo geral é $x_n = (-1)^n \left(a - \frac{c}{2}\right) + \frac{c}{2}$

Se $b = 1$, obtemos uma progressão aritmética, em que $x_0 = a$ e a razão é c . Então, $x_n = a + nc$.

No exemplo anterior, tínhamos $a = 0, b = 2, c = 1$.

Então, substituindo as constantes a, b, c (no termo geral acabado de encontrar), vem:

$$x_n = \left(\frac{1}{2-1}\right) 2^n - \frac{1}{2-1} = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Observação

Tudo o que estivemos a fazer pode ser resolvido de forma bastante diferente, usando as equações com diferenças:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = bx_n + c, \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Então, temos $x_{n+1} - bx_n = c$, pelo que começamos por resolver a equação (dita homogênea) $x_{n+1} - bx_n = 0$. Trata-se duma equação a um passo, pelo que a equação característica é $\lambda - b = 0$, ou seja $\lambda = b$.

Então, a solução é $(x_n)_{\text{gh}} = Ab^n$. Se $b \neq 1$, então temos que $(x_n)_p = B$, pelo que devemos ter $B = bB + c$, donde vem $\frac{c}{1-b}$

Então, a solução geral da equação completa é

$$x_n = Ab^n + \frac{c}{1-b}$$

Como temos o valor $x_0 = a$, temos que $Ab^0 + \frac{c}{1-b} = a$, donde vem $A = a - \frac{c}{1-b} = a + \frac{c}{b-1}$.

Então, temos $x_n = \left(a + \frac{c}{b-1}\right)b^n + \frac{c}{1-b}$

Substituindo n por 0, obtemos $x_0 = a$.

Substituindo n por 1, obtemos $x_1 = ab + \frac{bc}{b-1} - \frac{c}{b-1} = ab + \frac{c(b-1)}{b-1} = ab + c$.

29.3.2 Funções Geradoras Exponenciais

Consideremos a sucessão constante em que todos os termos são iguais a 1.

Aplicando esses coeficientes a $\frac{x^0}{0!}, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \dots, \frac{x^k}{k!}, \dots$, obtemos a seguinte série

$$1 \frac{x^0}{0!} + 1 \frac{x}{1!} + 1 \frac{x^2}{2!} + 1 \frac{x^3}{3!} + \dots + 1 \frac{x^k}{k!} + \dots$$

Ora, sabemos que a série anterior converge para e^x . Note-se a diferença para o caso das funções geradoras ordinárias, onde com a mesma sucessão obtínhamos a série $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots$, obtendo-se a função $\frac{1}{1-x}$.

Do mesmo modo, temos alguns casos semelhantes a e^x , começando pela própria função e^x :

A sucessão $(1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ origina $1 \frac{x^0}{0!} + 1 \frac{x}{1!} + 1 \frac{x^2}{2!} + 1 \frac{x^3}{3!} + \dots + 1 \frac{x^k}{k!} + \dots = e^x$

A sucessão $(0, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ origina $0 \frac{x^0}{0!} + 1 \frac{x}{1!} + 1 \frac{x^2}{2!} + 1 \frac{x^3}{3!} + \dots + 1 \frac{x^k}{k!} + \dots$, pelo que falta 1, para obtermos e^x .

Então, $0 + 1 \frac{x}{1!} + 1 \frac{x^2}{2!} + 1 \frac{x^3}{3!} + \dots + 1 \frac{x^k}{k!} + \dots = e^x - 1$

$(1, 0, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ origina $1 \frac{x^0}{0!} + 0 \frac{x}{1!} + 1 \frac{x^2}{2!} + 1 \frac{x^3}{3!} + \dots + 1 \frac{x^k}{k!} + \dots = e^x - x$

$(1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ origina $1 \frac{x^0}{0!} + 1 \frac{x}{1!} + 0 \frac{x^2}{2!} + 1 \frac{x^3}{3!} + \dots + 1 \frac{x^k}{k!} + \dots = e^x - \frac{x^2}{2}$

$(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots)$ origina $1 \frac{x^0}{0!} - 1 \frac{x}{1!} + 1 \frac{x^2}{2!} - 1 \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \dots = e^{-x}$

$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 1, 0, \dots)$ origina $1 \frac{x^0}{0!} + 0x + 1 \frac{x^2}{2!} + 0x^3 + 1 \frac{x^4}{4!} + 0x^5 + 1 \frac{x^6}{6!} + \dots =$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh x$$

$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, 1, \dots)$ origina $0 \frac{x^0}{0!} + 1x + 0 \frac{x^2}{2!} + 1x^3 + 0 \frac{x^4}{4!} + 1x^5 + 0 \frac{x^6}{6!} + 1 \frac{x^7}{7!} + \dots =$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh x$$

$(2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots, 2, 0, 2, 0, \dots)$ origina $2 \frac{x^0}{0!} + 0x + 2 \frac{x^2}{2!} + 0x^3 + 2 \frac{x^4}{4!} + 0x^5 + 2 \frac{x^6}{6!} + \dots =$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} = e^x + e^{-x} = 2 \cosh x$$

Daqui, vem a conhecida igualdade $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Note-se que $(1, 1, 1, 1, 1, \dots) + (1, -1, 1, -1, 1, \dots) = (2, 0, 2, 0, 2, \dots)$

Analogamente para a diferença:

$(1, 1, 1, 1, 1, \dots) - (1, -1, 1, -1, 1, \dots) = (0, 2, 0, 2, 0, \dots)$

E $(0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots)$ origina $0 \frac{x^0}{0!} + 2x + 0 \frac{x^2}{2!} + 2x^3 + 0 \frac{x^4}{4!} + 2x^5 + 0 \frac{x^6}{6!} + 2 \frac{x^7}{7!} + \dots = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

$2 \sinh x$

Donde, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Qual a sucessão correspondente a xe^x ?

$$\begin{aligned} xe^x &= \frac{x}{0!} + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots + \frac{x^{k+1}}{k!} + \dots \\ &= \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2 \times 1!} + \frac{3x^3}{3 \times 2!} + \frac{4x^4}{4 \times 3!} + \dots + \frac{(k+1)x^{k+1}}{(k+1)k!} + \dots \\ &= \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \dots + \frac{(k+1)x^{k+1}}{(k+1)!} + \dots \end{aligned}$$

Então, a sucessão correspondente é $(0, 1, 2, 3, 4, \dots, k, k+1, \dots)$

Se quisermos, podemos usar o símbolo \sum :

$$\begin{aligned} xe^x &= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)x^{k+1}}{(k+1)k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)x^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kx^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{kx^k}{k!} \end{aligned}$$

E o coeficiente correspondente a $\frac{kx^k}{k!}$ é k .

Vejamos alguns exemplos de aplicação das funções geradoras exponenciais:

Exemplo 643 Consideremos os algarismos 1, 2, 3. Quantos números naturais, formados por 6 algarismos, podemos formar utilizando os algarismos dados, supondo que temos uma restrição: 1 não pode ser usado mais de 4 vezes, 2 não pode ser usado mais de 3 vezes e 3 não pode ser usado mais do que duas vezes.

Resolução

Consideremos os polinómios $\begin{cases} P_1(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \\ P_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ P_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Ora, $\begin{cases} P_1(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{24}(24 + 24x + 12x^2 + 4x^3 + x^4) \\ P_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{1}{6}(6 + 6x + 3x^2 + x^3) \\ P_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(2 + 2x + x^2) \end{cases}$

Então,

$$\begin{aligned} P_2(x) P_3(x) &= \frac{1}{12} (6 + 6x + 3x^2 + x^3) (2 + 2x + x^2) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^4 + \dots \\ [P_2(x) P_3(x)]^{(4)} &= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{5}{12}x^4 \\ &= \frac{1}{12} (12 + 24x + 24x^2 + 14x^3 + 5x^4) \end{aligned}$$

Seja $Q(x) = P_1(x) [P_2(x) P_3(x)]^{(4)}$. Então,

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= P_1(x) [P_2(x) P_3(x)]^{(4)} \\
 &= \frac{1}{24} (24 + 24x + 12x^2 + 4x^3 + x^4) \frac{1}{12} (12 + 24x + 24x^2 + 14x^3 + 5x^4) \\
 &= \frac{1}{12} \times \frac{1}{24} (24 + 24x + 12x^2 + 4x^3 + x^4) (12 + 24x + 24x^2 + 14x^3 + 5x^4) \\
 &= \frac{1}{288} (288 + 864x + 1296x^2 + 1248x^3 + 852x^4 + \dots) \\
 &= 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{3}x^3 + \frac{71}{24}x^4 + \dots \\
 [Q(x)]^{(4)} &= 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{3}x^3 + \frac{71}{24}x^4 \\
 &= \frac{1}{0!} + \frac{3}{1!}x + \frac{9}{2!}x^2 + \frac{26}{3!}x^3 + \frac{71}{4!}x^4
 \end{aligned}$$

Então, de $71 \frac{x^4}{4!}$, concluimos que há 71 números naturais nas condições do enunciado.

Eis algumas soluções:

Números com um só algarismo: 1, 2, 3 (3 maneiras)

Números com dois algarismos: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33 (9 maneiras)

Números com três algarismos: 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332 (26 maneiras)

Números com quatro algarismos: já são 71 maneiras...

1111, 1112, 1113, 1121, 1122, 1123, 1131, 1132, 1133, 1211, ...

Tentemos obter o resultado de outra maneira:

Com quatro algarismos iguais a 1: 1111 (uma maneira)

Com três (e não mais de três) algarismos iguais a 1: 1112, 1113, ... ($2 \times \binom{4}{3} = 8$ maneiras)

Com dois (e não mais de dois) algarismos iguais a 1: 1122, 1123, 1132, 1133, ... ($4 \times \binom{4}{2} = 24$ maneiras)

Com um (e um só) algarismo igual a 1: 1222, 1223, 1232, 1233, 1322, 1323, 1332, ... ($7 \times \binom{4}{1} = 28$ maneiras)

Sem o algarismo 1: 2223, 2232, 2322, 3222, 2233, 2323, 2332, 3223, 3232, 3322 (10 maneiras)

$$1 + 8 + 24 + 28 + 10 = 71$$

E temos outras respostas a outras perguntas possíveis:

Números com um algarismo: 3 maneiras (1, 2, 3)

Números com dois algarismos: 9 maneiras (11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33)

Números com três algarismos: 26 maneiras (111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133, 211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332)

E todas as respostas estão em $\frac{1}{0!} + \frac{3}{1!}x + \frac{9}{2!}x^2 + \frac{26}{3!}x^3 + \frac{71}{4!}x^4$.

Se considerarmos que há uma maneira de escrevermos um número com zero algarismos, também temos essa resposta.

Nas condições do enunciado, podemos escrever um número com 9 ou menos algarismos. No caso de 9 algarismos, a resposta é mais fácil:

$$\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = 1260$$

Se multiplicarmos os três polinômios e aproveitarmos todos os termos, vem

$$\begin{aligned} R(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{288}x^9 + \frac{1}{32}x^8 + \frac{23}{144}x^7 + \frac{41}{72}x^6 + \frac{3}{2}x^5 + \frac{71}{24}x^4 + \frac{13}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

E, por fim $\frac{1}{288}x^9 = \frac{9!}{288} \times \frac{x^9}{9!} = 1260 \times \frac{x^9}{9!}$.

29.3.3 Exercícios variados

Exemplo 644 Consideremos o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Determine o número de funções de A em A , tais que as funções:

1. Não há restrições sobre as funções
2. São injectivas
3. São estritamente crescentes
4. São estritamente decrescentes
5. São estritamente monótonas
6. São crescentes (em sentido lato)
7. São decrescentes (em sentido lato)
8. São monótonas (em sentido lato)
9. Não são estritamente monótonas
10. Não são monótonas (em sentido lato)

Resolução

1. Há dez possibilidades para a imagem de cada elemento de A , pelo que a resposta é 10^{10} (arranjos com repetição).
2. O número de funções injectivas (neste caso têm de ser bijectivas) é $10! = 3628\,800$
3. Só há uma função estritamente crescente: a função identidade em A
4. Só há uma função estritamente decrescente: aquela em que a imagem de 0 é 9, a imagem de 1 é 8, etc...
5. Logo, só há duas funções estritamente monótonas

6. Esta questão é mais complicada do que as anteriores.

Começamos por recordar que uma função f , de A em A , é crescente se, para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , sempre que tivermos $x_1 \leq x_2$, então temos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Em particular, uma função constante em A é monótona. Então, já temos 10 funções monótonas (as 10 funções constantes). Depois, podemos passar para os casos em que o contradomínio tem dois elementos, etc...

Seguindo este caminho, temos os seguintes casos.

Com um só elemento no contradomínio de f , temos $\binom{10}{1}$ possibilidades.

Com dois e só dois elementos no contradomínio de f , temos $\binom{10}{2}$ possibilidades, para a escolha dos dois elementos, a que vai corresponder $n_i + n_j = 10$, onde i, j são os elementos escolhidos e n_i e n_j são os números de vezes que cada um aparece na tabela que define f . No exemplo seguinte, temos $n_1 = 4$ e $n_8 = 6$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

O número de soluções da equação $n_i + n_j = 10$, com $n_i, n_j \in \mathbb{N}$ é dado por $\binom{9}{1}$

Então, o número de possibilidades deste caso é $\binom{10}{2}\binom{9}{1}$. Note-se que, no caso anterior (um só elemento), a resposta pode ser $\binom{10}{1}\binom{9}{0}$.

Com três e só três elementos no contradomínio de f , temos $\binom{10}{3}$ possibilidades, para a escolha desses elementos e teremos a equação $n_i + n_j + n_k = 10$, em que o número de soluções é dado por $\binom{9}{2}$. Logo, o número de possibilidades é $\binom{10}{3}\binom{9}{2}$.

Analogamente, teremos $\binom{10}{r+1}\binom{9}{r}$, com $0 \leq r \leq 9$.

Então, o valor total pretendido é dado por $\sum_{r=0}^9 \binom{10}{r+1}\binom{9}{r} = 92\,378$

A mesma questão pode ser resolvida, seguindo outro caminho:

Sejam n_0 o número de vezes em que a imagem é 0, n_1 o número de vezes em que a imagem é 1, etc... (até n_9).

Então, devemos ter $\sum_{k=0}^9 n_k = 10$

Ora, o número de soluções da equação $\sum_{k=0}^9 n_k = 10$ é dado por $\binom{19}{9} = 92\,378$, pelo que há 92378 funções crescentes (de A em A).

Eis um exemplo duma função crescente em A :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Neste caso, temos $n_1 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 1$, $n_5 = 1$, $n_8 = 3$, tendo-se que as restantes variáveis são iguais a zero.

Também podemos chegar ao mesmo resultado, calculando

$$\left[(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10})^{10} \right]^{(10)}$$

O resultado é $92\,378x^{10} + 48\,620x^9 + 24\,310x^8 + 11\,440x^7 + 5005x^6 + 2002x^5 + 715x^4 + 220x^3 + 55x^2 + 10x + 1$, pelo que o termo que nos interessa é $92\,378x^{10}$, pelo que a resposta é 92 378.

7. A resposta é (manifestamente) 92 378.
8. O número de funções monótonas é $2 \times 92\,378 = 184\,756$.
9. $10^{10} - 2 = 9999\,999\,998$
10. $10^{10} - 184\,756 = 9999\,815\,244$

Exemplo 645 Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ e $C = \{21, 22, 23, 24, 25\}$. Indique o número de aplicações:

1. de A em A
2. de A em B
3. de B em C
4. injectivas, de A em A
5. injectivas, de A em B
6. sobrejectivas, de A em B
7. sobrejectivas, de A em A
8. sobrejectivas, de B em A
9. sobrejectivas, de B em C
10. bijectivas, de A em A
11. estritamente crescentes, de A em B
12. estritamente decrescentes, de A em B
13. estritamente crescentes, de C em B
14. crescentes (em sentido lato), de C em B
15. monótonas (em sentido lato), de C em B
16. estritamente monótonas, de C em B

Resolução

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ e $C = \{21, 22, 23, 24, 25\}$

1. Aplicações de A em A : $6^6 = 46\,656$ (há seis possibilidades para a imagem de 1, seis possibilidades para a imagem de 2, etc...)
2. Aplicações de A em B : $7^6 = 117\,649$ (há sete possibilidades para a imagem de 1, etc...)
3. Aplicações de B em C : $5^7 = 78\,125$
4. Aplicações injectivas, de A em A : $6! = 720$ (há seis possibilidades para a imagem de 1, cinco possibilidades para a imagem de 2, etc...)
5. Aplicações injectivas, de A em B : $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 5040$ (arranjos simples)
6. Aplicações sobrejectivas, de A em B : Nenhuma, porque B tem mais elementos do que A . Note que o contradomínio duma aplicação nunca pode ter mais elementos do que o domínio.
7. Aplicações sobrejectivas, de A em A : $6! = 720$
8. Quando escolhi as perguntas para este exemplo, pensei que o número de aplicações sobrejectivas de um conjunto noutro com menos elementos, fosse uma questão mais fácil do que, na realidade, é.

Aplicações sobrejectivas, de B em A : Tirando o caso fácil em que os dois conjuntos têm o mesmo número (finito) de elementos, este é o caso mais fácil, pois o domínio só tem mais um elemento do que o conjunto de chegada. Ora, vai haver dois elementos com uma mesma imagem. Então, há $\binom{7}{2} = 21$ escolhas para esses dois elementos e 6 escolhas para a sua imagem. Depois, temos 5 objectos para 5 imagens. Então, o número pedido é de $\binom{7}{2} \times 6 \times 5! = \binom{7}{2} \times 6! = 15\,120$.

Repare-se que é como se os dois números escolhidos funcionassem como um só.

Então, no caso em temos $n + 1$ elementos no conjunto de partida (domínio) e n elementos no conjunto de chegada, o número de aplicações sobrejectivas é $\binom{n+1}{2} \times n!$

9. Aplicações sobrejectivas, de B em C : Como a diferença de elementos é 2, isso significa que vamos ter mais hipóteses do que na alínea anterior, em que só havia dois números com a mesma imagem. Agora, podemos ter três elementos com a mesma imagem, mas não é obrigatório que isso aconteça.

1ª situação: há três elementos de B que têm a mesma imagem.

Suponhamos que 2 aparece 3 vezes na tabela que define a função:

$$f = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 22 & 22 & 22 & 24 & 21 & 23 & 25 \end{pmatrix}$$

Há $\binom{7}{3} \times 4! = 840$ maneiras de colocar os números da segunda linha da tabela anterior. Mas, o número que se repete pode ser qualquer um dos cinco elementos de C .

Logo, há $5 \times \binom{7}{3} \times 4! = 4200$ maneiras de haver três objectos com a mesma imagem (e nos restantes, objectos diferentes têm imagens diferentes entre si e diferentes da imagem "repetida").

2ª situação: há dois pares de elementos de B que têm a mesma imagem (pares diferentes com imagens diferentes).

Vejamos uma possibilidade:

$$f = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 22 & 22 & 24 & 24 & 21 & 23 & 25 \end{pmatrix}$$

Os números da segunda linha podem ser trocados entre si de $\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times 3! = 1260$ maneiras. Só que, em vez de 22 e 24, podemos escolher outros dois números. Isso pode ser feito de $\binom{5}{2}$ maneiras. Logo, temos $\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{5}{2} \times 3! = 12\,600$ maneiras.

Logo, o número pretendido é $4200 + 12\,600 = 16\,800$.

Outra maneira de resolver esta questão:

Seja \mathcal{F} a família (ou o conjunto) de todas as aplicações de B em C . Seja \mathcal{F}_{21} o conjunto de todas as funções f , de B em C , tais que $21 \notin D!_f$, onde $D!_f$ representa o contradomínio de f . É evidente que as funções pertencentes a \mathcal{F}_{21} não são sobrejectivas.

Analogamente, consideremos \mathcal{F}_{22} , \mathcal{F}_{23} , \mathcal{F}_{24} e \mathcal{F}_{25} , em que $22 \notin D!_f$, $23 \notin D!_f$, $24 \notin D!_f$ e $25 \notin D!_f$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{F}_{21} \cup \mathcal{F}_{22} \cup \mathcal{F}_{23} \cup \mathcal{F}_{24} \cup \mathcal{F}_{25}$. Ora, este conjunto é formado por todas as funções de B em C , que não são sobrejectivas.

Então, basta-nos encontrar o número de elementos deste conjunto.

Ora, $\#\mathcal{F}_{21} = |\mathcal{F}_{21}|$ é o número de funções de $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ em $\{22, 23, 24, 25\}$. Então, $\#\mathcal{F}_{21} = |\mathcal{F}_{21}| = 4^7 = 16\,384$.

Do mesmo modo, $\#\mathcal{F}_{22} = |\mathcal{F}_{22}| = \#\mathcal{F}_{23} = \#\mathcal{F}_{24} = \#\mathcal{F}_{25} = 4^7 = 16\,384$.

Quantos elementos (quantas funções) tem $\mathcal{F}_{21} \cap \mathcal{F}_{22}$? Nesta intersecção, temos as funções de B em $\{23, 24, 25\}$, ou seja, $|\mathcal{F}_{21} \cap \mathcal{F}_{22}| = 3^7 = 2187$.

E analogamente para os restantes casos $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$, com $i \neq j$.

E $|\mathcal{F}_{21} \cap \mathcal{F}_{22} \cap \mathcal{F}_{23}| = 2^7 = 128$, $|\mathcal{F}_{21} \cap \mathcal{F}_{22} \cap \mathcal{F}_{23} \cap \mathcal{F}_{24}| = 1$ e $|\mathcal{F}_{21} \cap \mathcal{F}_{22} \cap \mathcal{F}_{23} \cap \mathcal{F}_{24} \cap \mathcal{F}_{25}| = 0$.

Então,

$$\begin{aligned} X &= |\mathcal{F}_{21} \cup \mathcal{F}_{22} \cup \mathcal{F}_{23} \cup \mathcal{F}_{24} \cup \mathcal{F}_{25}| \\ &= 5 \times 4^7 - \binom{5}{2} \times 3^7 + \binom{5}{3} \times 2^7 - \binom{5}{4} \times 1 + 0 \\ &= 5 \times 4^7 - 10 \times 3^7 + 10 \times 2^7 - 5 \times 1 + 0 \\ &= 61\,325 \end{aligned}$$

Por fim, temos que o número de funções sobrejectivas é $5^7 - 61\,325 = 16\,800$

10. Aplicações bijectivas, de A em A : $6! = 720$

11. As aplicações estritamente crescentes são injectivas, pelo que tem de haver um elemento de B que não faz parte do contradomínio da função.

Então, o número pedido é $\binom{7}{1} \times 1 = 7$. Uma vez escolhido o elemento que não é imagem, só há uma maneira de "colocar" os restantes.

Por exemplo, no caso em que 14 não é imagem, temos a função

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

12. Neste caso, a resposta é 14, porque há 7 funções estritamente crescentes e 7 estritamente decrescentes.
13. Funções estritamente crescentes de C em B : Como B tem mais dois elementos que C , temos de deixar dois elemento de "fora". Então, temos $\binom{7}{2} \times 1 = 21$ funções estritamente crescentes de C em B .
14. Funções de C em B , crescentes em sentido lato:

A situação já é mais complicada do que as anteriores.

$$f = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Repare-se que o contradomínio de f pode ter de 1 a 5 elementos.

Em primeiro lugar, vamos considerar o número de vezes que cada elemento de B aparece na segunda linha da tabela anterior.

Seja x_{11} o número de vezes que 11 aparece, x_{12} o número de vezes que 12 aparece, etc..., até x_{17} . É claro que não podem aparecer mais do que cinco elementos.

Precisamos de saber quantas soluções tem a equação $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 5$, com as sete variáveis números inteiros não negativos: $\binom{11}{6} = 462$.

Suponhamos que temos $x_{12} = x_{15} = 2, x_{17} = 1$, com as restantes variáveis nulas. Então, a função é

$$f = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 12 & 12 & 15 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Logo, temos uma função para cada solução da equação $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} = 5$. Isso significa que há $\binom{11}{6} = 462$ funções crescentes em sentido lato (de C em B).

15. Neste caso, o número de funções monótonas, em sentido lato, é o dobro de 462, ou seja, 924.
16. Estritamente monótonas, de C em B :
Escolha das imagens: $\binom{7}{5} = 21$. Então, temos 42 funções estritamente monótonas (21 crescentes e 21 decrescentes).

Exemplo 646 Consideremos os conjuntos $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}$ e $A_{n+m} = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2, \dots, n+m\}$, com n, m números naturais arbitrários. Qual o número de funções sobrejectivas de A_{n+m} em A_n ?

Resolução

Seja \mathcal{F} a família (ou o conjunto) de todas as aplicações de A_{n+m} em A_n . Seja \mathcal{F}_k o conjunto de todas as funções f , de A_{n+m} em A_n , tais que $k \notin Df$, onde Df representa o contradomínio de f . É evidente que as funções pertencentes a \mathcal{F}_k são as funções não sobrejectivas (de A_{n+m} em A_n).

Então, $\#\mathcal{F}_k = |\mathcal{F}_k| = (n-1)^{n+m}$, para $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Por outro lado, $\#(\mathcal{F}_{k_1} \cap \mathcal{F}_{k_2}) = |\mathcal{F}_{k_1} \cap \mathcal{F}_{k_2}| = (n-2)^{n+m}$, para $k_1, k_2 \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, k_1 < k_2$.

E $|\mathcal{F}_{k_1} \cap \mathcal{F}_{k_2} \cap \mathcal{F}_{k_3}| = (n-3)^{n+m}$, para $k_1, k_2, k_3 \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, k_1 < k_2 < k_3$.

E o processo continua, até chegarmos a

$$\begin{cases} \#(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \dots \cap \mathcal{F}_{n-2}) = |\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \dots \cap \mathcal{F}_{n-2}| = 2^{n+m} \\ \#(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \dots \cap \mathcal{F}_{n-2} \cap \mathcal{F}_{n-1}) = |\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \dots \cap \mathcal{F}_{n-2} \cap \mathcal{F}_{n-1}| = 1^{n+m} \\ \#(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n) = |\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \dots \cap \mathcal{F}_n| = 0 \end{cases}$$

Então, o número de funções não sobrejectivas (de A_{n+m} em A_n) é

$$\binom{n}{1} (n-1)^{n+m} - \binom{n}{2} (n-2)^{n+m} + \binom{n}{3} (n-3)^{n+m} - \dots = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^{n+m}$$

Logo, o número S de aplicações sobrejectivas é dado por

$$\begin{aligned} S &= n^{n+m} - \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^{n+m} \right) \\ &= \binom{n}{0} (n-0)^{n+m} - \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)^{n+m} \right) \\ &= \binom{n}{0} (n-0)^{n+m} + \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n+m} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{n+m} \end{aligned}$$

Observação

Se representarmos o número de elementos do domínio (A) por n e o número de elementos do conjunto de chegada (B) por k , temos que o número S de funções sobrejectivas de A em B , é dado por

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{k-j} (k-j)^n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

Fizemos $k-j=i$, para obtermos a última expressão.

Se quisermos, podemos manter a letra j : $\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$

Exemplo 647 De quantas maneiras podemos obter 1 euro, utilizando (uma ou mais) moedas?

Resolução

As moedas existentes são de 1, 2, 5, 10, 20, 50 cêntimos e 1 euro (a de dois euros não nos interessa para esta questão).

Sejam $x_1, x_2, x_5, x_{10}, x_{20}, x_{50}, x_{100}$ os números de moedas de 1, 2, 5, 10, 20, 50 e 100 cêntimos.

Então, queremos saber quantas soluções tem a equação $1x_1 + 2x_2 + 5x_5 + 10x_{10} + 20x_{20} + 50x_{50} + 100x_{100} = 100$.

Podemos retirar a variável x_{100} , contando com uma solução correspondente a uma moeda de um euro e nenhuma das restantes.

Há outra solução: duas moedas de 50 cêntimos. Então, já temos duas soluções.

Faltam as soluções com uma moeda de 50 cêntimos e as soluções sem nenhuma moeda de 50 cêntimos.

No primeiro caso, temos $x_1 + 2x_2 + 5x_5 + 10x_{10} + 20x_{20} = 50$ e, no segundo caso, temos $x_1 + 2x_2 + 5x_5 + 10x_{10} + 20x_{20} = 100$

Consideremos o produto

$$P = (1 + x + x^2 + \dots) (1 + x^2 + x^4 + \dots) A(x) B(x) C(x)$$

$$\text{com} \begin{cases} A(x) = 1 + x^{10} + x^{20} + x^{30} + x^{40} + x^{50} + x^{60} + x^{70} + x^{80} + x^{90} + x^{100} \\ B(x) = 1 + x^{20} + x^{40} + x^{60} + x^{80} + x^{100} \\ C(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25} + x^{30} + x^{35} + x^{40} + x^{45} + x^{50} + x^{55} + x^{60} + x^{65} \\ \quad + x^{70} + x^{75} + x^{80} + x^{85} + x^{90} + x^{95} + x^{100} \end{cases}$$

Então,

$$A(x) B(x) = \dots + 6x^{100} + 5x^{90} + 5x^{80} + 4x^{70} + 4x^{60} + 3x^{50} + 3x^{40} + 2x^{30} + 2x^{20} + x^{10} + 1$$

E

$$\begin{aligned} A(x) B(x) C(x) &= \dots + 36x^{100} + 32x^{95} + 30x^{90} + 26x^{85} + 25x^{80} + 22x^{75} + 20x^{70} \\ &\quad + 17x^{65} + 16x^{60} + 13x^{55} + 12x^{50} + 9x^{45} + 9x^{40} + 6x^{35} + 6x^{30} \\ &\quad + 4x^{25} + 4x^{20} + 2x^{15} + 2x^{10} + x^5 + 1 \end{aligned}$$

Produto de séries:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + \dots$$

Então, $(1 + x + x^2 + \dots) (1 + x^2 + x^4 + \dots) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \dots$

Qual o coeficiente do termo em x^{20} ? A resposta é 11, valor que se pode obter do seguinte modo: $\frac{20}{2} + 1 = 11$. E o coeficiente do termo em x^{21} ? A resposta continua a ser 11, sendo que o valor pode ser obtido da seguinte forma: $\frac{21+1}{2} = 11$. Então, o coeficiente do termo em x^{2n} é $n + 1$ e o coeficiente do termo em x^{2n+1} também é $n + 1$.

termo em...	x^0	x^5	x^{10}	x^{15}	x^{20}	x^{25}	x^{30}	x^{35}	x^{40}	x^{45}	x^{50}
coeficiente	1	3	6	8	11	13	16	18	21	23	26

termo em...	x^{55}	x^{60}	x^{65}	x^{70}	x^{75}	x^{80}	x^{85}	x^{90}	x^{95}	x^{100}
coeficiente	28	31	33	36	38	41	43	46	48	51

$$\text{Sejam} \begin{cases} u = (1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 21, 23, 26, 28, 31, 33, 36, 38, 41, 43, 46, 48, 51) \\ v = (36, 32, 30, 26, 25, 22, 20, 17, 16, 13, 12, 9, 9, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 1, 1) \end{cases}.$$

Então, $u \cdot v = 4192$

$$u = (1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 21, 23, 26, 28, 31, 33, 36, 38, 41, 43, 46, 48, 51)$$

$$v = (36, 32, 30, 26, 25, 22, 20, 17, 16, 13, 12, 9, 9, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$$

E para o produto dar 50?

$$\text{Sejam } \begin{cases} u = (1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 21, 23, 26) \\ v = (12, 9, 9, 6, 6, 4, 4, 2, 2, 1, 1) \end{cases}$$

Então, $u \cdot v = 450$

Logo, temos $4192 + 450 + 2 = 4644$ soluções.

Exemplo 648 De quantas maneiras podemos perfazer 1 euro, sem utilizar moedas de dois cêntimos?

Resolução

A questão fica um pouco mais fácil, se não utilizarmos moedas de dois cêntimos (ou se não utilizarmos moedas de um cêntimo).

Sejam $x_1, x_5, x_{10}, x_{20}, x_{50}, x_{100}$ os números de moedas de 1, 2, 5, 10, 20, 50 e 100 cêntimos.

Então, queremos saber quantas soluções tem a equação $x_1 + 5x_5 + 10x_{10} + 20x_{20} + 50x_{50} + 100x_{100} = 100$.

É imediato concluir que x_1 tem de ser múltiplo de 5. Logo, $x_1 = 5X_1$, com X_1 um número inteiro não negativo. Fazendo $X_i = x_i$, para $i = 5, 10, 20, 50, 100$, temos

$$5X_1 + 5X_5 + 10X_{10} + 20X_{20} + 50X_{50} + 100X_{100} = 100, \text{ ou seja, } X_1 + X_5 + 2X_{10} + 4X_{20} + 10X_{50} + 20X_{100} = 20.$$

Se $X_{100} = 1$, temos $X_1 = X_5 = X_{10} = X_{20} = X_{50} = 0$, obtendo-se uma solução.

Nas restantes soluções, temos $X_{100} = 0$.

Se $X_{50} = 2$, temos $X_1 = X_5 = X_{10} = X_{20} = X_{100} = 0$, obtendo-se uma nova solução.

Se $X_{50} = 1$, devemos ter $X_1 + X_5 + 2X_{10} + 4X_{20} = 10$

Se $X_{50} = 0$, devemos ter $X_1 + X_5 + 2X_{10} + 4X_{20} = 20$

1º Caso: $X_1 + X_5 + 2X_{10} + 4X_{20} = 10$

É imediato que $X_{20} \leq 2$, $X_{10} \leq 5$, $X_1 \leq 10$, $X_5 \leq 10$

Então, calculemos o produto $\left(\sum_{k=0}^{10} x^k\right)^2 \left(\sum_{k=0}^5 x^{2k}\right) (1 + x^4 + x^8)$:

$$\begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{10} x^k\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 9x^8 + 10x^9 + 11x^{10} + \dots \\ (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}) (1 + x^4 + x^8) = \dots + 3x^{10} + 3x^8 + 2x^6 + 2x^4 + x^2 + 1 \end{cases}$$

O termo em x^{10} (do produto) tem coeficiente $3 + 9 + 10 + 14 + 9 + 11 = 56$, pelo que temos 56 soluções neste 1º caso.

2º Caso: $X_1 + X_5 + 2X_{10} + 4X_{20} = 20$

Consideremos o produto $\left(\sum_{k=0}^{10} x^k\right)^2 \left(\sum_{k=0}^{10} x^{2k}\right) (1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20})$

Ora,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^{10} x^{2k}\right) (1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20}) \\ = & \dots + 6x^{20} + 5x^{18} + 5x^{16} + 4x^{14} + 4x^{12} + 3x^{10} + 3x^8 + 2x^6 + 2x^4 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

E, como já vimos,

$$\left(\sum_{k=0}^{10} x^k\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 9x^8 + 10x^9 + 11x^{10} + \dots$$

Então, o termo em x^{20} do produto $\left(\sum_{k=0}^{10} x^k\right)^2 \left(\sum_{k=0}^{10} x^{2k}\right) (1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20})$ é

$$6 + 15 + 25 + 28 + 36 + 33 = 143$$

Logo, o número total de soluções é $2 + 56 + 143 = 201$.

Exemplo 649 *De quantas maneiras podemos colocar 25 bolas idênticas em 7 caixas numeradas (de 1 a 7), de modo a que não fique nenhuma caixa com mais de 8 bolas.*

Resolução

Uma das maneiras é resolver a questão à força (bruta):

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^7 \\ &= \dots + 270\,466x^{27} + 262\,626x^{26} + 250\,026x^{25} + 233\,331x^{24} + 213\,402x^{23} + \dots \end{aligned}$$

Como sempre, o cálculo foi feito pelo computador.

Se não quisermos (ou não pudermos) usar o computador para calcular $P(x)$, temos de usar mais conhecimentos.

Seja x_i o número de bolas que são colocadas na caixa i , com $1 \leq i \leq 7$. Seja A_i o conjunto de todas as soluções da equação $\sum_{i=1}^7 x_i = 25$ (com $1 \leq i \leq 7$), em que $x_i \geq 9$.

Então, temos $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25$, com uma das variáveis (pelo menos) maior ou igual a 9.

Para facilitar, suponhamos que $x_1 \geq 9$. Então, podemos fazer $x_1 = X_1 + 9$, obtendo-se a equação $X_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 16$. Agora, temos que todas as variáveis são números inteiros não negativos, não havendo nenhuma restrição (a não ser o valor da soma).

Então, a equação anterior tem $\binom{16+7-1}{6} = \binom{22}{6} = \binom{22}{16} = 74\,613$ soluções.

Logo, $\#A_i = |A_i| = \binom{22}{16} = 74\,613$

Quantas soluções há com duas caixas (pelo menos) com 9 ou mais bolas?

Suponhamos que há mais de 8 bolas nas caixas 1 e 2.

Então, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25$, com $x_1 \geq 9, x_2 \geq 9$.

Fazendo, $x_1 = X_1 + 9, x_2 = X_2 + 9$, vem $X_1 + X_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 7$, onde as variáveis são números inteiros não negativos arbitrários.

Então, o número de soluções é dado por $\binom{7+7-1}{6} = \binom{13}{6} = \binom{13}{7} = 1716$.

Logo, $\#(A_1 \cap A_2) = |(A_1 \cap A_2)| = 1716$. Logo, $\#(A_i \cap A_j) = |(A_i \cap A_j)| = 1716$, com $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq 7$.

Neste caso, não há bolas suficientes para colocar mais de oito bolas em três caixas (seriam precisas 27 ou mais bolas).

Logo, $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = |(A_1 \cap A_2 \cap A_3)| = 0$.

Então, fazendo $N = \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)$, temos

$$\begin{aligned} N &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)| \\ &= 7 \times \#A_1 - \binom{7}{2} \#(A_1 \cap A_2) + \binom{7}{3} \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 7 \times 74\,613 - 21 \times 1716 + 0 = 486\,255 \end{aligned}$$

Representando, como é hábito nas Probabilidades, o conjunto de todas as soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25$, onde as variáveis são inteiros não negativos arbitrários, temos $\#\Omega = \binom{25+7-1}{6} = \binom{25+7-1}{25} = \binom{31}{25} = 736\,281$

Então, a resposta à questão inicial é dada por $\#\Omega - 486\,255 = 736\,281 - 486\,255 = 250\,026$ (coincide com a resposta inicial).

Exemplo 650 *De quantas maneiras podemos colocar 25 bolas idênticas em 7 caixas numeradas (de 1 a 7), de modo a que não fique nenhuma caixa com mais de 6 bolas.*

Resolução

Neste exemplo, temos que a intersecção de três conjuntos é não vazia:

Uma das maneiras é resolver a questão à força (bruta):

$$\begin{aligned} P(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7 \\ &= \dots + 46\,655x^{25} + 52\,374x^{24} + 56\,854x^{23} + 59\,710x^{22} + \dots \end{aligned}$$

Logo, a resposta é 46 655.

Se quisermos mostrar todos os cálculos, a situação complica-se um pouco. Consideremos todas as soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 25$, com todas as variáveis números inteiros não negativos. O número de soluções (com $x_i \leq 25$, para $1 \leq i \leq 6$) é $\binom{30}{25} = \binom{30}{5} = 142\,506$.

Representemos por A_i (para $1 \leq i \leq 6$) o conjunto das soluções que satisfazem $7 \leq x_i \leq 25$. Repare-se, desde já, que podemos colocar 7 bolas (ou mais) num máximo de três caixas.

Se pretendemos que todas as caixas tenham seis bolas, no máximo, o complementar é haver pelo menos uma caixa com mais de seis bolas.

Calculemos $\#A_1 = |A_1|$:

Queremos "resolver" a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25$, com $x_1 \geq 7$. Então, fazemos $x_1 = X_1 + 7$, obtendo-se $X_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 18$, onde todas as variáveis são números inteiros arbitrários. Então, o número de soluções é dado por $\binom{18+7-1}{18} = \binom{24}{18} = 134\,596 = \#A_1 = |A_1|$.

Calculemos $\#(A_1 \cap A_2) = |(A_1 \cap A_2)|$:

Neste caso, temos $X_1 + X_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25 - 14$.

Então, $\#(A_1 \cap A_2) = |(A_1 \cap A_2)| = \binom{11+7-1}{11} = \binom{17}{11} = 12\,376$

Calculemos $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = |(A_1 \cap A_2 \cap A_3)|$:

Neste caso, temos $X_1 + X_2 + X_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25 - 21$.

Então, $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = |(A_1 \cap A_2 \cap A_3)| = \binom{4+7-1}{4} = \binom{10}{4} = 210$

É claro que $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = |(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)| = 0$.

Agora, fazendo $N = \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)$, temos

$$N = 7 \times \binom{24}{18} - \binom{7}{2} \times \binom{17}{11} + \binom{7}{3} \times \binom{10}{4} = 689\,626$$

Falta encontrar o número de elementos do conjunto complementar:

Continuamos a ter $\#\Omega = \binom{25+7-1}{6} = \binom{25+7-1}{25} = \binom{31}{25} = 736\,281$, como no exemplo anterior, pelo que

$$\#\Omega - N = 736\,281 - 689\,626 = 46\,655$$

E a resposta coincide com a que obteríamos, calculando $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^7$.

Então, a resposta à questão inicial é dada por $\#\Omega - 486\,255 = 736\,281 - 486\,255 = 250\,026$ (coincide com a resposta inicial).

Exemplo 651 *Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 75$, com $x_i \in \mathbb{N}_0$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, e $x_1 \geq 20, x_2 \geq 30, x_3 \leq 15, x_4 \leq 15$.*

Resolução

Relativamente aos dois exemplos anteriores, esta equação corresponde a colocar menos de 15 bolas nas caixas 3 e 4 (e só nessas) e colocar 20 ou mais bolas na caixa 1 e 30 ou mais bolas na caixa 2.

A melhor maneira de resolver esta questão, é criar novas variáveis para os casos em que temos o sinal \geq . Então, fazemos $x_1 = x_8 + 20, x_2 = x_9 + 30$.

Substituindo, vem $x_8 + x_9 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25$, com $x_3 \leq 15, x_4 \leq 15$.

Vamos resolver o problema de maneira semelhante aos dois anteriores.

Seja A_3 o conjunto das soluções da equação $x_8 + x_9 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25$, com $x_3 \geq 16$.

Então, temos a equação $x_8 + x_9 + X_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 9$ (fazendo $x_3 = X_3 + 16$). Note-se que x_4 continua sendo um número arbitrário.

Então, o número de soluções é $\binom{9+7-1}{6} = \binom{15}{6} = \binom{15}{9} = 5005$

Neste caso, temos $\#A_3 = \#A_4 = 5005$

Note-se que $\#(A_3 \cap A_4) = 0$, pois temos menos de 32 bolas disponíveis.

Então, $\#(A_3 \cup A_4) = 5005 + 5005 = 10\,010$.

Como, $\#\Omega = \binom{25+7-1}{6} = \binom{31}{6} = 736\,281$, temos que o número de soluções da equação dada é $736\,281 - 10\,010 = 726\,271$.

Podemos resolver esta questão, usando polinómios:

Pretendemos saber o número de soluções da equação $x_8 + x_9 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 25$, com $0 \leq x_3 \leq 15, 0 \leq x_4 \leq 15$ e todas as variáveis números inteiros não negativos.

$$\text{Sejam } \begin{cases} P(x) = \sum_{k=0}^{15} x^k = x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + \dots + x^2 + x + 1 \\ Q(x) = \sum_{k=0}^{25} x^k \end{cases}$$

Então, pretendemos calcular $(P(x))^2 (Q(x))^5$ e verificar qual o coeficiente do termo em x^{25} .

Aqui ficam alguns termos do produto anterior:

$$726\,271x^{25} + 587\,769x^{24} + 471\,588x^{23} + 374\,892x^{22} + 295\,086x^{21} + 229\,810x^{20} + 176\,932x^{19}$$

Logo, a resposta é 726 271.

Exemplo 652 *Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 = 10$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$, com $0 \leq x_1 \leq x_2$?*

Resolução

Trata-se duma questão facilíma, pois podemos encontrar todas as soluções e contá-las.

Ora as soluções são dadas por

$$10 = 0 + 10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5$$

Então, temos seis soluções.

Se tivéssemos $x_1 + x_2 = 10$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$, com $0 \leq x_1 \leq x_2$, as soluções seriam dadas por

$$11 = 0 + 11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$$

E teríamos as mesmas seis soluções. Com mais alguns exemplos, verificamos que há que distinguir entre o caso da soma ser par e o caso da soma ser ímpar.

Assim, se tivermos $x_1 + x_2 = 2m$, com $x_1, x_2, m \in \mathbb{N}_0$, com $0 \leq x_1 \leq x_2$, teremos $m + 1$ soluções, e se tivermos $x_1 + x_2 = 2m + 1$, com $x_1, x_2, m \in \mathbb{N}_0$, com $0 \leq x_1 \leq x_2$, teremos as mesmas $m + 1$ soluções.

Podemos encontrar uma expressão única, dizendo que o número de soluções para $x_1 + x_2 = m$, com $x_1, x_2, m \in \mathbb{N}_0$, com $0 \leq x_1 \leq x_2$, é $1 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro não superior a x .

Exemplo 653 Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, com $x_i \in \mathbb{N}_0$, para $i = 1, 2, 3$ e $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$?

Resolução

Agora, a situação é um pouco pior, pois temos três variáveis, embora seja possível seguir o mesmo processo do exemplo anterior e até podemos aproveitá-lo para facilitar a situação.

Se $x_1 = 0$, temos $x_2 + x_3 = 10$ e já sabemos que há 6 soluções.

Se $x_1 = 1$, temos $x_2 + x_3 = 9$, mas atenção que x_2 não pode ser zero. Logo, teremos (só) 4 soluções.

Se $x_1 = 2$, temos $x_2 + x_3 = 8$, havendo 3 soluções.

Se $x_1 = 3$, temos $x_2 + x_3 = 7$, havendo uma só solução.

Então, o número de soluções é $6 + 4 + 3 + 1 = 14$.

Só que a nossa pergunta é: no caso de termos muitas variáveis e de a soma ser um número muito grande, que fazer?

Dito de outro modo, qual o número de soluções, se tivermos n variáveis e a soma for m ?

Vamos resolver a questão anterior de outro modo:

Se $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$, podemos usar mais variáveis:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + y_1 \\ x_3 = x_2 + y_2 = x_1 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + (x_1 + y_1) + (x_1 + y_1 + y_2) = 3x_1 + 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

Então, temos $3x_1 + 2y_1 + y_2 = 10$, onde as variáveis são números inteiros não negativos.

Então, precisamos do termo de grau 10 do produto $P(x)Q(x)R(x)$, com

$$\begin{cases} P(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 \\ Q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} \\ R(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} \end{cases}$$

Ora,

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (1 + x^3 + x^6 + x^9)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}) \\ &= 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + 2x^8 + 2x^9 + 2x^{10} + \dots \end{aligned}$$

E, por fim, temos

$$P(x)Q(x)R(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 + 10x^8 + 12x^9 + 14x^{10} + \dots$$

Do termo $14x^{10}$, vem que a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, com $x_i \in \mathbb{N}_0$, para $i = 1, 2, 3$ e $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$ tem 14 soluções.

Este exemplo mostra-nos como resolver questões análogas, embora se possa seguir outro caminho (em vez de multiplicar os polinómios, podemos usar séries).

Poderá perguntar-se: para quê usar séries e não polinómios?

Suponhamos que em vez da soma ser 10, tínhamos a soma igual a 100 ou 600 ou 1000 ou 2000. Já não dava jeito nenhum, estarmos a considerar polinómios de grau tão elevado.

Vejamos como podemos ultrapassar o problema, usando séries:

Sejam $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, as sucessões associadas a $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2}$ e $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}$.

Ora, já sabemos que $A_n = 1$, para todo o inteiro não negativo n .

Por outro lado, a função $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times (1-x^2) = \frac{1}{1-x}$ gera A_n .

De $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots$, vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots)(1-x^2) \\ &= B_0 + B_1x + (B_2 - B_0)x^2 + (B_3 - B_1)x^3 + (B_4 - B_2)x^4 + (B_5 - B_3)x^5 + (B_6 - B_4)x^6 + \dots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots \end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{cases} B_0 = B_1 = 1, \\ B_2 - B_0 = 1, B_3 - B_1 = 1, \\ B_4 - B_2 = 1, B_5 - B_3 = 1, \\ B_6 - B_4 = 1, B_7 - B_5 = 1, \dots \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} B_0 = B_1 = 1, B_2 = B_3 = 2, B_4 = B_5 = 3 \\ B_6 = B_7 = 4, B_8 = B_9 = 5, B_{10} = B_{11} = 6, \dots \end{cases}$$

Continuando, temos

$$\begin{cases} B_{10} - B_5 = 1, B_{11} - B_6 = 1, B_{12} - B_7 = 1, B_{13} - B_8 = 1, B_{14} - B_9 = 1 \\ B_{10} = B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{14} = 3 \end{cases}$$

É fácil de encontrar o termo geral da sucessão $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$: $B_n = 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, onde $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é o maior inteiro não superior a $\frac{n}{2}$.

Assim, por exemplo, $B_{73} = 1 + \left\lfloor \frac{73}{2} \right\rfloor = 37$.

Para a sucessão $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, temos:

De $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + \dots$ vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} \times (1-x^3) \\ &= (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + \dots) (1-x^3) \\ &= C_0 + C_1x + C_2x^2 + (C_3 - C_0)x^3 + (C_4 - C_1)x^4 + (C_5 - C_2)x^5 + \dots \\ &= B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5 + B_6x^6 + B_7x^7 + \dots \end{aligned}$$

Então, devemos ter

$$\begin{cases} C_0 = B_0 = 1, C_1 = B_1 = 1, C_2 = B_2 = 2, \\ C_3 = B_3 + C_0 = 2 + 1 = 3, C_4 = B_4 + C_1 = 3 + 1 = 4, C_5 = B_5 + C_2 = 3 + 2 = 5, \\ C_6 = B_6 + C_3 = 4 + 3 = 7, C_7 = B_7 + C_4 = 4 + 4 = 8, C_8 = B_8 + C_5 = 5 + 5 = 10, \dots \end{cases}$$

Mas, não parece haver uma regra simples para encontrar C_n . Será que não existe mesmo?

Ora, $C_{n+3} = B_{n+3} + C_n$ e $C_{n+6} = B_{n+6} + C_{n+3} = B_{n+6} + B_{n+3} + C_n$.

Então, para conhecermos todos os coeficientes C_k basta conhecermos os primeiros seis termos (de C_0 a C_5). Da maneira como (C_n) está definida, vamos ter seis subsucessões.

Por exemplo, teremos $C_0, C_6, C_{12}, \dots, C_1, C_7, C_{13}, \dots$, etc.

Se quisermos definir C_{6n+4} , fazemos $C_{6n+4} = B_{6n+4} + C_{6n+1} = B_{6n+4} + B_{6n+1} + C_{6n-2}$.

Se quisermos, podemos escrever

$$\begin{aligned} C_{6n+10} &= B_{6n+10} + B_{6n+7} + C_{6n+4} = 3n + 6 + 3n + 4 + C_{6n+4} \\ &= 6n + 10 + C_{6n+4} \end{aligned}$$

Perfeito! Agora, se quisermos calcular C_{10} , basta-nos fazer $n = 0$, obtendo-se $C_{10} = 10 + C_4 = 10 + 4 = 14$.

Depois, calculamos $C_{16} = 16 + C_{10} = 16 + 14 = 30$

Repare-se que temos C_{6n+10} , mas podemos usar C_{6n+11} ou C_{6n+m} , para qualquer m natural.

Então, teremos $C_{6n+m} = 6n + m + C_{6n+m-6}$.

Então, $C_{n+6} = n + 6 + C_n$, tendo-se obtido uma equação com diferenças a 6 passos.

Como encontrar C_{100} ? Da maneira mais simples possível:

$$\begin{aligned} C_{100} &= 100 + C_{94} = 100 + 94 + C_{88} = 100 + 94 + 88 + C_{82} \\ &= 100 + 94 + 88 + 82 + C_{76} = \dots \end{aligned}$$

Como estamos a ver, vamos obter a soma dos termos duma progressão aritmética de razão -6 (ou de razão 6, se trocarmos a ordem das parcelas).

Então,

$$\begin{aligned} C_{100} &= 100 + 94 + 88 + 82 + \dots + 10 + C_4 = 100 + 94 + 88 + 82 + \dots + 10 + 4 \\ &= \frac{100+4}{2} \times 17 = 884 \end{aligned}$$

Logo, a equação dada tem 884 soluções.

E se tivéssemos 1000 em vez de 100?

Ora, $\frac{2000}{6} = 333 + \frac{1}{3}$, pelo que $2000 = 6 \times 333 + 2$.

Então, $C_{2000} = \frac{2+2000}{2} \times 334 = 334\,334$.

Note-se que $C_2 = 2$.

E se quisermos obter C_{600} ?

$$\begin{aligned} C_{600} &= 600 + 594 + \cdots + 12 + C_6 = 600 + 594 + \cdots + 12 + C_6 \\ &= 600 + 594 + \cdots + 12 + 6 + 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{100} (6k) = 1 + 6 \sum_{k=1}^{100} k = 1 + 6 \times \frac{101 \times 100}{2} = 30\,301 \end{aligned}$$

Então, para C_{6n} , temos um ligeiro problema (pois $C_0 = 1$ e não zero). Só que se trata dum pequeníssimo problema.

Exemplo 654 Quantas soluções tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, com $x_i \in \mathbb{N}_0$, para $i = 1, 2, 3, 4$ e $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$?

Resolução

Introduzindo mais variáveis, temos

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + y_1 \\ x_3 = x_2 + y_2 = x_1 + y_1 + y_2 \\ x_4 = x_3 + y_3 = x_1 + y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4x_1 + 3y_1 + 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

Digamos que temos uma equação da forma $4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 = 100$, com $X_i \in \mathbb{N}_0$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Agora, precisamos de decompor em série a função

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} \times \frac{1}{1-x^4}$$

Note-se que já sabemos qual a série correspondente a $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}$. Ora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} &= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3} \times \frac{1}{1-x^4} \times (1-x^4) \\ &= (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + \cdots) (1-x^4) \\ &= D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + (D_4 - D_0)x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Então, vamos ter

$$\begin{aligned} D_0 &= C_0, D_1 = C_1, D_2 = C_2, D_3 = C_3, D_4 = C_4 + D_0, \\ D_5 &= C_5 + D_1, D_6 = C_6 + D_2, D_7 = C_7 + D_3, D_8 = C_8 + D_4, \\ D_9 &= C_9 + D_5, D_{10} = C_{10} + D_6, D_{11} = C_{11} + D_7, D_{12} = C_{12} + D_8, \\ D_{13} &= C_{13} + D_9, D_{14} = C_{14} + D_{10}, D_{15} = C_{15} + D_{11}, D_{16} = C_{16} + D_{12}, \cdots \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes C_k , temos

$$\begin{aligned} D_0 &= 1, D_1 = 1, D_2 = 2, D_3 = 3, D_4 = 4 + 1 = 5, D_5 = 5 + 1 = 6, D_6 = 7 + 2 = 9, \\ D_7 &= 8 + 3 = 11, D_8 = 10 + 5 = 15, D_9 = 12 + 6 = 18, D_{10} = 14 + 9 = 23, \\ D_{11} &= 16 + 11 = 27, D_{12} = 19 + 15 = 34, D_{13} = 21 + 18 = 39, \\ D_{14} &= 24 + 23 = 47, D_{15} = 27 + 27 = 54, D_{16} = 30 + 34 = 64, \cdots \end{aligned}$$

Logo, $D_{n+12} = C_{n+12} + D_{n+8} = C_{n+12} + C_{n+8} + D_{n+4} = C_{n+12} + C_{n+8} + C_{n+4} + D_n$.

Então, $D_{6n+12} = C_{6n+12} + C_{6n+8} + C_{6n+4} + D_n$.

Então, conhecidos os primeiros 12 termos de D_n , podemos calcular qualquer termo de D_n , pois já conhecemos todos os valores C_n .

Note-se que, pela propriedade anterior, $D_{13} = C_{13} + C_9 + C_5 + D_1 = 21 + 12 + 5 + 1 = 39$.

Com muita paciência, chegamos a $g(m) = 12m^3 + 18m^2 + 8m + 1$.

Substituindo m por $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, temos

$$\begin{aligned} g(0) &= 1 = D_1, g(1) = 39 = D_{13}, g(2) = 185 = D_{25}, g(3) = 511 = D_{37}, \\ g(4) &= 1089 = D_{49}, g(5) = 1991 = D_{61} \end{aligned}$$

Mas pretendemos obter $D_{100} = D_{8 \times 12 + 4}$, pelo que devemos partir de $D_4 = 5$. Não vamos apresentar muitos pormenores, mas aqui fica o resultado:

$$\text{Então, } \begin{cases} D_{16} = C_{16} + C_{12} + C_8 + D_4 = 30 + 19 + 10 + 5 = 64 \\ D_{28} = C_{28} + C_{24} + C_{20} + D_{16} = 80 + 61 + 44 + 64 = 249 \\ D_{40} = C_{40} + C_{36} + C_{32} + D_{28} = 154 + 127 + 102 + 249 = 632 \\ D_{52} = C_{52} + C_{48} + C_{44} + D_{40} = 252 + 217 + 184 + 632 = 1285 \\ D_{64} = C_{64} + C_{60} + C_{56} + D_{52} = 1285 + 374 + 331 + 290 = 2280 \\ D_{76} = C_{76} + C_{72} + C_{68} + D_{64} = 2280 + 520 + 469 + 420 = 3689 \\ D_{88} = C_{88} + C_{84} + C_{80} + D_{76} = 3689 + 690 + 631 + 574 = 5584 \\ D_{100} = C_{100} + C_{96} + C_{92} + D_{88} = 5584 + 884 + 817 + 752 = 8037 \end{cases}$$

Logo, há 8037 soluções para a equação dada no enunciado.

Aqui fica mais uma sugestão:

$$\begin{aligned} p(n) &= 64 + 185(n-1) + \frac{198}{2}(n-1)(n-2) + \frac{72}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \\ p(0) &= 5, p(1) = 64, p(2) = 249, p(3) = 632, p(4) = 1285, p(5) = 2280 \\ p(6) &= 3689, p(7) = 5584, p(8) = 8037, p(9) = 11120 \end{aligned}$$

Note-se que, com mais uma variável no enunciado do problema, temos de relacionar o termo de ordem $n+60$ com o termo de ordem n . Logo, vamos ter muito mais trabalho...

Exemplo 655 Qual a série correspondente à função geradora $f(x) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^{10}} \times \frac{1}{1-x^{20}}$?

Resolução

Sabemos que $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. Então,

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}, \frac{1}{1-x^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{4k}, \frac{1}{1-x^5} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{5k} \\ \frac{1}{1-x^{10}} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{10k}, \frac{1}{1-x^{20}} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{20k} \end{cases}$$

Já vimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} &= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^{2k+1} \end{aligned}$$

Também podemos definir a sucessão dos coeficientes da série anterior por $A_{2n+1} = A_{2n} = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Calculemos $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^4}$:

De $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^4} (1-x^4) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \dots) (1-x^4)$, vem

$$\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + (B_4 - B_0)x^4 + (B_5 - B_1)x^5 + \dots + (B_{k+4} - B_k)x^{k+4} + \dots$$

Então, devemos ter

$$\begin{cases} B_0 = A_0 = 1, B_1 = A_1 = 1 = 1^2 \\ B_2 = A_2 = 2, B_3 = A_3 = 2 = 2 \times 1 \\ B_4 = A_4 + B_0 = 3 + 1 = 4, B_5 = A_5 + B_1 = 3 + 1 = 4 = 2^2 \\ B_6 = A_6 + B_2 = 4 + 2 = 6, B_7 = A_7 + B_3 = 4 + 2 = 6 = 3 \times 2 \\ B_8 = A_8 + B_4 = 5 + 4 = 9, B_9 = A_9 + B_5 = 5 + 4 = 9 = 3^2 \end{cases}$$

A sucessão $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ pode ser definida por

$$\begin{cases} B_{4n} = (n+1)^2 \\ B_{4n+1} = (n+1)^2 \\ B_{4n+2} = (n+2)(n+1) \\ B_{4n+3} = (n+2)(n+1) \end{cases}$$

Logo, $\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k x^k$, com B_k como acabado de referir.

Como podemos verificar, no enunciado não aparecia a função $\frac{1}{1-x^5}$. Mas, podemos aproveitar os resultados anteriores para definirmos $\frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^{10}} \times \frac{1}{1-x^{20}}$:

$$\frac{1}{1-x^5} \times \frac{1}{1-x^{10}} \times \frac{1}{1-x^{20}} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k x^{5k}$$

E também vimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} &= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 5x^9 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^{2k+1} \end{aligned}$$

Agora, basta-nos multiplicar as duas séries, o que dá algum trabalho.

Suponhamos que só queríamos encontrar o coeficiente do termo em x^{15} .

Agora, basta-nos somar:

$$\begin{cases} 38 + 36 + 66 + 62 + 112 + 104 + 138 + 126 = 682 \\ 162 + 144 + 156 + 132 + 128 + 96 + 60 + 20 = 898 \\ 682 + 898 = 1580 \end{cases}$$

Então, o coeficiente procurado é 1580.

Exemplo 656 Qual a probabilidade de obtermos soma 8, no lançamento de dois dados equilibrados?

Resolução

Basta-nos calcular $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$ e verificar qual o termo em x^8 :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 \\ &= x^{12} + 2x^{11} + 3x^{10} + 4x^9 + 5x^8 + 6x^7 + 5x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 \end{aligned}$$

Logo, a resposta é $\frac{5}{36}$.

E se tivermos o lançamento de três dados e quisermos que a soma seja 10?

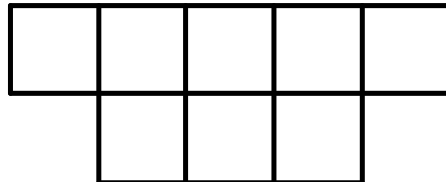
Neste caso, calculamos $P(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 \\ &= x^{18} + 3x^{17} + 6x^{16} + 10x^{15} + 15x^{14} + 21x^{13} + 25x^{12} + 27x^{11} \\ &\quad + 27x^{10} + 25x^9 + 21x^8 + 15x^7 + 10x^6 + 6x^5 + 3x^4 + x^3 \end{aligned}$$

A resposta é $\frac{27}{6^3} = \frac{1}{8}$.

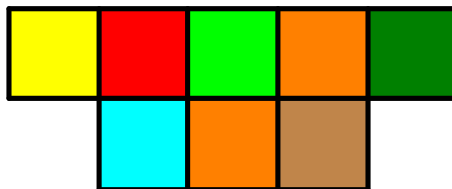
Note-se que as faces dum dado têm os números de 1 a 6.

Exercício 657 Considere a figura seguinte, constituída por 8 quadrados justapostos e suponha que tem 10 cores para pintar esses quadrados. De quantas maneiras podemos pintar a figura, de modo que quadrados com um lado em comum tenham cores diferentes? É claro que cada quadrado é pintado com uma só cor.



Resolução

Na figura seguinte, temos uma maneira de colorir a figura anterior.

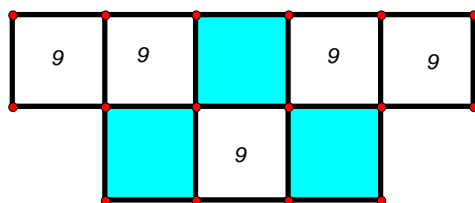


Consideremos o seguinte esquema:

10	9	9	9	9
	9	????	9	

Na parte superior, é fácil de contar as hipóteses. Na parte inferior, existe um sério problema com o quadrado do meio, o qual tem lados em comum com três outros quadrados. Desse modo, podem estar "proibidas" três cores ou duas cores ou uma só cor.

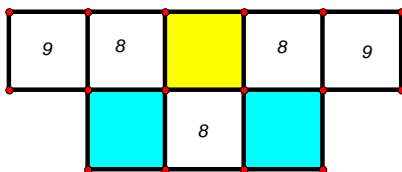
1º Caso



Se os três triângulos críticos estiverem pintados da mesma cor, todos os restantes têm 9 hipóteses: em três deles, só não pode ser o azul, enquanto nos outros dois, só não pode ser a cor do quadrado contíguo.

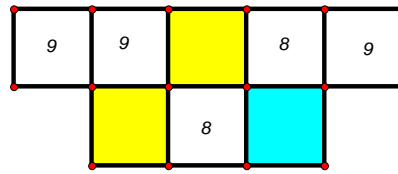
Então, neste primeiro caso, há $10 \times 9^5 = 590\,490$ maneiras de colorir a figura (10 é o número de maneiras de escolher a cor para os triângulos críticos).

2º Caso



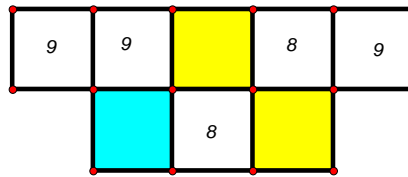
Neste caso, o número de possibilidades é $10 \times 9 \times 9^2 \times 8^3 = 3732\,480$. Note que 10×9 é o número de maneiras de escolher as duas cores (no caso da figura anterior, o azul e o amarelo).

3º Caso



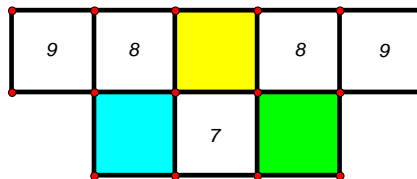
Neste caso, temos $10 \times 9 \times 9^3 \times 8^2 = 4199\,040$ possibilidades.

4º Caso



Neste caso, temos o mesmo número de possibilidades do caso anterior: $10 \times 9 \times 9^3 \times 8^2 = 4199\,040$

5º Caso

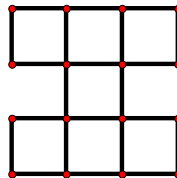


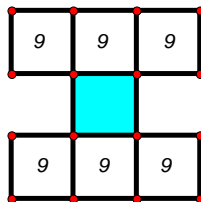
Neste caso, temos $10 \times 9 \times 8 \times 9^2 \times 8^2 \times 7 = 26\,127\,360$

Então, o número total de maneiras de colorir a figura (com 10 cores disponíveis) é de

$$10 \times 9^5 + 10 \times 9 \times 9^2 \times 8^3 + 2 \times 10 \times 9 \times 9^3 \times 8^2 + 10 \times 9 \times 8 \times 9^2 \times 8^2 \times 7 = 38\,848\,410$$

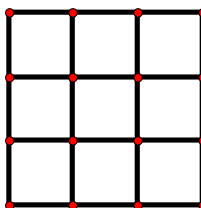
Exercício 658 Considere a figura seguinte, constituída por 7 quadrados justapostos e suponha que tem 10 cores para pintar esses quadrados. De quantas maneiras podemos pintar a figura, de modo que quadrados com um lado em comum tenham cores diferentes? É claro que cada quadrado é pintado com uma só cor.



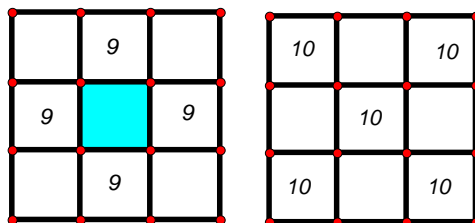
Resolução

O número de possibilidades é $10 \times 9^6 = 5314410$.

Exercício 659 Considere a figura seguinte, constituída por um quadrado dividido em 9 quadrados. Suponha que tem 10 cores para pintar esses quadrados. De quantas maneiras podemos pintar a figura, de modo que quadrados com um lado em comum tenham cores diferentes? É claro que cada quadrado é pintado com uma só cor.

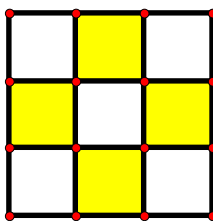
**Resolução**

Na figura seguinte, vemos que existe uma parte fácil. O problema está nos "cantos". É claro que podemos raciocinar de modo diferente (figura da direita) e começar pelos "cantos".

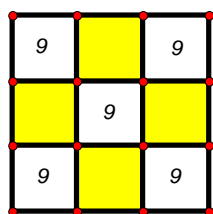


De uma maneira ou de outra, temos de resolver a questão por "casos".

Consideremos os quatro quadrados da figura seguinte que estão a amarelo e digamos que são os "quatro quadrados da cruz". Ao quadrado que está entre eles, chamaremos de quadrado central e aos outros quatro quadrados chamaremos "quadrados dos cantos". Vamos resolver esta questão, supondo que o quadrado está fixo, pelo que a rotação de 90° pode provocar uma posição diferente, sendo contada como diferente.

**1º Caso**

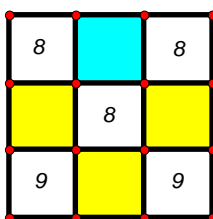
Cruz com uma só cor:



Neste caso, temos $10 \times 9^5 = 590\,490$ possibilidades, para a totalidade do quadrado.

2º Caso

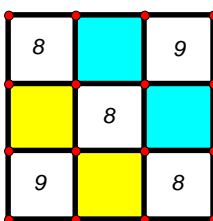
Cruz com três quadrados duma cor e um quadrado doutra cor:



Neste caso, temos $4 \times 10 \times 9 \times 8^3 \times 9^2 = 14\,929\,920$ possibilidades. Note-se que o factor 4 tem a ver com a posição do quadrado que está com cor diferente.

3º Caso

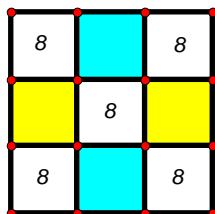
Dois quadrados adjacentes da cruz com uma cor e os outros dois quadrados de outra cor:



Este caso não é muito fácil, pois corremos o risco de contar certas posições duas vezes. Assim, escolhidas as duas cores, só há quatro maneiras de pintarmos os quatro quadrados da cruz. Então, o número de possibilidades é $\binom{10}{2} \times 4 \times 8^3 \times 9^2 = 7464960$

4º Caso

Dois quadrados opostos da cruz com uma cor e os outros dois quadrados de outra cor:

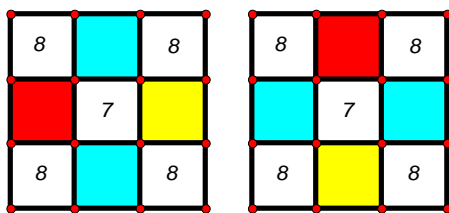


Neste caso, temos 10 maneiras para a cor que fica na vertical e 9 maneiras para a cor que fica na horizontal.

Logo, temos $10 \times 9 \times 8^5 = 2949120$ possibilidades. Outra maneira de resolver é escolher as duas cores para a cruz, $\binom{10}{2}$, e multiplicar por 2 (duas possibilidades: azuis na vertical ou na horizontal). Assim, temos $\binom{10}{2} \times 2 = 90$, sendo o resto (8^5) óbvio.

5º Caso

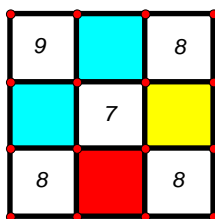
Dois quadrados opostos da cruz com uma cor e os outros dois quadrados com cores diferentes:



Número de possibilidades: $2 \times 10 \times 9 \times 8 \times 8^4 \times 7 = 41287680$

6º Caso

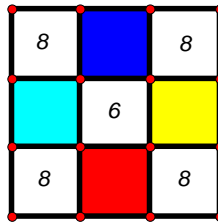
Dois quadrados adjacentes da cruz com uma cor e os outros dois quadrados com cores diferentes:



Número de maneiras: $4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 8^3 \times 9 \times 7 = 92897280$

7º Caso

Cruz com 4 cores

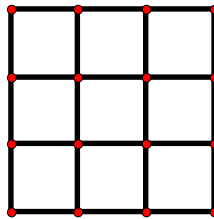
Número de maneiras: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 6 \times 8^4 = 743\,178\,240$

Número total:

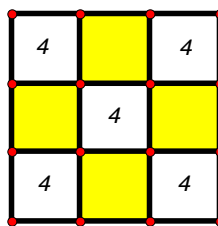
$$590\,490 + 14\,929\,920 + 7464\,960 + 2949\,120 + 41\,287\,680 + 92\,897\,280 + 743\,178\,240 = 903\,297\,690$$

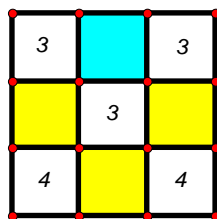
Os números são impressionantes.

Exercício 660 Considere a figura seguinte, constituída por um quadrado dividido em 9 quadrados. Suponha que tem 5 cores para pintar esses quadrados. De quantas maneiras podemos pintar a figura, de modo que quadrados com um lado em comum tenham cores diferentes? É claro que cada quadrado é pintado com uma só cor.

**Resolução**

O problema é o mesmo, mas temos metade das cores.

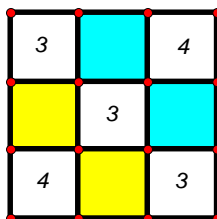
1º CasoNúmero de maneiras: $\binom{5}{1} \times 4^5 = 5120$ **2º Caso:**



Número de maneiras: $\binom{5}{1} \times 4 \times \binom{4}{1} \times 3^3 \times 4^2 = 34\,560$

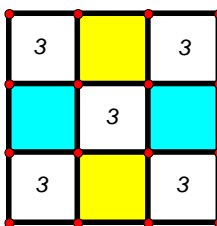
3º Caso

Dois quadrados adjacentes da cruz com uma cor e os outros dois quadrados de outra cor:



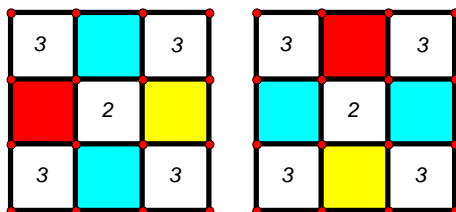
Número de maneiras: $\binom{5}{2} \times 4 \times 3^3 \times 4^2 = 17\,280$

4º Caso:



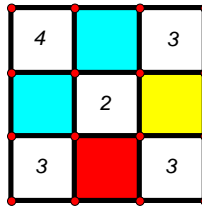
Número de maneiras: $2 \times \binom{5}{2} \times 3^4 = 1620$

5º Caso:



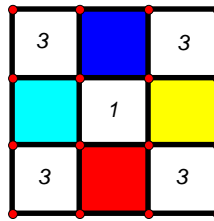
Número de maneiras: $2 \times \binom{5}{1} \times 4 \times 3 \times 2 \times 3^4 = 19\,440$

6º Caso:



Número de maneiras: $\binom{5}{1} \times 4 \times \binom{4}{2} \times 2 \times 4 \times 3^3 \times 2 = 51\,840$

7º Caso:



Número de maneiras: $\binom{5}{4} \times 4! \times 3^4 = 9720$

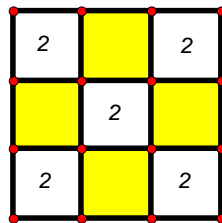
Resposta final: $5120 + 34\,560 + 17\,280 + 1620 + 19\,440 + 51\,840 + 9720 = 139\,580$

Ainda assim, o número é bastante elevado. Resta-nos casos mais fáceis, como ter duas cores disponíveis, caso em que só há duas soluções: casa central duam cor, casas da cruz com a outra cor e casas dos cantos com a cor da casa central. Logo, há duas opções para a casa central.

Exercício 661 Considere a figura seguinte, constituída por um quadrado dividido em 9 quadrados. Suponha que tem 3 cores para pintar esses quadrados. De quantas maneiras podemos pintar a figura, de modo que quadrados com um lado em comum tenham cores diferentes? É claro que cada quadrado é pintado com uma só cor.

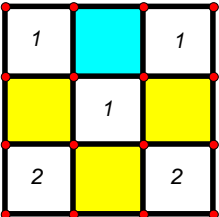
Resolução

1º Caso



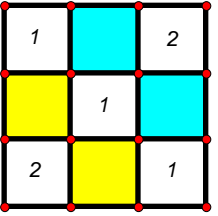
$$\binom{3}{1} \times 2^5 = 96$$

2º Caso



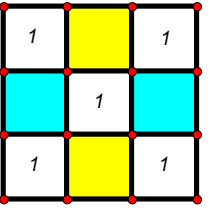
$$\binom{3}{1} \times 4 \times \binom{3}{1} \times 2^2 = 144$$

3º Caso



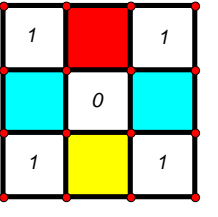
$$\binom{3}{2} \times 4 \times 2^2 = 48$$

4º Caso



$$\binom{3}{2} \times 2 = 6$$

5º Caso

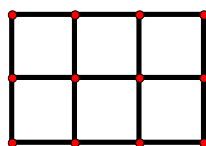


$$0$$

E não há mais casos possíveis.

O número de maneiras diferentes de pintar o quadrado é de $96 + 144 + 48 + 6 = 294$.

Exercício 662 Considere a figura seguinte e suponha que tem 10 cores para pintar as casas (células). De quantas maneiras podemos pintar a figura, de modo que quadrados com um lado em comum tenham cores diferentes? É claro que cada quadrado (célula) é pintado com uma só cor.



Resolução

1º Caso: duas cores em cima

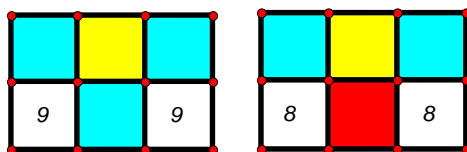
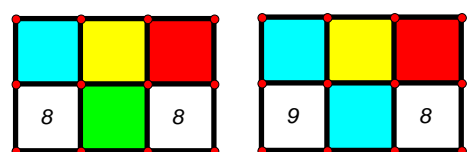


Figura da esquerda: $\binom{10}{1} \times 9^3 = 7290$

Figura da direita: $\binom{10}{1} \times \binom{9}{1} \times \binom{8}{1} \times 8^2 = 46\,080$

Total: $7290 + 46\,080 = 53\,370$

2º Caso: três cores em cima



Na figura da esquerda, as quatro cores assinaladas são diferentes. Há $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 8^2 = 322\,560$ maneiras de colorir a figura.

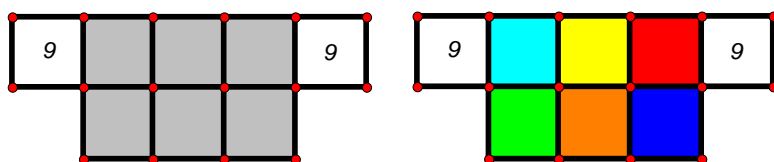
Na figura da direita, há duas casas a azul. O número de maneiras é $\binom{10}{1} \times 1 \times 9 \times 8 \times 9 \times 8 = 51\,840$

Em vez do azul, pode ser qualquer cor (há 10 possibilidades); em vez do amarelo pode ser qualquer uma de nove cores; em vez do vermelho pode ser qualquer uma de oito cores.

Este caso tem as mesmas possibilidades, quando, na figura, em vez do azul de baixo, tivermos o vermelho.

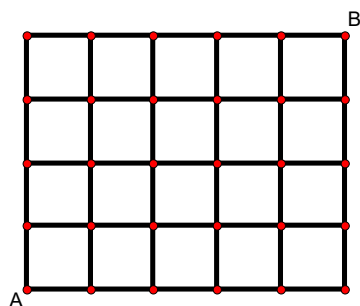
Ou seja, há $51\,840 + 51\,840 + 322\,560 + 53\,370 = 479\,610$ maneiras diferentes de colorir a figura.

Então, se não houve nenhum erro, o número de maneiras de colorir a figura seguinte é $479\,610 \times 81 = 38\,848\,410$. De facto, foi este o valor obtido, quando resolvemos esta questão.



As quadrículas a cinzento significam que as cores já lá estão colocadas de alguma forma que respeite o enunciado (sem que lá tenha de estar o cinzento). A figura da direita é uma das imensas possibilidades para as seis quadrículas.

Exemplo 663 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:

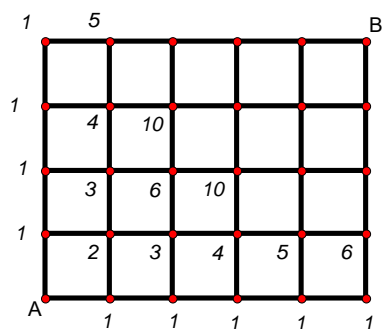


De quantas maneiras diferentes podemos ir do ponto A ao ponto B , de modo a que a distância percorrida seja mínima.

Resolução

Esta questão é bastante comum e pode ser resolvida, colocando o número de caminhos existentes até cada vértice.

Também podemos resolver a mesma questão, utilizando as letras H e V, para os deslocamentos na horizontal e na vertical.

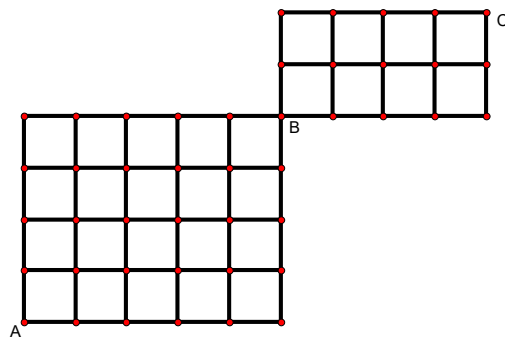


E temos parte da resolução do problema, bastando continuar a somar dois números, para irmos obtendo o número de caminhos até cada ponto assinalado na figura.

Existe uma maneira mais rápida: temos que fazer 5 deslocamentos horizontais e 4 verticais. Então, basta-nos saber quantas "palavras" podemos formar, usando o H, 5 vezes e o V, quatro vezes. Ora isso corresponde a $\binom{9}{4} = 126$. Logo, há 126 caminhos de comprimento mínimo, entre A e B.

O problema complica-se mais um pouco, se a regularidade das ruas for quebrada, por algum motivo. Antes de vermos situações mais complicadas, vejamos mais alguns exemplos simples:

Exemplo 664 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quanto caminhos de comprimento mínimo existem de A a C ?

Resolução

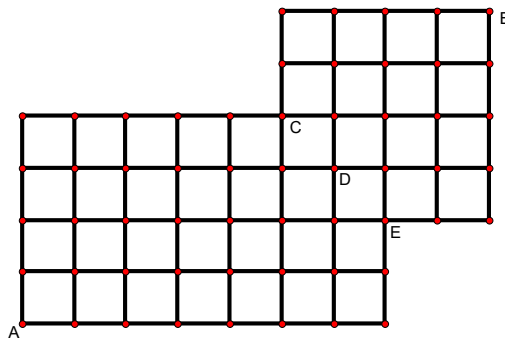
Esta questão é muito semelhante à anterior, só que temos de aplicar o mesmo raciocínio duas vezes.

De A até B , temos $\binom{9}{4} = 126$ caminhos de comprimento mínimo. De B até C , temos $\binom{6}{2} = 15$ caminhos (de comprimento mínimo).

Logo, a resposta é $\binom{9}{4} \times \binom{6}{2} = 126 \times 15 = 1890$ caminhos. Note-se que todos os caminhos têm de passar por B .

Vejamos um exemplo, onde existe um estrangulamento, mas que não se reduz a um ponto:

Exemplo 665 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quanto caminhos de comprimento mínimo existem de A a B ?

Resolução

Para irmos de A até B , temos de passar por C , D ou E . No entanto, como pretendemos os caminhos mais curtos, não podemos passar por dois desses três pontos.

Então, temos a situação do exemplo anterior só que aplicada três vezes.

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e C : $\binom{9}{4} = 126$

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre C e B : $\binom{6}{2} = 15$

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e B , passando por C : $\binom{9}{4} \times \binom{6}{2} = 1890$

Esta primeira parte é o exemplo anterior.

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e D : $\binom{9}{3} = 84$

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre D e B : $\binom{6}{3} = 20$

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e B , passando por D : $\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = 1680$

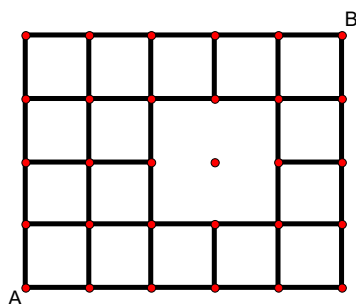
Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e E : $\binom{9}{2} = 36$

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre E e B : $\binom{6}{2} = 15$

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e B , passando por E : $\binom{9}{2} \times \binom{6}{2} = 540$

Então, o número de caminhos (mais curtos) entre A e B é $1890 + 1680 + 540$, ou seja, 4110.

Exemplo 666 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:

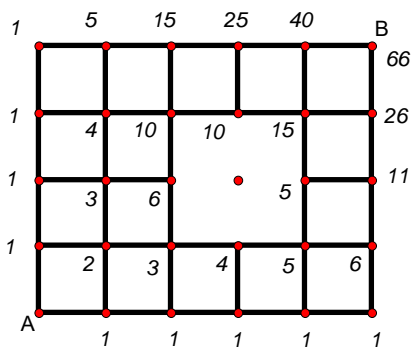


Quanto caminhos de comprimento mínimo existem de A a B ?

Resolução

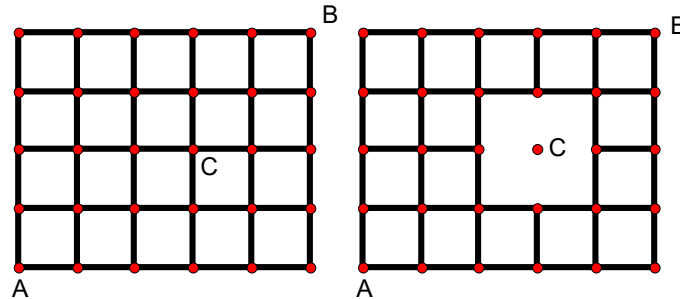
Esta questão é muito semelhante às anteriores, mas há menos caminhos (de comprimento mínimo), porque desapareceram algumas das ruas (ou parte delas). Podemos imaginar que existe uma zona vedada ao público (um quartel do exército, por exemplo).

É claro que o primeiro método de resolução (utilizado no exercício anterior) continua a poder ser utilizado.



No entanto, há outra maneira (pelo menos) de resolver esta questão. O número de maneiras de ir de A a B , usando um caminho de comprimento mínimo, é $\binom{9}{4} = 126$.

Desses 126 caminhos, há uns que passam pelo ponto C assinalado (ver figura seguinte) e outros que não passam pelo ponto C .



Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e C : $\binom{5}{2} = 10$.

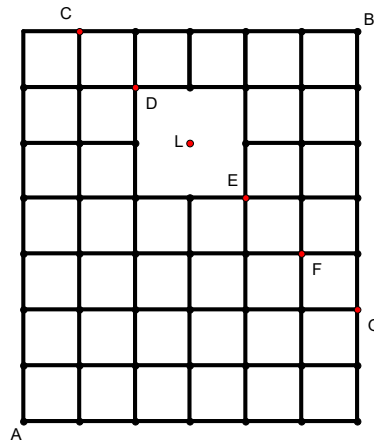
Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre C e B : $\binom{4}{2} = 6$.

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e B , passando por C : $6 \times 10 = 60$.

Número de caminhos (de comprimento mínimo) entre A e B , não passando por C : $126 - 60 = 66$.

E obtivemos o mesmo valor encontrado pelo processo anterior.

Exemplo 667 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quantos caminhos de comprimento mínimo vão de A a B ?

Primeira resolução

Se a malha fosse regular, havia $\binom{13}{6} = 1716$ caminhos de comprimento mínimo entre A e B .

Vejam os, quantos desses caninhos passavam por L :

De A a L , existiriam $\binom{8}{3} = 56$ caminhos e, de L a B , existiriam $\binom{5}{2} = 10$. Então, existiriam 560 caminhos de A a B , passando por L . Então, o número de caminhos que não passam por L , é de $1716 - 560$, ou seja, 1156.

Segunda resolução

	C	D	E	F	G
A	$\binom{8}{1} = 8$	$\binom{8}{2} = 28$	$\binom{8}{4} = 70$	$\binom{8}{3} = 56$	$\binom{8}{2} = 28$
B	1	5	$\binom{5}{2} = 10$	5	1

Nº de caminhos

$$AEB: 70 \times 10 = 700$$

$$AFB: 56 \times 5 = 280$$

$$AGB: 28 \times 1 = 28$$

$$ACB: 8 \times 1 = 8$$

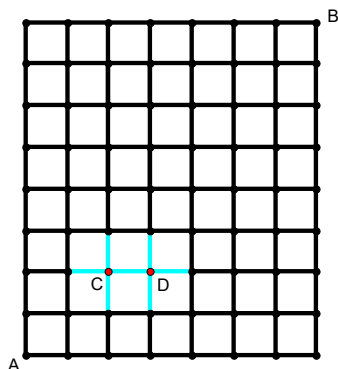
$$ADB: 28 \times 5 = 140$$

$$\text{Total: } 700 + 280 + 28 + 8 + 140 = 1156$$

Terceira resolução

Não vamos resolver, mas lembramos que podemos colocar em cada vértice o número de caminhos que vão de A até ao vértice em causa.

Exemplo 668 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quantos caminhos de comprimento mínimo vão de A a B , supondo que as ruas a azul estão vedadas a qualquer tipo de trânsito.

Resolução

Não havendo restrições, o número de caminhos de comprimento mínimo (entre A e B) é $\binom{15}{7} = 6435$.

$$\text{Número de caminhos entre } A \text{ e } C: \binom{4}{2} = 6$$

$$\text{Número de caminhos entre } C \text{ e } B: \binom{11}{5} = 462$$

$$\text{Número de caminhos entre } A \text{ e } B, \text{ passando por } C: 6 \times 462 = 2772$$

$$\text{Número de caminhos entre } A \text{ e } D: \binom{5}{2} = 10$$

$$\text{Número de caminhos entre } D \text{ e } B: \binom{10}{4} = 210$$

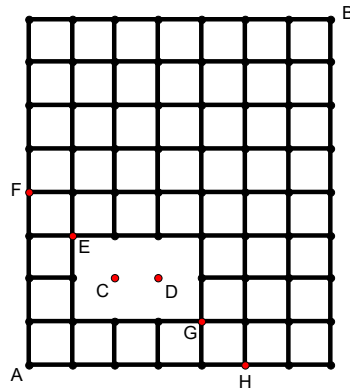
$$\text{Número de caminhos entre } A \text{ e } B, \text{ passando por } D: 10 \times 210 = 2100$$

Número de caminhos entre A e B , passando por C e por D : $\binom{4}{2} \times \binom{1}{1} \times \binom{10}{4} = 1260$

Número de caminhos entre A e B , passando por C ou por D (ou ambos): $2772 + 2100 - 1260 = 3612$

Número de caminhos entre A e B , não passando por C nem por D : $6435 - 3612 = 2823$

Outra resolução



Número de caminhos entre A e B , passando por E : $\binom{4}{1} \times \binom{11}{5} = 1848$

Número de caminhos entre A e B , passando por F : $\binom{4}{4} \times \binom{11}{4} = 330$

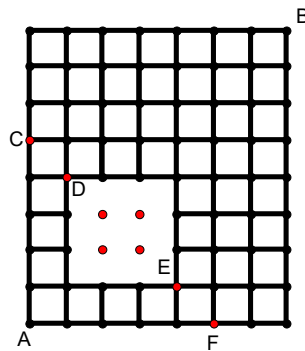
Número de caminhos entre A e B , passando por G : $\binom{5}{1} \times \binom{10}{3} = 600$

Número de caminhos entre A e B , passando por H : $\binom{5}{5} \times \binom{10}{2} = 45$

Como não há caminhos repetidos, nem há caminhos não contados, o número total de caminhos (de comprimento mínimo), entre A e B é dado por $1848 + 330 + 600 + 45 = 2823$.

E, mais uma vez, obtivemos o mesmo número.

Exemplo 669 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quantos caminhos de comprimento mínimo vão de A a B , supondo que as ruas a azul estão vedadas a qualquer tipo de trânsito.

Resolução

Talvez seja preferível contar todos os caminhos que nos interessam, em vez de contarmos os que não interessam.

Número de caminhos entre A e B , passando por C : $\binom{5}{5} \times \binom{10}{3} = 120$

Número de caminhos entre A e B , passando por D : $\binom{5}{1} \times \binom{10}{4} = 1050$

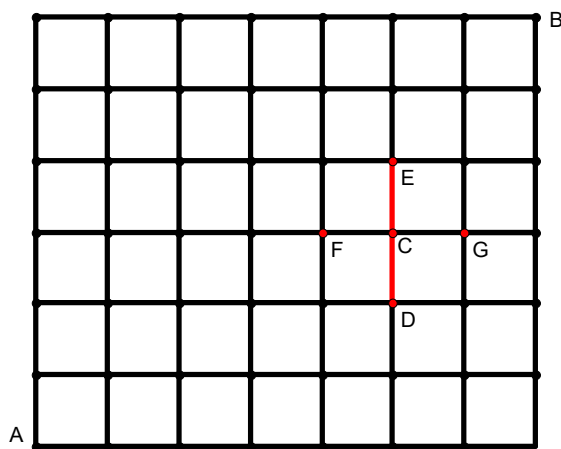
Número de caminhos entre A e B , passando por E : $\binom{5}{1} \times \binom{10}{3} = 600$

Número de caminhos entre A e B , passando por F : $\binom{5}{5} \times \binom{10}{2} = 45$

Então, o número total de caminhos é $120 + 1050 + 600 + 45 = 1815$

Naturalmente, o número é menor do que no exemplo anterior, pois há mais restrições.

Exemplo 670 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quantos caminhos de comprimento mínimo vão de A a B , supondo que os troços a vermelho estão vedados a qualquer tipo de trânsito.

Resolução

Este exemplo é um pouco diferente dos anteriores, pois não tem nenhum vértice por onde não podemos passar. Digamos que foram cortados dois troços de estrada.

Uma das maneiras de resolver esta questão consiste em contar os caminhos que passariam na parte vermelha. Tais caminhos conterão um troço vermelho ou dois troços (vermelhos). Se tiver dois troços (vermelhos), o caminho será $A - D - C - E - B$; se tiver um só troço, será $A - D - C - G - B$ ou $A - F - C - E - B$.

De A até D , temos $\binom{7}{2} = 21$ caminhos. De D até E , temos um caminho, de E até B , temos $\binom{4}{2} = 6$ caminhos, pelo que existem $21 \times 1 \times 6 = 126$ caminhos que contêm os dois troços vermelhos.

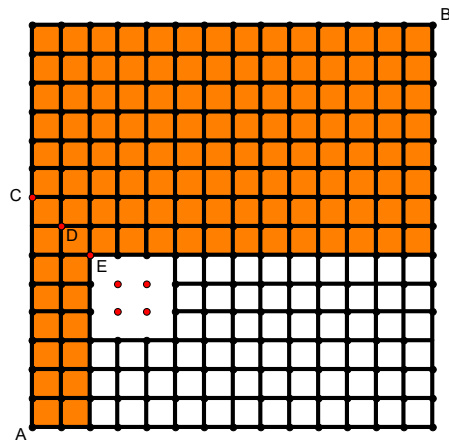
Incluindo $A - D - C - G$, temos $\binom{7}{2} = 21$ caminhos. De G até B , temos 4 caminhos, pelo que neste segundo caso, temos $21 \times 4 = 84$ caminhos.

Para $A - F - C - E$, temos $\binom{7}{3} = 35$ caminhos, ao que seguem 6 caminhos até B .

Então, há $126 + 84 + 35 \times 6 = 420$ caminhos que passam pela zona proibida.

Ora, $\binom{13}{6} = 1716$, pelo que temos $1716 - 420 = 1296$ caminhos permitidos.

Exemplo 671 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quantos caminhos de comprimento mínimo vão de A a B, não saindo da zona laranja.

Resolução

Vamos apresentar vários quadros com o número de maneiras de ir entre dois pontos.

	C	D	E
A	1	8	$\binom{8}{2} = 28$

	C	D	E
B	$\binom{20}{6} = 38\,760$	$\binom{20}{7} = 77\,520$	$\binom{20}{8} = 125\,970$

Nº de caminhos A – C – B: $1 \times 38\,760 = 38\,760$

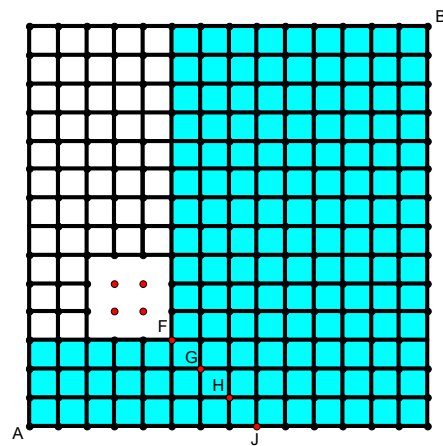
Nº de caminhos A – D – B: $8 \times 77\,520 = 620\,160$

Nº de caminhos A – E – B : D: $28 \times 125\,970 = 3\,527\,160$

Logo, o número total de caminhos na zona laranja é

$$38\,760 + 620\,160 + 3\,527\,160 = 4\,186\,080$$

Exemplo 672 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quantos caminhos de comprimento mínimo vão de A a B , não saindo da zona azul.

Resolução

	F	G	H	J
A	$\binom{8}{3} = 56$	$\binom{8}{2} = 28$	$\binom{8}{1} = 8$	1
B	$\binom{20}{9} = 167\,960$	$\binom{20}{8} = 125\,970$	$\binom{20}{7} = 77\,520$	$\binom{20}{6} = 38\,760$

Nº de caminhos $A - F - B$: $56 \times 167\,960 = 9\,405\,760$

Nº de caminhos $A - G - B$: $28 \times 125\,970 = 3\,527\,160$

Nº de caminhos $A - H - B$: $8 \times 77\,520 = 620\,160$

Nº de caminhos $A - J - B$: $1 \times 38\,760 = 38\,760$

Logo, o número total de caminhos na zona azul é

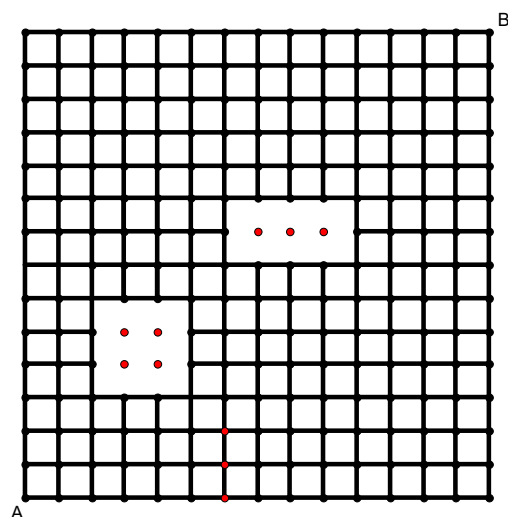
$$9\,405\,760 + 3\,527\,160 + 620\,160 + 38\,760 = 13\,591\,840$$

Observação

Conjugando os dois exercícios temos que o número total de caminhos entre A e B é de

$$4186\,080 + 13\,591\,840 = 17\,777\,920$$

Exemplo 673 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:

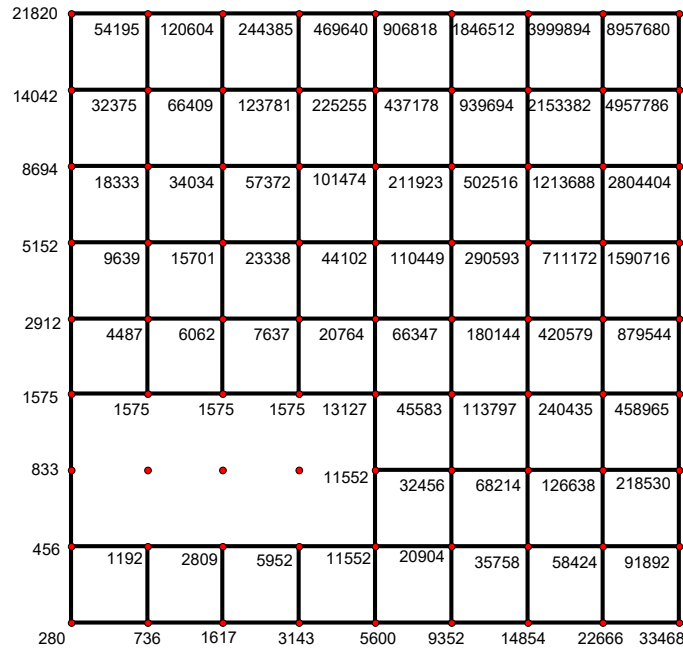
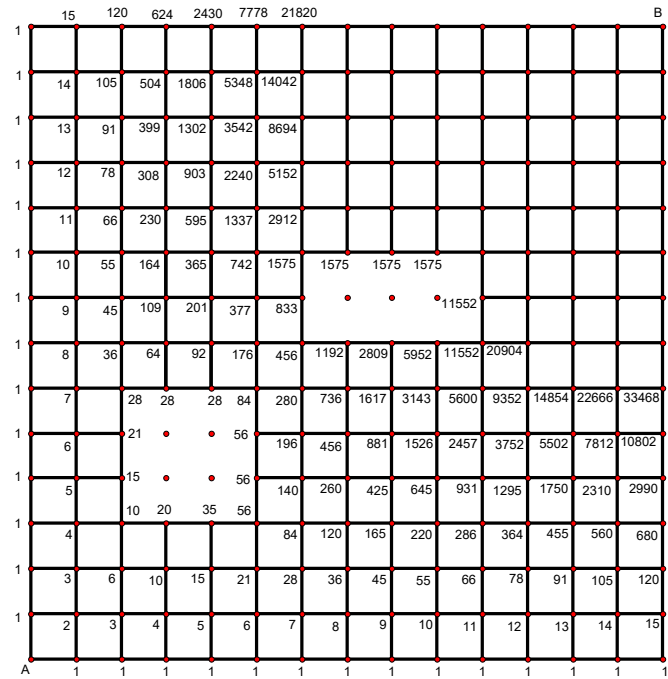


Quantos caminhos de comprimento mínimo vão de A a B , supondo que as ruas a azul estão vedadas a qualquer tipo de trânsito.

Resolução

Para não estarmos sempre a escrever caminhos de comprimento mínimo, vamos escrever apenas caminhos, ficando subentendido que estamos a falar de caminhos de comprimento mínimo.

Primeiro Processo

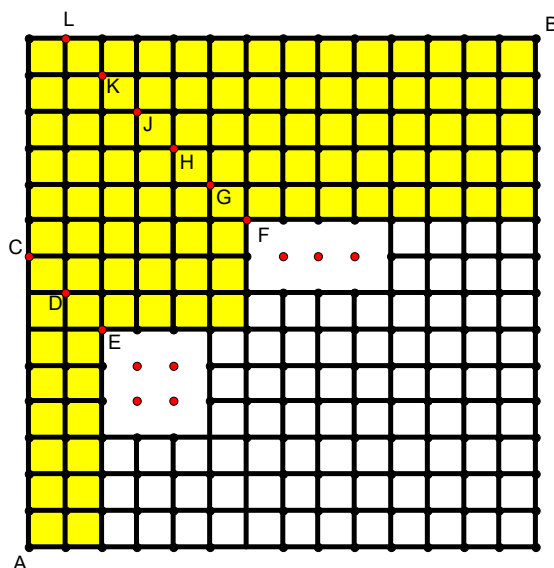


Segundo Processo

Neste segundo processo, não necessariamente mais rápido do que o anterior, vamos utilizar maneiras alternativas à contagem exaustiva do processo anterior.

1º caso

Consideremos a "zona amarela", onde contornamos os dois "obstáculos" pela esquerda. Qualquer caminho (de comprimento mínimo), de A até B , tem de passar por um dos pontos C , D , E e por um dos pontos L , K , J , H , G , F . Isso dá-nos 17 caminhos (não é possível passar por E e por L , sendo o caminho mínimo).



Temos de descobrir quantos caminhos há de A até B , contidos na área amarela. O problema está em encontrar uma boa estratégia de contagem.

Para irmos de A até B , sem sair da zona amarela, temos de passar por um dos três pontos C , D e E .

Contemos os caminhos de A até cada um desses três pontos:

De A a C , há um caminho. De A a D , há oito caminhos. De A a E , há $\binom{8}{2} = 28$ caminhos.

	C	D	E
A	1	8	28

Agora, temos de contar os caminhos de C , D e E até L , K , J , H , G , F .

Partindo de E , temos de passar por um dos pontos F , G , H , J , K .

Ora, de E a K , há um só caminho, de E a J , há 7 caminhos, de E a H , há $\binom{7}{2} = 21$ caminhos, de E a G , há $\binom{7}{3} = 35$ caminhos e de E a F , há $\binom{7}{4} = 35$ caminhos.

De D a L , há um só caminho, de D a K , há $\binom{7}{1} = 7$ caminhos, de D a J , há $\binom{7}{2} = 21$ caminhos, de D a H , há $\binom{7}{3} = 35$ caminhos, de D a G , há $\binom{7}{4} = 35$ caminhos e de D a F , há $\binom{7}{5} = 21$ caminhos. E o mesmo para o ponto C . Segue-se um quadro resumo:

	C	D	E
A	1	8	28

	L	K	J	H	G	F
C	7	21	35	35	21	7
D	1	7	21	35	35	21
E	0	1	7	21	35	35

Agora, temos de contar os caminhos de L, K, J, H, G, F até B . Por questões de espaço, construímos o quadro de maneira diferente da anterior.

	L	K	J	H	G	F
B	1	$\binom{13}{1} = 13$	$\binom{13}{2} = 78$	$\binom{13}{3} = 286$	$\binom{13}{4} = 715$	$\binom{13}{5} = 1287$

De A a L , passando por C : $1 \times 7 = 7$

De A a K , passando por C : $1 \times 21 = 21$

De A a J , passando por C : $1 \times 35 = 35$

De A a H , passando por C : $1 \times 35 = 35$

De A a G , passando por C : $1 \times 21 = 21$

De A a F , passando por C : $1 \times 7 = 7$

De A a L , passando por D : $8 \times 1 = 8$

De A a K , passando por D : $8 \times 7 = 56$

De A a J , passando por D : $8 \times 21 = 168$

De A a H , passando por D : $8 \times 35 = 280$

De A a G , passando por D : $8 \times 35 = 280$

De A a F , passando por D : $8 \times 21 = 168$

De A a K , passando por E : $28 \times 1 = 28$

De A a J , passando por E : $28 \times 7 = 196$

De A a H , passando por E : $28 \times 21 = 588$

De A a G , passando por E : $28 \times 35 = 980$

De A a F , passando por E : $28 \times 35 = 980$

Então, temos:

De A a L : $7 + 8 = 15$

De A a K : $21 + 56 + 28 = 105$

De A a J : $35 + 168 + 196 = 399$

De A a H : $35 + 280 + 588 = 903$

De A a G : $21 + 280 + 980 = 1281$

De A a F : $7 + 168 + 980 = 1155$

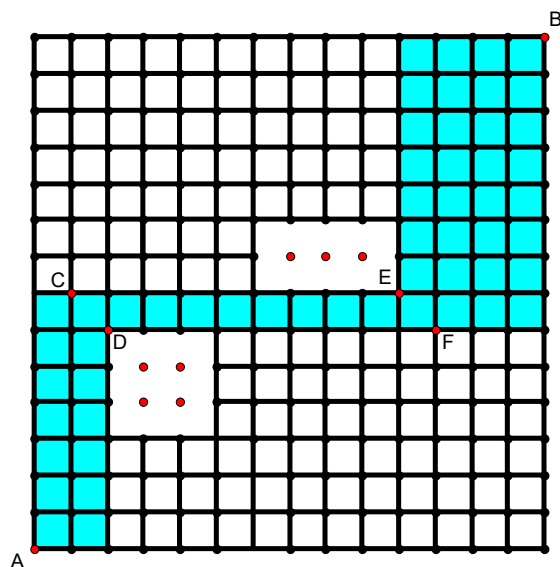
Agora, basta multiplicar pelo número de caminhos de cada um dos pontos anteriores a B e somar os resultados:

$$15 \times 1 + 105 \times 13 + 399 \times 78 + 903 \times 286 + 1281 \times 715 + 1155 \times 1287 = 2693\,160$$

Então, dentro da zona amarela, temos 2693 160 caminhos.

2º caso

Consideremos a "zona azul", onde contornamos o primeiro "obstáculo", pela esquerda, e o segundo, pela direita.



Caminhos de A a C : 8

Caminhos de A a D : $\binom{8}{2} = 28$

Caminhos de C a E : 1

Caminhos de D a F : 1

Caminhos de D a E : 9

Caminhos de A a F : $28 \times 1 = 28$

Caminhos de A a E , passando por C : $8 \times 1 = 8$

Caminhos de A a E , passando por D : $28 \times 9 = 252$

Caminhos de A a E : $8 + 252 = 260$

Caminhos de E a B : $\binom{11}{4} = 330$

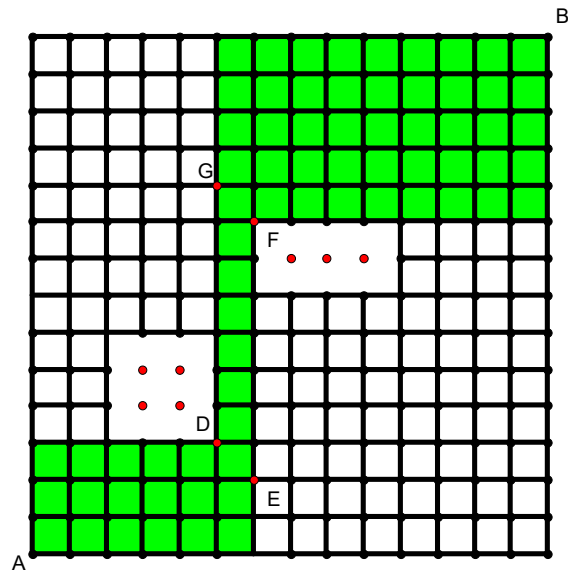
Caminhos de F a B : $\binom{11}{3} = 165$

Então, o número de caminhos entre A e B (contidos na zona azul) é

$$260 \times 330 + 28 \times 165 = 90\,420$$

3º caso

Consideremos a "zona verde", onde contornamos o primeiro "obstáculo", pela direita, e o segundo, pela esquerda.



Dentro da zona verde, para irmos de A até B , temos de passar por D ou por E e, mais adiante, temos de passar por G ou por F (as disjunções são exclusivas).

Caminhos de A a D : $\binom{8}{3} = 56$

Caminhos de A a E : $\binom{8}{2} = 28$

Caminhos de D a G : 1

Caminhos de D a F : 7

Caminhos de E a F : 1

Caminhos de F a B : $\binom{13}{5} = 1287$

Caminhos de G a B : $\binom{13}{4} = 715$

Caminhos de A a G , passando por D : $56 \times 1 = 56$

Caminhos de A a F , passando por D : $56 \times 7 = 392$

Caminhos de A a F , passando por E : $28 \times 1 = 28$

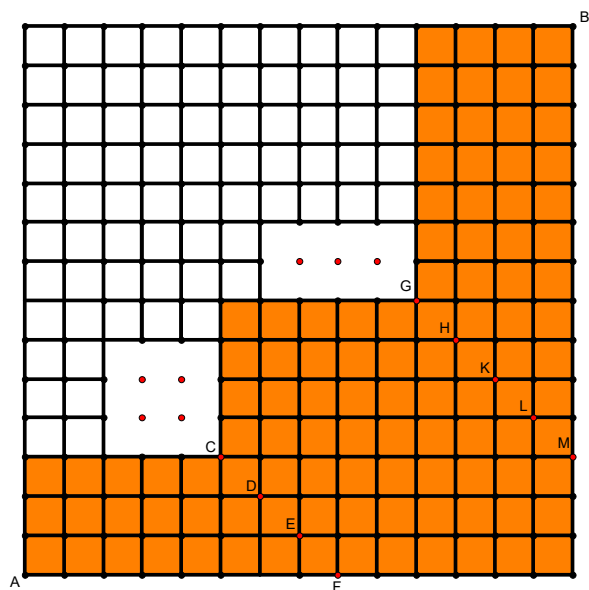
Caminhos de A a G : 56

Caminhos de A a F : $392 + 28 = 420$

Caminhos de A a B : $56 \times 715 + 420 \times 1287 = 580\,580$

4º caso

Consideremos a "zona laranja", onde contornamos os dois "obstáculos", pela direita.



Agora, vamos apresentar um quadro com o número de maneiras entre os vários pontos assinalados na figura anterior:

	C	D	E	F
A	$\binom{8}{3} = 56$	$\binom{8}{2} = 28$	$\binom{8}{1} = 8$	1

	G	H	K	L	M
C	$\binom{9}{4} = 126$	$\binom{9}{3} = 84$	$\binom{9}{2} = 36$	$\binom{9}{1} = 9$	1
D	$\binom{9}{4} = 126$	$\binom{9}{4} = 126$	$\binom{9}{3} = 84$	$\binom{9}{2} = 36$	$\binom{9}{1} = 9$
E	$\binom{9}{3} = 84$	$\binom{9}{4} = 126$	$\binom{9}{4} = 126$	$\binom{9}{3} = 84$	$\binom{9}{2} = 36$
F	$\binom{9}{2} = 36$	$\binom{9}{3} = 84$	$\binom{9}{4} = 126$	$\binom{9}{4} = 126$	$\binom{9}{3} = 84$

	G	H	K	L	M
B	$\binom{11}{4} = 330$	$\binom{11}{3} = 165$	$\binom{11}{2} = 55$	$\binom{11}{1} = 11$	1

Maneiras de chegar a G : $56 \times 126 + 126 \times 28 + 84 \times 8 + 36 = 11\,292$

Maneiras de chegar a H : $56 \times 84 + 28 \times 126 + 8 \times 126 + 84 = 9324$

Maneiras de chegar a K : $56 \times 36 + 28 \times 84 + 8 \times 126 + 126 = 5502$

Maneiras de chegar a L : $56 \times 9 + 28 \times 36 + 8 \times 84 + 126 = 2310$

Maneiras de chegar a M : $56 \times 1 + 28 \times 9 + 8 \times 36 + 84 = 680$

Maneiras de chegar a B : $11\,292 \times 330 + 9324 \times 165 + 5502 \times 55 + 2310 \times 11 + 680 \times 1 = 5593\,520$

Total do 1º caso: 2693 160

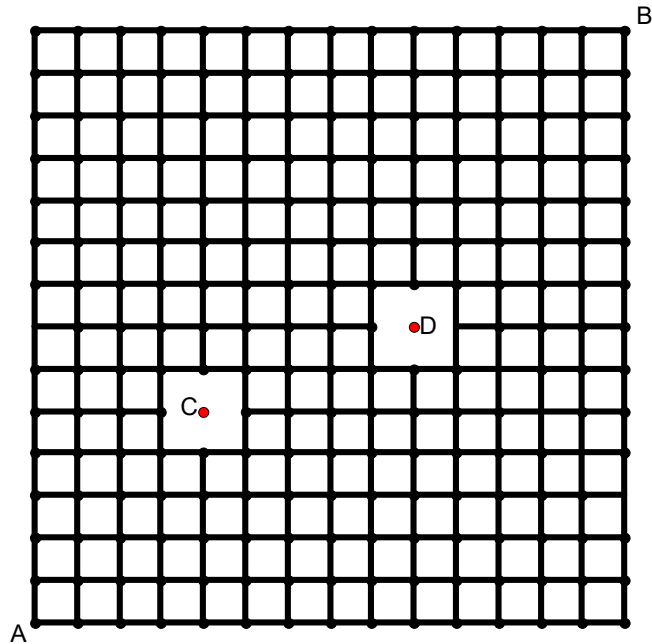
Total do 2º caso: 90 420

Total do 3º caso: 580 580

Total do 4º caso: 5593 520

Número total de caminhos: $2693\,160 + 90\,420 + 580\,580 + 5593\,520 = 8957\,680$

Exemplo 674 Considere um bairro onde as ruas são perpendiculares ou paralelas, como na figura seguinte:



Quantos caminhos de comprimento mínimo vão de A a B , supondo que não podemos passar por C nem por D .

Resolução

Se utilizarmos um referencial, podemos identificar os pontos com pares ordenados. Assim, teremos $A = (0, 0)$, $C = (4, 5)$, $D = (9, 7)$, $B = (14, 14)$.

Então, $\overrightarrow{CD} = (5, 2)$, $\overrightarrow{CB} = (10, 9)$ e $\overrightarrow{DB} = (5, 7)$.

Caminhos que passam por $A - C - B$: $\binom{5+4}{4} \times \binom{10+9}{9} = 11\,639\,628$

Caminhos que passam por $A - D - B$: $\binom{9+7}{7} \times \binom{5+7}{5} = 9060\,480$

Caminhos que passam por $A - C - D - B$: $\binom{5+4}{4} \times \binom{5+2}{2} \times \binom{5+7}{5} = 2095\,632$

Então, o número de caminhos (de comprimento mínimo), entre A e B e que passam por A ou por B , é

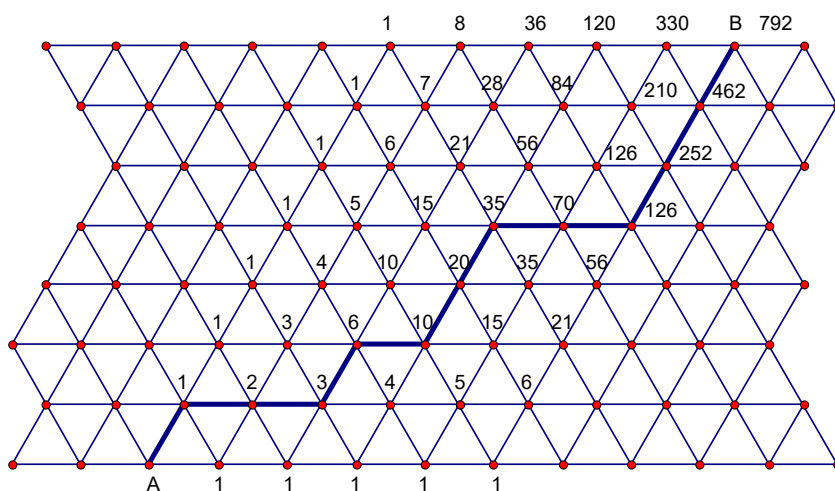
$$11\,639\,628 + 9060\,480 - 2095\,632 = 18\,604\,476$$

Logo, o número de caminhos entre A e B que não passam por A nem por B é dado por

$$\binom{28}{14} - 18\,604\,476 = 21\,512\,124$$

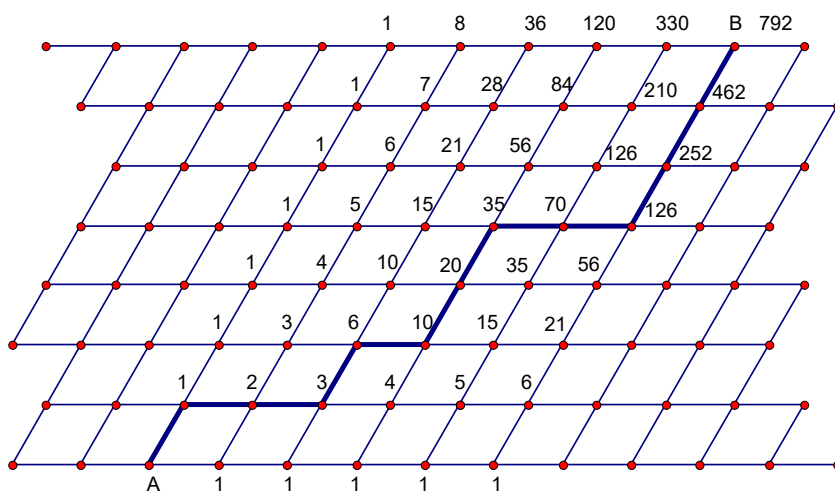
Nesta resolução, foi utilizada a fórmula que dá o cardinal da reunião de dois conjuntos e, por fim, o cardinal da reunião (de dois conjuntos).

Exemplo 675 Consideremos uma "malha" triangular e determinemos o número de caminhos mais curtos entre os dois pontos A e B (da figura seguinte):

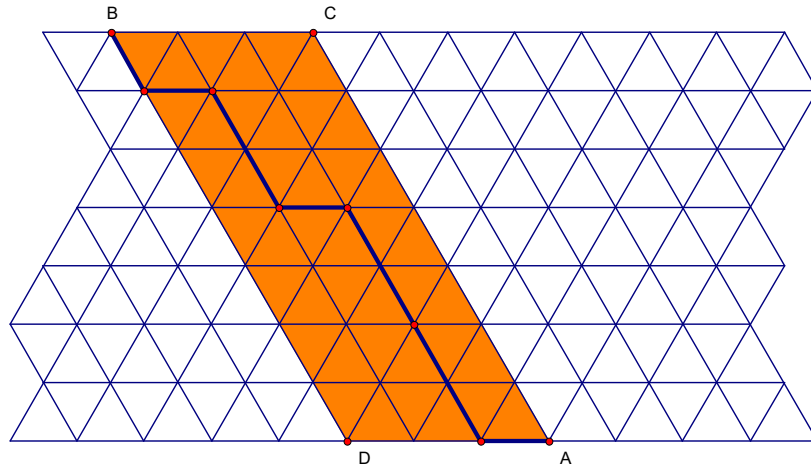


A resolução já foi apresentada na própria figura, para não desperdiçarmos espaço. A traço mais espesso, está indicado um dos caminhos possíveis entre A e B .

Note-se que, nalguns casos, o facto da "malha" ser triangular é irrelevante: na verdade, o que nos interessa é que a malha é formada por paralelogramos:

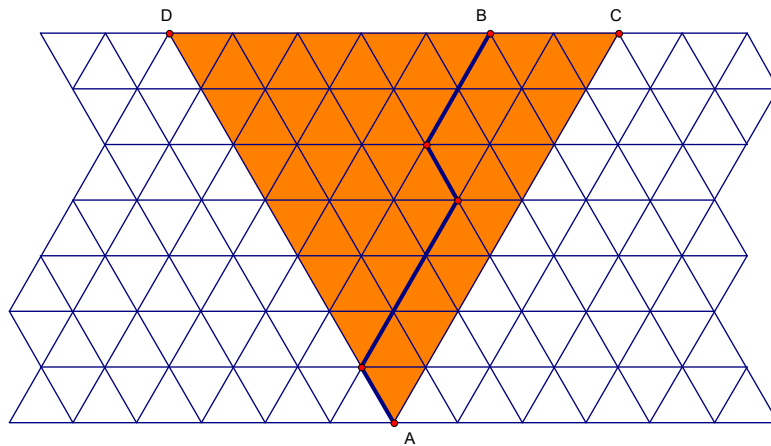


Então, não nenhuma diferença em relação aos exemplos já resolvidos, a não ser que as direcções a utilizar podem ser outras:

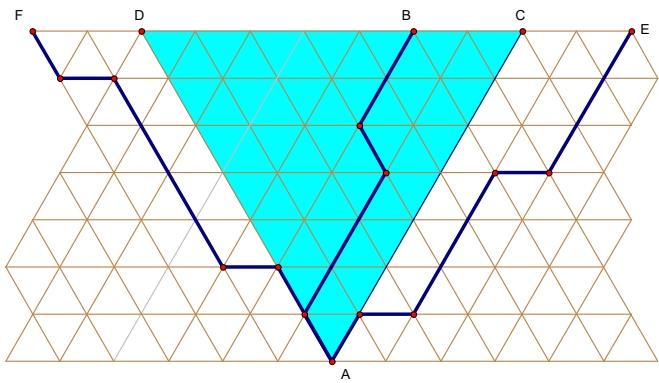


No caso da figura anterior, os paralelogramos a utilizar são outros. O número de caminhos de comprimento mínimo, entre A e B , é $\binom{7+3}{3} = \binom{10}{3} = 120$.

Exemplo 676 Consideremos uma "malha" triangular e determinemos o número de caminhos mais curtos entre os dois pontos A e B (da figura seguinte):



Note-se que as direcções a utilizar são diferentes das que foram utilizadas nos exemplos anteriores. Na figura anterior, está indicado um caminho entre A e B . O número de caminhos entre A e B é $\binom{7}{2} = 21$. Note-se que tudo seria diferente se o ponto B estivesse à esquerda de D ou se estivesse à direita de C , conforme podemos ver na figura seguinte:



Capítulo 30

Permutações Caóticas

Já resolvemos algumas questões relacionadas com este tema, embora não tivéssemos falado em Permutações Caóticas (nem em Desarranjos, o outro nome do mesmo tema).

Recordamos a questão: Se tivermos n pessoas numa festa de Natal, onde cada pessoa leva uma prenda para ser sorteada pelas n pessoas, qual a probabilidade de ninguém receber a própria prenda.

Ter uma única pessoa numa festa de Natal, não é muito agradável nem frequente. De qualquer modo, se houvesse só uma pessoa, ela receberia a própria prenda, sem necessidade de sorteio.

Convém recordar o que é uma permutação: Dados n elementos distintos, permutação desses elementos é uma aplicação de $\{1, 2, \dots, n\}$ em $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. A permutação mais simples é esta: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. Relativamente à questão colocada, esta aplicação pode significar que a pessoa 1, recebe a prenda levada pela pessoa 1 (ela mesma) e assim por diante. Existe um conjunto muito importante que é o conjunto das aplicações bijectivas de $\{1, 2, \dots, n\}$ em $\{1, 2, \dots, n\}$. Este conjunto de aplicações tem o nome de S_n (grupo simétrico).

Em S_2 , só temos duas permutações: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. A primeira aplicação é a Identidade (cada elemento é transformado em si mesmo), enquanto a segunda aplicação é conhecida por Transposição e costuma ser escrita da seguinte maneira: $(1, 2)$. Há que entender o significado de $(1, 2)$, neste contexto: significa que 1 é transformado em 2 e 2 é transformado em 1, fechando-se o ciclo. Este segundo exemplo, é uma permutação caótica (de dois elementos), pois nenhum elemento é transformado em si mesmo. No caso das prendas, teríamos uma situação ligeiramente diferente, mas semelhante: $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix}$, embora possamos utilizar as outras duas permutações. Como prendas e pessoas são palavras começadas por P, vamos supor que a_1 significa a "alma 1" e que a_2 significa a "alma 2". Então, a aplicação f significa que a alma 1 recebe a prenda levada por si mesma e o mesmo para a_1 .

Em g , temos que a alma 1 recebe a prenda levada pela alma 2 e a alma 2 recebe a prenda levada pela alma 1. Neste segundo caso, ninguém recebia a própria prenda.

Mas, podemos utilizar $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ com o significado que convencionemos. Podemos convencionar que os elementos da primeira linha são aqueles que recebem a prenda, enquanto os da segunda linha são aqueles que ofereceram a prenda. Então, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ significa que a pessoa 1 recebeu a prenda

oferecida pela pessoa 2, enquanto a pessoa 2 recebeu a prenda da pessoa 1.

No caso de S_3 , já temos seis aplicações. São elas:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

A aplicação f_1 fixa todos os elementos (a imagem de 1 é 1, a imagem de 2 é 2 e a imagem de 3 é 3).

A aplicação f_2 fixa um só elemento (1), o mesmo acontecendo com f_3 (fixa 2) e com f_4 (fixa 3).

As aplicações f_5 e f_6 não têm "pontos fixos". Então, há duas permutações caóticas em S_3 .

O conjunto S_4 já tem 24 aplicações, o que dificulta a escrita de todas elas. Vamos escrevê-las numa forma que nos parece simples:

	1	2	3	4
f_1	1	2	3	4
f_2	1	2	4	3
f_3	1	3	2	4
f_4	1	3	4	2
f_5	1	4	2	3
f_6	1	4	3	2
f_7	2	1	3	4
f_8	2	1	4	3

	1	2	3	4
f_9	2	3	1	4
f_{10}	2	3	4	1
f_{11}	2	4	1	3
f_{12}	2	4	3	1
f_{13}	3	1	2	4
f_{14}	3	1	4	2
f_{15}	3	2	1	4
f_{16}	3	2	4	1

	1	2	3	4
f_{17}	3	4	1	2
f_{18}	3	4	2	1
f_{19}	4	1	2	3
f_{20}	4	1	3	2
f_{21}	4	2	1	3
f_{22}	4	2	3	1
f_{23}	4	3	1	2
f_{24}	4	3	2	1

As primeiras seis funções fixam o elemento 1. É claro que mais nenhuma função fixa 1. Então teremos seis funções que fixam 2, seis funções que fixam 3 e seis funções que fixam 4.

É óbvio que não podemos somar as quatro parcelas iguais a 6, para obtermos o número de funções que fixam um ou mais elementos.

E não parece ser muito fácil encontrar uma maneira eficaz de contar as funções com "pontos" fixos.

Tentemos outro caminho:

Funções que fixam quatro elementos: Uma só (a aplicação identidade)

Funções que fixam quatro elementos (mas não quatro): Nenhuma

Funções que fixam dois (e só dois) elementos: $\binom{4}{2} = 6$.

Se fixar 1 e 2, não pode fixar nem 3 nem 4, pelo que a imagem de 3 tem de ser 4 e a imagem de 4 tem de ser 3.

Faltam as funções que têm um só ponto fixo. Mas, essas são fáceis de contar!

Quantas fixam 1 e não fixam mais nenhum? Ora, essas são em igual número às funções de $\{2, 3, 4\}$ em $\{2, 3, 4\}$ que não têm pontos fixos. Mas, já vimos que, em S_3 , temos duas únicas funções sem pontos fixos. Então, em S_4 , temos oito funções com um único ponto fixo (duas fixam 1, duas fixam 2, etc...).

Somando, obtemos quinze ($1 + 6 + 8 = 15$). Logo, há 9 funções que não fixam nenhum elemento.

Então, o número de permutações caóticas de S_3 é 9 ($24 - 15 = 9$).

Tentemos outra maneira, baseada em conjuntos (e já anteriormente apresentada):

Seja A_i o conjunto das permutações de S_4 que fixam o elemento i .

É claro que existe a reunião dos quatro conjuntos anteriores:

$$\bigcup_{i \in \{1,2,3,4\}} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

Existe uma maneira de "contar" os elementos da reunião de vários conjuntos, devida a Daniel Augusto da Silva. Representando o número de elementos do conjunto A por $\#A$, temos:

Para dois conjuntos: $\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#A_1 \cap A_2$

Para três conjuntos:

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

Para quatro conjuntos:

$$\begin{aligned} N_4 &= \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 \\ &\quad - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_3) \\ &\quad - \#(A_2 \cap A_4) - \#(A_3 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

No caso de S_4 , temos

$$\begin{aligned} N_4 &= \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) \\ &\quad - \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_4) - \#(A_3 \cap A_4) \\ &\quad + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

Ora, $\#A_1 = (4-1)! = 3!$, porque a imagem de 1 é 1. Analogamente, $\#A_2 = \#A_3 = \#A_4 = 3!$
 $\#(A_1 \cap A_2) = 2! = 2$, porque a imagem de 1 é 1 e a imagem de 2 é 2. Restam duas hipóteses para as imagens de 3 e 4.

Analogamente para os restantes

$$\#(A_1 \cap A_3) = \#(A_1 \cap A_4) = \#(A_2 \cap A_3) = \#(A_2 \cap A_4) = \#(A_3 \cap A_4) = 2$$

Então, temos 18 funções que fixam algum elemento. Note-se que uma aplicação (bijectiva) que fixe três dos quatro elementos tem de fixar o quarto.

Resta-nos descobrir quais as funções que não têm pontos fixos.

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1$. Se 1, 2 e 3 ficam fixos, a imagem de 4 tem de ser 4.

Analogamente, para as restantes intersecções de 3 elementos e para a única intersecção de quatro.

Então, temos

$$G_4 = 4 \times 3! - 6 \times 2 + 4 \times 1 - 1 = 24 - 12 + 4 - 1 = 15$$

Então, o número de permutações caóticas é dado por

$$D_4 = \#(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = \#\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4} = 4! - 15 = 9$$

Eis as nove permutações caóticas de S_4 :

$$\begin{aligned} f_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, f_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, f_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ f_{14} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, f_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ f_{19} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou, com outro aspecto:

	1	2	3	4
f_8	2	1	4	3
f_{10}	2	3	4	1
f_{11}	2	4	1	3

	1	2	3	4
f_{14}	3	1	4	2
f_{17}	3	4	1	2
f_{18}	3	4	2	1

	1	2	3	4
f_{19}	4	1	2	3
f_{23}	4	3	1	2
f_{24}	4	3	2	1

Note-se que também se chama "Desarranjos" às permutações caóticas (daí a notação D_4 e, no caso geral, D_n).

Passemos a S_5 :

É claro que $\#S_5 = 5! = 120$ e $\#A_i = 4! = 24$, para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\#(A_i \cap A_j) = 3! = 6$, para $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, com $i \neq j$.

$\#(A_i \cap A_j \cap A_k) = 2! = 2$, para $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e todos distintos.

Melhor será escrever $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2$ e acrescentar que o mesmo acontece para os restantes casos com 3 conjuntos distintos.

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1 = \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

Então, temos

$$\begin{aligned} G_5 &= \binom{5}{1} \times 4! - \binom{5}{2} \times 3! + \binom{5}{3} \times 2! - \binom{5}{4} \times 1! + \binom{5}{5} \times 0! = 76 \\ D_5 &= 5! - N_5 = 5! - \left(\binom{5}{1} \times 4! + \binom{5}{2} \times 3! - \binom{5}{3} \times 2! + \binom{5}{4} \times 1! - \binom{5}{5} \times 0! \right) \\ &= \binom{5}{0} \times 5! - \binom{5}{1} \times 4! + \binom{5}{2} \times 3! - \binom{5}{3} \times 2! + \binom{5}{4} \times 1! - \binom{5}{5} \times 0! \\ &= \frac{5!}{0! \times 5!} \times 5! - \frac{5!}{1! \times 4!} \times 4! + \frac{5!}{2! \times 3!} \times 3! - \frac{5!}{3! \times 2!} \times 2! + \frac{5!}{4! \times 1!} \times 1! - \frac{5!}{5! \times 0!} \times 0! \\ &= \left(\frac{5!}{0! \times 5!} - \frac{4!}{1! \times 4!} + \frac{3!}{2! \times 3!} - \frac{2!}{3! \times 2!} + \frac{1!}{4! \times 1!} - \frac{0!}{5! \times 0!} \right) \times 5! \end{aligned}$$

Note-se que G_5 é o número de de funções de S_5 que fixam um ou mais elementos. Então, $G_5 + D_5 = 5!$

Logo, $G_n + D_n = n!$

$$\text{Repare-se que } \left\{ \begin{array}{l} \#S_n = n! \\ \#A_1 = (n-1)! \\ \#(A_1 \cap A_2) = (n-2)! \\ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = (n-3)! \\ \dots \\ \#(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = (n-k)! \\ \dots \\ \#(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) = 1! \\ \#(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n) = 0! \end{array} \right.$$

Então,

$$\begin{aligned} G_n &= (-1)^{1+1} \binom{n}{1} \times (n-1)! + (-1)^{2+1} \binom{n}{2} \times (n-2)! + (-1)^{3+1} \binom{n}{3} \times (n-3)! \\ &\quad + \dots + (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \times (n-k)! + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \times 0! \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \times (n-k)! \end{aligned}$$

Logo, o número de permutações caóticas é dado por

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \times (n-k)! \\ &= -(-1)^{0+1} \binom{n}{0} \times n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \times (n-k)! \\ &= - \left((-1)^{0+1} \binom{n}{0} \times n! + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \times (n-k)! \right) \\ &= - \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \times (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \times (n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \times (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} \end{aligned}$$

Então, podemos enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 677 O número D_n , de permutações caóticas de S_n , é dado por $D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$

Observação

Vejamos o número de permutações caóticas em S_n :

Como obter D_n , por recorrência? Se conhecermos os valores de D_n e de D_{n+1} , como descobrir o valor de D_{n+2} ?

Sejam D_{n+1} e D_n os números das aplicações de S_{n+1} e de S_n que não têm pontos fixos.

Consideremos as aplicações de S_{n+2} tais que existem dois números i e j , tais que a imagem de i é j e a imagem de j é i . Então, nos restantes casos, temos n elementos e pretendemos que a imagem de nenhum elemento seja ele mesmo. Então, temos D_n aplicações sem pontos fixos (nas condições indicadas).

Consideremos os desarranjos do tipo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & n+1 & n+2 \\ i & & & & 1 & & & \end{pmatrix}$. Neste caso, temos a transposição $\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}$, seguindo-se todos os desarranjos de n elementos. Evidentemente, i pode ser qualquer número de 2 a $n+2$, pelo que temos $n+1$ possibilidades para i . Em

cada um dos casos, o número de desarranjos é D_n , pelo que o número total dos desarranjos deste tipo é $(n+1)D_n$.

Resta saber quantos desarranjos temos, quando a imagem de 1 é i , mas a imagem de i não é 1 (nem i). Para facilitar, façamos $i = 2$.

Então, temos $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & \cdots & n+1 & n+2 \\ 2 & & & & & & & \end{pmatrix}$.

Nesta posição, temos que colocar $n+1$ elementos na segunda linha, sem repetir nenhum e sem que a imagem de 2 seja 2, sem que a imagem de 3 seja 3,..., e sem que a imagem de $n+2$ seja $n+2$.

Ora, os números a colocar são 1, 3, 4,..., n , $n+1$, $n+2$ e não 2, 3, 4,..., n , $n+1$, $n+2$, caso em que o número de desarranjos é D_{n+1} . Só que... Calma! Que restrição tem o número 1? Ele pode ser colocado em qualquer lugar, menos por baixo de 2. Então, 1 só não pode ser colocado por baixo de 2, 3 só não pode ser colocado por baixo de 3, 4 só não pode ser colocado por baixo de 4 e assim por diante. Logo, temos a mesma situação de S_{n+1} . Logo, temos D_{n+1} desarranjos com 2 por baixo de 1 e sem que a imagem de 2 seja 1.

Como em vez da imagem de 1 ser 2, pode ser qualquer número de 3 a $n+2$, temos $n+1$ possibilidades (incluindo o 2 do exemplo).

Então, $D_{n+2} = (n+1)D_{n+1} + (n+1)D_n = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$.

$$\text{Partindo de } D_1 = 0 \wedge D_2 = 1, \text{ vem } \begin{cases} D_3 = 2(D_2 + D_1) = 2(1 + 0) = 2 \\ D_4 = 3(D_3 + D_2) = 3(2 + 1) = 9 \\ D_5 = 4(D_4 + D_3) = 4(9 + 2) = 44 \\ D_6 = 5(D_5 + D_4) = 5(44 + 9) = 265 \\ D_7 = 6(D_6 + D_5) = 6(265 + 44) = 1854 \\ D_8 = 7(D_7 + D_6) = 7(1854 + 265) = 14833 \\ D_9 = 8(D_8 + D_7) = 8(14833 + 1854) = 133496 \end{cases}$$

Caso de S_4

Desarranjos com a transposição $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, só há uma possibilidade

Desarranjos com a transposição $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, só há uma possibilidade

Desarranjos com a transposição $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, só há uma possibilidade

Casos em que a imagem de 1 é k , mas imagem de k não é 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 \text{ ou } 4 & & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & & 2 \text{ ou } 4 & \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & & & 2 \text{ ou } 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Então, $D_4 = 3 \times 1 + 3 \times 2 = 3 \times (1 + 2) = 3(D_2 + D_3) = 9$

Caso de S_5

Desarranjos com a transposição $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & & & \end{pmatrix}$ há D_3 possibilidades

Desarranjos com a transposição $(1\ 3)$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & & 1 & & \end{pmatrix}$ há D_3 possibilidades

Desarranjos com a transposição $(1\ 4)$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & & & 1 & \end{pmatrix}$ há D_3 possibilidades

Desarranjos com a transposição $(1\ 5)$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & \underbrace{2\ 3\ 4} & & 1 & \end{pmatrix}$ há D_3 possibilidades

Por exemplo, para $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & \underbrace{2\ 3\ 4} & & 1 & \end{pmatrix}$, temos D_3 possibilidades.

Desarranjos que envolvem a transposição $(1\ k)$: $4D_3$

Desarranjos em que a imagem de 1 é k e a imagem de k não é 1.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4 \end{pmatrix}$

Eliminando a primeira coluna, temos

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4 \end{pmatrix}$

Comparemos com o seguinte caso:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4 \end{pmatrix}$

A situação é precisamente a mesma! Então, temos D_4 possibilidades para cada possibilidade da primeira coluna.

Então, temos $4D_4$ possibilidades, na condição em que a imagem de 1 é k e a imagem de k não é 1.

Casos em que a imagem de 1 é 2 e a imagem de 2 não é 1:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \text{ ou } 4 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \right.$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 5 & 1 \text{ ou } 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right.$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \text{ ou } 4 & 1 \text{ ou } 3 & 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right.$

Há 9 desarranjos em que a imagem de 1 é 2 e a imagem de 2 não é 1.

No total, temos 36 desarranjos que não envolvem a transposição $\begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}$.

Então, o número total de desarranjos (sem restrições) é $4D_3 + 36 = 4 \times 2 + 36 = 44$

Ou seja, $D_5 = 4(D_4 + D_3)$

Recordemos que o número D_n , de permutações caóticas de S_n , é dado por $D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$

Como sabemos, o número de elementos de S_n é $n!$, pelo que se torna complicado mostrar todos os exemplos, "acima" de S_4 .

Mas, podemos dar alguns exemplos de casos particulares de bijecções.

Consideremos a seguinte função de S_5 :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

A função anterior pode ser definida duma maneira interessante (com o recurso a ciclos):

A imagem de 1 é 2 e a imagem de 2 é 1, fim de ciclo. Escreveremos $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, sendo que este ciclo tem dois elementos. A um ciclo de dois elementos, damos o nome de Transposição.

Se pensarmos em 3, temos um novo ciclo $3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$, fim de ciclo. Então, escreveremos $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Note que a imagem do último elemento é o primeiro. Neste caso, não obtivemos uma transposição, pois o ciclo tem 3 elementos.

Então, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A função identidade de S_5 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ só tem ciclos de comprimento 1:

$$I = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)(5)$$

A função $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ decompõe-se em $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$

Note-se que $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, pode ser considerada como elemento de S_5 :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} (3)(4)(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Convém referir que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, porque os ciclos são disjuntos (não têm elementos comuns).

No caso geral, as aplicações não têm de comutar (para a composição de aplicações).

Sejam $f = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Então, temos

$$\begin{cases} (f \circ g)(1) = f(2) = 2 \wedge (g \circ f)(1) = g(1) = 2 \\ (f \circ g)(2) = f(3) = 3 \wedge (g \circ f)(2) = g(2) = 3 \\ (f \circ g)(3) = f(1) = 1 \wedge (g \circ f)(3) = g(4) = 4 \end{cases}$$

Logo, nem vale a pena continuar, pois as duas funções $f \circ g$ e $g \circ f$ são diferentes.

Conclusão: Há casos em que duas aplicações de S_n comutam e casos em que não comutam (para a composição de aplicações).

Bom, para S_1 e S_2 , duas funções comutam sempre, pelo que só há casos de funções que não comutam em S_n , com $n \geq 3$.

Exemplo 678 Neste exemplo, vamos chegar à fórmula que dá o número das permutações caóticas (ou desarranjos) de n elementos.

Começemos por recordar que o número das permutações caóticas (ou desarranjos) de n elementos é definido, por recorrência, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} D_1 = 0, D_2 = 1 \\ D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n) \end{cases}$$

Consideremos a sucessão definida por $\begin{cases} H_1 = 1, H_2 = 2 \\ H_{n+2} = (n+1)(H_{n+1} + H_n) \end{cases}$. A diferença, em relação à sucessão D_n , está nos valores iniciais.

$$\text{Caculemos alguns termos de } H_n: \begin{cases} H_3 = 2(H_2 + H_1) = 2 \times 3 = 6 = 3! \\ H_4 = 3(H_3 + H_2) = 3 \times (6 + 2) = 24 = 4! \\ H_5 = 4(H_4 + H_3) = 4 \times (24 + 6) = 120 = 5! \end{cases}$$

Então, os primeiros termos de H_n são os primeiros termos de $5!$, pois $H_1 = 1 = 1!$ e $H_2 = 2 = 2!$

Há duas maneiras (no mínimo) de provarmos que $H_n = n!$, para todo o número natural n .

A primeira maneira consiste em fazermos a demonstração por indução.

Já vimos que $H_1 = 1!$ e que $H_2 = 2!$

Suponhamos que $H_n = n!$ e que $H_{n+1} = (n+1)!$

Então, queremos mostrar que $H_{n+1} = (n+1)!$ e que $H_{n+2} = (n+2)!$

É claro que só falta mostrar que $H_{n+2} = (n+2)!$

Ora,

$$\begin{aligned} H_{n+2} &= (n+1)(H_{n+1} + H_n) = (n+1)((n+1)! + n!) \\ &= (n+1)!(n+1) + (n+1)n! \\ &= (n+1)!(n+1) + (n+1)! \\ &= (n+1)!(n+1+1) = (n+1)!(n+2) \\ &= (n+2)! \end{aligned}$$

Uma segunda maneira consiste em verificar que a sucessão definida por $J_n = n!$ satisfaz a condição $J_{n+2} = (n+1)(J_{n+1} + J_n)$ e que $J_1 = H_1, J_2 = H_2$.

Já vimos que $J_1 = 1! = 1 = H_1$ e $J_2 = 2! = 2 = H_2$.

$$\begin{aligned} (n+1)(J_{n+1} + J_n) &= (n+1)((n+1)! + n!) = (n+1)!(n+1) + n!(n+1) \\ &= (n+1)!(n+1) + (n+1)! = (n+1)!(n+1+1) \\ &= (n+1)!(n+2) = (n+2)! \\ &= J_{n+2} \end{aligned}$$

Então, temos que $\begin{cases} D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n) \\ H_{n+2} = (n+1)(H_{n+1} + H_n) \\ J_{n+2} = (n+1)(J_{n+1} + J_n) \end{cases}$, pelo que a diferença entre as três sucessões resulta dos valores iniciais, ou seja, duas delas são iguais, porque têm os mesmos valores iniciais.

Continuemos!

A partir da sucessão D_n , vamos definir uma nova sucessão: $f_n = \frac{D_n}{n!}$.

Calculemos $f_{n+2} - f_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
 f_{n+2} - f_{n+1} &= \frac{D_{n+2}}{(n+2)!} - \frac{D_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{D_{n+2} - (n+2) D_{n+1}}{(n+2)!} \\
 &= \frac{(n+1)(D_{n+1} + D_n) - (n+2) D_{n+1}}{(n+2)!} \\
 &= \frac{(n+1) D_{n+1} + (n+1) D_n - (n+2) D_{n+1}}{(n+2)!} \\
 &= \frac{(n+1) D_n - D_{n+1}}{(n+2)!} = \frac{(n+1) D_n}{(n+2)(n+1)n!} - \frac{D_{n+1}}{(n+2)(n+1)!} \\
 &= \frac{D_n}{(n+2)n!} - \frac{D_{n+1}}{(n+2)(n+1)!} = -\frac{1}{n+2} \left(\frac{D_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{D_n}{n!} \right) \\
 &= -\frac{1}{n+2} (f_{n+1} - f_n)
 \end{aligned}$$

O resultado anterior significa que a diferença entre dois termos consecutivos tende para zero. Agora, definimos uma nova sucessão: $g_n = f_n - f_{n-1}$ e calculamos $(n+2)g_n + g_n$. Ora,

$$\begin{aligned}
 (n+2)g_{n+2} + g_{n+1} &= (n+2)(f_{n+2} - f_{n+1}) + f_{n+1} - f_n \\
 &= -\frac{(n+2)}{n+2} (f_{n+1} - f_n) + (f_{n+1} - f_n) \\
 &= -(f_{n+1} - f_n) + (f_{n+1} - f_n) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Então, $g_{n+2} = -\frac{g_{n+1}}{n+2}$. Daqui, podemos concluir que os termos desta última sucessão são alternadamente positivos e negativos.

Tal significa que a sucessão f_n não é monótona e que os seus termos vão aumentando e diminuindo alternadamente.

Calculemos os primeiros termos de g_n :

$$\begin{cases} g_2 = f_2 - f_1 = \frac{D_2}{2!} - \frac{D_1}{1!} = \frac{1}{2!} - \frac{0}{1!} = \frac{1}{2!} \\ g_3 = -\frac{g_2}{3} = -\frac{1}{2!} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3!} \\ g_4 = -\frac{g_3}{4} = -\frac{1}{3!} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4!} \end{cases}$$

Intuitivamente, temos que $g_n = (-1)^n \times \frac{1}{n!}$, para $n \geq 2$

Então, podemos transformar f_n numa soma de termos consecutivos (Propriedade Telescópica, como nas séries de Mengoli). Começemos por f_5 :

$$\begin{aligned}
 f_5 - f_1 &= -f_1 + f_2 - f_2 + f_3 - f_3 + f_4 - f_4 + f_5 \\
 &= (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + (f_4 - f_3) + (f_5 - f_4) \\
 &= g_2 + g_3 + g_4 + g_5 = \sum_{k=2}^5 g_k
 \end{aligned}$$

No entanto, $f_1 = 0$, pelo que o primeiro membro se reduz a f_5 .

Analogamente, teremos

$$f_n = \sum_{k=2}^n g_k = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Note-se que as duas primeiras do último somatório são 1 e -1 , pelo que o valor não se altera, quando acrescentamos essas duas parcelas.

Então, podemos tirar o valor de D_n , uma vez que $f_n = \frac{D_n}{n!}$,

Então,

$$D_n = f_n n! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

Por exemplo, temos $D_{20} = 895\,014\,631\,192\,902\,121$

Atenção: a igualdade $D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$ só vale para $n \geq 1$, embora o somatório esteja definido para $n = 0$.

30.1 Lemas de Kaplansky

Por considerarmos importante, aqui ficam algumas notas sobre os dois Lemas de Kaplansky.

Exemplo 679 Suponhamos que temos o conjunto $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, e que queremos saber quantos subconjuntos de A_n têm 2 (e só 2 elementos) tais que esses elementos não sejam inteiros consecutivos.

Resolução

Convém referir que é conveniente dar a definição de k -subconjunto. Dado um conjunto A qualquer, k -subconjunto de A é um subconjunto de A com k elementos.

Voltemos à questão colocada:

Para $n = 3$, temos $A_3 = \{1, 2, 3\}$, havendo um único subconjunto nas condições exigidas: $\{1, 3\}$. Note-se que o número de 2-subconjuntos de A_3 é $\binom{3}{2} = 3$ e que o número total de subconjuntos de A_3 é $2^3 = 8$ (incluindo o conjunto vazio).

Para $n = 4$, temos $A_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, havendo os seguintes subconjuntos nas condições do enunciado: $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ e $\{2, 4\}$. Logo, temos 3 subconjuntos de A_4 com 2 elementos que não sejam inteiros consecutivos.

Para $n = 5$, temos $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, havendo os seguintes subconjuntos nas condições do enunciado: $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ e $\{3, 5\}$, num total de 6. Se pararmos por aqui, temos a seguinte sequência: 1, 3, 6. Provavelmente, já todos descobriram a regra: trata-se dos chamados números triangulares, pois a sequência deve ser 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$, $1 + 2 + 3 + 4$,...

Seja $A_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Subconjuntos (nas condições impostas) com 1: $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$, $\{1, 7\}$, $\{1, 8\}$, $\{1, 9\}$, ou seja, 7 subconjuntos.

Falta-nos os subconjuntos sem 1. Ora, esses são subconjuntos de $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Agora, temos duas maneiras de continuarmos: na primeira maneira, deixamos este conjunto como está, enquanto que, na segunda maneira, consideramos o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Em qualquer dos casos, temos mais 6 conjuntos, incluindo o menor dos elementos (2 ou 1, consoante a escolha). A repetição do raciocínio leva-nos a $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

Convém notar que os números triangulares são combinações. Neste caso, temos $\binom{8}{2} = 28$.

O raciocínio anterior presta-se a uma demonstração por indução:

Seja $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Então, o número de subconjuntos de A_n têm 2 e só 2 elementos que não sejam inteiros consecutivos é $\binom{n-1}{2}$.

Para $n = 3$, vem $\binom{n-1}{2} = \binom{3-1}{2} = \binom{2}{2} = 1$, o que já sabemos ser verdade.

Suponhamos que há $\binom{n-1}{2}$ subconjuntos de $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, para certo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$, que têm 2 elementos que não são inteiros consecutivos.

Tese: Então, há $\binom{n}{2}$ subconjuntos de $A_{n+1} = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ que têm 2 elementos que não são inteiros consecutivos.

Ora os subconjuntos (de A_{n+1}) pretendidos podem ter 1 ou não.

Subconjuntos com 1: $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots, \{1, n\}, \{1, n+1\}$. Então, temos $n+1-2$ subconjuntos (nas condições exigidas).

Subconjuntos sem 1: são os subconjuntos de $\{2, \dots, n, n+1\}$ cujo número é igual ao número de subconjuntos de $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Ora este último número é $\binom{n-1}{2}$, por hipótese de indução. Então, o número pretendido é $\binom{n-1}{2} + n-1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2}$, como se pretendia mostrar.

Resolvida a questão dos subconjuntos com dois elementos, podemos passar aos subconjuntos com três elementos. Note-se que, no caso de dois elementos, podemos considerar o conjunto $A_2 = \{1, 2\}$, em que o número de subconjuntos nas condições exigidas é zero. Mas não adianta considerar essa situação.

Exemplo 680 *Suponhamos que temos o conjunto $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$, e que queremos saber quantos subconjuntos de A_n têm 3 (e só 3 elementos) que não sejam inteiros consecutivos.*

Resolução

Para $n = 5$, temos $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, havendo um único subconjunto nas condições exigidas: $\{1, 3, 5\}$. Agora, a situação parece ser mais complicada.

Para $n = 6$, temos $A_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Subconjuntos que nos interessam, com 1: $\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 4, 6\}$, ou seja, 3 subconjuntos. Subconjuntos sem 1: $\{2, 4, 6\}$. Total: $3 + 1 = 4$.

Para $n = 7$, temos $A_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Subconjuntos que nos interessam com 1: $\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 5, 7\}$ ou seja, 6 subconjuntos.

Subconjuntos sem 1: $\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}$. Total: $6 + 4 = 10$.

E começamos a ficar intrigados! Tentemos o mesmo raciocínio do exemplo anterior, para o caso de $A_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Subconjuntos com 1: não pode aparecer o 2, pelo que temos de juntar dois elementos de $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, donde o número de possibilidades é $\binom{8}{2} = 28$.

Subconjuntos sem 1: são os subconjuntos de $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. E estamos num caso com menos um elemento. Logo, a indução funciona.

Voltemos ao início:

Para $n = 5$, temos 1 caso

Para $n = 6$, temos 4 casos, sendo $\binom{3}{2} + 1 = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3} = 4$

Para $n = 7$, temos 10 casos, sendo $\binom{4}{2} + \binom{4}{1} = \binom{5}{2} = 10$

E para $n = 8$? Ora, $A_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, pelo que temos os seguintes subconjuntos com 1: $\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 4, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 5, 7\}, \{1, 5, 8\}, \{1, 6, 8\}$

Os subconjuntos sem 1 são os subconjuntos de $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, cujo número é o mesmo dos subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Então, temos $\binom{5}{2}$ subconjuntos sem 1.

Número total: $10 + 10 = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} = 20 = \binom{6}{3}$. Será esta a regra?

Tentemos $A_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Subconjuntos com 1:

Não podem ter o 2, pelo que nos interessam os subconjuntos de $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, com dois elementos, que são tantos como os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, com dois elementos. Ou seja, $\binom{8}{2} = 28$.

Nesta altura, já estamos convencidos que a questão tem a ver com Combinações. Só que, ainda não estamos plenamente convencidos de qual será a fórmula que resolve o problema, principalmente no caso de termos subconjuntos com 4 ou mais elementos. Então, é melhor "esquecermos" tudo o que já fizemos, voltando ao início.

Suponhamos que temos $A_{21} = \{1, 2, 3, \dots, 18, 19, 20, 21\}$ e que pretendemos saber quantos subconjuntos de A_{21} têm 8 elementos (e só 8), não podendo haver elementos que sejam inteiros consecutivos. Em primeiro lugar, convém referir que o número de elementos do subconjunto a considerar está bastante limitado pelo número de elementos do conjunto inicial. Assim, não podemos considerar subconjuntos com mais de 11 elementos (no caso de A_{21}).

O nosso objectivo consiste em arranjar uma estratégia que nos simplifique a "vida". E, para nos simplificar a "vida", vamos considerar $A_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e, apenas, subconjuntos de 3 elementos.

Consideremos a seguinte tabela:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Subconjunto
S	N	N	S	N	N	N	S	N	$\{1, 4, 8\}$

Na primeira linha, temos os elementos do conjunto inicial. Na segunda linha, indicamos se o elemento pertence (ou não) ao subconjunto que estamos a considerar. No caso indicado, 1, 4 e 8 pertencem ao subconjunto e os restantes não.

Ora, o que nós pretendemos é muito fácil: distribuir os S e os N, de modo que não haja dois S consecutivos. Mas, já sabemos fazer isso! É o mesmo caso das bolas de certa cor que não podem ficar seguidas (numa fila). Neste caso, temos que a solução é $\binom{7}{3} = 35$.

No caso geral, temos $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$ e queremos saber quantos subconjuntos de A_n têm k elementos (com $k \geq 2$), sem que haja inteiros consecutivos nesses subconjuntos.

Em primeiro lugar, é necessário que $n \geq 2k - 1$, porque havendo k vezes a letra S, precisamos de, pelo menos, $k - 1$ vezes a letra N. Então, $k \leq \frac{n+1}{2}$, tendo-se que, caso n seja par, temos mesmo $k < \frac{n+1}{2}$.

No caso geral, o número de k -subconjuntos de A_n , nos quais não há números consecutivos, é

$$\binom{n-k+1}{k}$$

Se repararmos bem, nem interessa ter $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. O mesmo acontece com $2 + A_n = 2 + \{1, 2, \dots, n\} = \{3, 4, \dots, n, n+1, n+2\}$. E até podemos considerar números consecutivos positivos e negativos (e zero). Por exemplo, se considerarmos $B_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, em vez de $A_n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, nada se altera (a não ser que os números considerados são outros).

Vejamos um quadro com alguns exemplos:

$k \quad n$	7	8	9	10	11	12	13
2	$\binom{6}{2}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{9}{2}$	$\binom{10}{2}$	$\binom{11}{2}$	$\binom{12}{2}$
3	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{9}{3}$	$\binom{10}{3}$	$\binom{11}{3}$
4	$\binom{4}{4}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{9}{4}$	$\binom{10}{4}$
5	Zero	Zero	$\binom{5}{5}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{9}{5}$
6	Zero	Zero	Zero	Zero	$\binom{6}{6}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{8}{6}$
7	Zero	Zero	Zero	Zero	Zero	Zero	$\binom{7}{7}$
8	Zero	Zero	Zero	Zero	Zero	Zero	Zero

Lema 681 *Primeiro Lema de Kaplansky*

Seja $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, o número de k -subconjuntos de A_n , onde não há números consecutivos, é $\binom{n-k+1}{k}$, com $k \leq \frac{n+1}{2}$

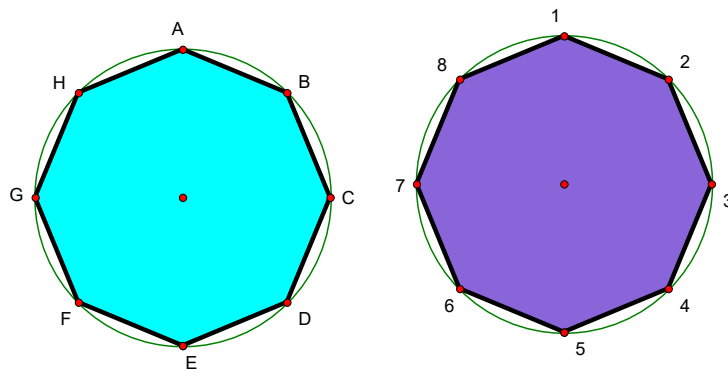
Exemplo 682 *Suponhamos que temos vinte cheques numerados consecutivamente. De quantas maneiras podemos escolher 7 cheques, de modo que não haja entre esses 7 cheques números consecutivos.*

Resolução

É claro que não interessa saber se os cheques começam em 1 ou não. A resposta é sempre a mesma:

$$\binom{20-7+1}{7} = \binom{14}{7} = 3432$$

Consideremos a seguinte figura (já anteriormente apresentada).



Quantos triângulos podemos formar, utilizando três dos vértices do octógono, de modo a que não usemos vértices adjacentes.

Com o vértice 1: $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{1, 5, 7\}$

Sem o vértice 1: $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{2, 6, 8\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{3, 5, 8\}$, $\{3, 6, 8\}$, $\{4, 6, 8\}$

Observação

Nos casos em que não usamos o número 1, podemos usar qualquer vértice, desde não usemos vértices consecutivos, escolhidos de 2 a 8.

Se preferir, podemos começar pelos casos que incluem 8 e, depois considerar os casos de 1 a 7.

Como contar os casos em que entra o número 1? Imaginemos que tínhamos uma fila. Essa questão já sabemos resolver.

Falta eliminar os casos em que temos 1 e 8. Tais casos não podem ter os vértices 2 e 7, pelo que restam 4 vértices (não contam 1,2,7,8).

Casos onde não entra o número 1: queremos saber o número de 3-subconjuntos de B_7 , onde não há números consecutivos.

Note-se que $B_7 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, pelo que o número procurado é $\binom{7-3+1}{3} = \binom{5}{3} = 10$

Casos onde entra o número 1: Queremos utilizar os vértices 3 a 7, para escolher dois vértices, sem utilizar números consecutivos.

Então, temos 5 elementos para escolher 2 que não podem ser consecutivos.

O primeiro lema de Kaplansky diz-nos que tal número é $\binom{5-2+1}{2} = \binom{4}{2} = 6$

Então, a resposta é $\binom{5}{3} + \binom{4}{2} = 16$.

Vejamos o caso geral

Suponhamos que temos $C_n = \{1, 2, \dots, n\}$, n pontos numa circunferência, pelo que se considera que 1 e n são consecutivos e suponhamos que queremos escolher k desses vértices, com a condição de não serem vértices adjacentes.

Casos em que não entra 1: temos $B_n = \{2, \dots, n\}$, ou seja, temos $n - 1$ números inteiros consecutivos dos quais queremos escolher k elementos, sem haver dois elementos consecutivos.

Sabemos que há $\binom{n-1-k+1}{k} = \binom{n-k}{k}$ maneiras.

Casos em que entra 1 (não pode entrar 2, nem n): queremos saber o número de $(k-1)$ -subconjuntos de $\{3, 4, \dots, n-1, n\}$, sem números consecutivos. Tal número é $\binom{n-2-(k-1)+1}{k-1} = \binom{n-k}{k-1}$. Agora, há que descontar os casos em que entram 1 e n . Tais casos consistem em escolher $k-2$ vértices entre $n-4$, sem haver números consecutivos. Logo, temos $\binom{n-4-(k-2)+1}{k-2}$ casos a descontar, ou seja, $\binom{n-k-1}{k-2}$.

Então, o número de maneiras é $\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-2}$.

Agora, podemos começar por calcular o valor da diferença $\binom{n-k}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-2}$.

$$\begin{cases} \binom{n-k}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-2} = \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k-2} - \binom{n-k-1}{k-2} = \binom{n-k-1}{k-1} \\ \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-2} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \end{cases}$$

Do ponto de vista matemático, já temos o número pretendido, mas o 2º Lema de Kaplansky costuma ser apresentado com outro aspecto.

Ora,

$$\begin{aligned}
 \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} &= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \\
 &= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!k}{(k-1)!k(n-2k)!} \\
 &= \frac{(n-k)! + (n-k-1)!k}{k!(n-2k)!} \\
 &= \frac{(n-k-1)!(n-k) + (n-k-1)!k}{k!(n-2k)!} \\
 &= \frac{(n-k-1)!n}{k!(n-2k)!} = \frac{(n-k-1)!n(n-k)}{k!(n-2k)!(n-k)} \\
 &= \frac{(n-k)!n}{k!(n-2k)!(n-k)} = \binom{n-k}{k} \times \frac{n}{n-k}
 \end{aligned}$$

Lema 683 Segundo Lema de Kaplansky

Seja $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, considerando 1 e n números consecutivos, o número de k -subconjuntos de A_n , onde não há números consecutivos, é

$$\binom{n-k}{k} \times \frac{n}{n-k}$$

No caso concreto que resolvemos, tínhamos um octógono e queríamos saber quantos triângulos podemos obter unindo três dos vértices não consecutivos do octógono.

Aplicando o resultado deste lema, temos, para $n = 8$ e $k = 3$, $\binom{8-3}{3} \times \frac{8}{8-3} = \binom{5}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{8}{5} = 16$, valor encontrado na resolução.

Recordemos os **Lemas de Kaplansky**:

Seja $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, o número de p -subconjuntos de A_n , com $p \leq \frac{n+1}{2}$, onde não há números consecutivos, é dado pelas seguintes funções

$$\begin{cases} K_F(n, p) = \binom{n-p+1}{p}, & \text{se estamos a considerar uma fila} \\ K_C(n, p) = \binom{n-p}{p} \times \frac{n}{n-p}, & \text{se estamos a considerar um círculo} \end{cases}$$

Exemplo 684 Considere um octógono inscrito numa circunferência.

Determine quantos quadriláteros convexos podemos construir, utilizando vértices não consecutivos (do octógono).

Resolução

Pelo segundo lema de Kaplansky, temos $\binom{8-4}{4} \times \frac{8}{8-4} = 2$. Só há duas maneiras: unir os vértices pares e unir os vértices ímpares.

Note-se que isto acontece, sempre que $n = 2p$. Ora, $K_C(2p, p) = \binom{2p-p}{p} \times \frac{2p}{2p-p} = \binom{p}{p} \times \frac{2p}{p} = 2$.

Exemplo 685 Considere um dodecágono inscrito numa circunferência. Quantos quadriláteros convexos podemos construir

1. Utilizando quatro vértices quaisquer

2. Utilizando quatro vértices sem que haja dois consecutivos

Resolução

1. $\binom{12}{4} = 495$
2. $\binom{12-4}{4} \times \frac{12}{12-4} = \binom{8}{4} \times \frac{3}{2} = 105$

Conclusão: Em 390 casos (dos 495), há dois ou mais vértices consecutivos.

Exemplo 686 Um professor de Inglês dá aulas à mesma turma, três vezes por semana. Em que dias dará aulas a essa turma, se não o faz em dias consecutivos?

Resolução

Vamos supor que as aulas funcionam de segunda a sexta. Então, só há uma maneira (aulas à segunda, quarta e sexta).

Como a questão é demasiado fácil, aproveitemos para complicar um pouco.

E se houver só duas aulas por semana? Temos 5 dias para escolher dois não consecutivos. A resposta é $K_F(5, 2) = \binom{5-2+1}{2} = \binom{4}{2} = 6$

Se houver uma aula por semana, é claro que há 5 hipóteses.

Se houver 4 aulas por semana, tem de haver aulas em dias consecutivos. Mas podemos desejar que não haja aulas em três ou mais dias consecutivos.

Casos em que há aulas em quatro dias consecutivos: 2 casos (segunda, terça, quarta e quinta ou terça, quarta, quinta e sexta).

Casos em que há aulas em três dias consecutivos, mas não em quatro: segunda, terça, quarta e sexta; segunda, quarta, quinta e sexta.

Se desejarmos que não haja aulas em mais do que dois dias consecutivos, temos uma possibilidade: segunda, terça, quinta e sexta.

Repare-se que só cinco hipóteses, pois há um só dia sem aula. Esse dia pode ser segunda, terça, quarta, quinta ou sexta.

Se, numa escola, todas as disciplinas tivessem três aulas por semana e os professores pretendessem dar aulas à mesma turma em dias alternados, só haveria aulas às segundas, quartas e sextas.

Exemplo 687 De quantas maneiras podemos distribuir 6 anéis por 4 dedos?

Resolução

A pergunta é algo problemática, porque está a sujeita a interpretações variadas.

1ª questão: o que se entende por 4 dedos? São quatro dedos previamente definidos, ou são quatro dedos quaisquer? Como nada se diz, vamos admitir a situação mais geral

2ª questão: são quatro dedos da mão direita, ou quatro dedos da mão esquerda? Como não se diz nada, a situação mais geral é que podem ser dedos duma só mão ou dedos de ambas as mãos.

3ª questão: estamos a falar dos dedos duma pessoa? Vamos presumir que sim.

4ª questão: estamos a falar dos dedos das mãos duma pessoa ou dos 20 dedos (incluindo os dedos dos pés)? Apetece considerar os 20 dedos, mas vamos considerar que apenas são considerados os dedos das mãos.

Ainda há a questão do diâmetro dos anéis e de caberem ou não em alguns dos dedos e de sabermos se os anéis são todos iguais.

Após tudo isto, vamos admitir que estamos a considerar 10 dedos das mãos, que os seis anéis são iguais e que fica, pelo menos, um anel, em cada dedo.

Escolha dos dedos para colocar os anéis: $\binom{10}{4} = 210$

Agora, colocamos um anel em cada um dos quatro dedos escolhidos. Falta colocar dois anéis. Se eles ficarem no mesmo dedo, temos 4 hipóteses.

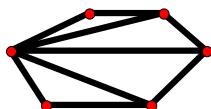
Se ficar 1 num dedo e o outro noutra dedo, temos $\binom{4}{2} = 6$ maneiras. Logo, temos 10 maneiras de colocar os dois anéis que sobraram.

Então, o número de maneiras de colocar os anéis em quatro dedos, é de 2100.

Capítulo 31

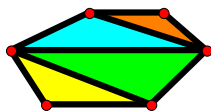
Números de Catalan

Os números de Catalan – um matemático belga de nome Eugène Charles Catalan (1814–1894) – podem definir-se de várias maneiras. Vamos começar por um exemplo geométrico, no caso, um hexágono convexo.

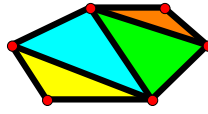


Por um dos vértices, foram desenhadas as três diagonais, tendo-se que o hexágono ficou dividido em quatro triângulos. Se tivermos um polígono de n lados, teremos $n - 2$ triângulos, definidos pelas $n - 3$ diagonais concorrentes num dado vértice e pelos dois lados concorrentes no mesmo vértice. Por razões práticas, vamos considerar que, no caso do hexágono, temos $n = 4$, sendo $n + 2 = 6$, o número de lados. Então, no caso geral, teremos que $n + 2$ é o número de lados do polígono convexo.

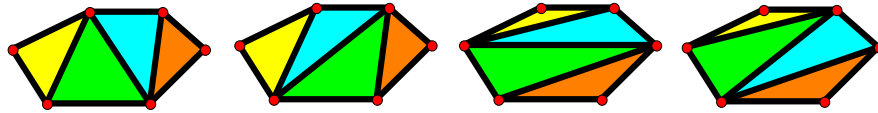
Voltemos ao caso do hexágono, com $n = 4$. É claro que podemos proceder de igual forma nos outros 5 vértices do hexágono, pelo que temos seis maneiras de dividir o hexágono em quatro triângulos, usando três diagonais concorrentes num vértice. Mas, há outras maneiras de fazermos a divisão do hexágono em quatro triângulos, usando diagonais:



No caso da figura anterior, só temos três diagonais (desenhadas), mas temos o hexágono dividido em quatro triângulos. É claro que há outras maneiras de dividir o hexágono em quatro triângulos, usando diagonais:

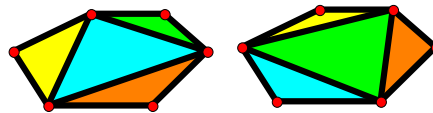


Analogamente aos dois casos anteriores, temos



Então, temos mais seis maneiras de dividir o hexágono inicial em quatro triângulos, usando diagonais.

Curiosamente, há mais duas maneiras de fazermos o mesmo:

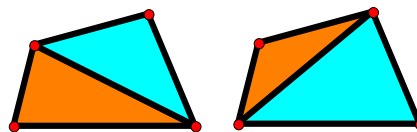


Note-se que as diagonais não podem "cruzar-se", ou seja, só podem intersectar-se num vértice (ou fora do polígono, se considerarmos as rectas que suportam as diagonais).

Obtivemos, assim 14 ($6 + 6 + 2 = 14$) maneiras de dividir o hexágono em quatro triângulos, usando diagonais. A este número chama-se "número de Catalan" (no caso, o número de Catalan correspondente a 4). Ou seja, vamos escrever $C_4 = 14$.

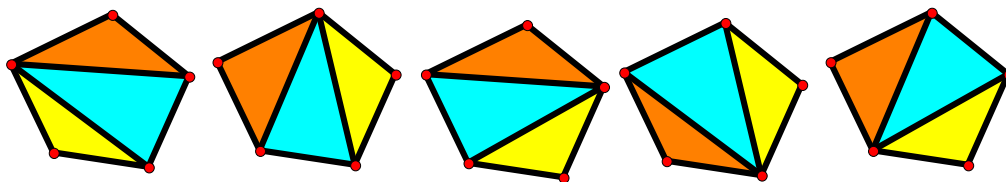
O caso em que temos um triângulo, corresponde a uma única maneira, pelo que $C_1 = 1$. E vamos convencionar que $C_0 = 1$.

No caso dum quadrilátero convexo, temos



Então, $C_2 = 2$.

No caso do pentágono convexo, temos



Então, $C_3 = 5$.

Então, temos os seguintes resultados:

n	0	1	2	3	4
C_n	1	1	2	5	14

A questão que se põe é a seguinte: qual o valor de C_5 e qual o "valor" de C_n ?

Passemos a uma outra questão:

Suponhamos que temos uma escada suficientemente grande (estou a lembrar-me da imagem de Stairway to Heaven, canção dos Led Zeppelin) e que alguém subiu, desde a base da escada e voltou à (mesma) base da escada, sabendo que, no total, subiu 20 degraus (e desceu os mesmos 20 degraus), não tendo obrigatoriamente subido todos os degraus de seguida. Assim, pode ter subido cinco degraus, descido três, subido sete, descido oito, subido sete, descido quatro, subido um e descido cinco. Ou pode ter subido dez, descido dez, subido dez e descido dez.

De quantas maneiras pode ter feito o percurso?

Será que este problema tem alguma coisa a ver com o problema anterior? Bom, o facto de estarem os dois problemas no mesmo Capítulo (e um a seguir ao outro) leva-nos a pensar que sim.

É claro que podemos arranjar um código: S, para subir um degrau e D para descer um degrau. Por exemplo, SSSDD significa que subimos três degraus e descemos dois.

Então, vamos ter uma palavra de 40 letras, sendo 20 S e 20 D. Isso pode levar-nos a pensar em $\binom{40}{20}$. Só que há uma restrição muito forte: não podemos descer abaixo da base da escada! Isso significa que há muitas palavras "proibidas": por exemplo, SSSDDDDSSSSDDDD...

Então, quando consideramos as primeiras m letras, não pode haver mais D do que S, qualquer que seja o número natural m (neste caso, $m \leq 40$).

Do que se afirmou, resulta que $A_n \leq \binom{2n}{n}$, onde A_n representa o número de maneiras de subirmos n degraus e descermos os mesmos n degraus, não sendo obrigatório subir os degraus todos de seguida. Estamos a supor que não passamos abaixo do nível de partida.

Vejamos algumas maneiras de cumprirmos a tarefa de subir 20 degraus e descer os mesmos 20 degraus.

Um modo simples de fazermos isso, é subirmos um degrau e descermos o mesmo degrau, fazendo isso vinte vezes. Neste caso, não fomos além do degrau 1.

E se formos até ao degrau 2, mas não mais do que isso? A questão torna-se bem mais complicada do que a anterior.

Uma maneira consiste em subirmos dois degraus, descer um, subir um, descer um, etc... e regressar à base no fim dos 40 movimentos. Isso significa que vamos ter SS(DSDSDS...DS)DD.

Mas há casos ligeiramente diferentes: (SDSD...SD)SS(DS...DS)DD.

Só que continuamos a ter uma questão complicada. Pensemos nos blocos de S sucessivos. No caso de termos SDSD...SD (S e D alternados), só temos blocos de 1 S. Então, teremos 20 blocos

formados por um único S. No caso $SS(DSDSDS...DS)DD$, temos um bloco SS e 18 blocos formados por um único S. Então, temos que decompor 20 numa soma de números naturais. Esta questão não é muito agradável, mas sabemos resolvê-la.

No caso duma única "parcela", temos $20 = 20$, correspondendo ao caso em que subimos 20 degraus e, depois disso, descemos 20 degraus.

Para duas parcelas, temos $x_1 + x_2 = 20$, havendo 19 soluções, para as variáveis x_1 e x_2 . Uma solução, para o nosso problema, consiste em subir um degrau, descer esse degrau e, depois subir 19 degraus e descer os mesmos 19 degraus. Esta solução corresponde ao caso $1 + 19 = 20$.

E o caso $2 + 18 = 20$? Agora, a situação é mais complicada. Podemos subir dois degraus e descer dois degraus, mas podemos subir dois e descer um só. E, como estamos a ver, a situação vai complicar-se, se tivermos mais do que duas parcelas (e menos do que vinte).

E para $3 + 17 = 20$? Aqui, vamos subir três degraus, após o que descemos um, dois ou três, subimos dezassete e descemos até à base. Logo, temos três maneiras.

E assim sucessivamente. Por exemplo, para $17 + 3 = 20$, subimos dezassete degraus, descemos um ou dois ou três ou ... ou dezassete, após o que subimos três degraus e descemos o número conveniente de degraus (até chegarmos à base da escada). Aqui, temos 17 maneiras.

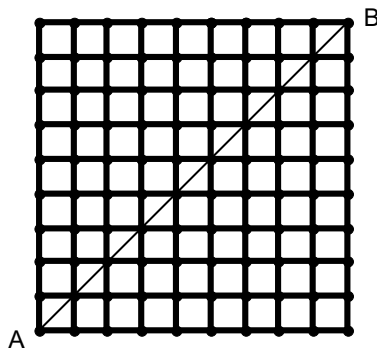
Para $19 + 1 = 20$, subimos 19 degraus, descemos de um a dezanove degraus, subimos outro degrau e descemos até à base da escada. Ou seja, temos 19 maneiras,

Logo, com dois blocos de S, o número de maneiras é $1 + 2 + \dots + 19 = \sum_{k=1}^{19} k = \frac{19 \times 20}{2} = 190$.

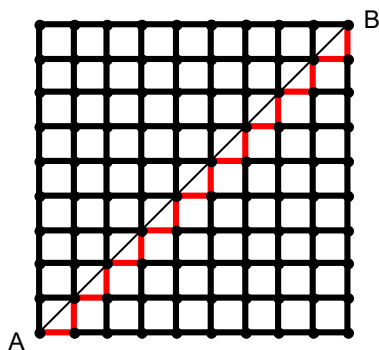
E passaríamos ao caso de três blocos de S: $x_1 + x_2 + x_3 = 20$.

Só que este processo de resolução parece não ser viável.

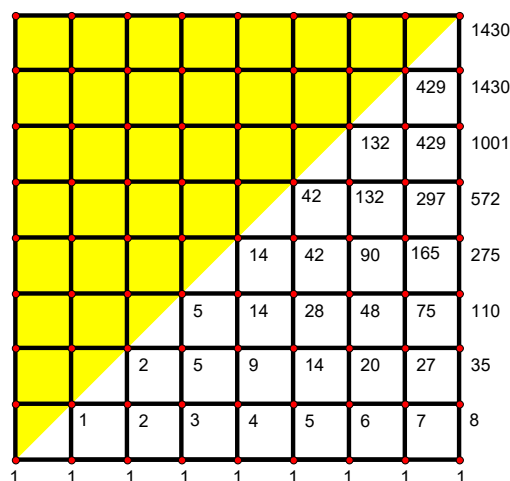
Observemos a figura seguinte:



Pretendemos ir de A até B , sem sair da zona azul e seguindo ao longo dos segmentos que definem a grelha. É claro que pretendemos saber o número de caminhos mais curtos (não podemos seguir ao longo das diagonais). Uma possibilidade é fazermos $HVHVHVHVHVHVHVHVHV$, ou seja, seguimos de A até B , da maneira seguinte:



De modo análogo ao Triângulo de Pascal, podemos colocar o número de maneiras de chegarmos a cada ponto:



Os números de Catalan são aqueles que ficam na diagonal: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, ...

Note-se que nenhum caminho pode passar pela zona a amarelo (a não ser pelos pontos que estão na diagonal).

Ao Triângulo anterior, dá-se o nome de "Triângulo de Catalan".

Divida-se $\binom{0}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{6}{3}$, $\binom{8}{4}$, $\binom{10}{5}$, $\binom{12}{6}$, $\binom{14}{7}$, $\binom{16}{8}$ pelos números que estão na diagonal da figura anterior: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430.

Ora, $\frac{\binom{0}{0}}{1} = 1$, $\frac{\binom{2}{1}}{1} = 2$, $\frac{\binom{4}{2}}{2} = 3$, $\frac{\binom{6}{3}}{5} = 4$, $\frac{\binom{8}{4}}{14} = 5$, $\frac{\binom{10}{5}}{42} = 6$, $\frac{\binom{12}{6}}{132} = 7$, $\frac{\binom{14}{7}}{429} = 8$, $\frac{\binom{16}{8}}{1430} = 9$.

Seja C_n , o número de Catalan de ordem n . Então, parece que $\frac{\binom{2n}{n}}{C_n} = n + 1$, ou seja

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

A primeira questão que se coloca é a de saber se $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ é sempre um número inteiro. Para provar que tal é verdade, basta um pequeno cálculo:

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n! \times n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)! \times (n-1)!} \\ &= \frac{(n+1)(2n)!}{(n+1)n! \times n!} - \frac{n(2n)!}{(n+1)! \times n(n-1)!} \\ &= \frac{(n+1)(2n)!}{(n+1)! \times n!} - \frac{n(2n)!}{(n+1)! \times n!} \\ &= \frac{(n+1-n)(2n)!}{(n+1)! \times n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)n! \times n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \end{aligned}$$

Logo, para qualquer número natural n , temos

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

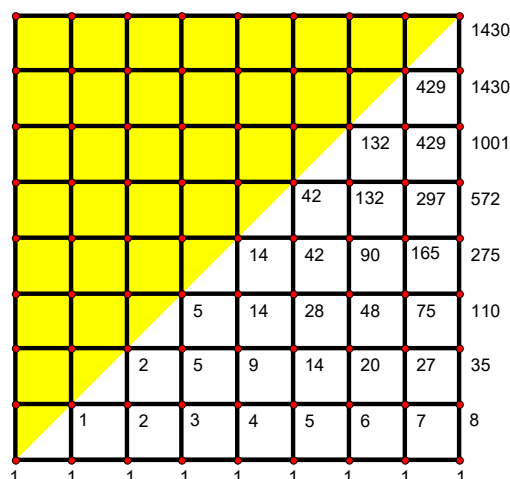
Logo, $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ é um número inteiro positivo, para qualquer valor de n .

Eis outra maneira de interpretarmos os números de Catalan (com base na igualdade $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$):

										1		1	
									1		2		$2 - 1 = 1$
								1		3			
							1		4		6		$6 - 4 = 2$
						1		5		10			
					1		6		15		20		$20 - 15 = 5$
				1		7		21		35			
			1		8		28		56		70		$70 - 56 = 14$
		1		9		36		84		126			
	1		10		45		120		210		252		$252 - 210 = 42$
	1	11		55		165		330		462			
1		12		66		220		495		792		924	$924 - 792 = 132$

No quadro anterior, temos a "metade" esquerda do Triângulo de Pascal. O número de Catalan é a diferença entre o número da casa central e o número que o precede (na mesma linha). Note-se que só há elemento central, nas linhas de ordem par.

Voltemos ao "triângulo"



Consideremos as sucessivas linhas, a contar de baixo para cima:

								1430
							429	1430
						132	429	1001
					42	132	297	572
				14	42	90	165	275
			5	14	28	48	75	110
		2	5	9	14	20	27	35
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1

É claro que as duas primeiras linhas não oferecem qualquer problema.

Passemos à terceira linha: $A_n = 2 + bn + cn(n-1)$

Então, $A_1 = 2 + b = 5$, pelo que $b = 3$, E $A_2 = 2 + 6 + c2(2-1) = 9$, pelo que $c = \frac{1}{2}$.

Logo, $A_n = 2 + 3n + \frac{1}{2}n(n-1)$

Se quisermos, podemos alterar os índices, fazendo $A_n = 2 + 3(n-2) + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$

Ainda podemos ser mais explícitos, escrevendo

$$A_2(m) = 2 + 3(m-2) + \frac{1}{2}(m-2)(m-3)$$

Para $m = 2$, temos $A_2(2) = 2 = C_2$.

Passemos à linha seguinte:

$$5 \quad 14 \quad 28 \quad 48 \quad 75 \quad 110$$

As diferenças são $9 \quad 14 \quad 20 \quad 27 \quad 35$, enquanto as segundas diferenças são $5 \quad 6 \quad 7 \quad 8$.

Então, vamos ter um polinómio de terceiro grau:

$$A_3(m) = 5 + am + bm(m-1) + cm(m-1)(m-2)$$

Então, $A_3(1) = 5 + a = 14$, pelo que $a = 9$. E $A_3(2) = 5 + 18 + 2b = 28$, pelo que $b = \frac{5}{2}$. Por fim, $A_3(3) = 5 + 27 + 15 + 6c = 48$, donde vem $c = \frac{1}{6}$.

Logo, $A_3(m) = 5 + 9m + \frac{5}{2}m(m-1) + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$.

Se quisermos "acertar" m , temos

$$A_3(m) = 5 + 9(m-3) + \frac{5}{2}(m-3)(m-4) + \frac{1}{6}(m-3)(m-4)(m-5)$$

E $C_3 = A_3(3) = 5$.

Continuando, temos

$$\begin{aligned} A_4(m) &= 14 + 28(m-4) + 10(m-4)(m-5) + \frac{7}{6}(m-4)(m-5)(m-6) \\ &\quad + \frac{1}{24}(m-4)(m-5)(m-6)(m-7) \end{aligned}$$

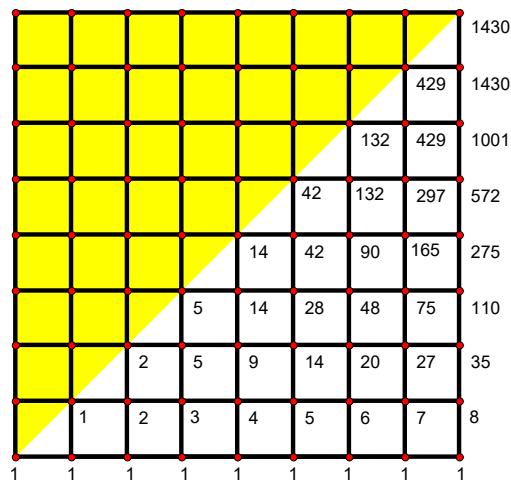
E temos $C_4 = A_4(4) = 14$.

É claro que não nos serve de nada saber que $C_m = A_m(m)$, porque só descobrimos A_m , depois de conhecermos C_m . De qualquer modo, já temos o termo geral de C_m :

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

Por exemplo, $C_{20} = 6564\,120\,420$

O triângulo de Catalan tem algumas propriedades curiosas.



Prolongando o triângulo da figura anterior, temos:

															9694 845
														2674 440	9694 845
												742 900	2674 440	7020 405	
											208 012	742 900	1931 540	4345 965	
										58 786	208 012	534 888	1188 640	2414 425	
									16 796	58 786	149 226	326 876	653 752	1225 785	
								4862	16 796	41 990	90 440	177 650	326 876	572 033	
							1430	4862	11 934	25 194	48 450	87 210	149 226	245 157	
					429	1430	3432	7072	13 260	23 256	38 760	62 016	95 931		
				132	429	1001	2002	3640	6188	9996	15 504	23 256	33 915		
			42	132	297	572	1001	1638	2548	3808	5508	7752	10 659		
		14	42	90	165	275	429	637	910	1260	1700	2244	2907		
	5	14	28	48	75	110	154	208	273	350	440	544	663		
	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104	119	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Uma outra propriedade interessante tem a ver com o facto de termos colunas, onde só aparecem números ímpares. Se considerarmos que a coluna mais à esquerda é a coluna zero, então isso acontece nas colunas 0, 1, 3, 7, 15, todas da forma $2^n - 1$. Tal significa que, nessas colunas, o número de Catalan é ímpar. Curiosamente, nos restantes casos, o número de Catalan é par.

Note-se que podemos formar o Triângulo de Catalan das seguintes formas (pelo menos):

1															132
1	1													42	132
1	2	2										14	42	90	
1	3	5	5								5	14	28	48	
1	4	9	14	14					2	5	9	14	20		
1	5	14	28	42	42			1	2	3	4	5	6		
1	6	20	48	90	132	132	1	1	1	1	1	1	1	1	

Vejamos alguns exemplos de termos da forma C_{2^n-1} .

n	$2^n - 1$	C_{2^n-1}
0	0	1
1	1	1
2	3	5
3	7	429
4	15	9694 845
5	31	14 544 636 039 226 909
6	63	94 295 850 558 771 979 787 935 384 946 380 125
7	127	11 311 095 732 253 345 760 960 290 897 769 189 975 961 199 415 637 572 612 957 718 759 342 193 629
8	255	462 380 922 852 216 169 265 170 616 488 440 694 205 685 631 744 111 431 093 276 770 208 968 757 667 872 897 108 268 394 945 258 551 829 606 097 190 248 507 788 968 859 791 255 880 300 732 159 072 477
9	511	2190 251 491 739 477 424 254 235 019 785 597 839 694 676 372 955 883 183 976 582 551 028 726 151 813 997 871 354 391 075 304 454 574 949 251 922 785 248 583 970 189 394 756 782 256 529 178 824 038 918 189 668 852 236 486 561 863 197 470 752 363 343 641 524 451 529 091 938 039 960 955 474 280 081 989 297 135 147 411 990 495 428 867 310 575 974 835 605 457 151 854 594 468 879 961 981 363 032 236 839 645

n	$2^n - 1$	$C_{2^n - 1}$
10	1023	139 157 094 488 809 216 609 180 329 989 019 270 542 470 366 637 931 721 645 782 460 476 401 147 721 805 507 643 460 842 978 613 112 414 335 494 835 558 006 583 884 148 977 659 784 391 912 051 143 1589 488 498 454 047 196 216 538 728 539 563 731 063 485 599 728 723 338 437 022 423 741 874 852 640 719 293 752 741 626 537 131 080 797 001 256 082 649 564 790 786 427 340 339 227 207 197 737 296 301 027 058 953 133 944 657 337 264 367 798 537 255 154 086 114 369 658 997 367 672 306 547 722 577 441 770 489 571 574 173 901 418 840 547 456 769 262 994 880 308 381 035 496 677 690 674 048 024 741 359 286 292 131 007 138 160 717 455 357 922 749 849 419 904 447 484 454 487 263 685 021 812 451 676 637 611 145 964 399 438 172 153 395 772 409 247 063 871 883 341 908 263 3

Como é evidente, alguns dos números de Catalan foram escritos em várias linhas, devido ao grande número de algarismos.

Voltando ao Triângulo de Catalan, temos a seguinte curiosidade: Qualquer número de Catalan é a soma de todos os números da coluna imediatamente à sua esquerda. Por exemplo,

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 = 2 + 2 + 1 \\ 14 = 5 + 5 + 3 + 1 \\ 42 = 14 + 14 + 9 + 4 + 1 \\ 132 = 42 + 42 + 28 + 14 + 5 + 1 \end{array} \right.$$

Mas esta propriedade aplica-se a qualquer elemento do triângulo de Catalan. Assim, qualquer elemento é dado pela soma de todos os elementos da coluna anterior que não ficam acima do elemento em causa. Exemplos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 = 8 + 1 \\ 44 = 35 + 8 + 1 \\ 154 = 110 + 35 + 8 + 1 \\ 429 = 275 + 110 + 35 + 8 + 1 \end{array} \right.$$

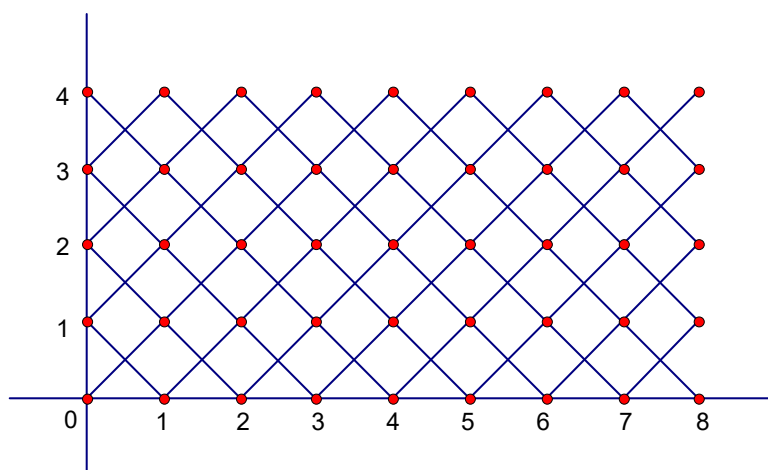
Voltemos ao início. Suponhamos que pretendemos subir n degraus numa escada e descer n degraus, partindo da base da escada e regressando à base. Seja C_n o número de maneiras de desempenharmos essa tarefa. Note-se que não temos de subir os degraus todos numa vez (para $n > 1$).

Então, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2, \dots$

Observação

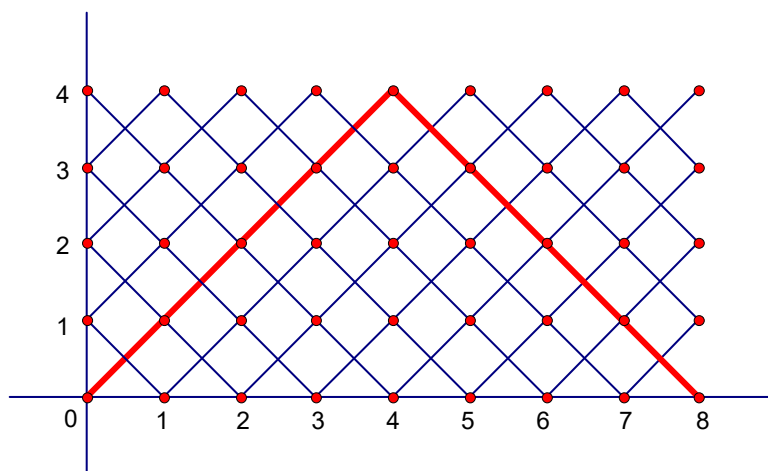
Embora estejamos a usar a mesma notação, C_n , não temos a certeza que a sucessão seja a mesma que é definida por $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

Agora, vamos alterar esta questão, de acordo com o seguinte:

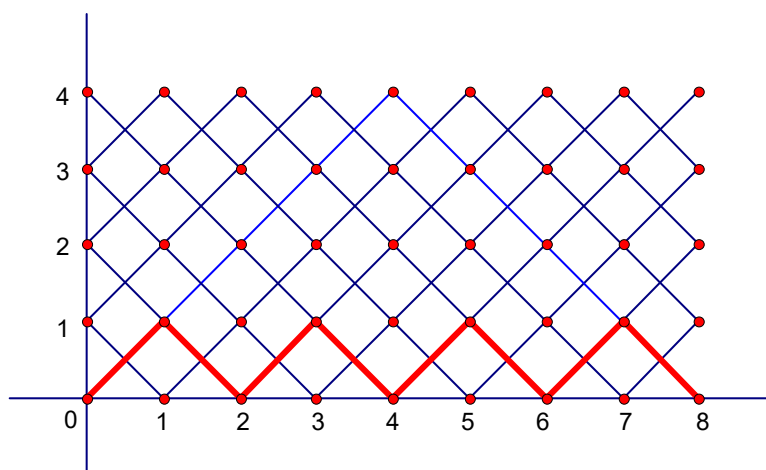


Pretendemos "ir" do ponto $(0,0)$ ao ponto $(8,0)$, seguindo pelas diagonais, mas só podemos mudar de direcção nos pontos a vermelho (da figura anterior). Como habitualmente, queremos que a distância percorrida seja mínima. Note-se que essa distância é $8\sqrt{2}$.

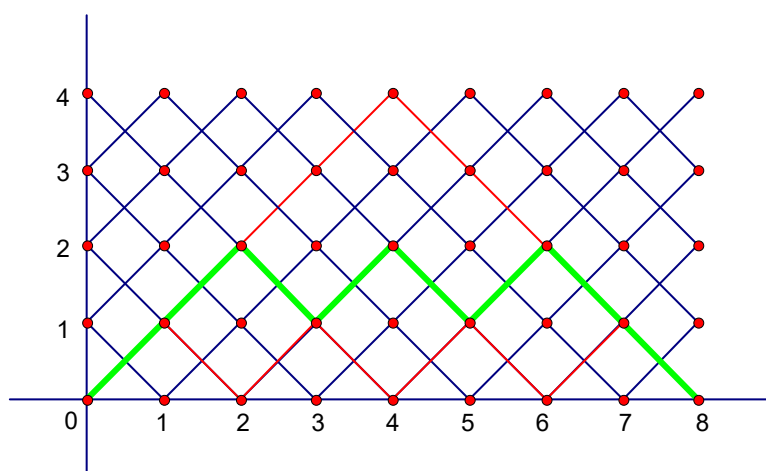
Uma das maneiras de fazermos isso é a seguinte:

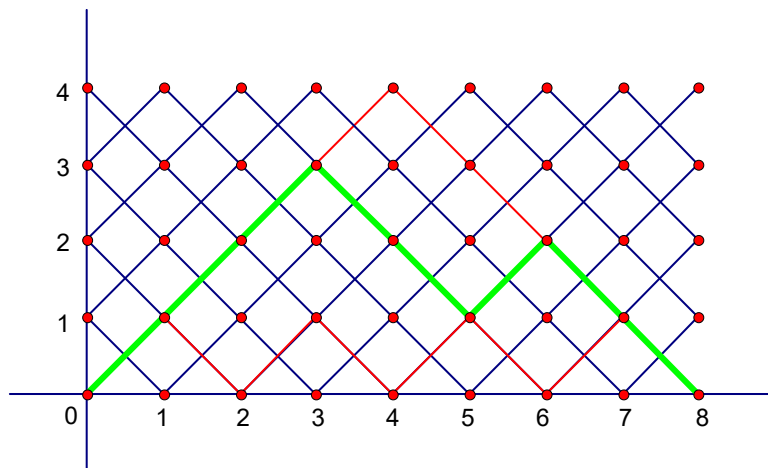


Outra maneira:



É claro que, entre um caso e o outro, há outras possibilidades. Eis dois desses casos intermédios:





Ao fim e ao cabo, temos várias funções f de $[0, 8]$ em \mathbb{R} , em que $f(0) = 0$ e $f(8) = 0$. Com as restrições impostas, tem de ser $f(1) = 1 = f(7)$.

Sejam $A = (1, 1)$ e $B = (7, 1)$. De quantas maneiras podemos ir de A até B ?

Esta é uma questão importante. Há dois tipos de maneiras de ir de A até B , seguindo as condições impostas no problema. Um dos tipos é nunca "tocar" no eixo das abcissas.

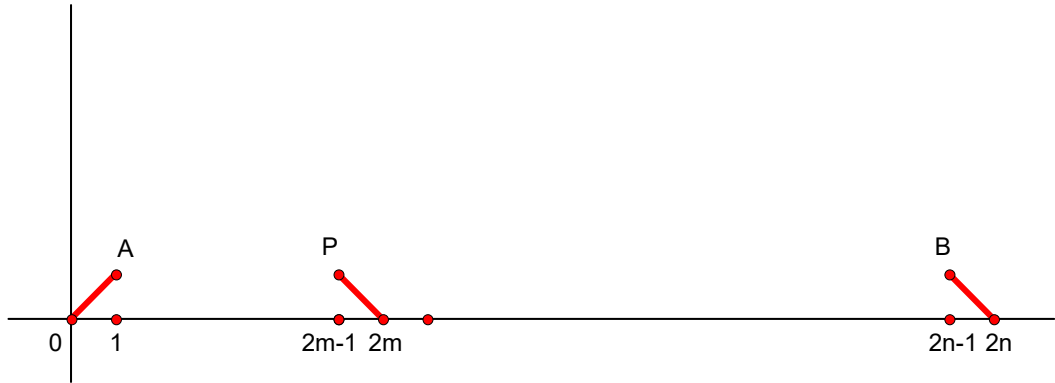
Há tantas maneiras desse tipo, como o número de maneiras de irmos de $(0, 0)$ até $(6, 0)$. Agora, falta-nos contar o número de maneiras em que "tocamos" uma ou mais vezes no eixo das abcissas.

Suponhamos que estamos em $(1, 1)$ e passamos para $(2, 0)$. Agora, pretendemos saber quantas maneiras há, para irmos de $(2, 0)$ até $(7, 1)$. Ora, de $(7, 1)$, temos de ir para $(8, 0)$, pelo que pretendemos saber o número de maneiras de irmos de $(2, 0)$ até $(8, 0)$. Tal número é igual ao número de maneiras de irmos de $(0, 0)$ até $(6, 0)$.

Suponhamos, agora, que passamos de $(1, 1)$ para $(2, 2)$. Agora, podemos "descer" até $(4, 0)$. E o número de maneiras de irmos de $(4, 0)$ até $(7, 1)$ ou $(8, 0)$ é o mesmo que existe para irmos de $(0, 0)$ até $(4, 0)$.

É mais ou menos evidente que as funções têm dois ou mais zeros (para $n \geq 1$) e que os zeros das várias funções admissíveis têm de ser números pares.

Observemos, com atenção, a seguinte figura:



Pretendemos "ir" do ponto $O = (0, 0)$ ao ponto $(2n, 0)$, passando por $A = (1, 1)$ e por $B = (2n - 1, 1)$ e respeitando as condições impostas pelo problema. Há dois tipos de caminhos admissíveis (para irmos de A até B): os que passam pelo eixo das abcissas e os que não passam pelo eixo das abcissas.

O número de maneiras de ir de A até B , não passando pelo eixo das abcissas é igual ao número de maneiras de irmos de $(0, 0)$ até $(2n - 2, 0)$.

Consideremos os caminhos de A até B que passam pelo eixo das abcissas. Seja $Q = (2m, 0)$, o ponto em que pela primeira vez tocamos no eixo das abcissas (partindo de A). Então, viemos do ponto $P = (2m - 1, 1)$, pelo que temos a seguinte situação: Partindo de $(0, 0)$, chegamos a $(2n, 0)$, passando por A , por P , por $Q = (2m, 0)$ e por B . Ora, o número de maneiras de irmos de A até Q é igual ao número de maneiras de irmos de A até P , sem passar pelo eixo das abcissas (porque estamos a supor que $(2m, 0)$ é o ponto em que pela primeira vez tocamos no eixo das abcissas). Mas, tal número é igual ao número de maneiras de irmos de $(0, 0)$ até $(2m - 2, 0)$.

E o número de maneiras de irmos de $Q = (2m, 0)$ até B é igual ao número de maneiras de irmos de $(2m, 0)$ até $(2n, 0)$. Este número é o mesmo que o número de maneiras de irmos de $(0, 0)$ até $(2n - 2m, 0)$. É claro que $0 < m < n$, ou seja, $1 \leq m \leq n - 1$, pelo que há $n - 1$ possibilidades para o valor de m .

Como bem sabemos, o número total de caminhos é o produto dos dois números anteriores.

Agora, é uma questão de notação.

Seja C_n , o número de maneiras de irmos de $(0, 0)$ até $(2n, 0)$, respeitando as condições impostas pelo problema.

Então, relativamente à situação anterior, temos $C_{m-1} \times C_{n-m}$, com $1 \leq m \leq n - 1$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 C_n &= C_{n-1} + C_1 \times C_{n-2} + C_2 \times C_{n-3} + \cdots + C_{n-2} \times C_1 + C_{n-1} \\
 &= C_0 \times C_{n-1} + C_1 \times C_{n-2} + C_2 \times C_{n-3} + \cdots + C_{n-2} \times C_1 + C_{n-1} \times C_0 \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}
 \end{aligned}$$

Ou, se preferirmos

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + C_1 \times C_{n-1} + C_2 \times C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} \times C_1 + C_n \\ &= C_0 \times C_n + C_1 \times C_{n-1} + C_2 \times C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} \times C_1 + C_n \times C_0 \\ &= \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \end{aligned}$$

Calculemos C_6 , usando a igualdade anterior:

$$C_6 = C_0 \times C_5 + C_1 \times C_4 + C_2 \times C_3 + C_3 \times C_2 + C_4 \times C_1 + C_5 \times C_0$$

Se soubermos que $C_0 = C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42$, vem

$$C_6 = 1 \times 42 + 1 \times 14 + 2 \times 5 + 5 \times 2 + 14 \times 1 + 42 \times 1 = 132$$

Repare-se que as parcelas que definem C_6 são iguais, duas a duas. Isso acontece, sempre que temos um índice par. No caso de termos um índice ímpar, existe uma parcela central e as restantes são iguais, duas a duas. É o caso de C_5 :

$$\begin{aligned} C_5 &= C_0 \times C_4 + C_1 \times C_3 + C_2 \times C_2 + C_3 \times C_1 + C_4 \times C_0 \\ &= 2C_0 \times C_4 + 2C_1 \times C_3 + C_2^2 = 2 \times 1 \times 14 + 2 \times 1 \times 5 + 2^2 = 42 \end{aligned}$$

Observação

Note-se que a expressão $C_0 \times C_4 + C_1 \times C_3 + C_2 \times C_2 + C_3 \times C_1 + C_4 \times C_0$ é bem conhecida do produto de duas séries (no caso presente, as duas séries seriam iguais). Esse produto recebe o nome de produto de convolução e aplica-se a séries e polinómios (que são séries especiais).

Se tivermos $C_0 \times D_4 + C_1 \times D_3 + C_2 \times D_2 + C_3 \times D_1 + C_4 \times D_0$, esta expressão pode ser interpretada como o coeficiente do termo em x^4 do produto

$$(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4) \times (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4)$$

Do mesmo modo, $C_0 \times D_5 + C_1 \times D_4 + C_2 \times D_3 + C_3 \times D_2 + C_4 \times D_1 + C_5 \times D_0$ é o coeficiente do termo em x^5 de

$$(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5) \times (D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + D_5x^5)$$

E $C_0 \times C_5 + C_1 \times C_4 + C_2 \times C_3 + C_3 \times C_2 + C_4 \times C_1 + C_5 \times C_0$ é o coeficiente do termo em x^5 de

$$(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5)^2$$

Registe-se que o termo em x^5 não se altera se tivermos um polinómio com mais termos (ou uma série).

A interpretação anterior vai ser importante, na determinação do termo geral da sucessão (dos números de Catalan).

Exercício 688 Seja $X_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Mostre que, para todo o número natural n , temos $\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{4n+2}{n+2}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\frac{X_{n+1}}{X_n} &= \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} \times \frac{n+1}{\binom{2n}{n}} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \times (n+1)!} \times \frac{n! \times n!}{(2n)!} \\
&= \frac{n+1}{n+2} \times \frac{(2n+2)(2n+1) \times (2n)!}{(n+1) \times n! \times (n+1) \times n!} \times \frac{n! \times n!}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{n+2} \times \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+2} = \frac{4n+2}{n+2}
\end{aligned}$$

Note-se que a igualdade anterior é válida para $n = 0$.

Da igualdade anterior vem:

$$\frac{X_{n+2}}{X_n} = \frac{X_{n+2}}{X_{n+1}} \times \frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{4(n+1)+2}{n+1+2} \times \frac{4n+2}{n+2} = \frac{4n+6}{n+3} \times \frac{4n+2}{n+2}$$

De modo análogo, temos

$$\frac{X_{n+3}}{X_n} = \frac{(4n+10)(4n+6)(4n+2)}{(n+4)(n+3)(n+2)} = \prod_{k=1}^3 \frac{4n+4k-2}{n+k+1}$$

E, ainda

$$\frac{X_{n+m}}{X_n} = \prod_{k=1}^m \frac{4n+4k-2}{n+k+1}$$

Fazendo $n = 0$, temos

$$\frac{X_m}{X_0} = X_m = \prod_{k=1}^m \frac{4k-2}{k+1}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^0 \frac{4k-2}{k+1} &= 1, \prod_{k=1}^1 \frac{4k-2}{k+1} = 1, \prod_{k=1}^2 \frac{4k-2}{k+1} = 2, \prod_{k=1}^3 \frac{4k-2}{k+1} = 5, \prod_{k=1}^4 \frac{4k-2}{k+1} = 14 \\
\prod_{k=1}^5 \frac{4k-2}{k+1} &= 42, \prod_{k=1}^6 \frac{4k-2}{k+1} = 132, \prod_{k=1}^7 \frac{4k-2}{k+1} = 429
\end{aligned}$$

Note-se que um dos factores de $\prod_{k=1}^m \frac{4k-2}{k+1}$ é 1, pelo que podemos omiti-lo. Então

$$X_m = \prod_{k=2}^m \frac{4k-2}{k+1}$$

Note-se que $\prod_{k=1}^0 \frac{4k-2}{k+1} = \prod_{k \in \emptyset} \frac{4k-2}{k+1} = 1$ (elemento neutro da multiplicação), do mesmo modo que

$\sum_{k \in \emptyset} x_k = 0$ (elemento neutro da adição).

Há uma igualdade bem curiosa:

$$X_m = \prod_{k=2}^m \frac{4k-2}{k+1} = \prod_{k=2}^m \frac{m+k}{k}$$

Calculemos X_m , das duas maneiras:

$$\begin{cases} X_5 = \frac{6}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{14}{4} \times \frac{18}{5} = 42 \\ X_5 = \frac{6}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{9}{4} \times \frac{10}{5} = 42 \end{cases}$$

Embora os factores sejam diferentes, os dois produtos são iguais.

31.1 Função Geradora dos Números de Catalan

O assunto das funções geradoras já foi abordado e vamos utilizá-lo neste capítulo dedicado aos números de Catalan.

Seja $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, a sucessão dos números de Catalan e consideremos a série formal

$$S(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_nx^n + \dots$$

Então,

$$\begin{aligned} (S(x))^2 &= (C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_nx^n + \dots)^2 \\ &= C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \dots \\ &\quad + \dots + (C_0C_n + C_1C_{n-1} + \dots + C_{n-1}C_1 + C_nC_0)x^n + \dots \\ &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_{n+1}x^n + \dots \end{aligned}$$

Então,

$$x(S(x))^2 = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_{n+1}x^{n+1} + \dots$$

Finalmente, temos

$$C_0 + x(S(x))^2 = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_{n+1}x^{n+1} + \dots = S(x)$$

Como $C_0 = 1$, vem $1 - S(x) + x(S(x))^2 = 0$, ou seja, $x(S(x))^2 - S(x) + 1 = 0$.

Então,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{(1 \pm \sqrt{1-4x})(1 \mp \sqrt{1-4x})}{2x(1 \mp \sqrt{1-4x})} \\ &= \frac{1 - 1 + 4x}{2x(1 \mp \sqrt{1-4x})} = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4x}} \end{aligned}$$

Como $S(0) = 1$, temos que $S(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}}$.

Logo, $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$, para $x \neq 0$ e x "conveniente".

Consideremos a função $f(x) = \sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$.

Podemos obter a série de Mac-Laurin da função f , calculando as sucessivas derivadas de f .

Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt{1-4x} = -\frac{2}{\sqrt{1-4x}} = -2(1-4x)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= \frac{d}{dx} \left(-2(1-4x)^{-\frac{1}{2}} \right) = -4(1-4x)^{-\frac{3}{2}} = -2^2 \times 1 \times (1-4x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} \left(-4(1-4x)^{-\frac{3}{2}} \right) = -24(1-4x)^{-\frac{5}{2}} = -2^3 \times 1 \times 3 \times (1-4x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx} \left(-24(1-4x)^{-\frac{5}{2}} \right) = -240(1-4x)^{-\frac{7}{2}} = -2^4 \times 1 \times 3 \times 5 \times (1-4x)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx} \left(-240(1-4x)^{-\frac{7}{2}} \right) = -3360(1-4x)^{-\frac{9}{2}} = -2^5 \times 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times (1-4x)^{-\frac{9}{2}}$$

É relativamente fácil de verificar que partimos de $\frac{1}{2}$ e os expoentes vão diminuindo uma unidade, ou seja, temos que os expoentes são $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}, \dots$

Em cada derivada, temos de multiplicar por -4 , pelo que a expressão de $f^{(n)}(x)$ acaba por não ter denominadores. Ora:

$$f^{(n)}(x) = 2^n \times (1-4x)^{\frac{1-2n}{2}} \prod_{k=1}^n (2k-3)$$

Note-se que o primeiro factor de $\prod_{k=1}^n (2k-3)$ é -1 e os restantes são números naturais ímpares. Então, podemos omitir esse factor, colocando o sinal $-$, no início da expressão:

$$f^{(n)}(x) = -2^n \times (1-4x)^{\frac{1-2n}{2}} \prod_{k=2}^n (2k-3)$$

Deste modo, temos um produto de $n-1$ números naturais ímpares consecutivos, começando em 1.

Se quisermos, podemos demonstrar a igualdade anterior por indução:

Para $n=1$, temos $f^{(1)}(x) = f'(x) = 2^1 \times (1-4x)^{\frac{1-2}{2}} \prod_{k=1}^1 (2k-3) = -2(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$, que é uma proposição verdadeira.

Suponhamos que $f^{(n)}(x) = 2^n \times (1-4x)^{\frac{1-2n}{2}} \prod_{k=1}^n (2k-3)$.

Então, queremos mostrar que $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1} \times (1-4x)^{\frac{1-2(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-3)$.

Ora,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} \left(2^n \times (1-4x)^{\frac{1-2n}{2}} \prod_{k=1}^n (2k-3) \right) \\ &= 2^n \times \prod_{k=1}^n (2k-3) \frac{d}{dx} \left((1-4x)^{\frac{1-2n}{2}} \right) \\ &= 2^n \times \left(-4 \times \frac{1-2n}{2} \right) \prod_{k=1}^n (2k-3) (1-4x)^{\frac{1-2n}{2}-1} \\ &= 2^n \times 2(2n-1) (1-4x)^{\frac{1-2n-2}{2}} \prod_{k=1}^n (2k-3) \\ &= 2^{n+1} (1-4x)^{\frac{1-2(n+1)}{2}} \prod_{k=1}^{n+1} (2k-3) \end{aligned}$$

Logo, a igualdade é válida para qualquer número natural. E até podemos admitir que a igualdade é válida para $n=0$.

Fazendo $x = 0$, temos

$$f^{(n)}(0) = 2^n \times \prod_{k=1}^n (2k-3) = -2^n \times \prod_{k=2}^n (2k-3), \text{ com } n \geq 2$$

Então,

$$\sqrt{1-4x} = 1 + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots$$

Logo,

$$\begin{cases} -1 + \sqrt{1-4x} = xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots \\ 1 - \sqrt{1-4x} = -xf'(0) - \frac{x^2}{2!}f''(0) - \frac{x^3}{3!}f'''(0) - \dots \\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = -f'(0) - \frac{x}{2!}f''(0) - \frac{x^2}{3!}f'''(0) - \dots \\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = -\frac{1}{2 \times 1!}f'(0) - \frac{x}{2 \times 2!}f''(0) - \frac{x^2}{2 \times 3!}f'''(0) - \dots \\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + \frac{x}{4} \times 2^2 \times 1 + \frac{x^2}{2 \times 3 \times 2 \times 1} \times 2^3 \times 1 \times 3 + \dots \\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + x + 2x^2 + \frac{x^3}{2 \times 4!} \times 2^4 \times 1 \times 3 \times 5 + \dots \\ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \dots + \frac{x^{n-1}}{2 \times n!} \times 2^n \times \prod_{k=2}^n (2k-3) + \dots \end{cases}$$

Então, obtivemos uma série formal, em que os sucessivos coeficientes (os números de Catalan) são definidos por um termo geral. Ora, $C_{n-1} = \frac{2^n}{2 \times n!} \times \prod_{k=2}^n (2k-3)$, ou seja,

$$C_n = \frac{2^{n+1}}{2 \times (n+1)!} \times \prod_{k=2}^{n+1} (2k-3) = \frac{2^n}{(n+1)!} \times \prod_{k=2}^{n+1} (2k-3)$$

Agora, basta uma pequena habilidade. Repare-se que, por exemplo,

$$\begin{aligned} C_6 &= \frac{2^6}{7!} \times (1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11) \\ &= \frac{2^6}{7!} \times \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} \\ &= \frac{2^6}{7!} \times \frac{12!}{2^6 \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6)} = \frac{12!}{7! \times 6!} = \frac{1}{7} \times \frac{12!}{6! \times 6!} \end{aligned}$$

No caso geral, fazemos o mesmo truque, obtendo-se

$$C_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n! \times n!}$$

Embora tenhamos factoriais, na expressão anterior, é possível calcular um termo da sucessão de Catalan, sem calcularmos todos os termos anteriores. É claro que é conveniente termos uma calculadora ou um computador que calculem factoriais.

Calculemos C_{50} , usando um computador:

$$C(50) = \frac{1}{51} \times \frac{100!}{50! \times 50!} = 1978\,261\,657\,756\,160\,653\,623\,774\,456$$

Observação

Em vez de considerarmos o desenvolvimento em série da função $f(x) = \sqrt{1-4x}$, podemos obter a série da função $\psi(x) = 1 - \sqrt{1-x} = 1 - (1-x)^{\frac{1}{2}}$ e, depois, basta substituímos x por $4x$.

Então, temos

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}, \psi''(x) = \frac{1}{2^2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \\ \psi'''(x) &= \frac{1 \times 3(1-x)^{-\frac{5}{2}}}{2^3}, \psi^{(4)}(x) = \frac{1 \times 3 \times 5(1-x)^{-\frac{7}{2}}}{2^4} \\ \psi^{(5)}(x) &= \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7(1-x)^{-\frac{9}{2}}}{2^5}, \psi^{(6)}(x) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9(1-x)^{-\frac{11}{2}}}{2^6}\end{aligned}$$

Finalmente, teremos

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{(1-x)^{\frac{1-2n}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{2^n}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\psi(0) &= 0, \psi'(0) = \frac{1}{2}, \psi''(0) = \frac{1}{2^2} \\ \psi'''(0) &= \frac{1 \times 3}{2^3}, \psi^{(4)}(0) = \frac{1 \times 3 \times 5}{2^4} \\ \psi^{(n)}(0) &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{2^n}\end{aligned}$$

E, agora, temos

$$\begin{aligned}\psi(x) &= 0 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2 \times 2!}x^2 + \frac{1 \times 3}{2^3 \times 3!}x^3 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2^4 \times 4!}x^4 + \dots \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2 \times 2!}x^2 + \frac{1 \times 3}{2^3 \times 3!}x^3 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2^4 \times 4!}x^4 + \dots + \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{2^n \times n!}x^n + \dots\end{aligned}$$

Substituindo x por $4x$, temos

$$\begin{aligned}\psi(4x) &= \frac{2^2}{2}x + \frac{4^2 \times 1}{2^2 \times 2!}x^2 + \frac{4^3 \times 1 \times 3}{2^3 \times 3!}x^3 + \frac{4^4 \times 1 \times 3 \times 5}{2^4 \times 4!}x^4 + \dots + \frac{4^n \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{2^n \times n!}x^n + \dots \\ &= 2x + \frac{2^2 \times 1}{2!}x^2 + \frac{2^3 \times 1 \times 3}{3!}x^3 + \frac{2^4 \times 1 \times 3 \times 5}{4!}x^4 + \dots + \frac{2^n \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{n!}x^n + \dots\end{aligned}$$

Finalmente, temos

$$\frac{\psi(4x)}{2x} = 1 + \frac{2 \times 1}{2!}x + \frac{2^2 \times 1 \times 3}{3!}x^2 + \frac{2^3 \times 1 \times 3 \times 5}{4!}x^3 + \dots + \frac{2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{n!}x^{n-1} + \dots$$

Então, $C_{n-1} = \frac{2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{n!}$, donde vem

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2^n \prod_{k=1}^n (2k-1)}{(n+1)!} = \frac{2^n \prod_{k=1}^n (2k-1) \times \prod_{k=1}^n (2k)}{(n+1)! \times \prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{2^n \prod_{k=1}^n k}{(n+1)! \times 2^n \prod_{k=1}^n (k)} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)! \times n!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \frac{1}{n+1} \times \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

As igualdades anteriores são válidas para $n \geq 2$, mas é fácil verificar que $C_n = \frac{1}{n+1} \times \binom{2n}{n}$ é válida para $n = 0$ e para $n = 1$.

31.2 Matrizes de Hankel

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Então, $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1$.

Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Então, $\det B = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 2 = 1$.

Como obtemos a matriz A ? Ora, $a_{11} = C_0 = 1$, $a_{12} = a_{21} = C_1 = 1$, $a_{22} = C_2 = 2$.

E a matriz B ? Ora, $b_{11} = C_1 = 1$, $b_{12} = b_{21} = C_2 = 2$, $b_{22} = C_3 = 5$.

No caso da matriz A , temos $a_{ij} = C_{1+j-2}$, enquanto que, na matriz B , temos $a_{ij} = C_{1+j-1}$. É claro que C_n representa o número de Catalan de ordem n .

No caso das matrizes 3×3 , temos $A = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}$, tendo-se $\det A = 1$.

E $B = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_3 & C_4 \\ C_3 & C_4 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{bmatrix}$, com $\det B = 1$.

Passemos ao caso das matrizes 4×4 .

Então, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \end{bmatrix}$ e $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \end{bmatrix} = 1$.

E $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \\ 14 & 42 & 132 & 429 \end{bmatrix}$, com $\det B = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \\ 14 & 42 & 132 & 429 \end{bmatrix} = 1$.

Matrizes 5×5 :

$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 \\ 1 & 2 & 5 & 14 & 42 \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 \end{bmatrix} = 1$, $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 & 42 \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 \\ 42 & 132 & 429 & 1430 & 4862 \end{bmatrix} = 1$.

E, se continuarmos, iremos obter (sempre) matrizes de determinante 1, desde que se respeite a regra de formação da matriz:

$A = (a_{ij})$, com $a_{ij} = C_{i+j-2}$ e $B = (b_{ij})$, com $b_{ij} = C_{i+j-1}$. É claro que A e B são matrizes quadradas e C_k é o número de Catalan de ordem k .

As matrizes formadas da maneira acima descrita, são as matrizes de Hankel.

31.3 Números de Narayana

T. V. Narayana (1930–1987) foi um matemático canadiano do século XX. Os números de Narayana são dados pela fórmula

$$N(m, k) = \frac{1}{m} \binom{m}{k} \binom{m}{k-1}, 1 \leq k \leq m$$

Em particular,

$$\begin{cases} N(m, 1) = \frac{1}{m} \binom{m}{1} \binom{m}{0} = \frac{1}{m} \times m \times 1 = 1 \\ N(m, 2) = \frac{1}{m} \binom{m}{2} \binom{m}{1} = \frac{1}{m} \binom{m}{2} \times m = \binom{m}{2} \\ N(m, m) = \frac{1}{m} \binom{m}{m} \binom{m}{m-1} = \frac{1}{m} \times 1 \times m = 1 \end{cases}$$

Propriedade: $N(m, k) = N(m, m - k + 1)$

Ora,

$$\begin{aligned} N(m, m - k + 1) &= \frac{1}{m} \binom{m}{m - k + 1} \binom{m}{m - k} \\ &= \frac{1}{m} \binom{m}{k - 1} \binom{m}{k} = \frac{1}{m} \binom{m}{k} \binom{m}{k - 1} \\ &= N(m, k) \end{aligned}$$

Triângulo de Narayana

O Triângulo de Narayana é o seguinte:

$N(1, 1)$									
$N(2, 1)$	$N(2, 2)$								
$N(3, 1)$	$N(3, 2)$	$N(3, 3)$							
$N(4, 1)$	$N(4, 2)$	$N(4, 3)$	$N(4, 4)$						
$N(5, 1)$	$N(5, 2)$	$N(5, 3)$	$N(5, 4)$	$N(5, 5)$					
$N(6, 1)$	$N(6, 2)$	$N(6, 3)$	$N(6, 4)$	$N(6, 5)$	$N(6, 6)$				
$N(7, 1)$	$N(7, 2)$	$N(7, 3)$	$N(7, 4)$	$N(7, 5)$	$N(7, 6)$	$N(7, 7)$			
$N(8, 1)$	$N(8, 2)$	$N(8, 3)$	$N(8, 4)$	$N(8, 5)$	$N(8, 6)$	$N(8, 7)$	$N(8, 8)$		
$N(9, 1)$	$N(9, 2)$	$N(9, 3)$	$N(9, 4)$	$N(9, 5)$	$N(9, 6)$	$N(9, 7)$	$N(9, 8)$...	
$N(10, 1)$	$N(10, 2)$	$N(10, 3)$	$N(10, 4)$	$N(10, 5)$	$N(10, 6)$	$N(10, 7)$	$N(10, 8)$...	
$N(11, 1)$	$N(11, 2)$	$N(11, 3)$	$N(11, 4)$	$N(11, 5)$	$N(11, 6)$	$N(11, 7)$	$N(11, 8)$...	

Calculando, temos:

1												1
1	1											2
1	3	1										5
1	6	6	1									14
1	10	20	10	1								42
1	15	50	50	15	1							132
1	21	105	175	105	21	1						429
1	28	196	490	490	196	28	1					1430
1	36	336	1176	1764	1176	336	36	1				4862
1	45	540	2520	5292	5292	2520	540	45	1			16796
1	55	825	4950	13860	19404	13860	4950	825	55	1		58786

Observação

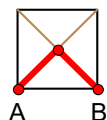
O Triângulo de Narayana começa pela linha 1 e pela coluna 1, enquanto os Triângulos de Pascal e de Catalan começam pela linha 0 e pela coluna 0.

O mais curioso é que a soma dos elementos duma linha do Triângulo de Narayana é o correspondente número de Catalan. Assim, por exemplo, temos $1 + 6 + 6 + 1 = 14 = C_4$ e $1 + 28 + 196 + 490 + 490 + 196 + 28 + 1 = 1430 = C_8$. A soma dos elementos duma linha (do Triângulo de Narayana) está indicada na coluna da direita (do quadro anterior).

Vejamos alguns exemplos de aplicação dos números de Narayana:

1º Caso

Consideremos dois pontos distintos A e B , definindo um lado dum quadrado

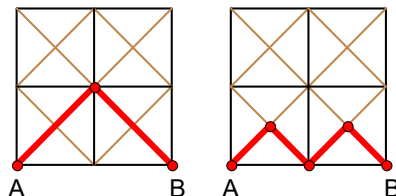


Consideremos os caminhos mais curtos entre os pontos A e B , sobre as diagonais do quadrado. No caso da figura anterior, só temos um caminho (mais curto). Então, temos $N(1, 1) = 1$.

Note-se que a primeira parte do caminho tem uma direcção e a segunda parte tem outra. Se interpretarmos o caminho a vermelho, como sendo o gráfico de uma função, podemos afirmar que existe um único máximo local e que o gráfico tem um eixo de simetria.

2º Caso

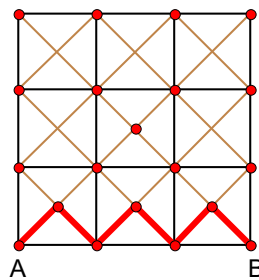
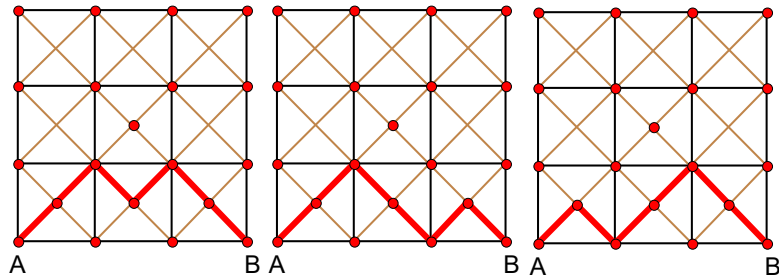
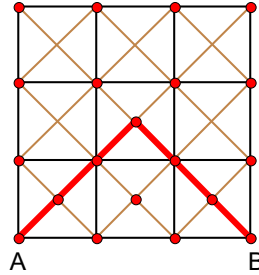
Este segundo caso é um pouco mais complicado do que o primeiro.



No caso da esquerda, temos um só "pico" (um só máximo local), enquanto que no caso da direita, temos dois "picos" (dois máximos locais). E o segmento AB está dividido em duas partes iguais. Então, temos $N(2, 1) = 1, N(2, 2) = 1$. E o número total de caminhos mais curtos entre A e B (contidos nas diagonais) é 2. Ou seja, $N(2, 1) + N(2, 2) = 1 + 1 = 2 = C_2$.

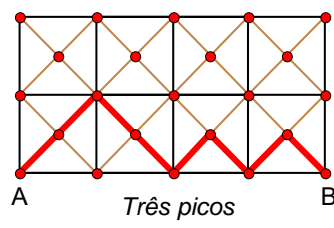
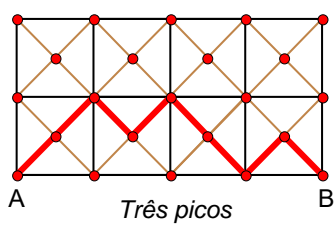
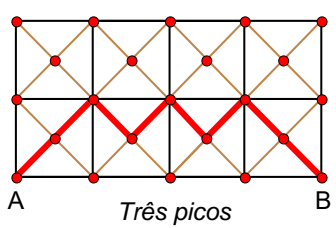
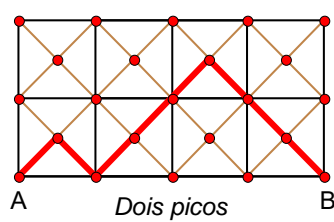
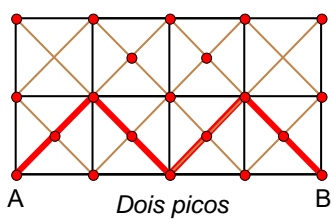
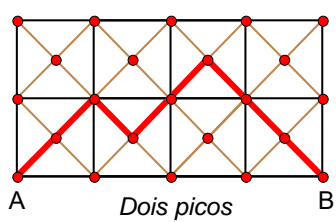
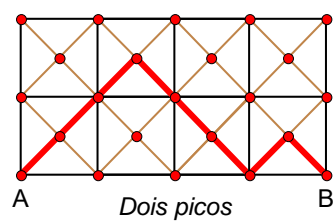
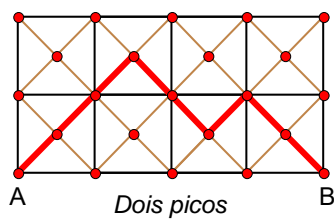
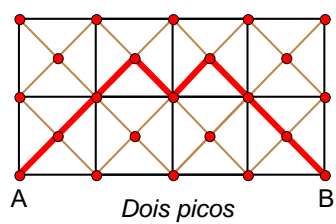
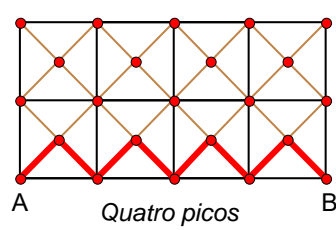
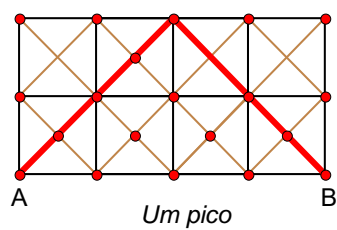
3º Caso

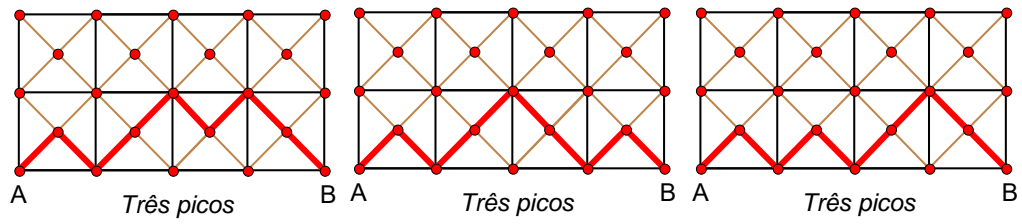
Este terceiro caso é um pouco mais complicado do que os dois anteriores.



Neste caso, temos $N(3, 1) = 1, N(3, 2) = 3, N(3, 3) = 1$. E, é claro, $N(3, 1) + N(3, 2) + N(3, 3) = 5 = C_3$.

3º Caso

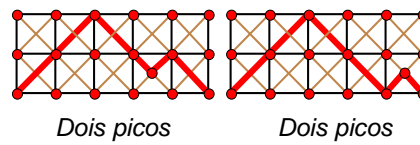
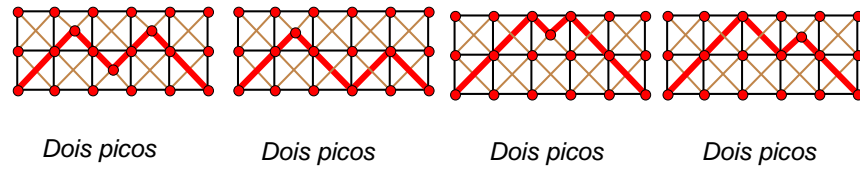
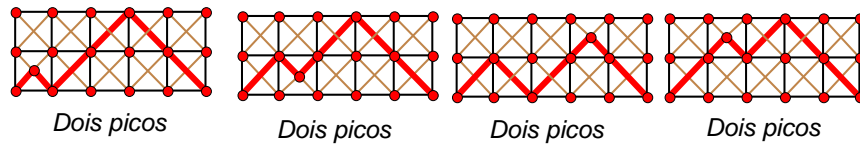
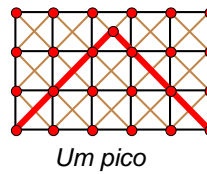


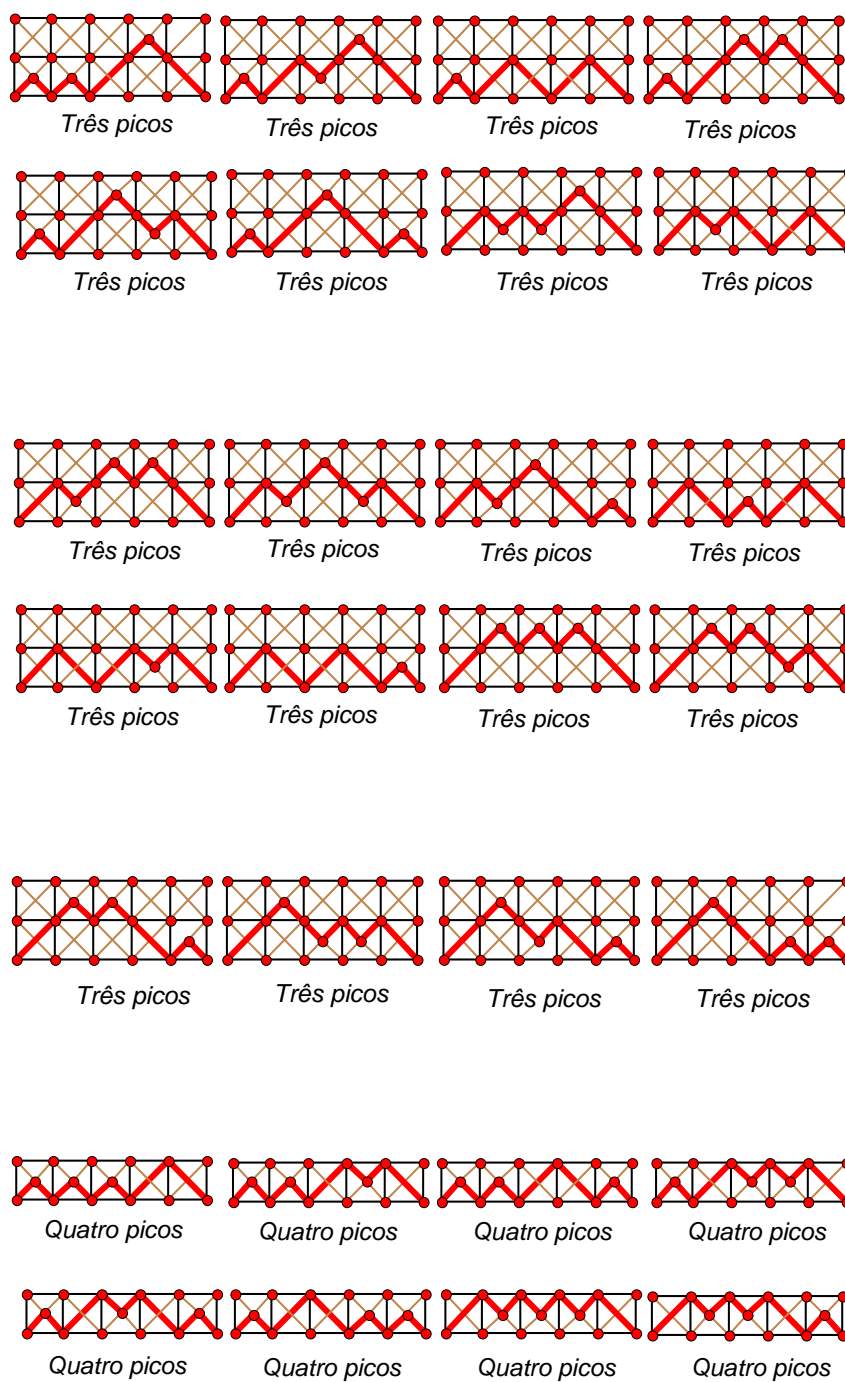


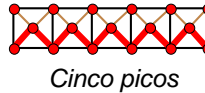
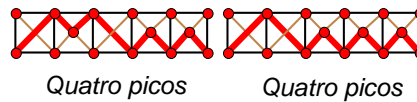
Neste caso, temos $N(4, 1) = 1$, $N(4, 2) = 6$, $N(4, 3) = 6$, $N(4, 4) = 1$.

E, novamente, temos $N(4, 1) + N(4, 2) + N(4, 3) + N(4, 4) = 1 + 6 + 6 + 1 = 14 = C_4$.

4º Caso







Agora, temos $N(5, 1) = 1$, $N(5, 2) = 10$, $N(5, 3) = 20$, $N(5, 4) = 10$, $N(5, 5) = 1$.
E, de novo,

$$\begin{aligned} N(5, 1) + N(5, 2) + N(5, 3) + N(5, 4) + N(5, 5) &= 1 + 10 + 20 + 10 + 1 \\ &= 42 = C_5 \end{aligned}$$

31.4 As Vacas de Naraian Pandit

Naraian Pandit (1340–1400) foi um matemático indiano, pelo que não deve ser confundido com Narayana. Existe um problema atribuído a esse matemático do século XIV, cujo enunciado é o seguinte:

As Vacas de Naraian Pandit

Temos uma vaca que acabou de nascer. Essa vaca, bem como todas as vacas dela descendentes, irão gerar uma nova vaca que nascerá quando a vaca completar três anos, sendo que, a partir daí, em cada ano dará à luz uma nova vaca.

Quantas vacas teremos ao fim de vinte anos?

Resolução

Consideremos que V_n é o número de vacas existentes, ao fim de n anos. É claro que $V_0 = V_1 = V_2 = 1$.

Ao fim de três anos, nasce a primeira vaca, pelo que $V_3 = 1 + 1 = 2$. É claro que $V_4 = 2 + 1 = 3$, $V_5 = 3 + 1 = 4$, $V_6 = 4 + 2 = 6$, porque a vaca que nasceu três anos depois da vaca inicial ter nascido, já originou uma nova vaca. Entretanto, temos que $V_7 = 6 + 3 = 9$, porque há uma nova vaca a ter uma filha.

Podemos achar que a situação começa a ser confusa, mas a situação é bastante clara. Ao completar-se um novo ano, temos que as vacas do ano anterior continuam e nascem umas quantas vacas. É claro que o número de crias que nascem em cada ano, é inferior ao número total de animais existentes no ano anterior, porque nem todas as vacas são "adultas". Mas, podemos garantir que todas as vacas existentes três anos antes vão ter uma cria e só essas é que têm uma cria.

Então, temos que

$$V_{n+3} = V_{n+2} + V_n, \text{ com } V_0 = V_1 = V_2 = 1$$

Esta é uma questão que é facilmente resolvida no EXCEL.

A fórmula de recorrência $V_{n+3} = V_{n+2} + V_n$ é equivalente a $V_{n+3} - V_{n+2} - V_n = 0$ e a equação característica da equação às diferenças é $\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$.

Note-se a grande semelhança deste problema com o problema dos coelhos de Fibonacci.

Mas, temos um sério problema: as raízes da equação característica são "intragáveis".

Por exemplo, a raiz real é $\frac{1}{9\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31\sqrt{108}+\frac{29}{54}}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31\sqrt{108}+\frac{29}{54}}} + \frac{1}{3}$. O valor anterior é, aproximadamente, 1,465 571 232.

As duas outras soluções são (aproximadamente) $-0,232\,785\,615\,9 \pm 0,792\,551\,992\,5i$

A solução para esta questão é 1278.

1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873,...

Repare que

$$\begin{cases} 3 + 6 = 9, 4 + 9 = 13, 6 + 13 = 19, 9 + 19 = 28 \\ 13 + 28 = 41, 19 + 41 = 60, 28 + 60 = 88, 41 + 88 = 129 \\ 60 + 129 = 189, 88 + 189 = 277, 129 + 277 = 406 \\ 189 + 406 = 595, 277 + 595 = 872, 406 + 872 = 1278 \end{cases}$$

Utilização de matrizes

Matricialmente, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_{n+3} \\ V_{n+2} \\ V_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ V_{n+1} \\ V_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ V_{n+1} \\ V_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{n+4} \\ V_{n+3} \\ V_{n+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+3} \\ V_{n+2} \\ V_{n+1} \end{bmatrix} = M^2 \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ V_{n+1} \\ V_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{n+5} \\ V_{n+4} \\ V_{n+3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+4} \\ V_{n+3} \\ V_{n+2} \end{bmatrix} = M^3 \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ V_{n+1} \\ V_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Ora, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pelo que podemos concluir que}$$

$$\begin{bmatrix} V_{n+5} \\ V_{n+4} \\ V_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ V_{n+1} \\ V_n \end{bmatrix}$$

$$\text{E, como } M^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ concluímos que}$$

$$\begin{bmatrix} V_{n+8} \\ V_{n+7} \\ V_{n+6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+2} \\ V_{n+1} \\ V_n \end{bmatrix}$$

Com muita paciência, temos

$$\begin{aligned}
 M^{12} &= \begin{bmatrix} 60 & 28 & 41 \\ 41 & 19 & 28 \\ 28 & 13 & 19 \end{bmatrix}, M^{24} = \begin{bmatrix} 5896 & 2745 & 4023 \\ 4023 & 1873 & 2745 \\ 2745 & 1278 & 1873 \end{bmatrix} \\
 M^{48} &= \begin{bmatrix} 56\,849\,086 & 26\,467\,299 & 38\,789\,712 \\ 38\,789\,712 & 18\,059\,374 & 26\,467\,299 \\ 26\,467\,299 & 12\,322\,413 & 18\,059\,374 \end{bmatrix} \\
 M^{96} &= \begin{bmatrix} 5285\,136\,390\,291\,172 & 2460\,607\,459\,864\,596 & 3606\,195\,506\,118\,921 \\ 3606\,195\,506\,118\,921 & 1678\,940\,884\,172\,251 & 2460\,607\,459\,864\,596 \\ 2460\,607\,459\,864\,596 & 1145\,588\,046\,254\,325 & 1678\,940\,884\,172\,251 \end{bmatrix} \\
 \text{E } M^{97} &= \begin{bmatrix} 7745\,743\,850\,155\,768 & 3606\,195\,506\,118\,921 & 5285\,136\,390\,291\,172 \\ 5285\,136\,390\,291\,172 & 2460\,607\,459\,864\,596 & 3606\,195\,506\,118\,921 \\ 3606\,195\,506\,118\,921 & 1678\,940\,884\,172\,251 & 2460\,607\,459\,864\,596 \end{bmatrix} \\
 \text{Então,} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} V_{100} \\ V_{99} \\ V_{98} \end{bmatrix} &= M^{97} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = M^{97} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 16\,637\,075\,746\,565\,861 \\ 11\,351\,939\,356\,274\,689 \\ 7745\,743\,850\,155\,768 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Logo, $V_{100} = 16\,637\,075\,746\,565\,861$

É claro que estamos a supor que as vacas não morrem e não adoecem ou, se preferirmos, trata-se dum simples problema de Matemática...

$$\begin{aligned}
 \lambda^3 - \lambda^2 - 1 &= 0 \\
 \lambda &= \frac{1}{9\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}} + \frac{1}{3} \approx 1.465\,571\,232 \\
 \lambda &= \frac{1}{3} - \frac{1}{18\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \left(\frac{1}{9\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}} \right) \approx \\
 &-0.232\,785\,615\,9 + 0.792\,551\,992\,5i \\
 \lambda &= \frac{1}{2}i\sqrt{3} \left(\frac{1}{9\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}} \right) - \frac{1}{18\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{108}\sqrt{31}\sqrt{108} + \frac{29}{54}} + \\
 \frac{1}{3} &\approx -0.232\,785\,615\,9 - 0.792\,551\,992\,5i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 M^7 &= \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 88 \\ 60 \\ 41 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$M^6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$M^{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88 \\ 60 \\ 41 \end{bmatrix}$$

$$M^7 = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

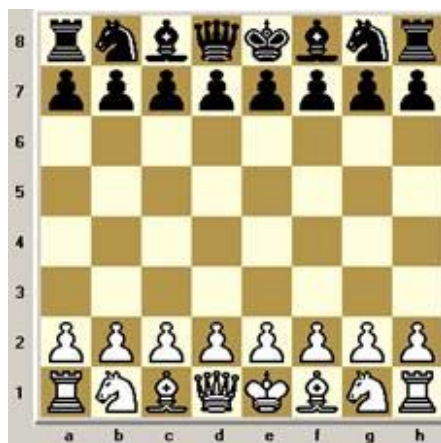
$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a+1 \\ 2b+1 \\ 2c+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18a+8b+12c+19 \\ 12a+6b+8c+13 \\ 8a+4b+6c+9 \end{bmatrix}$$

$$6(2a+1) + 3(2b+1) + 4(2c+1) = 12a+6+6b+3+8c+4 = 12a+6b+8c+13$$

Capítulo 32

Xadrez, Torres e Polinómios

O xadrez é um jogo que utiliza um tabuleiro e 32 peças, sendo 16 peças brancas e 16 peças pretas. O tabuleiro é do tipo 8×8 , ou seja, é constituído por 64 casas, 32 delas duma cor e 32 de outra cor. Normalmente, as casas são brancas (claras) ou castanhas ou pretas (escuras).



A imagem foi obtida em <http://baquara.com/xadrez/images/tabuleiro2.jpg>

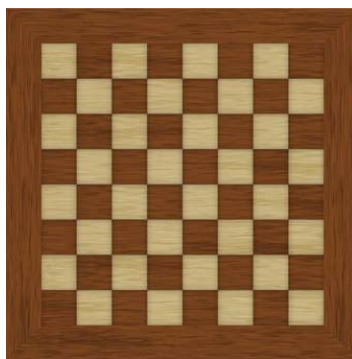
Na imagem, podemos ver o tabuleiro e as peças devidamente colocadas, antes do início do jogo. Usando a linguagem das matrizes, diremos que um tabuleiro tem oito linhas e oito colunas. Cada célula do tabuleiro recebe o nome de "casa", pelo que o tabuleiro de xadrez é constituído por 64 casas. Em cada casa pode estar uma peça (no máximo), pelo que há casas vazias (casas sem nenhuma peça). No decorrer do jogo, o número de peças pode ir diminuindo, mas nunca pode aumentar. Convém referir que, no xadrez, não adianta ter mais peças que o adversário, mesmo que essas peças tenham mais valor, pois o objectivo é dar cheque mate ao rei adversário (atacar o rei sem que ele tenha hipótese de fuga e sem que haja maneira de eliminar a peça atacante. Aliás, por vezes, o rei é atacado por mais do que uma peça adversária, pelo que, nesses casos, só resta uma hipótese: a fuga do rei, se houver possibilidades para isso. Se não houver maneira de fugir ou eliminar o ataque, não adianta ter mais peças que o adversário: a derrota será o desfecho do jogo.

Note-se que o jogo das "Damas" desenrola-se no mesmo tabuleiro e a finalidade do jogo é deixar o adversário sem peças. Por vezes, isso não é possível e ambos os jogadores continuam com peças em jogo. Isso significa que o jogo está empatado (há regras que estabelecem em que situações o jogo termina empatado). Assim, se o jogador cuja posição é de vitória não conseguir materializar a sua superioridade, o resultado é um empate. No entanto, há algumas situações em que o jogador perde, embora tenha peças no tabuleiro. Isso acontece se nenhuma dessas peças puder ser movida. Logo, é possível perder (no jogo das damas) com vantagem material (mais peças do que o adversário ou peças de maior valor).

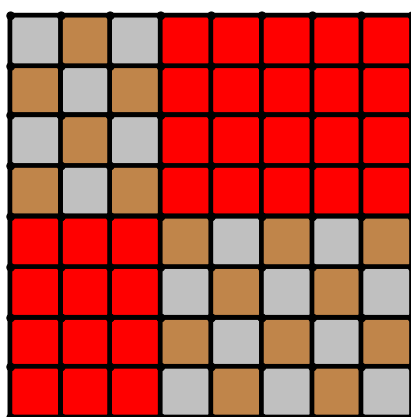
No xadrez, também há situações de empate (e também há regras que forçam o empate, se o jogador em vantagem não conseguir dar xeque mate ao adversário). É claro que estas situações só ocorrem com jogadores fracos. Nos jogos com mestres ou grande mestres, se a situação do adversário é ganhadora, o jogador em desvantagem abandona, dando a vitória ao seu adversário.

É claro, que do ponto de vista matemático, podemos considerar tabuleiros maiores do que o tabuleiro de xadrez (que tem 64 casas). Aliás, podemos considerar tabuleiros que nem sejam quadrados (por exemplo, um tabuleiro 6×9). Além disso, poderemos criar tabuleiros que tenham uma forma algo estranha. No entanto, estamos interessados nos tabuleiros do tipo $m \times n$, como as matrizes. Esse interesse deve-se ao facto de aos tabuleiros do tipo $m \times n$ corresponderem polinómios fáceis de obter. Por isso, vamos querer transformar tabuleiros irregulares em tabuleiros do tipo $m \times n$. Mais adiante, veremos que existe uma propriedade que nos permite substituir um tabuleiro por outros nele contidos (sub-tabuleiros) e assim sucessivamente, até que todos os sub-tabuleiros sejam rectangulares.

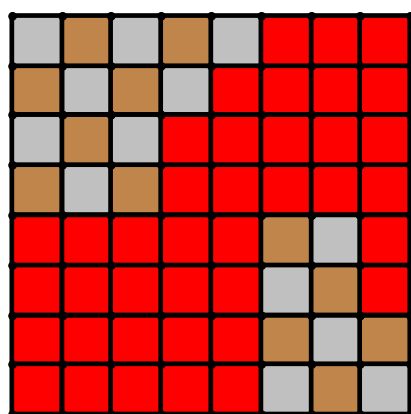
Tabuleiro usual (de xadrez):



A imagem anterior foi recolhida na Net (publicada por Consciência do Xadrez). Observe a figura seguinte:



As casas a vermelho não são consideradas, ficando-se com dois sub-tabuleiros do tabuleiro inicial: um tabuleiro 4×3 e um tabuleiro 4×5 . Estes dois sub-tabuleiros são disjuntos, porque estão desenhados em linhas e colunas distintas. É claro que a zona vermelha também é constituída por dois sub-tabuleiros disjuntos.



Na figura anterior, eliminando as casas vermelhas, ficamos com dois sub-tabuleiros disjuntos.

Note-se que, no caso de sub-tabuleiros disjuntos, as torres colocadas num sub-tabuleiro não interferem com as torres colocadas no outro sub-tabuleiro, quando se considera a reunião dos dois sub-tabuleiros.

Qual é o polinómio correspondente à reunião dos dois sub-tabuleiros da figura anterior? Resolveremos esta questão mais adiante.

Consideremos uma fila de células quadradas (quadrículas). Então, só podemos colocar nessa fila uma torre, sem que haja outra torre a perturbar o movimento da torre (inicial)



Embora só possa ser colocada uma torre, ela pode ser colocada numa de cinco posições.

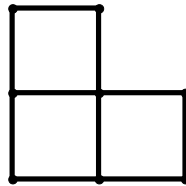
Então, vamos dizer que $p(1) = 5$. É claro que $p(2) = 0$, porque não podemos colocar duas torres (sem que uma não interfira com o movimento da outra). E $p(3) = p(4) = \dots = 0$.

Por fim, dizemos que $p(0) = 1$: há uma maneira de não colocar nenhuma torre (que é colocar torre nenhuma).

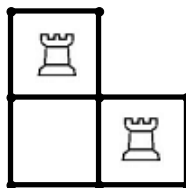
E vamos considerar que há um polinómio associado a esta fila de quadrados: $p(x) = 1 + 5x$. Então, o polinómio associado a uma fila de células dispostas numa única fila (vertical) é $p(x) = 1 + nx$. O que estes dois polinómios nos indicam é o número de maneiras de colocar zero e uma torre. Como não termos de grau superior a 1, não se consegue colocar mais do que uma torre. Se existir um tabuleiro cujo polinómio torre correspondente seja $1 + 8x + 3x^2 + x^3$, isso significa que podemos colocar uma torre, de oito maneiras (o tabuleiro tem que ter 8 "casas"), podemos colocar duas torres, de três maneiras, e podemos colocar três torres, de uma só maneira, não sendo possível colocar mais do que três torres.

Note-se que não estamos a afirmar que exista um tal tabuleiro, mas sim a dizer qual o significado de cada termo do polinómio.

Consideremos, agora, a figura seguinte:

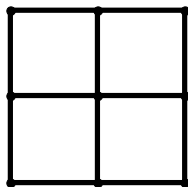


Como temos 3 células, há três maneiras de colocar uma torre. Logo, $p(1) = 3$. E há uma só maneira de colocar duas torres (figura seguinte):

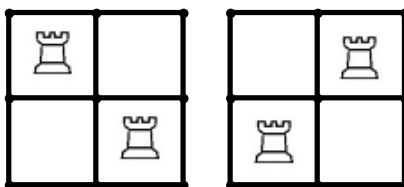


Então, o polinómio associado à figura dada é $1 + 3x + x^2$.

Suponhamos que temos um quadrado 2×2

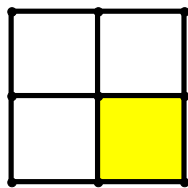


Então, $p(1) = 4$, $p(2) = 2$, $p(3) = 0$ e, como sempre, $p(0) = 1$. Na figura seguinte, temos as duas maneiras de colocar duas torres nesse tabuleiro.

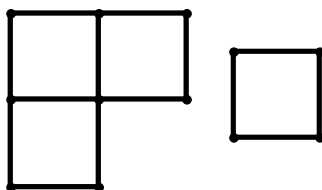


Logo, o polinómio associado à figura, é $p(x) = 1 + 4x + 2x^2$.

Há uma propriedade interessante, relativa a estes polinómios associados a figuras divididas em células. Este caso 2×2 torna-se interessante, porque tem poucas possibilidades, permitindo-nos perceber melhor a situação.



Relativamente à célula que está a amarelo (na figura anterior), vamos considerar duas figuras que dela resultam:



A primeira figura, resulta de eliminar a célula a amarelo. A segunda figura resulta de eliminar a linha e a coluna da célula a amarelo.

Consideremos os polinómios associados a estas duas figuras:

Na figura da esquerda, já vimos que o polinómio associado é $1 + 3x + x^2$.

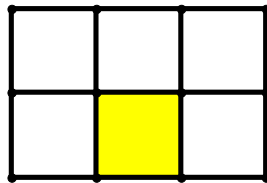
Na figura da direita, temos $1 + x$.

Que fazer com estes dois polinómios, para obtermos $p(x) = 1 + 4x + 2x^2$?

Não podemos multiplicar, porque isso aumenta o grau. Não podemos somar, porque o termo independente passa a 2. Há algo que podemos fazer:

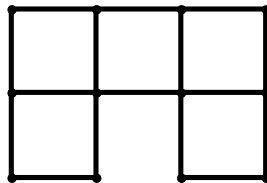
$$x(1 + x) + 1 + 3x + x^2 = 1 + 4x + 2x^2$$

Será que esta propriedade é geral? É claro que, neste caso, não precisamos dessa propriedade, pelo que a mesma só terá interesse, se puder ser aplicada noutras situações.

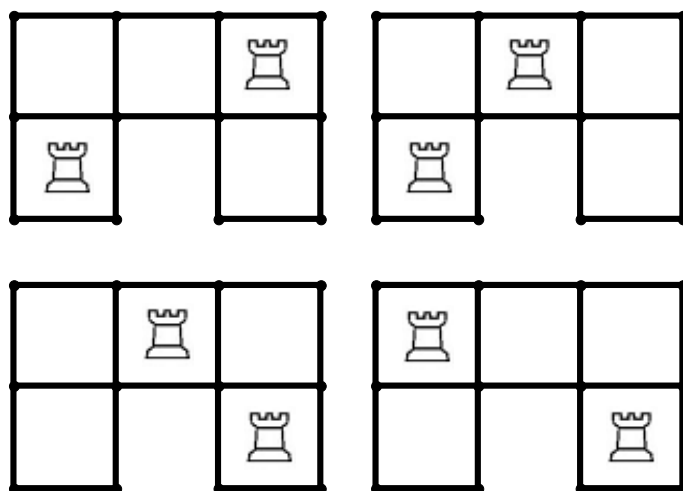


Consideremos um tabuleiro 2×3 . Então, temos $\begin{cases} p(1) = 6 \\ p(2) = 6 \\ p(3) = 0 \end{cases}$ e, claro, $p(0) = 1$. Então, o polinómio associado a esta figura, é $1 + 6x + 6x^2$.

Eliminando a célula amarela, obtemos a figura

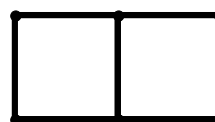


É claro que, neste caso, $p(0) = 1$, $p(1) = 5$, sendo $p(2) = 4$. É claro que $p(3) = 0$.



Então, temos o seguinte polinómio associado: $1 + 5x + 4x^2$

Eliminando a coluna e a linha da célula amarela, ficamos com

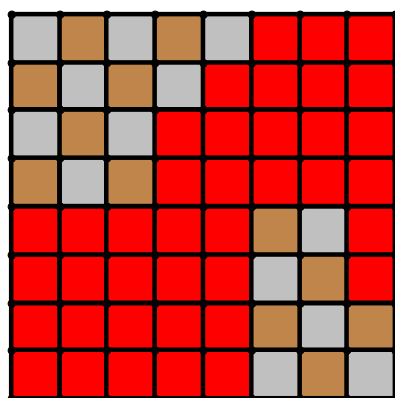


Agora, temos $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 0$, pelo que o polinómio associado é $1 + 2x$.

Então, $x(1 + 2x) + 1 + 5x + 4x^2 = 1 + 6x + 6x^2$ (polinómio associado à figura inicial).

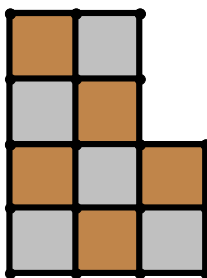
Note-se que, embora tenhamos aplicado a propriedade a tabuleiros rectangulares, o objectivo é precisamente o contrário: transformar tabuleiros irregulares em tabuleiros rectangulares. Mais adiante, veremos isso com mais detalhe.

Exercício 689 Qual o polinómio associado à união dos dois sub-tabuleiros seguintes?

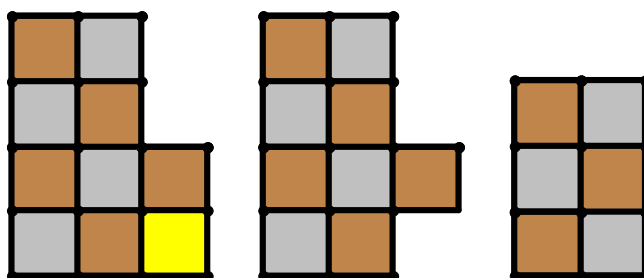


Resolução

Consideremos o seguinte sub-tabuleiro:



Relativamente à casa amarela, da figura seguinte, temos mais dois sub-tabuleiros do tabuleiro inicial:



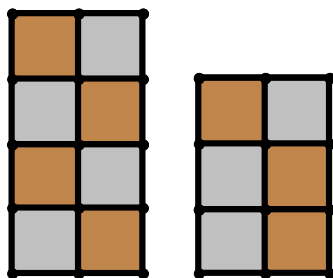
Então, vamos ter um polinómio associado à figura do meio e outro associado à figura da direita.

Relativamente ao rectângulo 3×2 , temos $\begin{cases} p(1) = 6 \\ p(2) = 3 \times 2 = 6 \\ p(3) = 0 \end{cases}$, pelo que o polinómio associado é $1 + 6x + 6x^2$. Note-se que este polinómio vai ser multiplicado por x , obtendo-se $x + 6x^2 + 6x^3$.

Agora, na figura anterior, temos o sub-tabuleiro central, do qual vamos considerar a casa castanha da terceira coluna.

Então, vamos ficar com dois sub-tabuleiros: num, apenas eliminamos a casa castanha, enquanto no outro, eliminamos a linha e a coluna. Tal como nas matrizes, quando eliminamos uma linha e

uma coluna, as outras aproximam-se:



Note-se que não estamos nada interessados nas cores das casas do tabuleiro!

Figura da esquerda: $\begin{cases} p(1) = 8 \\ p(2) = 4 \times 3 = 12 \\ p(3) = 0 \end{cases}$, pelo que o polinómio associado é $1 + 8x + 6x^2$.

Figura da direita: já vimos. Interessa-nos $(1 + 6x + 6x^2)x = 6x^3 + 6x^2 + x$.

Somando, obtemos:

$$1 + 8x + 6x^2 + 6x^3 + 6x^2 + x + 6x^3 + 6x^2 + x = 1 + 10x + 18x^2 + 12x^3$$

Exemplo 690 Sejam A e B dois sub-tabuleiros disjuntos dum tabuleiro $m \times n$ e sejam $A(x) = 1 + a_1x + \dots$ e $B(x) = 1 + b_1x + \dots$ os dois polinómios associados aos dois sub-tabuleiros. Qual o polinómio $P(x)$ associado ao tabuleiro $A \cup B$?

Resolução

O termo independente de $P(x)$ é 1. Se, em A , podemos colocar uma torre de a_1 maneiras e em B , podemos colocar uma torre de b_1 maneiras (sem que nenhuma interfira com outra), então, em $A \cup B$, podemos colocar $a_1 + b_1$ torres, porque os sub-tabuleiros são disjuntos (o que significa que nenhuma torre de um sub-tabuleiro interfere com as torres do outro sub-tabuleiro).

Ora, multiplicando $A(x)$ por $B(x)$, obtemos

$$(1 + a_1x + \dots)(1 + b_1x + \dots) = 1 + b_1x + a_1x + \dots = 1 + (a_1 + b_1)x + \dots$$

Então, o termo de primeiro grau dá-nos o número de maneiras de colocar uma torre (em $A \cup B$).

Sejam $A(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ e $B(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \dots$

Há várias maneiras de colocar duas torres em $A \cup B$, supondo que $a_1 \neq 0 \neq b_1$:

As duas torres podem ser colocadas em A , de a_2 maneiras

As duas torres podem ser colocadas em B , de b_2 maneiras

Podemos colocar uma torre em A e uma torre em B , de a_1b_1 maneiras. Esta regra é válida, mesmo que a_2 seja zero ou b_2 seja zero.

Logo, o número de maneiras de colocar duas torres (em $A \cup B$) é $a_2 + b_2 + a_1b_1$.

Por outro lado, temos

$$(1 + a_1x + a_2x^2)(1 + b_1x + b_2x^2) = 1 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2 + a_1b_1)x^2 + \dots$$

Então, basta-nos multiplicar $A(x)$ por $B(x)$, para ficarmos a saber o número de maneiras de colocar duas torres.

No caso geral, consideramos as séries $1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ e $1 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ cujo produto é

$$1 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2 + a_1b_1)x^2 + (a_3 + b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + \dots$$

O coeficiente $a_3 + b_3 + a_1b_2 + a_2b_1$ (do termo em x^3) dá-nos o número de maneiras de colocar 3 torres em $A \cup B$: 3 em A , 3 em B , uma em A e duas em B e, por fim, duas em A e uma em B . A regra é válida, mesmo que algum dos coeficientes seja zero.

Conclusão

Se A e B são dois sub-tabuleiros disjuntos dum tabuleiro $m \times n$ e se $A(x) = 1 + a_1x + \dots$ e $B(x) = 1 + b_1x + \dots$ são os dois polinómios associados aos dois sub-tabuleiros, o polinómio $P(x)$ associado ao tabuleiro $A \cup B$ é dado por $P(x) = A(x) \times B(x)$.

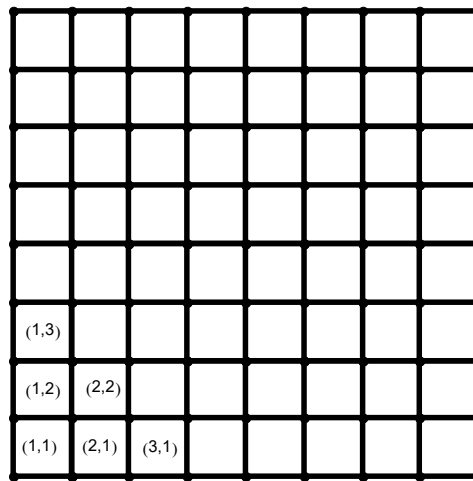
Vejamos uma aplicação das torres de xadrez:

Exemplo 691 *Quantas aplicações de S_8 (grupo simétrico) satisfazem simultaneamente as seguintes condições:*

1. *A restrição de cada uma das aplicações a $\{1, 2, 3, 4\}$ é uma permutação caótica de S_4*
2. *A restrição de cada uma das aplicações a $\{5, 6, 7, 8\}$ é uma aplicação monótona*
3. *A imagem de 1 é diferente de 2*
4. *A imagem de 3 é 4*

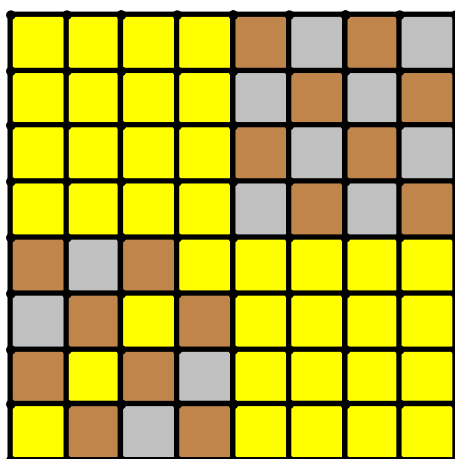
Resolução

Em primeiro lugar consideremos um tabuleiro de xadrez 8×8 , como o que a seguir se indica (sem as cores das casas).



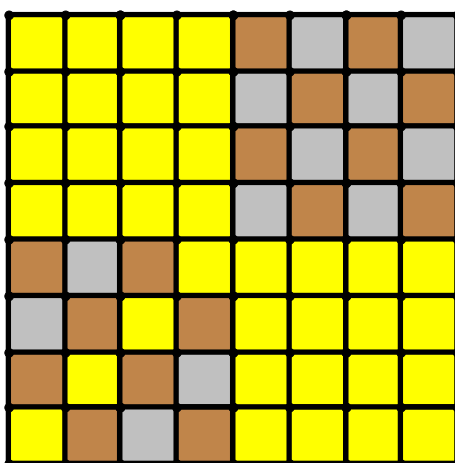
Na figura anterior, estão colocados vários pares ordenados. Assim, se tivermos $f(1) = 1$, colocaremos uma torre na casa $(1, 1)$. E assim por diante.

Passemos à situação dada no enunciado deste exemplo:



Na figura anterior, temos um tabuleiro de xadrez, sendo que a região a amarelo é aquela em que não podemos colocar as torres. A razão é simples: a restrição de cada aplicação a $A = \{1, 2, 3, 4\}$, transforma cada elemento de A num elemento de A . É claro que o mesmo acontece com a restrição ao conjunto $B = \{5, 6, 7, 8\}$, porque todas as aplicações de S_8 são injectivas. Além disso, como as restrições a $\{1, 2, 3, 4\}$ têm de ser permutações caóticas, a imagem de i não pode ser i (para $i = 1, 2, 3, 4$). Já está considerada a condição referida no ponto 1.

Passemos ao ponto 2: Como a restrição a $\{5, 6, 7, 8\}$ tem de ser monótona, só há duas situações: estritamente crescente ou estritamente decrescente:

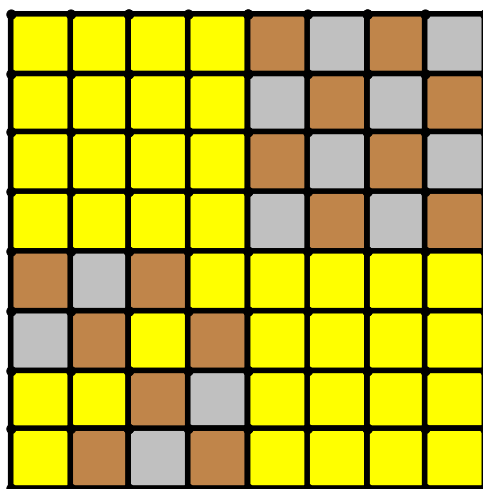


Na figura anterior, temos uma das duas situações possíveis: neste caso, a aplicação é crescente em $\{5, 6, 7, 8\}$.

Passemos aos dois últimos pontos:

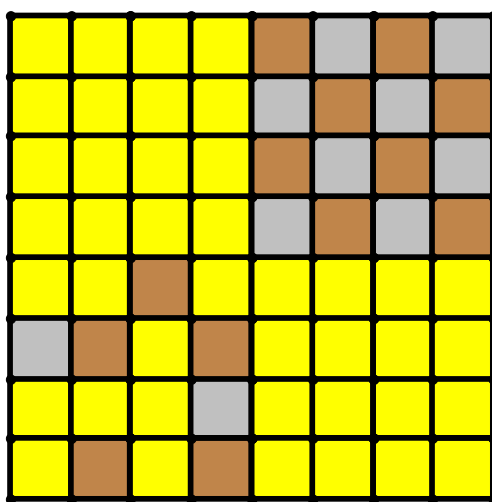
A imagem de 3 é 4: existe uma torre na casa (3, 4).

A imagem de 1 é diferente de 2: a casa (1, 2) fica interdita (a amarelo).

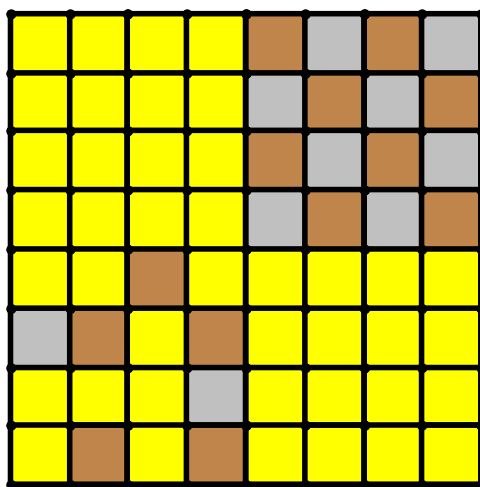


A figura anterior é uma das duas possibilidades que traduzem as condições impostas pelo enunciado. Agora, temos outras condições que derivam do facto das aplicações serem bijectivas, condições essas que correspondem a termos torres que não interfiram umas com as outras.

Então, podemos colocar mais casas a amarelo:



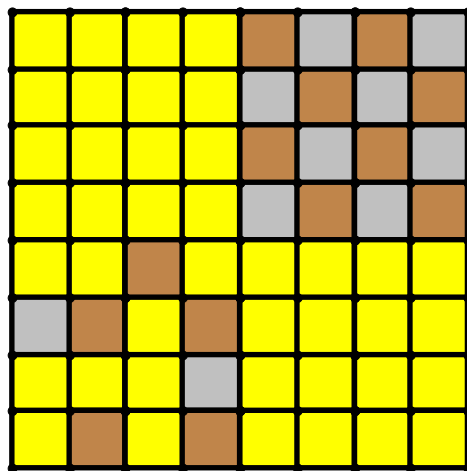
Agora, verificamos que só há uma maneira de colocarmos as três torres que faltam:



Então, só há duas funções de S_8 que satisfazem todas as condições do enunciado:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A outra solução:



Exercício 692 Qual o polinómio associado a um tabuleiro de xadrez usual?

Resolução

É claro que $p(0) = 1$ e $p(1) = 64$. Agora, talvez seja melhor começar por calcular $p(8)$:

A torre da primeira linha tem 8 possibilidades, a torre da segunda linha tem 7 possibilidades (depois de colocada a torre da primeira linha), etc... Então, $p(8) = 8! = 40\,320$. E $p(7)$?

Escolha das sete linhas onde ficam as torres: $\binom{8}{7} = \binom{8}{1} = 8$. Colocação das torres nas sete linhas: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 40\,320$.

Logo, $p(7) = 8 \times 40\,320 = 322\,560$.

Cálculo de $p(6)$:

Escolha das linhas: $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$; colocação das torres: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 20\,160$

Então, $p(6) = 28 \times 20\,160 = 564\,480$

Cálculo de $p(5)$:

Escolha das linhas: $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$; colocação das torres: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720$

Então, $p(5) = 56 \times 6\,720 = 376\,320$

Cálculo de $p(4)$:

Escolha das linhas: $\binom{8}{4} = 70$; colocação das torres: $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\,680$

Então, $p(4) = 70 \times 1\,680 = 117\,600$

Cálculo de $p(3)$:

Escolha das linhas: $\binom{8}{3} = 56$; colocação das torres: $8 \times 7 \times 6 = 336$

Então, $p(3) = 56 \times 336 = 18\,816$

Cálculo de $p(2)$:

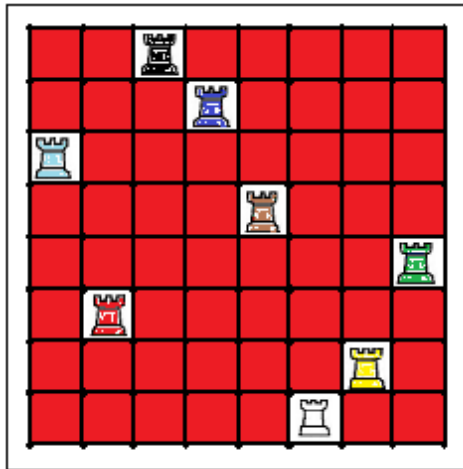
Escolha das linhas: $\binom{8}{2} = 28$; colocação das torres: $8 \times 7 = 56$

Então, $p(2) = 28 \times 56 = 1\,568$

E, por fim, temos

$$p(x) = 1 + 64x + 1568x^2 + 18\,816x^3 + 117\,600x^4 + 376\,320x^5 + 564\,480x^6 + 322\,560x^7 + 40\,320x^8$$

Note-se que podemos resolver esta questão de outra maneira:



Suponhamos que as oito torres eram de oito cores diferentes. Então, havia 64 possibilidades para a torre de cor 1, 49 possibilidades para a cor 2, 36 possibilidades para a cor 3 e assim sucessivamente.

Então, o número de maneiras de colocar as oito torres no tabuleiro, de modo que fique uma torre por linha e uma torre por coluna, é

$$8^2 \times 7^2 \times 6^2 \times 5^2 \times 4^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2 = (8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)^2 = (8!)^2$$

Como as torres são da mesma cor, há que dividir o número anterior por $8!$, obtendo-se $8!$

Note-se que, à medida que vamos colocando uma torre, há 14 casas que passam a ficar proibidas (para a colocação de torres). É esse o significado das casas vermelhas da figura anterior.

Exercício 693 Suponhamos que temos um tabuleiro $m \times n$, com $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Qual o número de maneiras de colocar k torres (sem que se ataquem), com $0 < k \leq n$.

Resolução

Se $k = 1$, temos $p(k) = p(1) = mn$.

Se $k > 1$, temos que escolher k filas entre m , o que se faz de $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ maneiras.

Depois, temos de colocar as torres nas várias filas:

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Então, o número total de maneiras de colocar as torres é

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{m!}{k! \times (m-k)!} \times \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{m!}{k! \times (m-k)!} \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times k! \\ &= \binom{m}{k} \times \binom{n}{k} \times k! \end{aligned}$$

Se $m = n$, a fórmula anterior transforma-se em $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k} \times k! = \binom{n}{k}^2 \times k!$

Vejamos o caso anterior, onde $m = n = 8$:

Então, aplicando a fórmula anterior, temos:

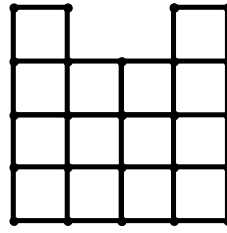
$$\begin{aligned} p(8) &= \binom{8}{8}^2 \times 8! = 40\,320 & p(4) &= \binom{8}{4}^2 \times 4! = 117\,600 \\ p(7) &= \binom{8}{7}^2 \times 7! = 322\,560 & p(3) &= \binom{8}{3}^2 \times 3! = 18\,816 \\ p(6) &= \binom{8}{6}^2 \times 6! = 564\,480 & p(2) &= \binom{8}{2}^2 \times 2! = 1\,568 \\ p(5) &= \binom{8}{5}^2 \times 5! = 376\,320 & p(1) &= \binom{8}{1}^2 \times 1! = 64 & p(0) &= \binom{8}{0}^2 \times 0! = 1 \end{aligned}$$

Como podemos ver, a fórmula é válida para $k = 0$ e para $k = 1$.

Daqui em diante, vamos usar uma notação mais específica para os polinómios torres.

Assim, em vez de utilizarmos a notação $p(n)$, utilizaremos a notação $p_n(T)$, onde T significa o Tabuleiro em causa. Para os sub-tabuleiros de T , usaremos a notação T_1, T_2 , para os sub-tabuleiros de T_1 , usaremos a notação T_{11}, T_{12} , etc... Esta notação vai simplificar bastante o nosso trabalho.

Exemplo 694 Consideremos o tabuleiro T , indicado na figura seguinte. Determine o polinómio associado ao tabuleiro.

Tabuleiro T

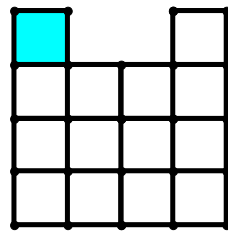
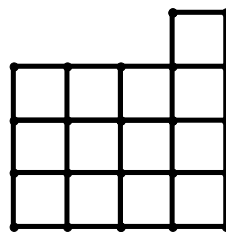
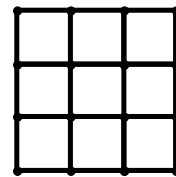
A resolução mais simples (para encontrar o polinómio associado a um tabuleiro não rectangular) consiste em escolher uma célula (casa) apropriada e obter dois sub-tabuleiros menores.

O primeiro sub-tabuleiro a encontrar, é o tabuleiro inicial sem a casa escolhida. Representaremos tal tabuleiro por T_1 . O segundo sub-tabuleiro resulta do tabuleiro inicial, suprimindo a linha e a coluna da casa apropriada escolhida. Este segundo tabuleiro será designado por T_2 .

Existe uma propriedade importante: $p(T) = p(T_1) + xp(T_2)$.

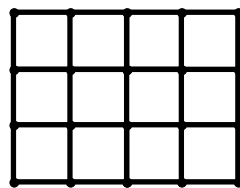
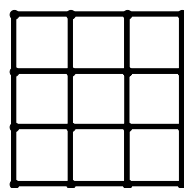
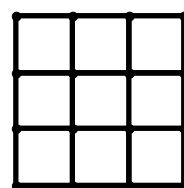
E o processo continua, até chegarmos a sub-tabuleiros rectangulares.

Apliquemos o processo descrito, ao tabuleiro T da figura anterior:

Tabuleiro T Subtabuleiro T_1 Subtabuleiro T_2

Um dos dois sub-tabuleiros já é rectangular (no caso, quadrado), pelo que não se decompõe mais.

Quanto a T_1 , vem

Subtabuleiro T_{11} Subtabuleiro T_{12} Tabuleiro T_2

Então, obtivemos três sub-tabuleiros "terminais":

Agora, temos

$$p(T) = p(T_1) + xp(T_2) = p(T_{11}) + xp(T_{12}) + xp(T_2)$$

Neste caso, obtivemos dois sub-tabuleiros iguais. Agora, calculamos p_n para cada tabuleiro terminal.

$$\begin{cases} p_0(T_{11}) = 1 \\ p_1(T_{11}) = 12 \\ p_2(T_{11}) = \binom{4}{2}\binom{3}{2} \times 2! = 36 \\ p_3(T_{11}) = \binom{4}{3}\binom{3}{3} \times 3! = 24 \\ p(T_{11}) = 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3 \end{cases}, \begin{cases} p_0(T_2) = p_0(T_{12}) = 1 \\ p_1(T_2) = p_1(T_{12}) = 9 \\ p_2(T_2) = p_2(T_{12}) = \binom{3}{2}\binom{3}{2} \times 2! = 18 \\ p_3(T_2) = p_3(T_{12}) = \binom{3}{3}\binom{3}{3} \times 3! = 6 \\ p(T_2) = 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3 \end{cases}$$

Por fim, calculamos $p(T)$:

$$\begin{aligned} p(T) &= p(T_{11}) + xp(T_{12}) + xp(T_2) \\ &= 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3 + x(1 + 12x + 36x^2 + 24x^3) + x(1 + 12x + 36x^2 + 24x^3) \\ &= 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3 + 2x(1 + 12x + 36x^2 + 24x^3) \\ &= 1 + 14x + 60x^2 + 96x^3 + 48x^4 \end{aligned}$$

Com a notação introduzida para os sub-tabuleiros, há uma regra muito simples para o cálculo do polinómio associado ao tabuleiro inicial:

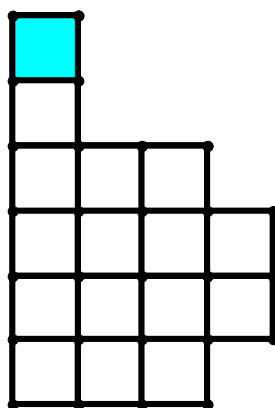
Depois de encontrados os vários sub-tabuleiros terminais, escrevemos os polinómios associados a esses sub-tabuleiros. Depois, multiplicamos cada polinómio encontrado por x^k , onde k é o número de vezes que 2 aparece no índice do sub-tabuleiro.

Assim,

$$\begin{aligned} p(T_{11}) &= x^0(1 + 12x + 36x^2 + 24x^3) + x^1(1 + 12x + 36x^2 + 24x^3) \\ &\quad + x^1(1 + 12x + 36x^2 + 24x^3) \end{aligned}$$

O exemplo seguinte é mais sugestivo, pois há mais níveis de aplicação da regra.

Exemplo 695 Consideremos o tabuleiro T , indicado na figura seguinte. Pretendemos calcular o polinómio associado ao tabuleiro.

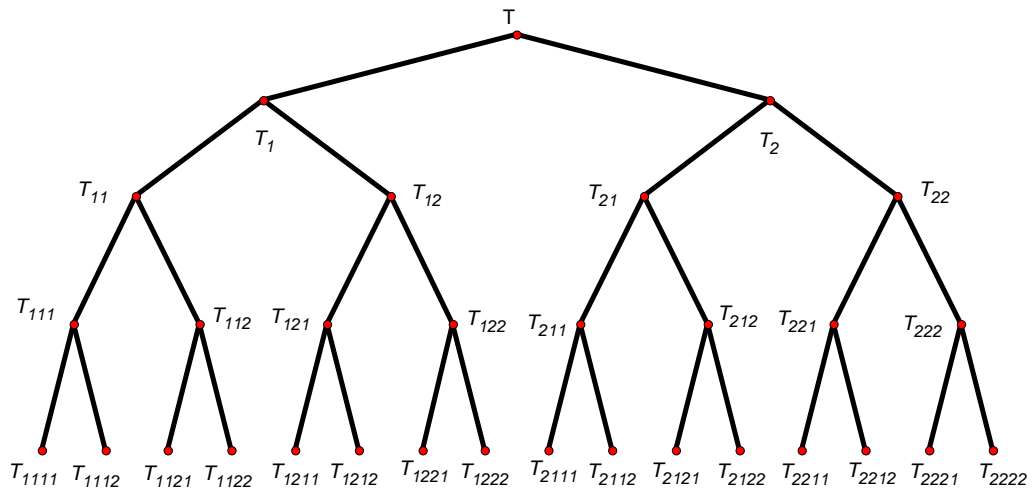


Tabuleiro T

Resolução

Vamos descrever um método eficaz neste tipo de questões.

Na figura seguinte, temos uma árvore que nos mostra as bifurcações, a partir dum tabuleiro T . A partir de T , temos os sub-tabuleiros T_1 e T_2 , depois, num nível mais abaixo, temos novos sub-tabuleiros quer do tabuleiro inicial, quer dos primeiros sub-tabuleiros. É claro que podemos desenhar a árvore, partindo de T e subir (em vez de descer).

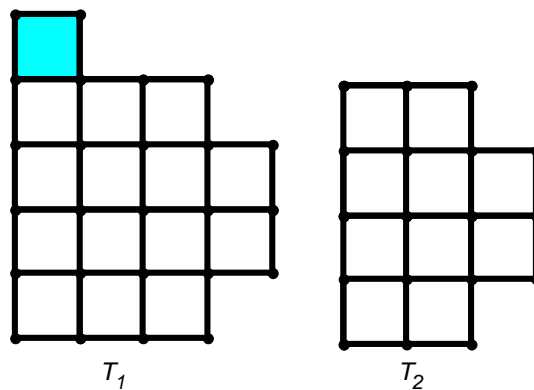


Com base no esquema da figura anterior, é fácil calcular $p(T)$, o polinómio torre associado a um dado tabuleiro.

É claro que $p_0(T) = 1$, $p_1(T) = 16$ e $p_5(T) = 0$. Logo, o polinómio associado a T , tem grau inferior a 5.

Começemos por calcular $p_4(T)$. Relativamente à casa azul, podemos lá ter uma torre ou não. Se lá estiver uma torre, temos de colocar três torres no sub-tabuleiro que se obtém de T , eliminando a linha e a coluna da casa azul. Se não temos uma torre na casa azul, então as 4 torres têm de estar nas outras 15 casas do tabuleiro T .

Conclusão: $p_4(T) = p_4(T_1) + p_3(T_2)$, com



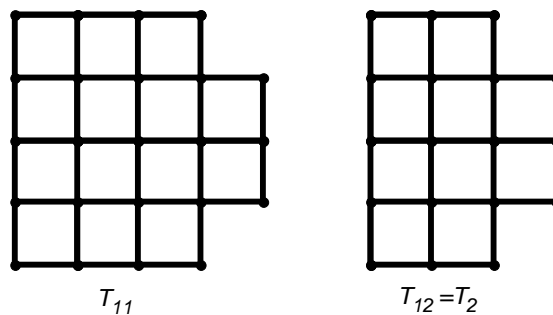
Aquilo que se disse para $p_4(T)$, vale para $p_3(T)$ e $p_2(T)$. Então,

$$\begin{cases} p_4(T) = p_4(T_1) + p_3(T_2), & p_3(T) = p_3(T_1) + p_2(T_2) \\ p_2(T) = p_2(T_1) + p_1(T_2) = p_2(T_1) + 10 \\ p_1(T) = 16 = p_1(T_1) + p_0(T_2) \end{cases}$$

Note-se que é esta propriedade que nos permite afirmar que o polinómio associado a T é o polinómio associado a T_1 somado com o polinómio associado a T_2 multiplicado por x (no caso em usamos a indeterminada x).

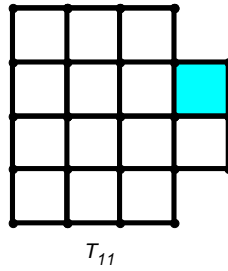
Então, vamos ter $p(T) = p(T_1) + xp(T_2)$. Se quisermos ser mais rigorosos, podemos escrever $p(T, x) = p(T_1, x) + xp(T_2, x)$. Mas não ganhamos muito com a nova maneira de escrever, pois não vamos utilizar mais do que uma indeterminada.

Note-se que a casa azul da figura anterior é a que nos vai servir para o próximo passo:

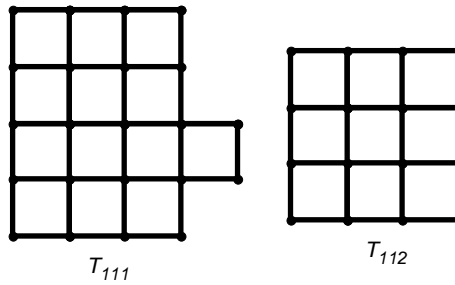


$$\begin{cases} p_4(T_1) = p_4(T_{11}) + p_3(T_{12}), & p_3(T_1) = p_3(T_{11}) + p_2(T_{12}) \\ p_2(T_1) = p_2(T_{11}) + p_1(T_{12}) = p_2(T_{11}) + 10, & p_1(T_1) = 15 \end{cases}$$

E assim por diante.

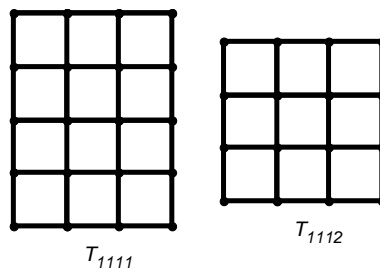


$$\text{Ora, } \begin{cases} p_4(T_{11}) = p_4(T_{111}) + p_3(T_{112}) \\ p_3(T_{11}) = p_3(T_{111}) + p_2(T_{112}) \\ p_2(T_{11}) = p_2(T_{111}) + p_1(T_{112}) \end{cases}, \text{ com}$$



$$\text{Então, } \begin{cases} p_4(T_{11}) = p_4(T_{111}) + p_3(T_{112}) = p_4(T_{111}) + 3! = p_4(T_{111}) + 6 \\ p_3(T_{11}) = p_3(T_{111}) + p_2(T_{112}) = p_3(T_{111}) + 3 \times 3 \times 2 = p_3(T_{111}) + 18 \\ p_2(T_{11}) = p_2(T_{111}) + p_1(T_{112}) = p_2(T_{111}) + 9 \end{cases}$$

Agora, consideramos a única casa da quarta coluna do tabuleiro da esquerda, na figura anterior e obtemos os seguintes dois sub-tabuleiros:

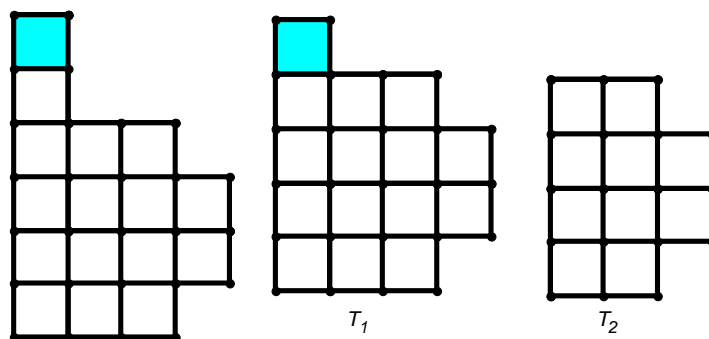


$$\begin{aligned}
p(T) &= p(T_1) + xp(T_2) = p(T_{11}) + xp(T_{12}) + xp(T_{21}) + x^2p(T_{22}) \\
&= p(T_{111}) + xp(T_{112}) + xp(T_{121}) + x^2p(T_{122}) + xp(T_{211}) \\
&\quad + x^2p(T_{212}) + x^2p(T_{221}) + x^3p(T_{222})
\end{aligned}$$

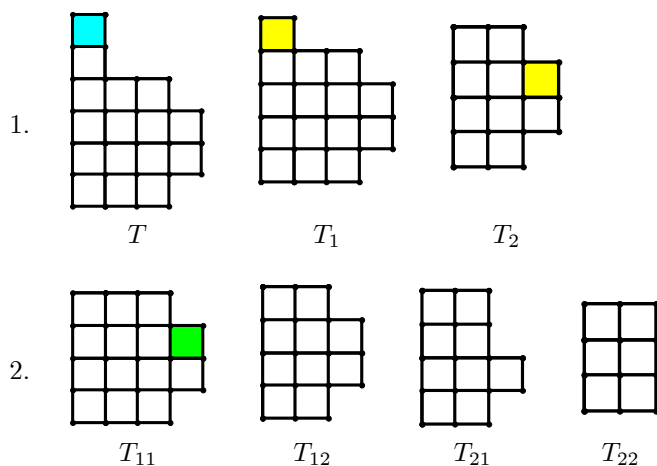
Se repararmos, basta contar as vezes que aparece 2 no índice e colocar no expoente em x . Se quisermos uma regra, basta somar os dígitos do índice e subtrair o número de dígitos (para obtermos o expoente). Por exemplo, no nível seguinte, teremos como uma das parcelas, $x^{1+2+1+2-4}p(T_{1212}) = x^2p(T_{1212})$

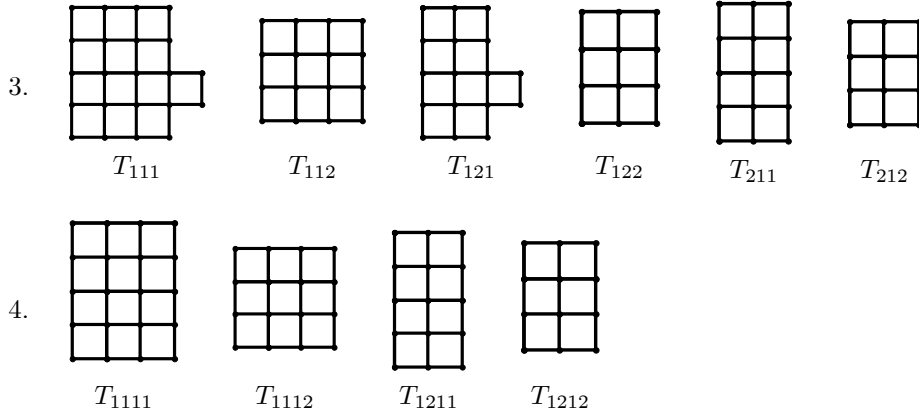
Seguindo este processo, só temos que ir registando os sub-tabuleiros, até encontrarmos um rectângulo (inclui um quadrado). Não há problema que se continue com algum dos ramos e outros não.

Note-se que o índice 1 corresponde ao caso em que se elimina (só) a célula em causa, enquanto o índice 2 corresponde ao caso em que se elimina a linha e a coluna da célula em causa.

Tabuleiro T Tabuleiros T_1 e T_2

Já sabemos que $p(T) = p(T_1) + xp(T_2)$. Talvez seja mais natural, decompor os dois sub-tabuleiros T_1 e T_2 em simultâneo. E não adianta ir escrevendo os polinómios intermédios. Voltemos ao início:





Então,

$$p(T) = p(T_{1111}) + xp(T_{1112}) + xp(T_{112}) + xp(T_{1211}) + x^2p(T_{1212}) + x^2p(T_{122}) + xp(T_{211}) + x^2p(T_{212}) + x^2p(T_{22})$$

Note-se que o facto de termos sub-tabuleiros iguais não significa obrigatoriamente que os polinómios resultantes sejam os mesmos. No entanto, não adianta estar a repetir resultados, pelo que vamos apresentar o polinómio associado a cada tipo de sub-tabuleiro, sendo importante, no fim, ter atenção ao multiplicar por x^k , com k conveniente.

$$\begin{aligned}
 p_1(T_{1111}) &= 12 \\
 p_2(T_{1111}) &= \binom{3}{2} \times \binom{4}{2} \times 2! = 36 \\
 p_3(T_{1111}) &= \binom{3}{3} \times \binom{4}{3} \times 3! = 24 \\
 p(T_{1111}) &= 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3
 \end{aligned}$$

T_{1111}

Este é o único tabuleiro do tipo 4×3 e é o único onde não aparece o dígito 2 no índice.

$$\begin{aligned}
 p_1(T_{1112}) &= 9 \\
 p_2(T_{1112}) &= \binom{3}{2} \times \binom{3}{2} \times 2! = 18 \\
 p_3(T_{1112}) &= \binom{3}{3} \times \binom{3}{3} \times 3! = 6 \\
 p(T_{1112}) &= 1 + 9x + 18x^2 + 6x^3
 \end{aligned}$$

T_{1112}

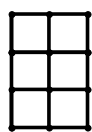
Há dois sub-tabuleiros do tipo 3×3 , T_{112} e T_{112} . Em ambos, o dígito 2 só aparece uma vez. Então, vamos multiplicar o polinómio associado ao sub-tabuleiro por $2x$.

Há dois sub-tabuleiros do tipo 4×2 , T_{211} e T_{1211} . Neste caso, também multiplicamos o polinómio associado ao sub-tabuleiro por $2x$.

$$\begin{aligned}
 p_1(T_{1211}) &= 8 \\
 p_2(T_{1211}) &= \binom{4}{2} \times \binom{2}{2} \times 2! = 12 \\
 p(T_{1211}) &= 1 + 8x + 12x^2
 \end{aligned}$$

T_{1211}

Há quatro sub-tabuleiros do tipo 3×2 . Neste caso, multiplicamos o polinómio associado ao sub-tabuleiro por $4x^2$.

 T_{22}

$$: \begin{aligned} p_1(T_{1212}) &= 6 \\ p_2(T_{1212}) &= \binom{3}{2} \times \binom{2}{2} \times 2! = 6 \\ p(T_{1212}) &= 1 + 6x + 6x^2 \end{aligned}$$

Então, temos

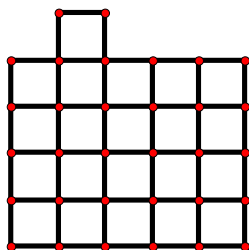
$$\begin{aligned} 24x^3 + 36x^2 + 12x + 1 & & T_{1111} \\ 2x(1 + 9x + 18x^2 + 6x^3) &= 12x^4 + 36x^3 + 18x^2 + 2x & T_{112} \\ 2x(1 + 8x + 12x^2) &= 24x^3 + 16x^2 + 2x & T_{1211} \\ 4x^2(1 + 6x + 6x^2) &= 24x^4 + 24x^3 + 4x^2 & T_{1212} \end{aligned}$$

Note-se que, no índice T_{1212} , há dois dígitos iguais a 2, razão pela qual se multiplica por x^2 . No entanto, há mais três sub-tabuleiros nas mesmas condições e daí, o 4.

Somando todos os polinômios da tabela anterior, vem

$$p(T) = 36x^4 + 108x^3 + 74x^2 + 16x + 1$$

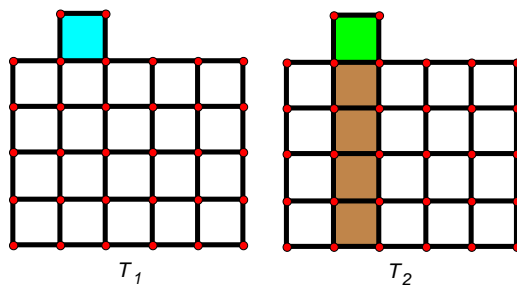
Exemplo 696 Determine o polinômio associado ao tabuleiro seguinte:



Resolução

No tabuleiro anterior (a que chamamos T), temos uma célula (casa) que nos "estraga a resolução": trata-se da única célula da primeira linha (a contar de cima para baixo).

Então, vamos começar por essa célula. É claro que nessa célula pode ficar uma torre ou pode não ficar. Vamos colorir a célula de uma de duas maneiras. Se a célula ficar a azul, não há torre na célula; se a célula ficar a verde, há uma torre na célula, sendo que isso implica que não haja mais torres na linha e na coluna da célula. Neste último caso, vamos colorir as células de castanho claro (células onde não podemos colocar torres, por já haver uma torre na mesma linha ou na mesma coluna). Vejamos a situação descrita:

 T_1 T_2

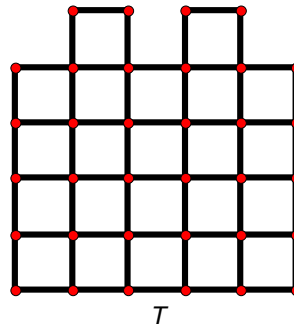
E obtivemos dois tabuleiros T_1 e T_2 , tabuleiros estes que são rectangulares. Então, já sabemos qual o polinómio correspondente a cada um deles:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0(T_1) = 1 \\ p_1(T_1) = 20 \\ p_2(T_1) = \binom{5}{2} \binom{4}{2} \times 2! = 120 \\ p_3(T_1) = \binom{5}{3} \binom{4}{3} \times 3! = 240 \\ p_4(T_1) = \binom{5}{4} \binom{4}{4} \times 4! = 120 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} p_0(T_2) = 1 \\ p_1(T_2) = 16 \\ p_2(T_2) = \binom{4}{2} \binom{4}{2} \times 2! = 72 \\ p_3(T_2) = \binom{4}{3} \binom{4}{3} \times 3! = 96 \\ p_4(T_2) = \binom{4}{4} \binom{4}{4} \times 4! = 24 \end{array} \right.$$

Então, se representarmos o polinómio associado ao tabuleiro inicial T por $p(T, x)$, temos

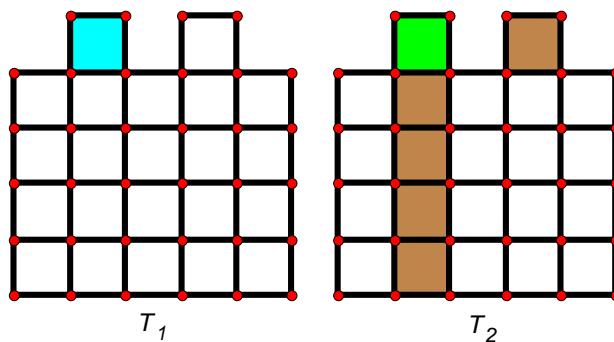
$$\begin{aligned} p(T, x) &= p(T_1, x) + xp(T_2, x) \\ &= 1 + 20x + 120x^2 + 240x^3 + 120x^4 + x(1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4) \\ &= 1 + 21x + 136x^2 + 312x^3 + 216x^4 + 24x^5 \end{aligned}$$

Exemplo 697 Determine o polinómio associado ao tabuleiro seguinte:

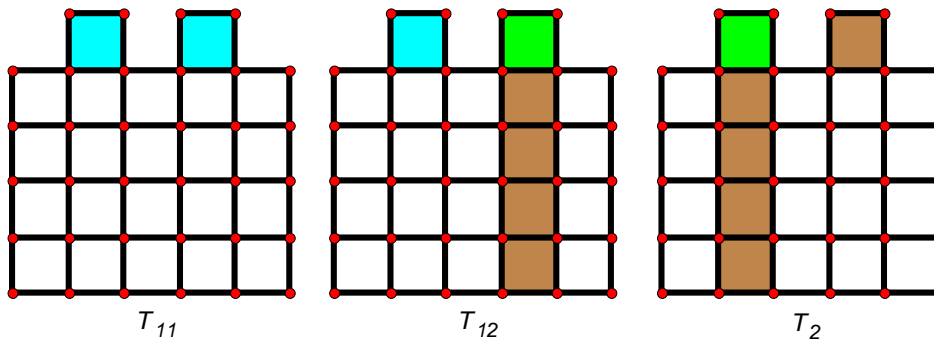


Resolução

Continuamos a usar as cores com o mesmo significado do exemplo anterior:



Um dos tabuleiros anteriores é rectangular e o outro é muito "semelhante" ao tabuleiro inicial do exemplo anterior. Então, continuamos com o processo, mas apenas com o tabuleiro T_1 .



Repetimos a imagem do tabuleiro T_2 , mas não era necessário (desde que não nos esquecêssemos dele).

Então, temos:

$$p(T, x) = p(T_{11}, x) + xp(T_{12}, x) + xp(T_2, x)$$

Note-se que só temos de olhar para os tabuleiros e verificar quantas células verdes existem em cada um. Este processo de resolução obriga a mantermos todas as casas do tabuleiro inicial. Se eliminarmos linhas ou colunas, temos de prestar atenção ao índice de cada sub-tabuleiro e contar quantas vezes aparece o dígito 2.

Agora, basta calcularmos o polinómio associado a cada um dos três tabuleiros anteriores (pois são rectangulares). Então:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0(T_{11}) = 1 \\ p_1(T_{11}) = 20 \\ p_2(T_{11}) = \binom{5}{2} \binom{4}{2} \times 2! = 120 \\ p_3(T_{11}) = \binom{5}{3} \binom{4}{3} \times 3! = 240 \\ p_4(T_{11}) = \binom{5}{4} \binom{4}{4} \times 4! = 120 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} p_0(T_{12}) = 1 \\ p_1(T_{12}) = 16 \\ p_2(T_{12}) = \binom{4}{2} \binom{4}{2} \times 2! = 72 \\ p_3(T_{12}) = \binom{4}{3} \binom{4}{3} \times 3! = 96 \\ p_4(T_{12}) = \binom{4}{4} \binom{4}{4} \times 4! = 24 \end{array} \right.$$

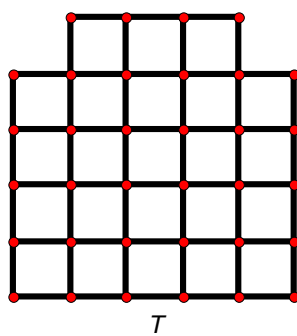
Como podemos verificar, $T_{12} = T_2$, pelo que vamos ter

$$\begin{aligned} p(T, x) &= p(T_{11}, x) + xp(T_{12}, x) + xp(T_2, x) \\ &= 1 + 20x + 120x^2 + 240x^3 + 120x^4 + 2x(1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4) \\ &= 1 + 22x + 152x^2 + 384x^3 + 312x^4 + 48x^5 \end{aligned}$$

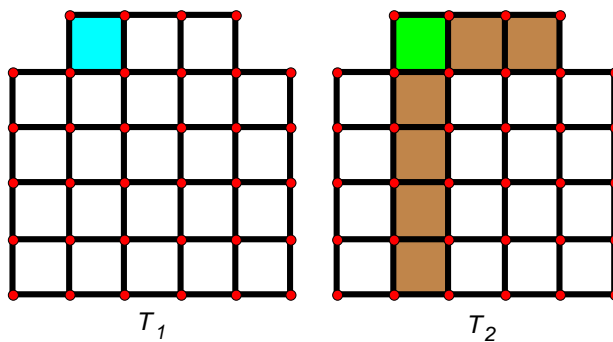
Observação

Muitas vezes, escrevemos $p(T)$ em vez de $p(T, x)$, subentendendo-se que a variável é x (ou outra qualquer).

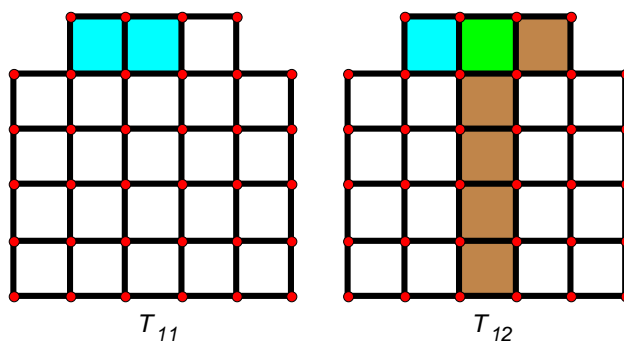
Exemplo 698 Determine o polinómio associado ao tabuleiro seguinte:

**Resolução**

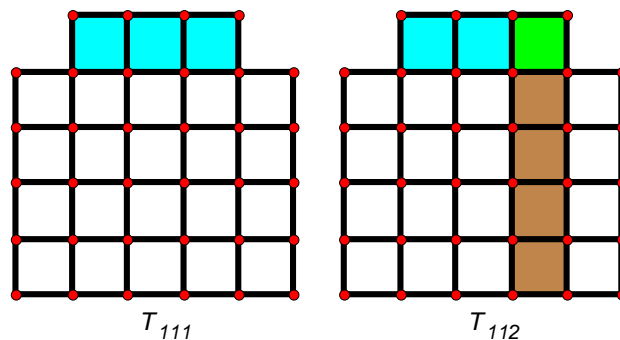
Neste caso, vamos precisar de mais passos do que nos exemplos anteriores.



O tabuleiro T_2 é rectangular, pelo que se trata dum tabuleiro definitivo (não vamos decompô-lo). O tabuleiro T_1 é (praticamente) o tabuleiro do exemplo anterior, mas vamos continuar o processo.



E obtivemos um tabuleiro rectangular e outro que não o é. Continuemos:



Note-se que não há nenhum tabuleiro com duas casas verdes, pelo que não vamos multiplicar nenhum polinómio por x^2 .

Agora, vem

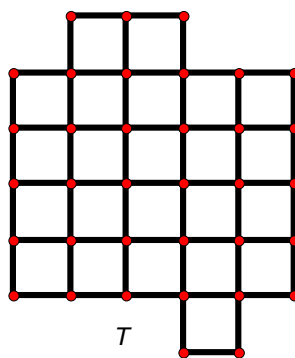
$$p(T, x) = p(T_{111}) + xp(T_{112}) + xp(T_{12}) + xp(T_2)$$

Note-se que T_{111} é um tabuleiro do tipo 4×5 , T_{112} , T_{12} e T_2 são tabuleiros do tipo 4×4 , pelo que já sabemos quais os polinómios associados. Então,

$$\begin{aligned} p(T, x) &= 1 + 20x + 120x^2 + 240x^3 + 120x^4 + 3x(1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4) \\ &= 1 + 23x + 168x^2 + 456x^3 + 408x^4 + 72x^5 \end{aligned}$$

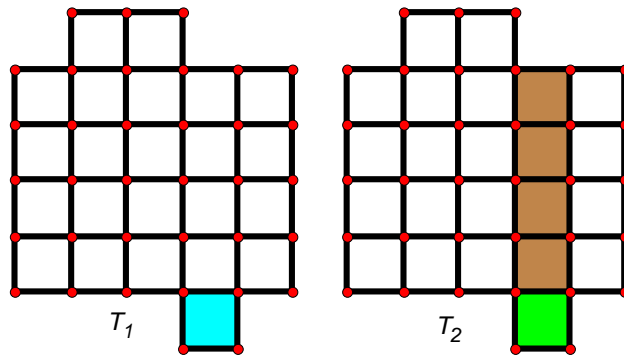
Vejamos um exemplo simples, mas onde aparecem duas células verdes.

Exemplo 699 Determine o polinómio associado ao tabuleiro seguinte:

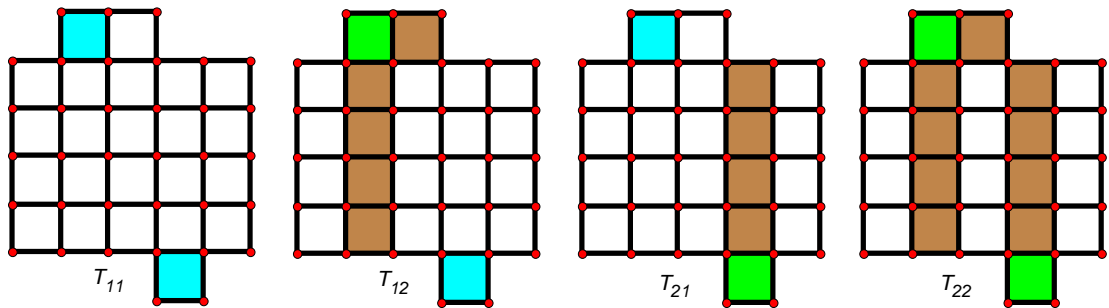


Resolução

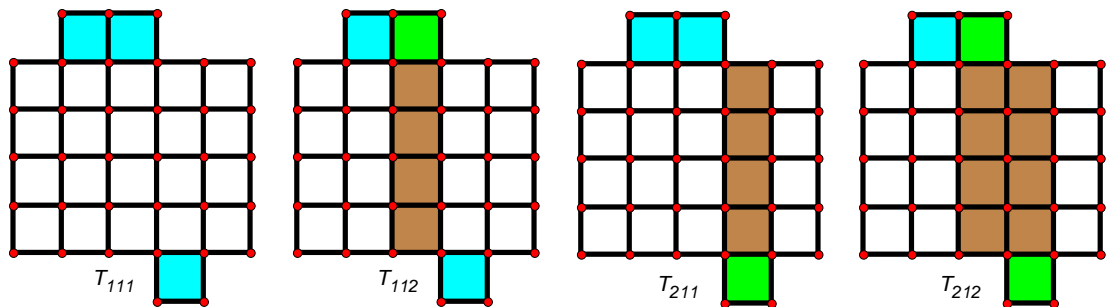
Neste caso, vamos começar pela célula situada mais abaixo, embora isso não seja necessário (nem se torne mais simples).



E nenhum dos dois tabuleiros obtidos é rectangular, pelo que vamos obter quatro (sub)tabuleiros.



Dos quatro tabuleiros anteriores, há dois tabuleiros rectangulares e dois que não o são. Então, vamos obter dois (que já são rectangulares) e mais quatro tabuleiros, pelo que ficaremos com seis (tabuleiros).



Estes últimos quatro tabuleiros já são rectangulares, pelo que podemos calcular o polinómio associado aos seis tabuleiros que nos interessam.

Note-se que temos dois tabuleiros com duas células verdes, pelo que vamos ter dois polinómios multiplicados por x^2 . Então, o polinómio associado a T é dado por

$$p(T, x) = p(T_{111}) + xp(T_{112}) + xp(T_{211}) + x^2p(T_{212}) + xp(T_{12}) + x^2p(T_{22})$$

Ora, T_{22} é um tabuleiro 4×3 , T_{12} é um tabuleiro 4×4 , T_{111} é um tabuleiro 4×5 , T_{112} é um tabuleiro 4×4 , T_{211} é um tabuleiro 4×4 e T_{213} é um tabuleiro 4×3 .

Dos exemplos anteriores, sabemos que

$$\begin{cases} p(T_{111}) = 1 + 20x + 120x^2 + 240x^3 + 120x^4 \\ p(T_{12}) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4 \end{cases}$$

Falta-nos encontrar o polinómio associado a um tabuleiro do tipo 4×3 .

$$\begin{cases} p_0(T_{22}) = 1 \\ p_1(T_{22}) = 12 \\ p_2(T_{22}) = \binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times 2! = 6 \times 3 \times 2 = 36 \\ p_3(T_{22}) = \binom{4}{3} \times \binom{3}{3} \times 3! = 4 \times 1 \times 6 = 24 \end{cases}$$

Logo, $p(T_{22}) = 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3$.

Então, temos

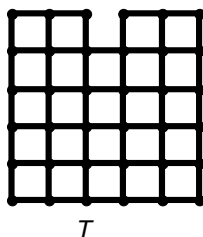
$$\begin{cases} p(T_{111}) = 1 + 20x + 120x^2 + 240x^3 + 120x^4 \\ p(T_{12}) = p(T_{112}) = p(T_{211}) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4 \\ p(T_{22}) = 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p(T) &= 1 + 20x + 120x^2 + 240x^3 + 120x^4 + 3x(1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4) \\ &\quad + x^2(1 + 12x + 36x^2 + 24x^3) \\ &= 1 + 23x + 171x^2 + 468x^3 + 444x^4 + 96x^5 \end{aligned}$$

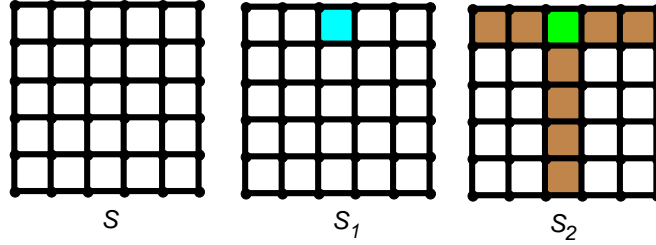
Note-se que não temos de associar tabuleiros da mesma dimensão, mas tabuleiros com o mesmo número de células verdes (ou tabuleiros em que os índices têm o mesmo número de vezes o dígito 2).

Exemplo 700 Determine o polinómio associado ao tabuleiro seguinte:



Resolução

Uma situação que pode aparecer é a da figura anterior, em que nos falta uma célula para obtermos um tabuleiro rectangular. A maneira mais simples de resolvermos a questão consiste em encontrarmos o polinómio correspondente ao tabuleiro aumentado com a célula que falta. Então, teremos a situação seguinte:



Logo, $p(S) = p(S_1) + xp(S_2)$, donde concluímos que $p(T) = p(S_1) = p(S) - xp(S_2)$. Como S é um tabuleiro do tipo 5×5 e S_2 é um tabuleiro do tipo 4×4 , temos

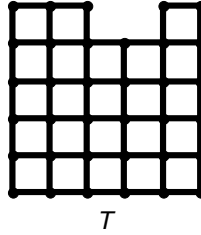
$$\left\{ \begin{array}{l} p_0(S) = 1 \\ p_1(S) = 25 \\ p_2(S) = \binom{5}{2} \times \binom{5}{2} \times 2! = 200 \\ p_3(S) = \binom{5}{3} \times \binom{5}{3} \times 3! = 600 \\ p_4(S) = \binom{5}{4} \times \binom{5}{4} \times 4! = 600 \\ p_5(S) = \binom{5}{5} \times \binom{5}{5} \times 5! = 120 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0(S_2) = 1 \\ p_1(S_2) = 16 \\ p_2(S_2) = \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 2! = 72 \\ p_3(S_2) = \binom{4}{3} \times \binom{4}{3} \times 3! = 96 \\ p_4(S_2) = \binom{4}{4} \times \binom{4}{4} \times 4! = 24 \end{array} \right.$$

Então,

$$\begin{aligned} p(T) &= p(S_1) = p(S) - xp(S_2) \\ &= 1 + 25x + 200x^2 + 600x^3 + 600x^4 + 120x^5 \\ &\quad - x(1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4) \\ &= 1 + 24x + 184x^2 + 528x^3 + 504x^4 + 96x^5 \end{aligned}$$

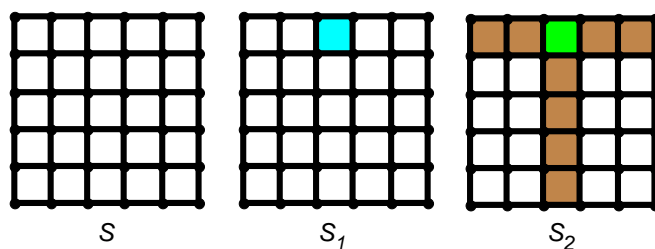
E se faltarem duas células?

Exemplo 701 Determine o polinómio associado ao tabuleiro seguinte:

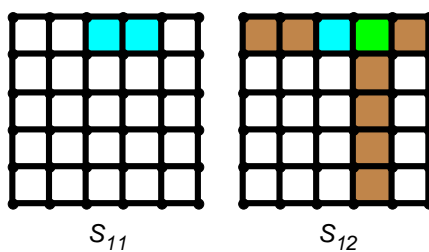


Resolução

Neste caso, vamos ter mais trabalho, porque temos de resolver a questão em dois passos:



Já sabemos calcular $p(S_1)$. Continuando, vem

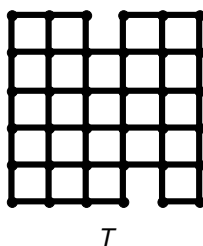


Logo, $p(S_1) = p(S_{11}) + xp(S_{12})$, donde se conclui que

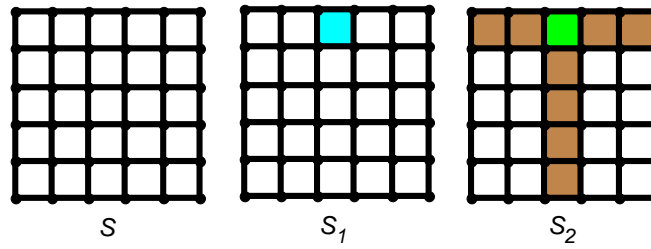
$$p(S_{11}) = p(S_1) - xp(S_{12}) = p(S) - xp(S_2) - xp(S_{12}) = p(S) - 2xp(S_2)$$

Note-se que $p(S_{12}) = p(S_2)$. O resto fica a cargo do leitor.

Exemplo 702 *Determine o polinómio associado ao tabuleiro seguinte:*

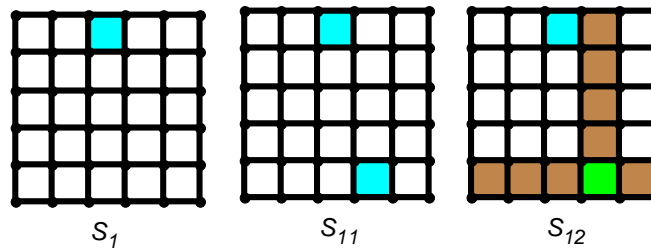
**Resolução**

O modo de resolução é análogo aos exemplos anteriores. Começamos por considerar o tabuleiro "completo" e vamos "eliminar", uma a uma, as duas células que faltam na figura anterior.



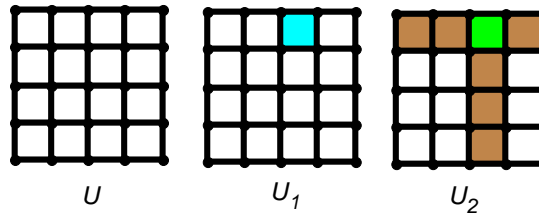
Então, $p(S) = p(S_1) + xp(S_2)$, como anteriormente.

Agora, consideramos S_1 :



Ora, $p(S_1) = p(S_{11}) + xp(S_{12})$, donde vem $p(S_{11}) = p(S_1) - xp(S_{12})$.

Agora, temos uma nova questão: S_{12} não é rectangular (por causa da casa azul). Então, temos de calcular $p(S_{12})$.



Da figura anterior, vem $p(U) = p(U_1) + xp(U_2)$, donde se conclui que

$$\begin{aligned}
 p(U_1) &= p(U) - xp(U_2) \\
 &= 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4 - x(1 + 9x + 18x^2 + 6x^3) \\
 &= 1 + 15x + 63x^2 + 78x^3 + 18x^4 \\
 &= p(S_{12})
 \end{aligned}$$

Voltando atrás, temos

$$p(S_{11}) = p(S_1) - xp(S_{12}) = p(S_1) - x(1 + 15x + 63x^2 + 78x^3 + 18x^4)$$

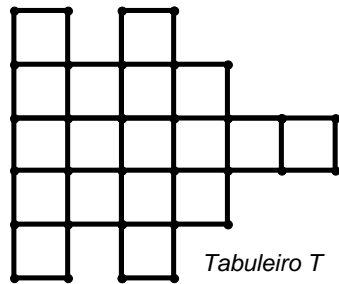
Agora, uma vez que $p(S_1) = p(S) - xp(S_2)$, sendo S do tipo 5×5 e S_2 do tipo 4×4 .

$$\begin{aligned} p(S_1) &= p(S) - xp(S_2) \\ &= 1 + 25x + 200x^2 + 600x^3 + 600x^4 + 120x^5 \\ &\quad - x(1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4) \\ &= 1 + 24x + 184x^2 + 528x^3 + 504x^4 + 96x^5 \end{aligned}$$

E, por fim, temos

$$\begin{aligned} p(S_{11}) &= p(S_1) - x(1 + 15x + 63x^2 + 78x^3 + 18x^4) \\ &= 1 + 24x + 184x^2 + 528x^3 + 504x^4 + 96x^5 \\ &\quad - x(1 + 15x + 63x^2 + 78x^3 + 18x^4) \\ &= 1 + 23x + 169x^2 + 465x^3 + 426x^4 + 78x^5 \end{aligned}$$

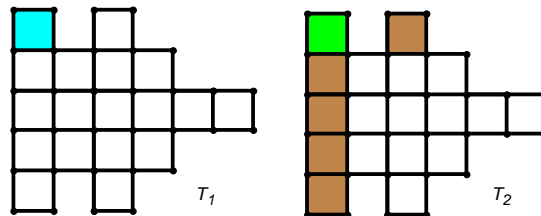
Exemplo 703 Determine o polinômio associado ao tabuleiro seguinte:



Resolução

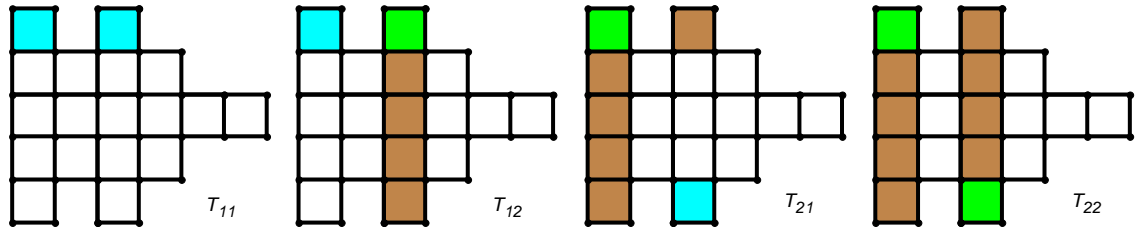
Vamos construir dois sub-tabuleiros, sendo que o primeiro resulta da eliminação da casa que escolhermos e o segundo resulta da eliminação da coluna e da linha que contêm a casa escolhida. As células a verde são aquelas onde ficam as torres e, por isso, elimina-se a linha e a coluna que contêm as células a verde. As células a azul são as células onde não fica nenhuma torre. As células a castanho são aquelas onde não pode ficar nenhuma torre, por já haver uma torre na mesma linha ou na mesma coluna.

Passo 1:



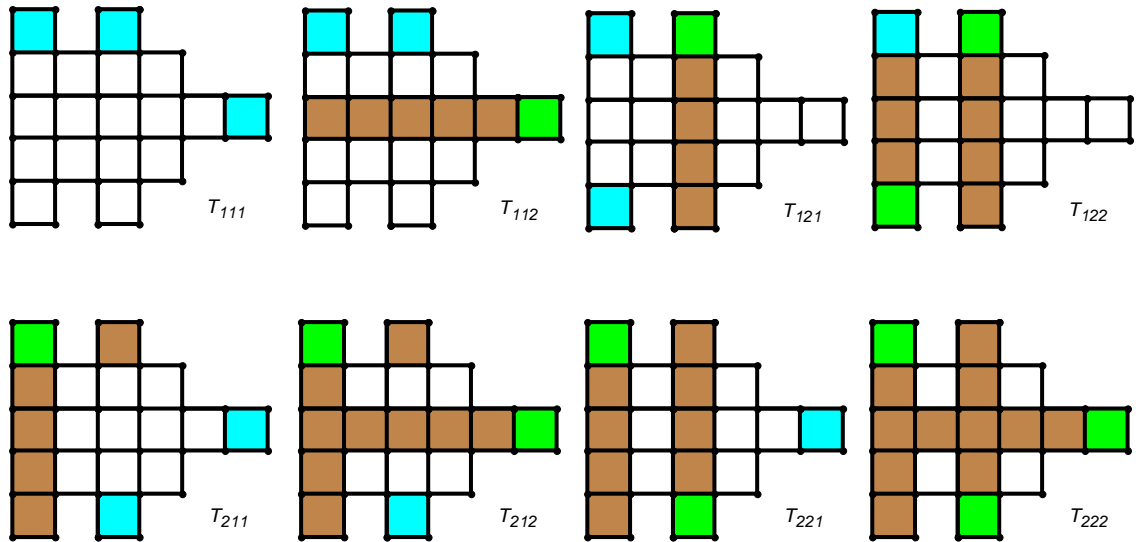
E, como sabemos, $p(T) = p(T_1) + xp(T_2)$, embora seja mais fácil deixar a escrita dos polinómios para o fim.

Passo 2:



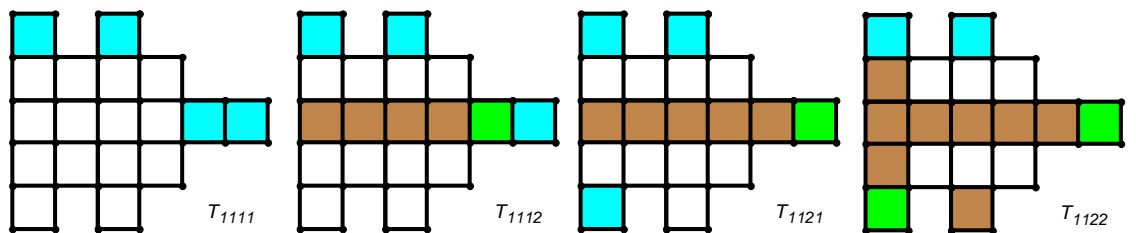
E obtivemos quatro sub-tabuleiros de nível dois.

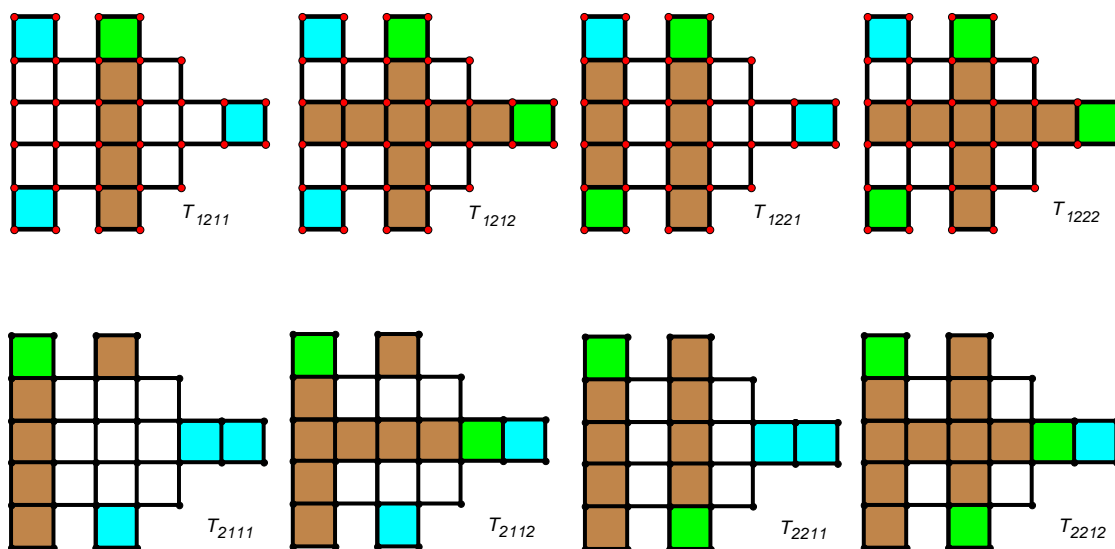
Passo 3:



Obtivemos oito sub-tabuleiros, dos quais dois são rectangulares: T_{212} e T_{222} . Então, no próximo passo, só vamos decompor seis tabuleiros (que vão dar origem a 12).

Passo 4:

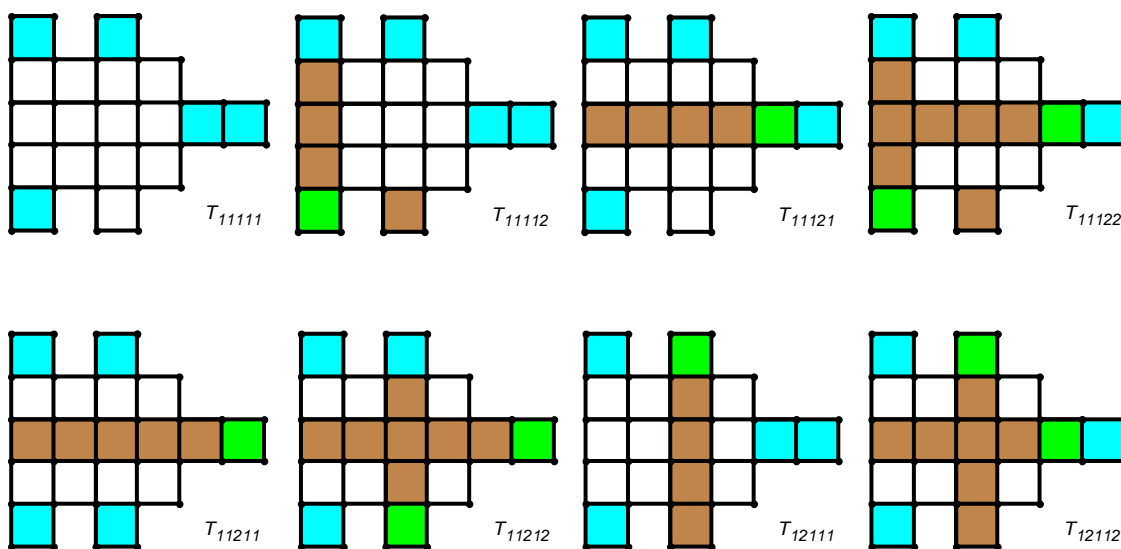


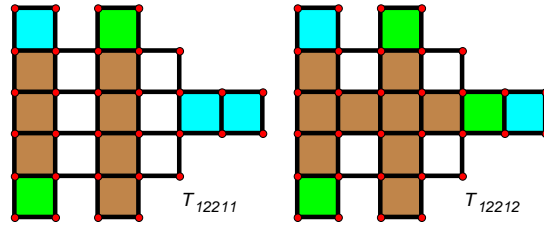


Destes doze tabuleiros encontrados, há sete que são retangulares e cinco que não o são. Logo, temos de continuar a aplicar o processo a esses cinco tabuleiros não retangulares, obtendo-se dez sub-tabuleiros (no próximo passo). No entanto, antes de continuarmos, é conveniente registarmos os tabuleiros retangulares obtidos no passo 4:

$$T_{1122}, T_{1212}, T_{1222}, T_{2111}, T_{2112}, T_{2211}, T_{2212}$$

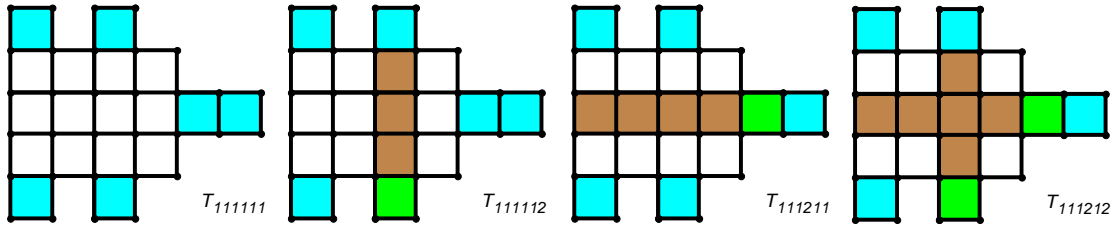
Passo 5:





Dos dez tabuleiros encontrados, apenas dois não são rectangulares.

Passo 6:



Os quatro tabuleiros encontrados neste passo são rectangulares.

Agora, vamos fazer uma lista dos tabuleiros rectangulares, indicando a sua dimensão:

Tab	Dim	Tab	Dim	Tab	Dim
T_{212}	2×3	T_{2211}	3×2	T_{12112}	2×3
T_{222}	2×2	T_{2212}	2×2	T_{12211}	3×2
T_{1122}	2×3	T_{11112}	3×3	T_{12212}	2×2
T_{1212}	2×3	T_{11122}	2×3	T_{111111}	3×4
T_{1222}	2×2	T_{11211}	2×4	T_{111112}	3×3
T_{2111}	3×3	T_{11212}	2×3	T_{111211}	2×4
T_{2112}	2×3	T_{12111}	3×3	T_{111212}	2×3

Ordenando, pela dimensão, temos:

Tab	Dim	Tab	Dim	Tab	Dim
T_{222}	2×2	T_{2112}	2×3	T_{11211}	2×4
T_{1222}	2×2	T_{2211}	3×2	T_{111211}	2×4
T_{2212}	2×2	T_{11122}	2×3	T_{2111}	3×3
T_{12212}	2×3	T_{11212}	2×3	T_{11112}	3×3
T_{212}	2×3	T_{12112}	2×3	T_{12111}	3×3
T_{1122}	2×3	T_{12211}	3×2	T_{111112}	3×3
T_{1212}	2×3	T_{111212}	2×3	T_{111111}	3×4

O próximo passo consiste em calcular os polinómios dos vários tabuleiros rectangulares:

Dim Tab	Polinómio	Dim Tab	Polinómio
2×2	$1 + 4x + 2x^2$	3×3	$1 + 9x + 18x^2 + 6x^3$
2×3	$1 + 6x + 6x^2$	3×4	$1 + 12x + 36x^2 + 24x^3$
2×4	$1 + 8x + 12x^2$		

Note-se que não adianta distinguir entre um tabuleiro 2×3 e um tabuleiro 3×2 .

Tabuleiros 2×2 : $T_{222}, T_{1222}, T_{2212}, T_{12212}$. Curiosamente, todos eles têm, no índice, o dígito 2 escrito três vezes. Logo, o polinômio correspondente vai ser multiplicado por x^3 .

Então, a parcela correspondente aos quatro tabuleiros do tipo 2×2 é $4x^3(1 + 4x + 2x^2)$, ou seja, $8x^5 + 16x^4 + 4x^3$.

Tabuleiros 2×3 ou 3×2 : $T_{212}, T_{1122}, T_{1212}, T_{2112}, T_{2211}, T_{11122}, T_{11212}, T_{12112}, T_{12211}, T_{111212}$. Neste caso, aparece o dígito 2 escrito duas vezes no índice de todos os tabuleiros.

Então, a parcela correspondente aos dez tabuleiros do tipo 2×3 é $10x^2(1 + 6x + 6x^2)$, ou seja, $60x^4 + 60x^3 + 10x^2$.

Tabuleiros 2×4 : T_{11211} e T_{111211} . O dígito 2 aparece uma só vez em ambos os tabuleiros, pelo que a parcela correspondente aos dois tabuleiros do tipo 2×4 é $2x(1 + 8x + 12x^2)$, ou seja, $24x^3 + 16x^2 + 2x$.

Tabuleiros 3×3 : $T_{2111}, T_{11112}, T_{12111}$ e T_{111112} . De novo, o dígito 2 aparece em cada índice uma só vez. Então, a parcela correspondente aos quatro tabuleiros do tipo 2×3 é $4x(1 + 9x + 18x^2 + 6x^3)$, ou seja, $24x^4 + 72x^3 + 36x^2 + 4x$.

Por fim, temos os tabuleiros 3×4 : T_{111111}

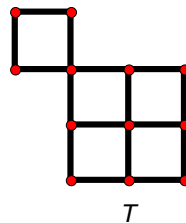
A parcela correspondente ao único tabuleiro 3×4 é $1 + 12x + 36x^2 + 24x^3$. Sejam:

$A(x) = 8x^5 + 16x^4 + 4x^3$, $B(x) = 60x^4 + 60x^3 + 10x^2$, $C(x) = 24x^3 + 16x^2 + 2x$, $D(x) = 24x^4 + 72x^3 + 36x^2 + 4x$, $E(x) = 24x^3 + 36x^2 + 12x + 1$ e $F(x) = A(x) + B(x) + C(x) + D(x) + E(x)$

Então,

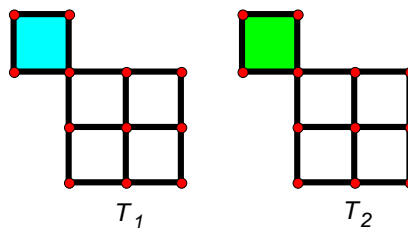
$$\begin{aligned} F(x) &= A(x) + B(x) + C(x) + D(x) + E(x) \\ &= 8x^5 + 100x^4 + 184x^3 + 98x^2 + 18x + 1 \end{aligned}$$

Exemplo 704 Determine o polinômio associado ao tabuleiro seguinte:



Resolução

Então,



Logo, $p(T) = p(T_1) + xp(T_2)$. Só que $T_1 = T_2$.

Ora, $p_1(T_1) = 4$, $p_2(T_2) = 2$ e $p(T_1) = 1 + 4x + 2x^2$, pelo que

$$p(T) = 1 + 4x + 2x^2 + x(1 + 4x + 2x^2) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 1$$

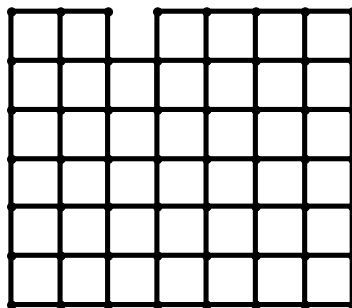
Calculando directamente, temos $p_1(T) = 5$, $p_2(T) = 4 + 2 = 6$, $p_3(T) = 2$, donde vem $p(T) = 1 + 5x + 6x^2 + 2x^3$.

No entanto, existe uma maneira mais interessante de obter o polinómio associado ao tabuleiro anterior, já que o tabuleiro T é a reunião de dois sub-tabuleiros disjuntos.

Então, $p(T) = p(S_{1 \times 1}) \times p(S_{2 \times 2})$, onde $S_{1 \times 1}$ é a célula azul (ou verde) e $S_{2 \times 2}$ é o quadrado com 4 células (ver figura anterior). Então,

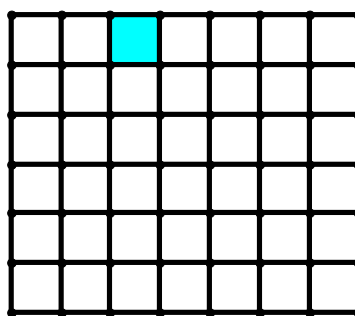
$$p(T) = p(S_{1 \times 1}) \times p(S_{2 \times 2}) = (1 + x)(1 + 4x + 2x^2) = 1 + 5x + 6x^2 + 2x^3$$

Exemplo 705 Determine o polinómio associado ao tabuleiro da figura seguinte:



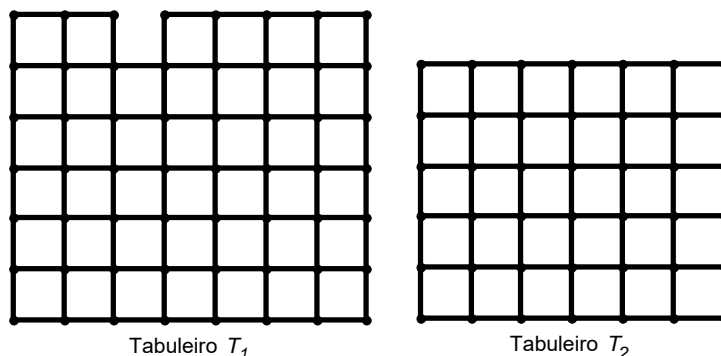
Resolução

Já vimos como resolver esta questão: começamos por considerar o tabuleiro rectangular 7×6 (ver figura seguinte):



Tabuleiro T

Aplicando o método ao tabuleiro T , relativamente à casa azul, temos $p(T) = p(T_1) + xp(T_2)$, onde T_1 é o tabuleiro dado e T_2 é um tabuleiro rectangular 6×5 .



Então, podemos concluir que $p(T_1) = p(T) - xp(T_2)$, pelo que nos basta encontrar $p(T)$ e $p(T_2)$. Ora,

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(T) = 42 \\ p_2(T) = \binom{7}{2} \binom{6}{2} \times 2! = 630 \\ p_3(T) = \binom{7}{3} \binom{6}{3} \times 3! = 4200 \\ p_4(T) = \binom{7}{4} \binom{6}{4} \times 4! = 12\,600 \\ p_5(T) = \binom{7}{5} \binom{6}{5} \times 5! = 15\,120 \\ p_6(T) = \binom{7}{6} \binom{6}{6} \times 6! = 5040 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1(T_2) = 30 \\ p_2(T_2) = \binom{6}{2} \binom{5}{2} \times 2! = 300 \\ p_3(T_2) = \binom{6}{3} \binom{5}{3} \times 3! = 1200 \\ p_4(T_2) = \binom{6}{4} \binom{5}{4} \times 4! = 1800 \\ p_5(T_2) = \binom{6}{5} \binom{5}{5} \times 5! = 720 \end{array} \right.$$

Logo,

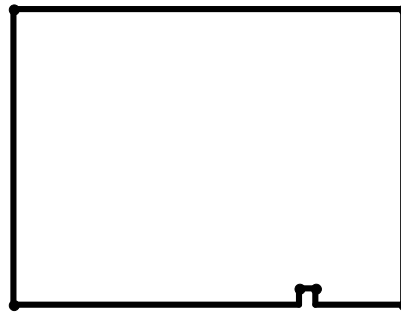
$$\begin{aligned} p(T_1) &= 1 + 42x + 630x^2 + 4200x^3 + 12600x^4 + 15120x^5 + 5040x^6 \\ &\quad - x(1 + 30x + 300x^2 + 1200x^3 + 1800x^4 + 720x^5) \\ &= 1 + 41x + 600x^2 + 3900x^3 + 11400x^4 + 13320x^5 + 4320x^6 \end{aligned}$$

Observação

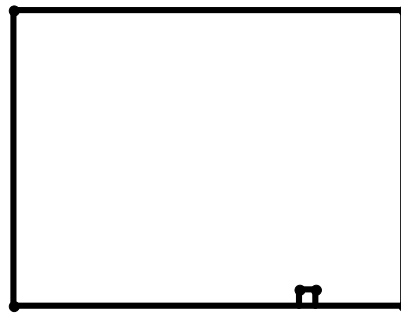
Os índices que foram utilizados (nos sub-tabuleiros) podem ser modificados. Uma das maneiras consiste em trocar os índices 1 e 2, entre si. Uma segunda modificação é manter o índice 1 e utilizar o índice 0, em vez do índice 2. São pequenos pormenores que não alteram o essencial: o processo simplifica bastante o cálculo do polinómio associado a um tabuleiro.

Vejamos o caso geral em que se aplica o método anterior (quando falta uma casa para que o tabuleiro seja rectangular):

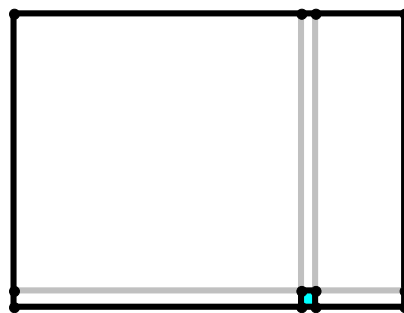
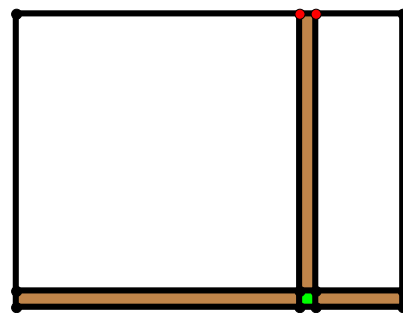
Exemplo 706 *Determine o polinómio torre, associado ao tabuleiro (T) rectangular $m \times n$, ao qual foi "retirada uma casa", como na figura seguinte:*

Tabuleiro T **Resolução**

Seja S o tabuleiro que resulta de acrescentar a casa que falta ao tabuleiro T , para que seja rectangular.

Tabuleiro S

Então, $p(S) = p(S_1) + xp(S_2) = p(T) + xp(S_2)$, com S_1 e S_2 como definidos na figura seguinte:

Tabuleiro S_1 Tabuleiro S_2

Então, $p(T) = p(S_1) = p(S) - xp(S_2)$.

Ora, S é um tabuleiro $m \times n$, enquanto S_2 é um tabuleiro $(m-1) \times (n-1)$, pelo que podemos encontrar o polinómio torre associado a cada um dos tabuleiros S e S_2 .

É claro que só temos interesse nos casos em que $m \geq 3, n \geq 3$. Seja $u = \min\{m-1, n-1\}$.

Então,

$$\begin{cases} q_k(S_2) = \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k} k!, \text{ com } 0 \leq k \leq u \\ p_k(S) = \binom{m-1}{j} \binom{n-1}{j} j!, \text{ com } 0 \leq j \leq u+1 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} q(S_2) = \sum_{k=0}^u \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k} k! x^k \\ p(S) = \sum_{j=0}^{u+1} \binom{m}{j} \binom{n}{j} j! x^j \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} p(T) &= p(S_1) = p(S) - xq(S_2) \\ &= \binom{m}{0} \binom{n}{0} + \sum_{j=1}^{u+1} \binom{m}{j} \binom{n}{j} j! x^j - x \sum_{k=0}^u \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k} k! x^k \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{u+1} \binom{m}{j} \binom{n}{j} j! x^j - \sum_{k=0}^u \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k} k! x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^u \binom{m}{j+1} \binom{n}{j+1} (j+1)! x^{j+1} - \sum_{k=0}^u \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k} k! x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^u \binom{m}{k+1} \binom{n}{k+1} (k+1)! x^{k+1} - \sum_{k=0}^u \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k} k! x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^u k! \left[\binom{m}{k+1} \binom{n}{k+1} (k+1) - \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k} \right] x^{k+1} \end{aligned}$$

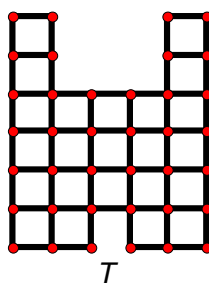
Embora tenhamos encontrado uma expressão para $p(T)$, talvez seja preferível ignorá-la (a menos que se goste de memorizar expressões).

Vejamos as duas primeiras parcelas do somatório anterior:

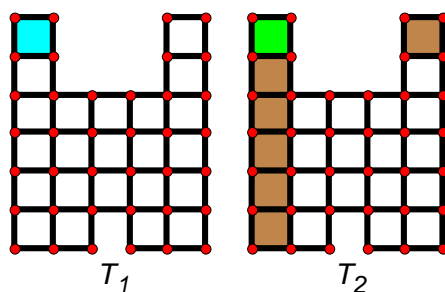
$$k=0 \quad 0! (mn - (m-1)(n-1)) x = (m+n-1) x$$

$$k=1 \quad 1! \left(2 \binom{m}{2} \binom{n}{2} - \binom{m-1}{1} \binom{n-1}{1} \right) x^2 = \frac{1}{2} x^2 (n-1)(m-1)(mn-2)$$

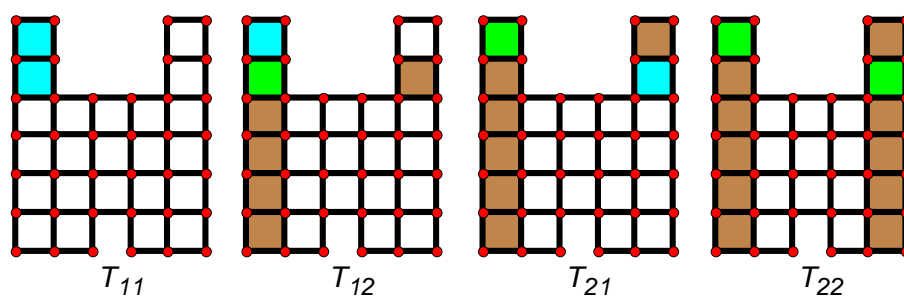
Exemplo 707 Determine o polinómio torre associado ao tabuleiro T da figura seguinte:

**Resolução**

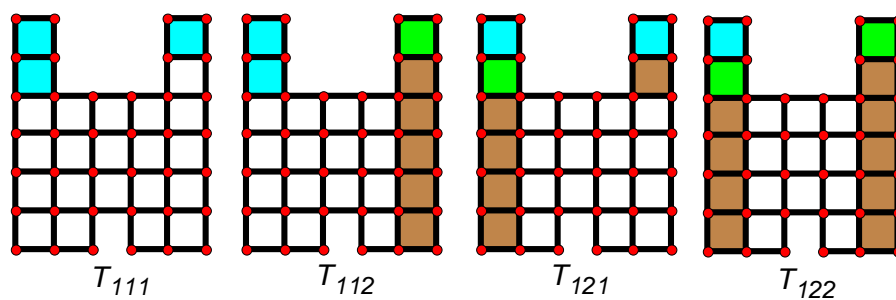
Vamos começar por "eliminar" as quatro casas superiores, pelo processo que temos vindo a usar:
Primeiro passo:



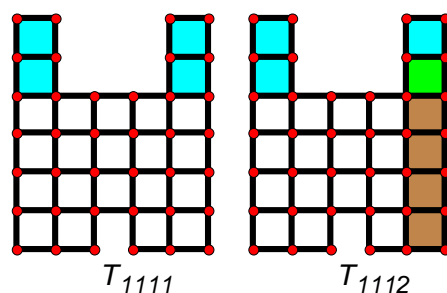
Segundo passo:



Terceiro passo:



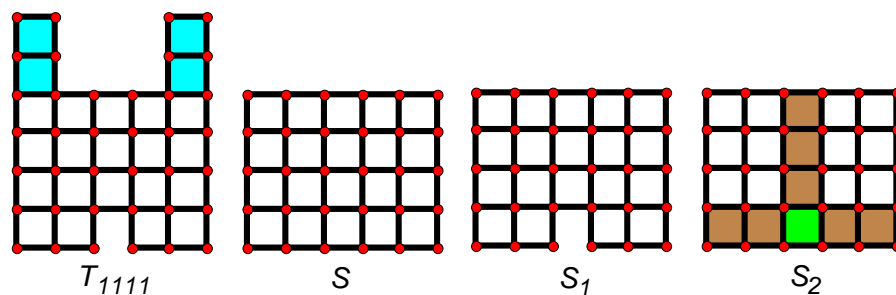
Note-se que T_{21} e T_{22} já são da forma que pretendemos. Agora, só nos falta um passo. Quarto passo:



Lista dos tabuleiros "terminais": T_{21} , T_{22} , T_{112} , T_{121} , T_{122} , T_{1111} , T_{1112} . Destes tabuleiros, temos que, relativamente às casas "livres", T_{22} e T_{122} são "iguais", o mesmo acontecendo com T_{21} , T_{112} , T_{121} e T_{1112} . Curiosamente, todos os tabuleiros iguais têm o dígito 2 escrito o mesmo número de vezes nos vários índices, pelo que os polinómios torres associados serão multiplicados por x^2 e por x , respectivamente.

Agora, temos três classes de tabuleiros nas condições do exemplo anterior.

1º caso:



Então,

$$p(T_{1111}) = p(S) - xp(S_2)$$

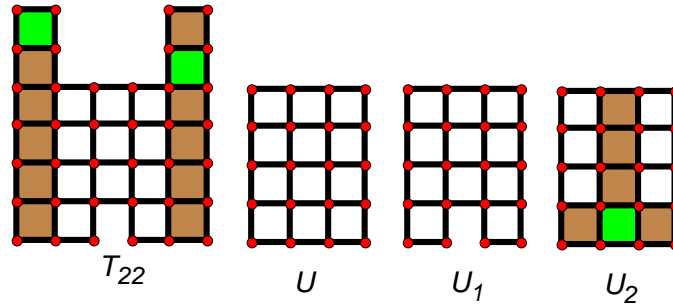
Mas,

$$\begin{cases} p_1(S) = 20 \\ p_2(S) = \binom{5}{2} \binom{4}{2} \times 2! = 120 \\ p_3(S) = \binom{5}{3} \binom{4}{3} \times 3! = 240 \\ p_4(S) = \binom{5}{4} \binom{4}{4} \times 4! = 120 \end{cases}, \begin{cases} p_1(S_2) = 12 \\ p_2(S_2) = \binom{4}{2} \binom{3}{2} \times 2! = 36 \\ p_3(S_2) = \binom{4}{3} \binom{3}{3} \times 3! = 24 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} p(S) = 1 + 20x + 120x^2 + 240x^3 + 120x^4 \\ p(S_2) = 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3 \\ p(T_{1111}) = p(S) - xp(S_2) = 1 + 19x + 108x^2 + 204x^3 + 96x^4 \end{cases}$$

2º caso:

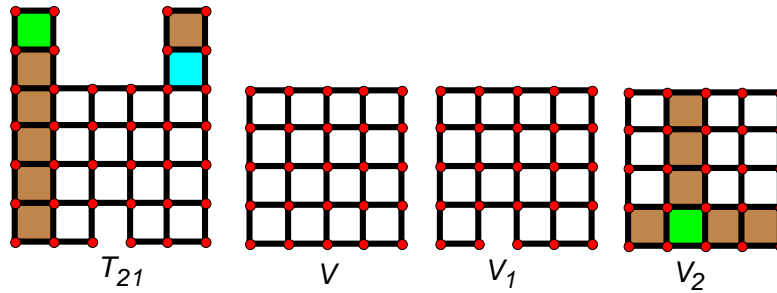


Podemos aproveitar parte do que fizemos no caso anterior, porque $p(U) = p(S_2) = 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3$.

Além disso, temos $p(U_2) = 1 + 6x + 6x^2$. Logo,

$$\begin{aligned} p(T_{22}) &= p(T_{122}) \\ &= p(U) - xp(U_2) = 1 + 12x + 36x^2 + 24x^3 - x(1 + 6x + 6x^2) \\ &= 1 + 11x + 30x^2 + 18x^3 \end{aligned}$$

3º caso:



Neste caso, temos $p(T_{21}) = p(V) - xp(V_2)$. Ora,

$$\begin{cases} p_1(V) = 16 \\ p_2(V) = \binom{4}{2} \binom{4}{2} \times 2! = 72 \\ p_3(V) = \binom{4}{3} \binom{4}{3} \times 3! = 96 \\ p_4(V) = \binom{4}{4} \binom{4}{4} \times 4! = 24 \end{cases}, \begin{cases} p_1(V_2) = 9 \\ p_2(V_2) = \binom{3}{2} \binom{3}{2} \times 2! = 18 \\ p_3(V_2) = \binom{3}{3} \binom{3}{3} \times 3! = 6 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} p(T_{21}) &= p(T_{112}) = p(T_{121}) = p(T_{1112}) = p(V) - xp(V_2) \\ &= 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4 - x(1 + 9x + 18x^2 + 54x^3) \\ &= 1 + 15x + 63x^2 + 78x^3 + 18x^4 \end{aligned}$$

Agora, falta-nos o polinómio torre associado ao tabuleiro inicial:

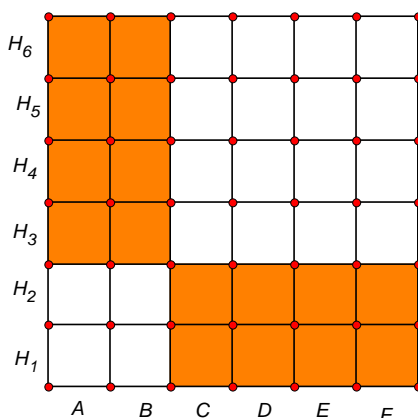
$$\begin{aligned} p(T) &= xp(T_{21}) + x^2p(T_{22}) + xp(T_{112}) + xp(T_{121}) + x^2p(T_{122}) + p(T_{1111}) + xp(T_{1112}) \\ &= p(T_{1111}) + x(p(T_{21}) + p(T_{112}) + p(T_{121}) + p(T_{1112})) + x^2(p(T_{22}) + p(T_{122})) \\ &= p(T_{1111}) + x(4p(T_{21})) + x^2(2p(T_{22})) \\ &= 108x^5 + 468x^4 + 478x^3 + 170x^2 + 23x + 1 \\ &= 1 + 23x + 170x^2 + 478x^3 + 468x^4 + 108x^5 \end{aligned}$$

Vejamos, agora, dois exemplos de aplicação dos polinómios torres:

Exemplo 708 *Numa Escola, há seis professores numa certa disciplina, tendo sido elaborados seis horários, um para cada professor. Os horários 1 e 2 têm de ser distribuídos pelos professores A e B, enquanto que os horários 3, 4, 5 e 6 têm de ser distribuídos pelos professores C, D, E e F. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a distribuição do serviço docente?*

Resolução

Trata-se duma questão muito fácil que pode ser resolvida sem recurso aos polinómios torres. No entanto, vamos resolver dessa maneira, para servir de exemplo ilustrativo.



A zona colorida está impossibilitada de acontecer. No quadrado 2×2 , correspondente aos horários 1 e 2 e aos professores A e B, há duas maneiras de colocar duas torres, sem que o movimento de uma interfira com o movimento da outra. Então, há duas maneiras de colocarmos duas torres no sub-tabuleiro 2×2 .

Quanto ao sub-tabuleiro 4×4 , temos $4! = 24$ maneiras de colocarmos 4 torres (sem que umas interfiram com as outras).

Usando a notação dos tabuleiros, temos $p_6(T) = p_6(T_1 \cup T_2) = p_2(T_1) \times p_4(T_2) = 2! \times 4! = 48$. É claro que T_1 é o sub-tabuleiro 2×2 , enquanto T_2 é o sub-tabuleiro 4×4 , sub-tabuleiros estes que são disjuntos.

Podíamos ter calculado os polinômios associados a cada sub-tabuleiro, embora isso dê algum trabalho, no caso do sub-tabuleiro 4×4 .

Relativamente a T_1 , temos $p(T_1) = 1 + 4x + 2x^2$, enquanto que relativamente a T_2 , temos:

$$\begin{cases} p_0(T_2) = 1 \\ p_1(T_2) = 16 \\ p_2(T_2) = \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 2! = 72 \\ p_3(T_2) = \binom{4}{3} \times \binom{4}{3} \times 3! = 96 \\ p_4(T_2) = 4! = 24 \end{cases}$$

Relembramos que o número de maneiras de colocar k torres, num tabuleiro $m \times n$, é

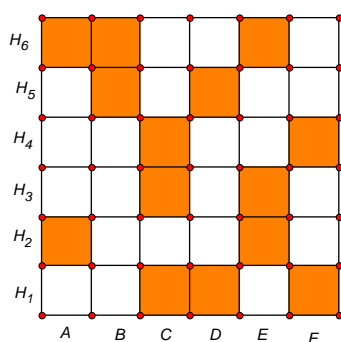
$$\binom{m}{k} \times \binom{n}{k} \times k!$$

Então, o polinômio associado a T_2 é $1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4$, pelo que o polinômio associado a $T_1 \cup T_2$ é dado pelo produto seguinte:

$$\begin{aligned} p(T_1 \cup T_2) &= p(T_1) \times p(T_2) \\ &= (1 + 4x + 2x^2)(1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4) \\ &= 1 + 20x + 138x^2 + 416x^3 + 552x^4 + 288x^5 + 48x^6 \end{aligned}$$

E, é claro, $p_6(T_1 \cup T_2) = 48$.

Exemplo 709 *Numa Escola, há seis professores numa certa disciplina, tendo sido elaborados seis horários, um para cada professor. Os professores podiam manifestar-se sobre as suas preferências, mas de forma negativa, ou seja, podiam dizer quais os horários que não queriam, num máximo de 3. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a distribuição do serviço docente, supondo que temos o seguinte quadro?*

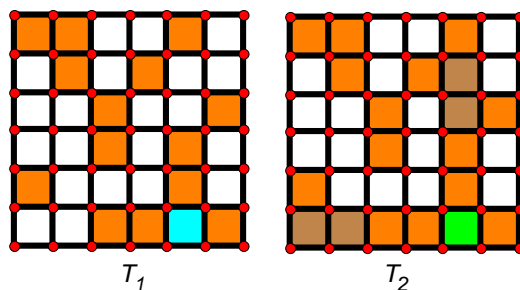


Resolução

Analisando o quadro anterior, vemos que o professor A, por exemplo, não quer os horários 2 e 6.

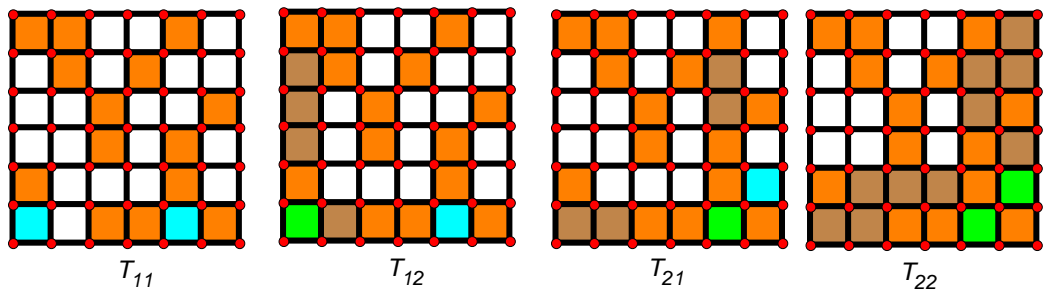
Este exemplo é bem mais complicado do que o exemplo anterior. Por essa razão, vamos procurar a solução (o número de maneiras), em vez de nos preocuparmos com o polinômio associado ao tabuleiro.

Seja T o tabuleiro formado pelas células a branco. Então,

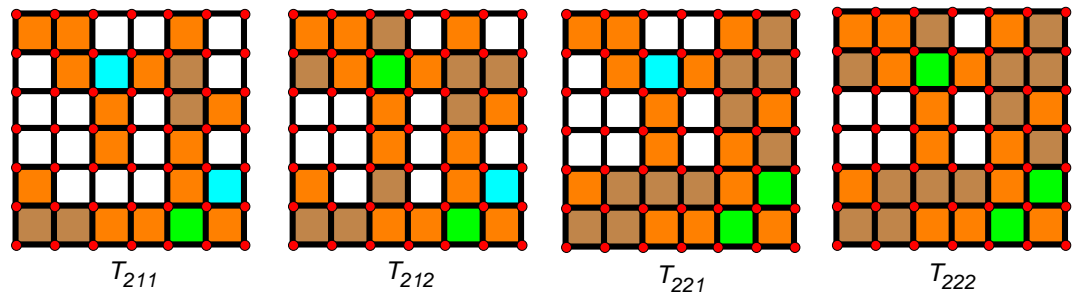
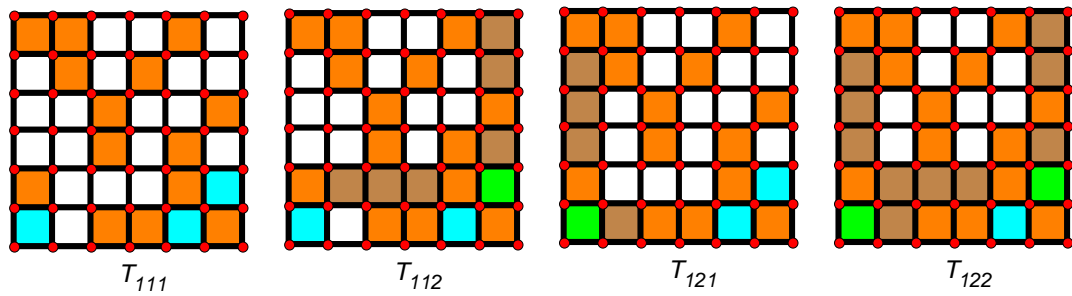


Note-se que vamos optar por apresentar sempre o tabuleiro 6×6 inicial. As células que vão sendo eliminadas, ficam a castanho claro.

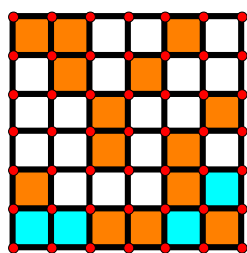
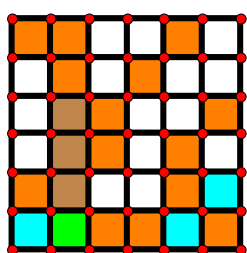
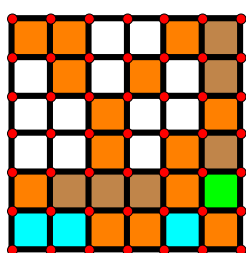
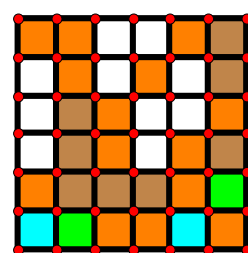
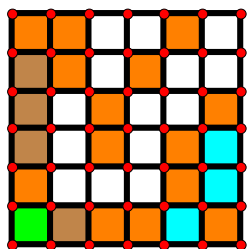
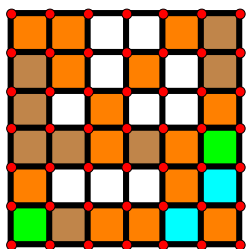
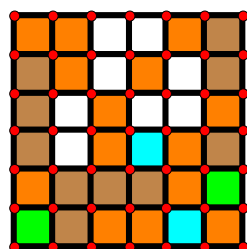
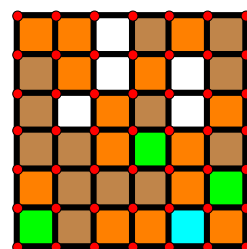
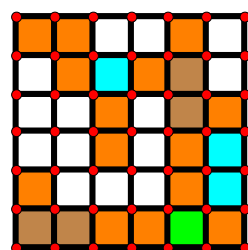
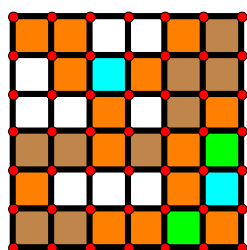
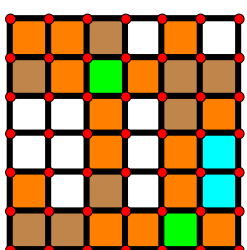
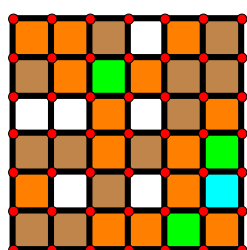
Agora, cada um dos sub-tabuleiros vai originar dois sub-tabuleiros e assim, sucessivamente, até encontrarmos sub-tabuleiros rectangulares, ou encontrarmos sub-tabuleiros que não admitam nenhuma maneira de colocar seis torres (seis células a verde). Continuando, vamos ter quatro casos:

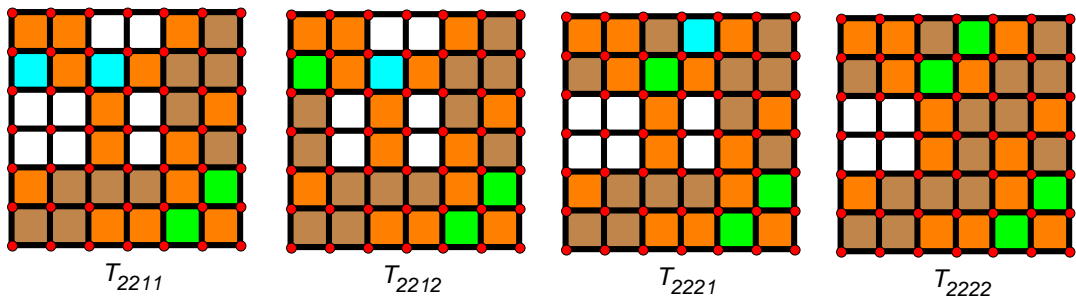


Agora, temos oito casos:

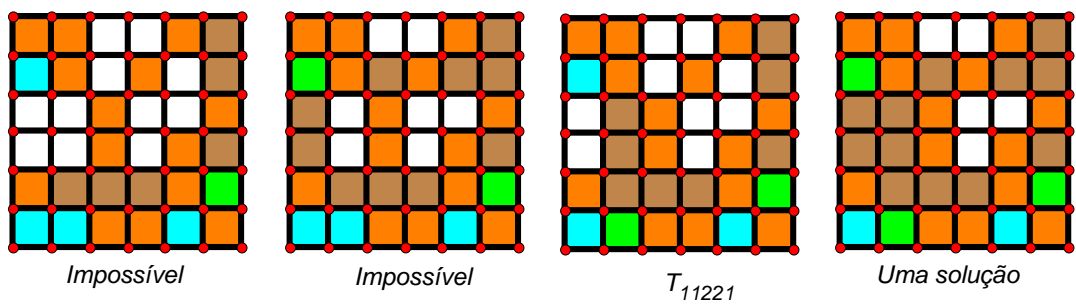
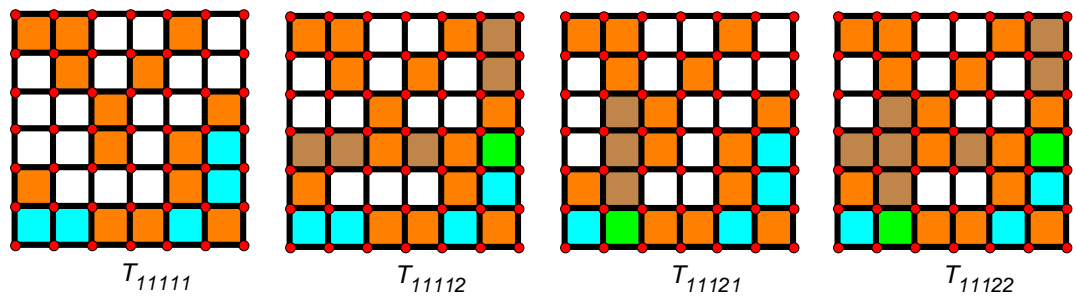


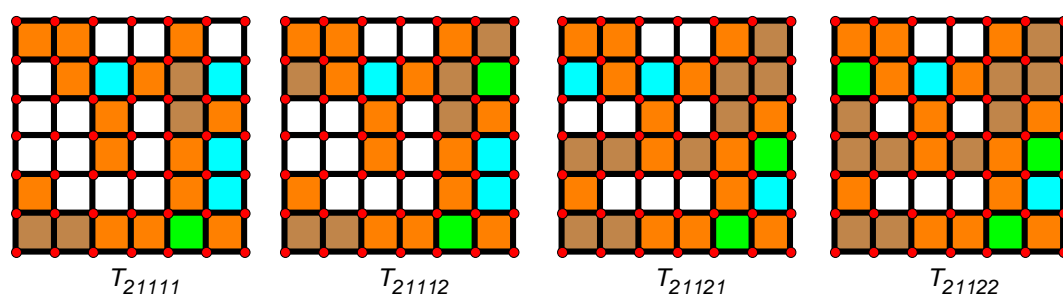
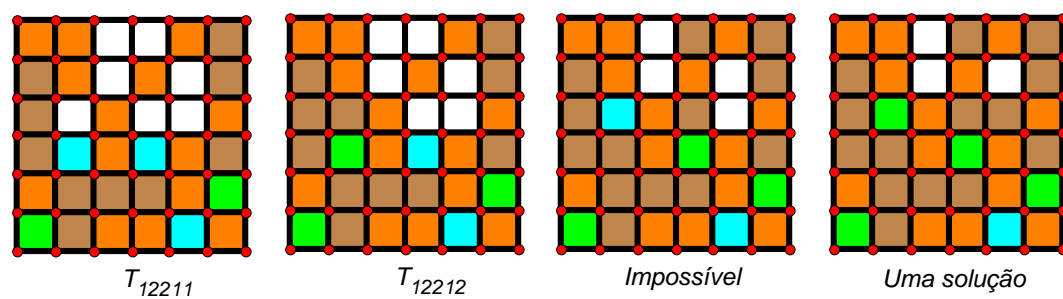
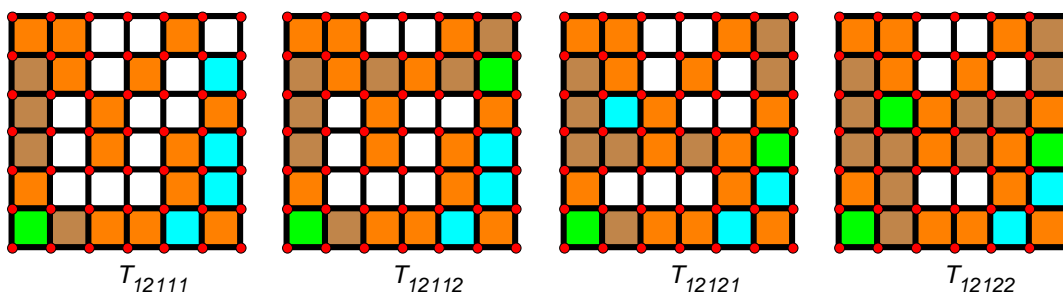
No próximo passo, teremos 16 sub-tabuleiros:

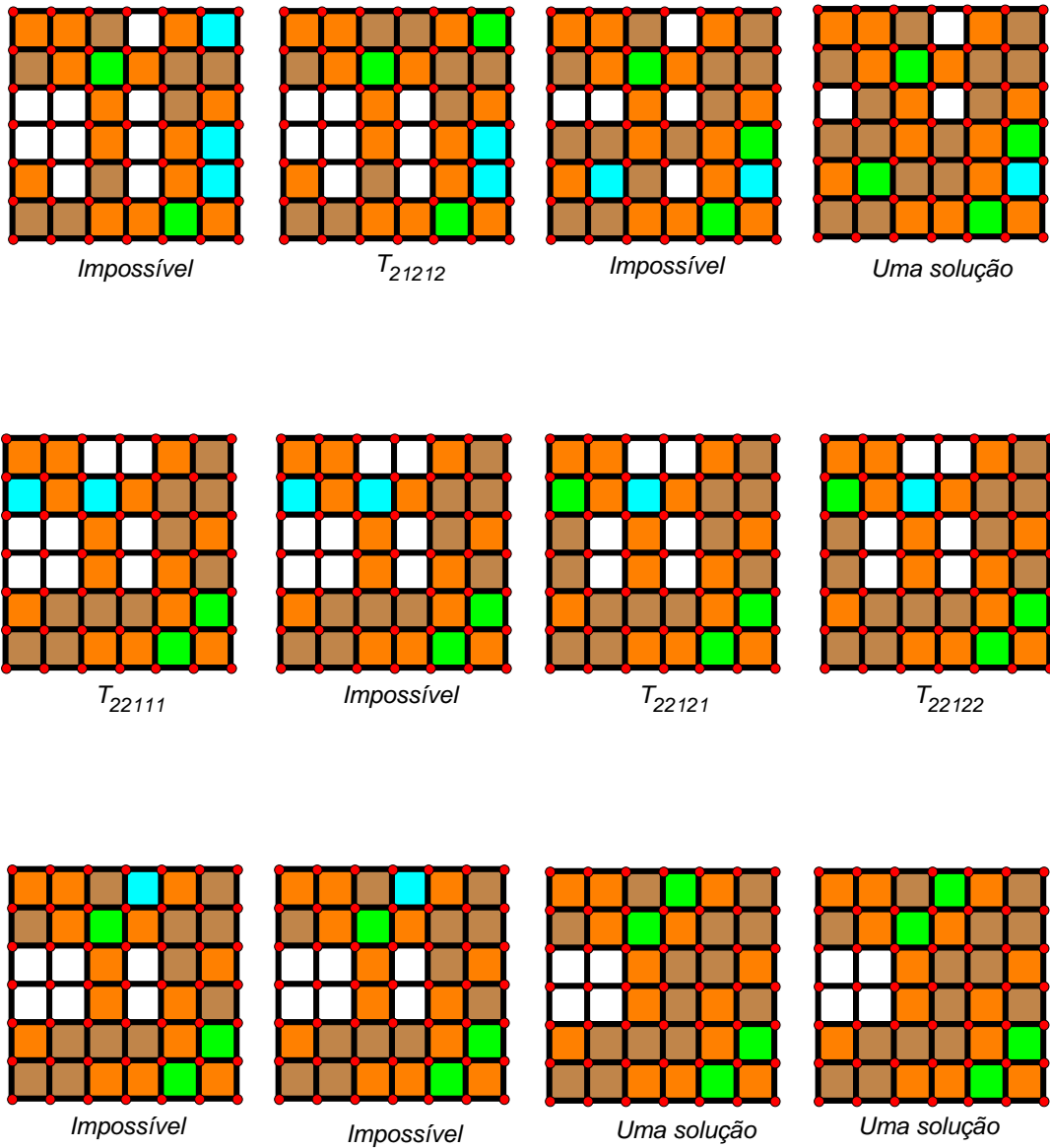
 T_{1111}  T_{1112}  T_{1121}  T_{1122}  T_{1211}  T_{1212}  T_{1221}  T_{1222}  T_{2111}  T_{2112}  T_{2121}  T_{2122}



Dos dezasseis casos anteriores, já podemos tirar algumas conclusões. Por exemplo, em T_{2222} , temos duas soluções e, em T_{2221} , não há soluções, pois não conseguimos colocar uma torre na primeira linha (de cima para baixo). Em T_{1222} , só há uma solução.

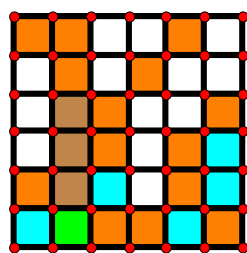
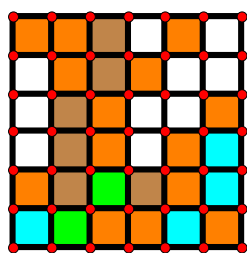
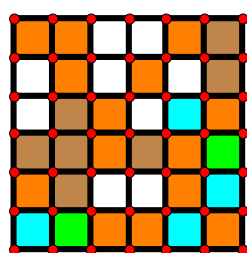
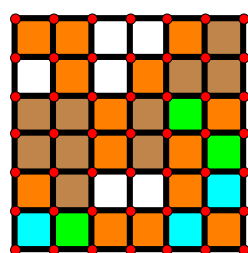
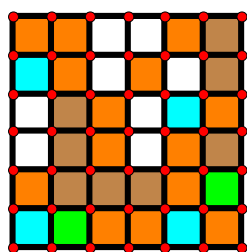
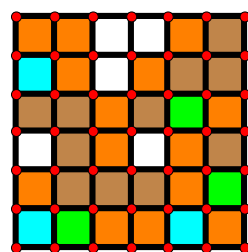
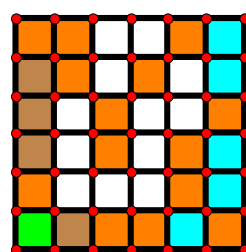
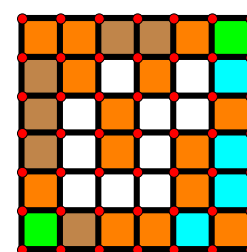
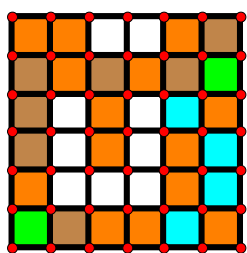
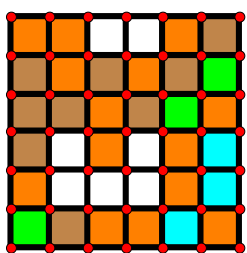
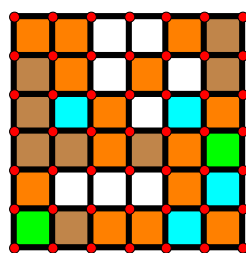
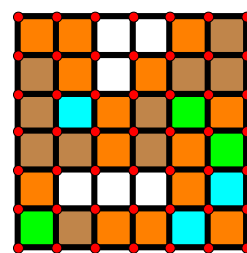


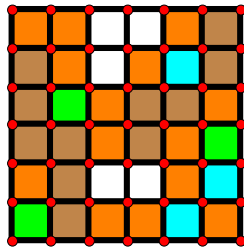




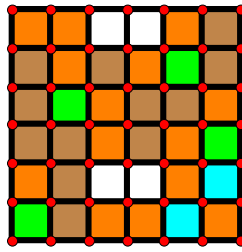
O problema maior é a grande quantidade de casos. Se não me enganei na contagem, há 13 casos em que já sabemos o número de soluções (incluindo aqueles em que não há solução). Então, temos 19 casos, os quais vão originar 38 (casos).

Reparando melhor, vemos que os casos T_{11111} e T_{11112} também são impossíveis, pois existe uma linha onde já não podemos colocar nenhum verde. Então, vamos ter 34 casos (e não 38). Continuemos:

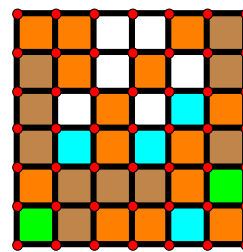
 T_{111211}  T_{111212}  T_{111221}  T_{111222}  T_{112211}  T_{112212} *Impossível* T_{121112} *Impossível* T_{121122}  T_{121211}  T_{121212}



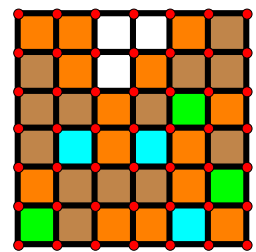
Impossível



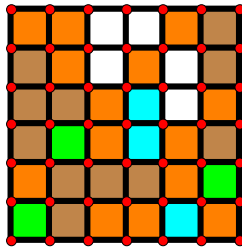
T_{121222}



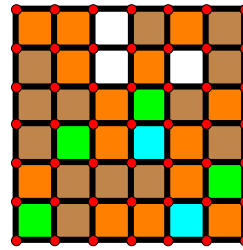
Impossível



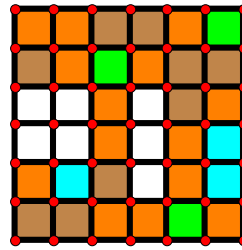
Impossível



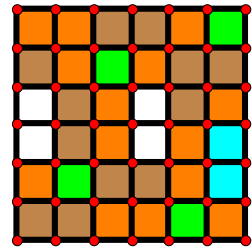
T_{122121}



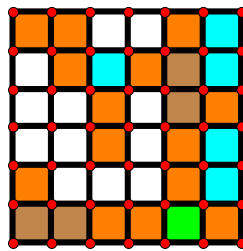
Uma solução



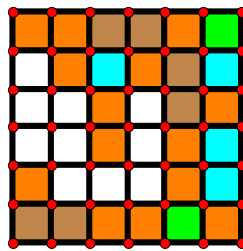
Duas soluções



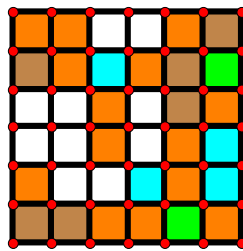
Duas soluções



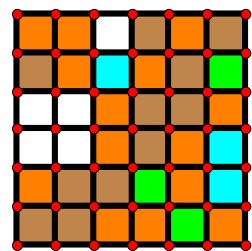
Impossível



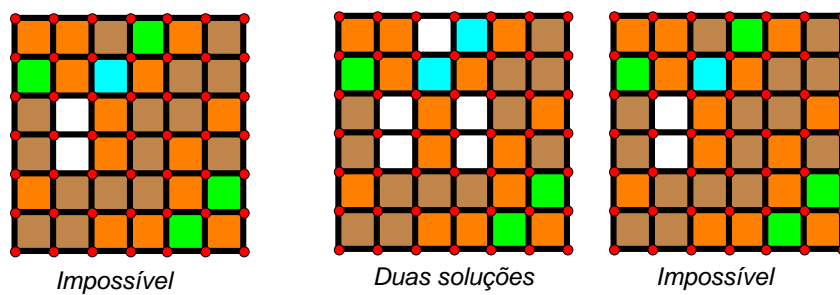
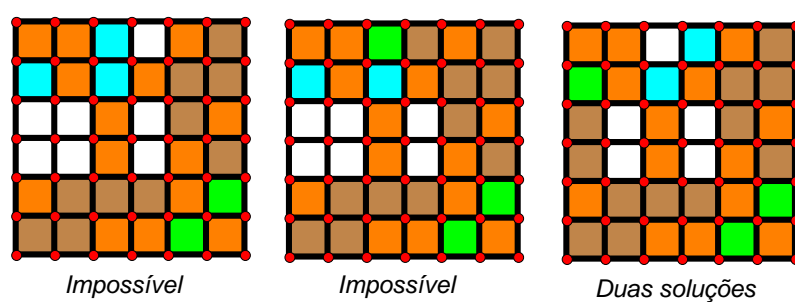
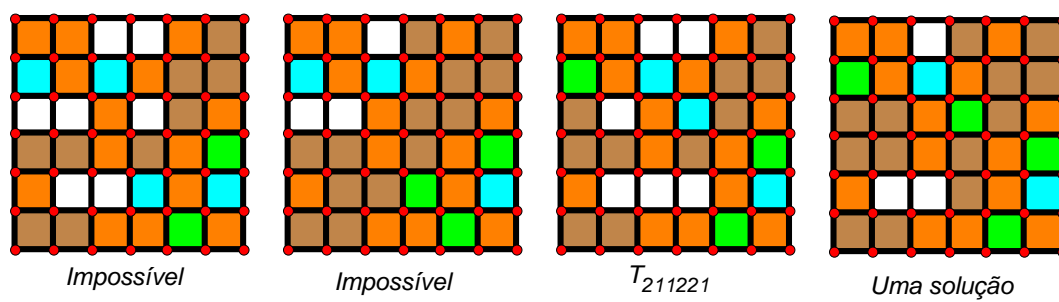
T_{211112}



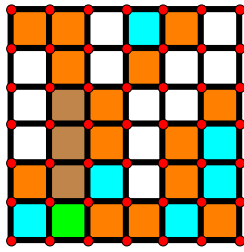
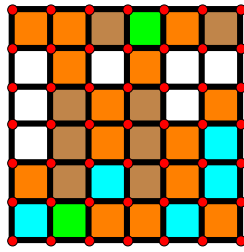
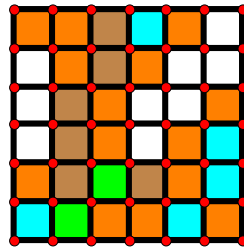
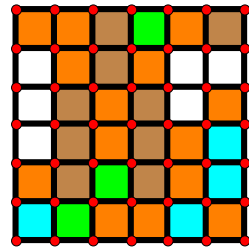
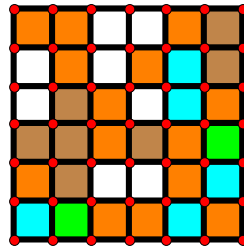
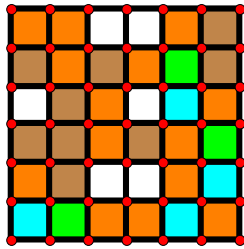
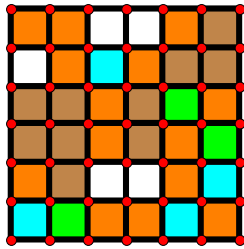
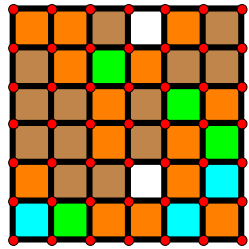
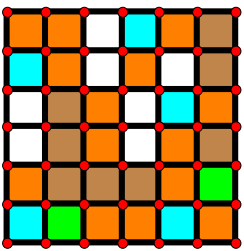
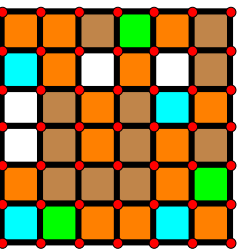
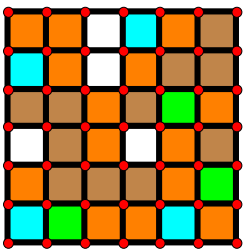
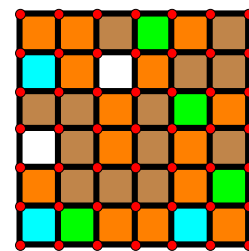
T_{211121}

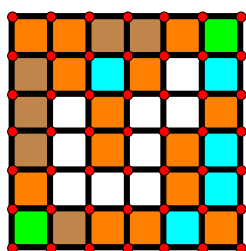
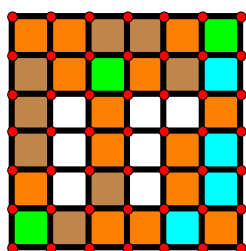
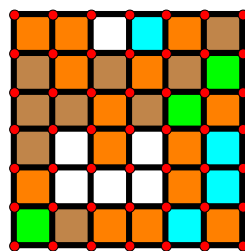
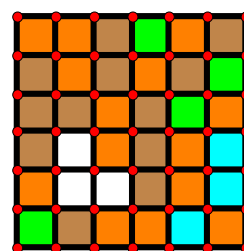
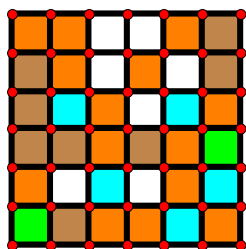
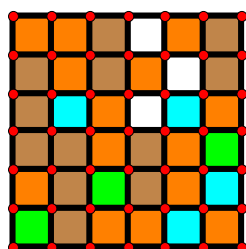
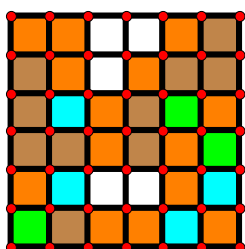
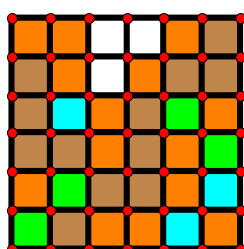
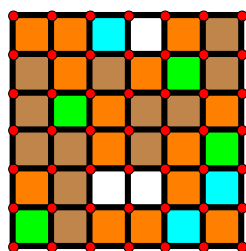
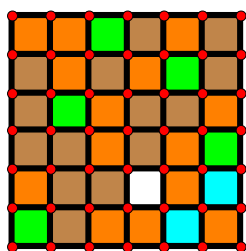
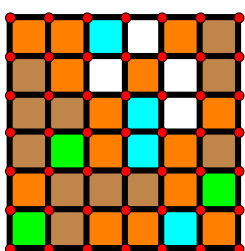
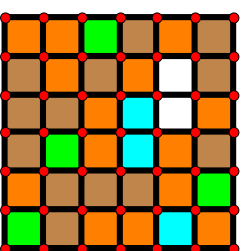


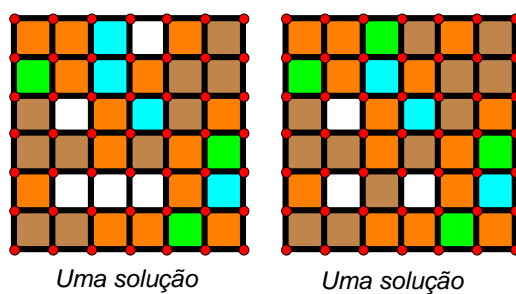
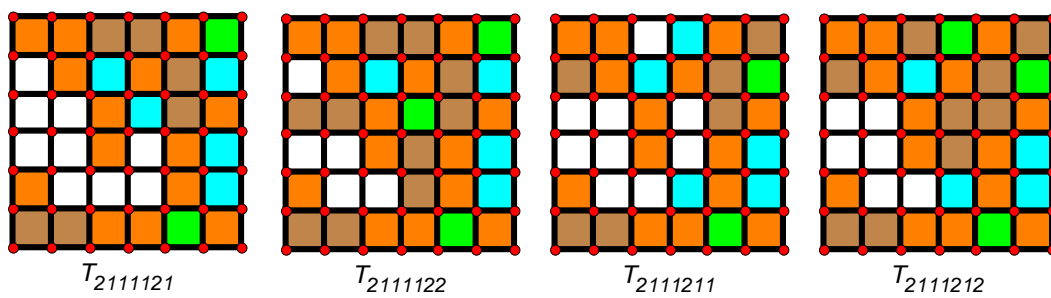
Duas soluções



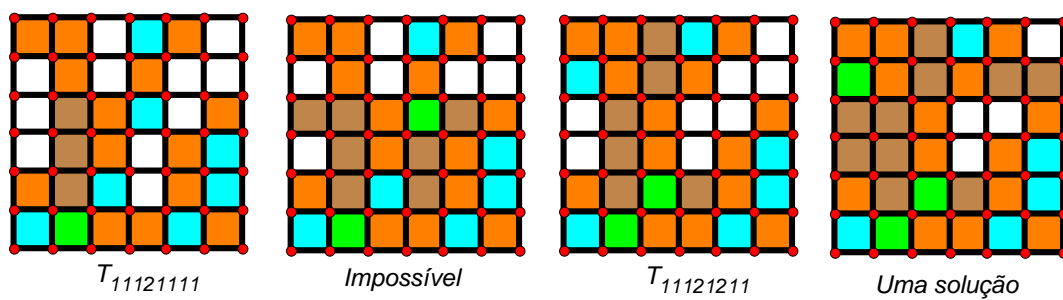
Dos 34 casos, 18 já estão definidos, pelo que restam 16 (casos). Logo, vamos ter mais 32 casos:

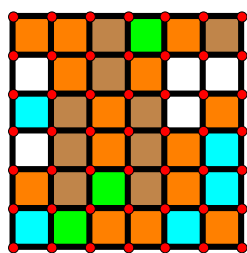
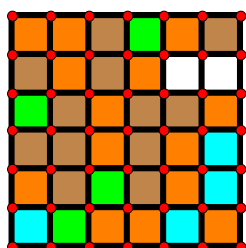
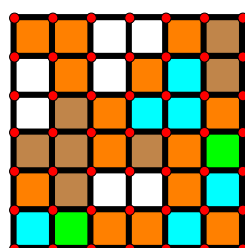
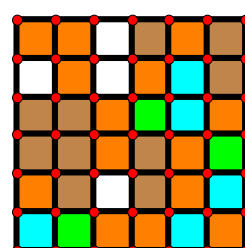
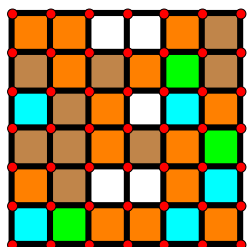
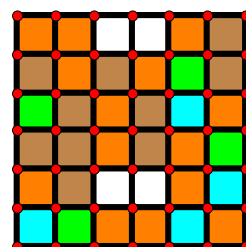
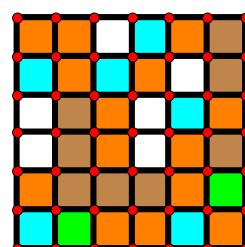
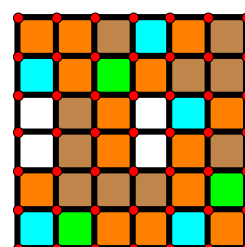
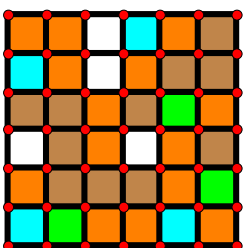
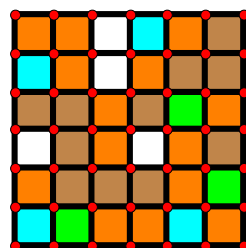
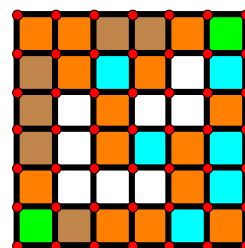
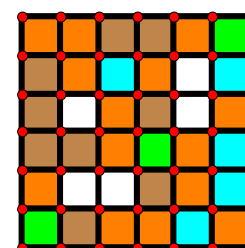
 $T_{1112111}$ *Impossível* $T_{1112121}$  $T_{1112122}$  $T_{1112211}$  $T_{1112212}$ *Duas soluções**Impossível* $T_{1122111}$ *Impossível* $T_{1122121}$ *Uma solução*

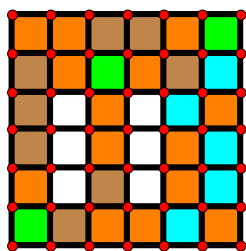
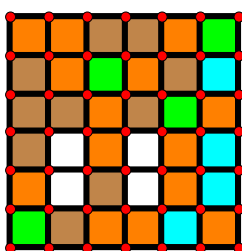
 $T_{1211121}$  $T_{1211122}$  $T_{1211221}$ *Uma solução* $T_{1212111}$ *Impossível**Impossível**Uma solução**Uma solução**Uma solução**Uma solução**Impossível*



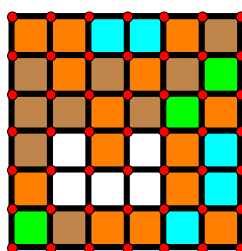
Afinal, só obtive 30 casos, pelo que existe uma asneira algures. Continuemos:



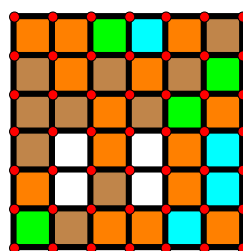
*Uma solução**Impossível* $T_{11122111}$ *Impossível**Impossível**Duas soluções* $T_{11221111}$ *Impossível**Impossível**Impossível* $T_{12111211}$ *Uma solução*

 $T_{12111221}$ 

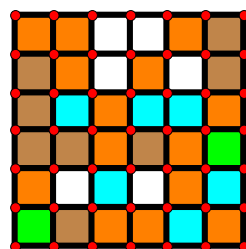
Duas soluções



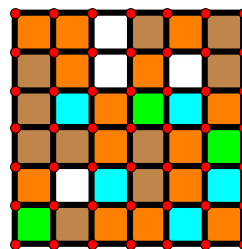
Impossível



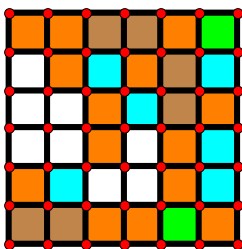
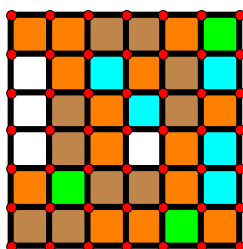
Duas soluções



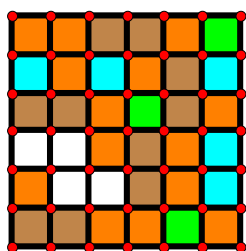
Impossível



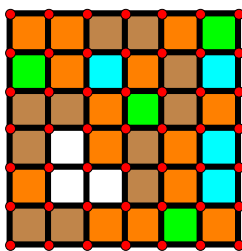
Uma solução

 $T_{21111211}$ 

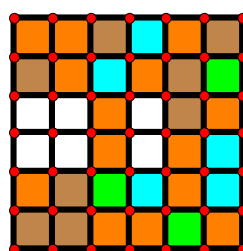
Impossível



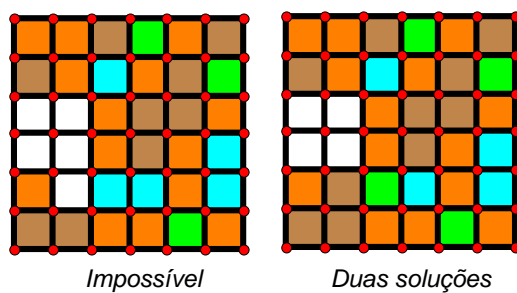
Impossível



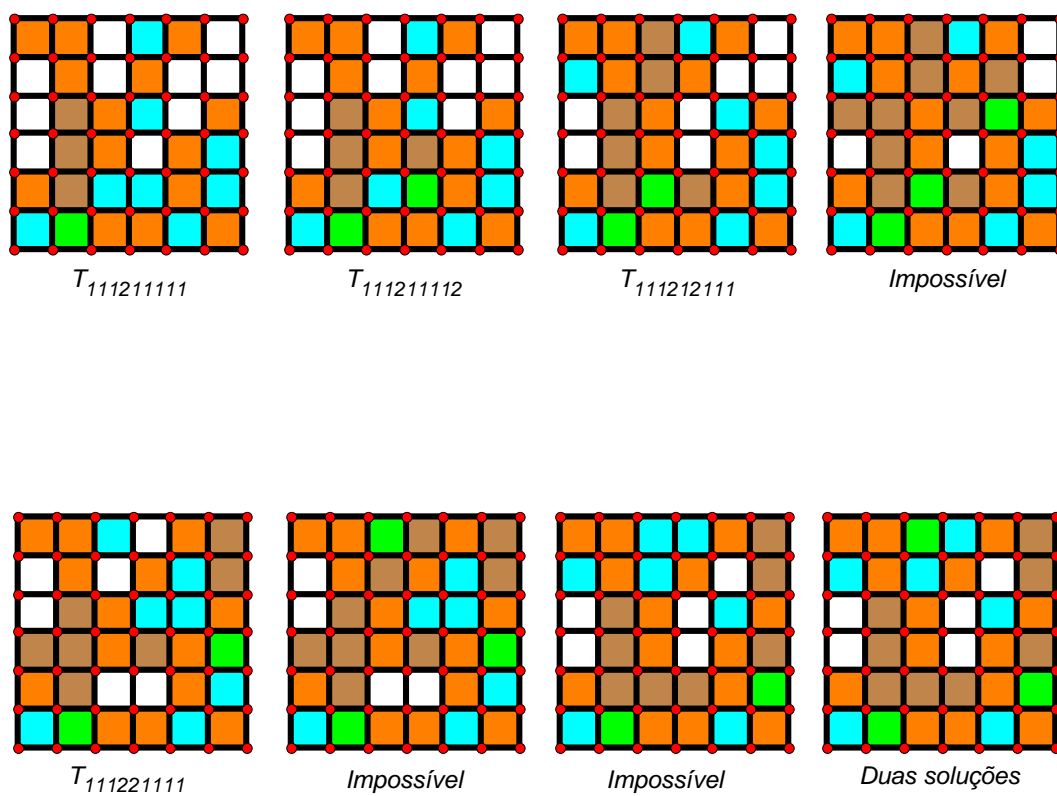
Uma solução

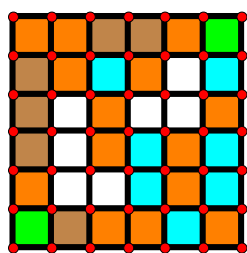
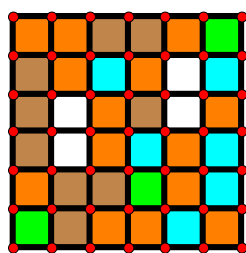
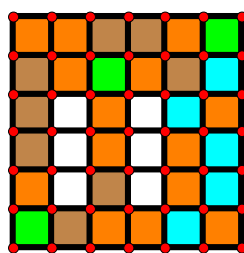
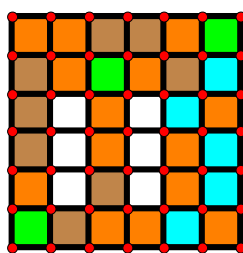
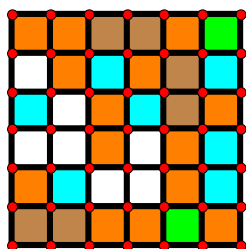
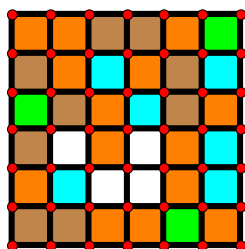
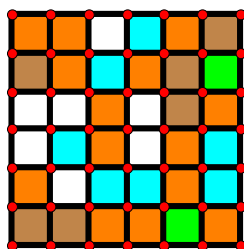
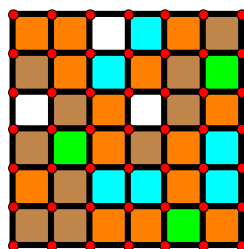
 $T_{21112111}$ 

Impossível

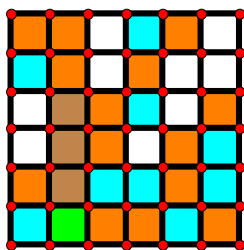
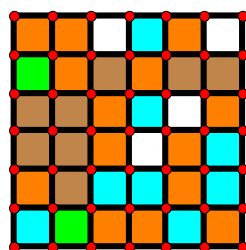
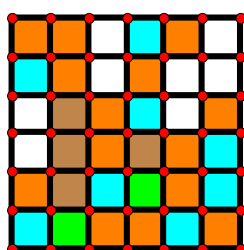
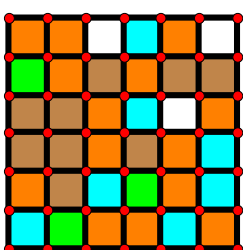


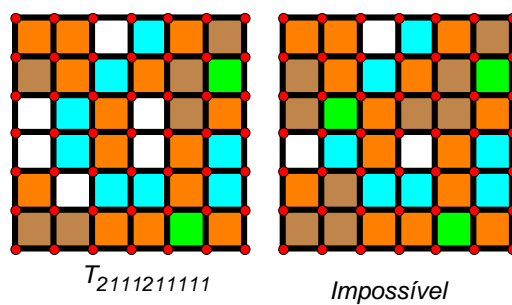
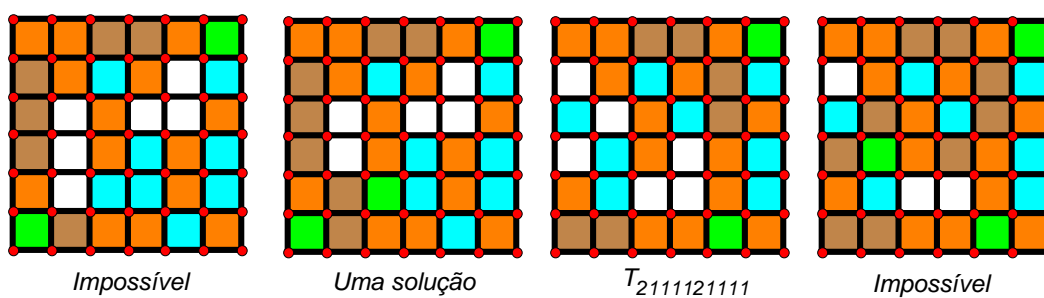
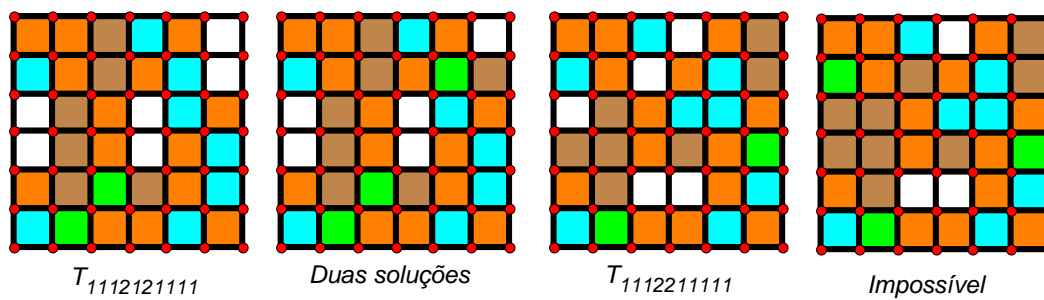
Restam oito casos que ainda não estão definidos, pelo que vamos ter 16 possibilidades:



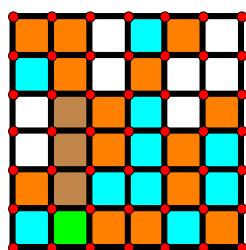
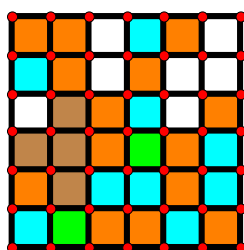
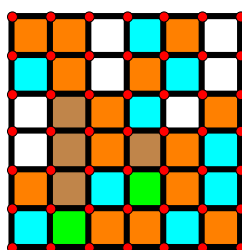
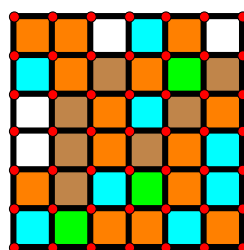
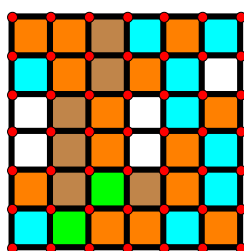
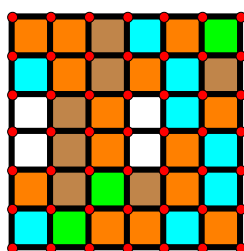
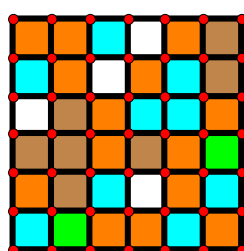
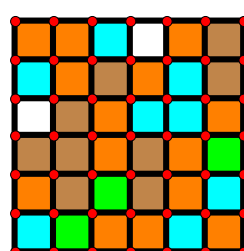
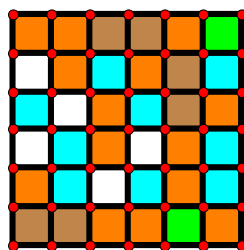
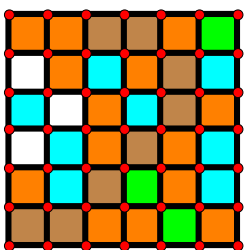
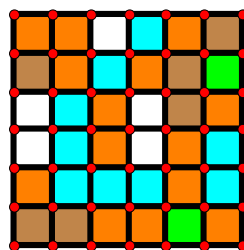
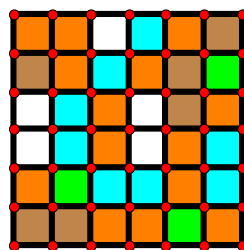
 $T_{121112111}$ *Impossível**Impossível**Impossível* $T_{211112111}$ *Impossível* $T_{211121111}$ *Impossível*

Dos 16 casos, restam sete (casos) por resolver, pelo que vamos ter 14 novos casos.

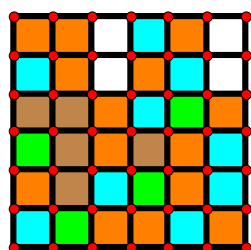
 $T_{1112111111}$ *Impossível* $T_{1112111121}$ *Impossível*



E restam seis casos por resolver, pelo que temos 12 casos:

*Impossível**Impossível* $T_{11121111211}$ *Impossível**Impossível**Impossível**Impossível**Impossível**Uma solução**Impossível**Impossível**Duas soluções*

E só temos um tabuleiro por resolver:



Duas soluções

Este último caso foi resolvido de maneira diferente: há duas células que têm de ser verdes, restando as quatro células da figura anterior, onde devem der colocados dois "verdes".

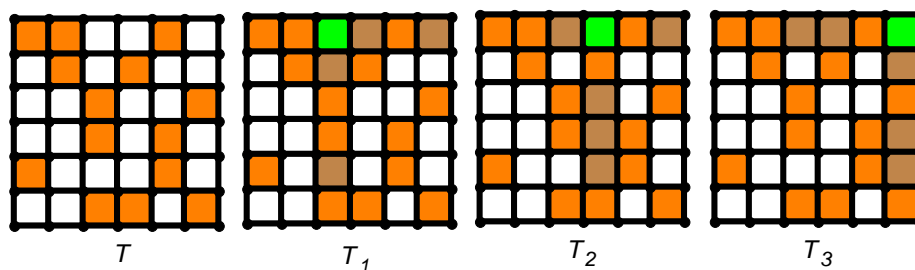
Fica a cargo do leitor a descoberta de erros e a contagem do número de soluções.

Outra resolução

Mais tarde, resolvi a mesma questão duma maneira mais interessante: Como queremos colocar uma só torre em cada linha e em cada coluna, não adianta considerar os casos em que não há nenhuma torre. Além disso, podemos ter mais opções alternativas. Na primeira linha, temos três casas livres, pelo que temos três opções: a torre fica na primeira casas, na segunda casa ou na terceira casa. É claro que podemos escolher outra linha ou podemos escolher uma coluna qualquer.

Registe-se o facto desta segunda maneira não poder ser utilizada para encontrar o polinómio-torre, embora possamos fazer uma ligeira modificação para quepossamos encontrar o polinómio-torre. Basta considerarmos mais uma opção: não ficar nenhuma torre na linha (ou na coluna) considerada.

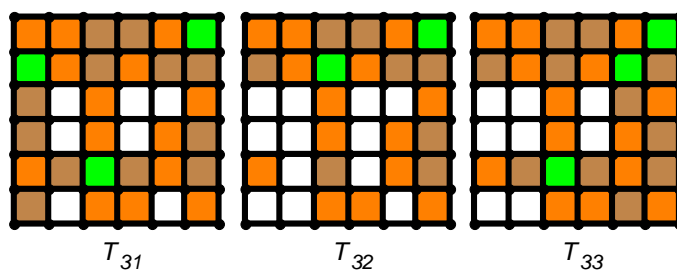
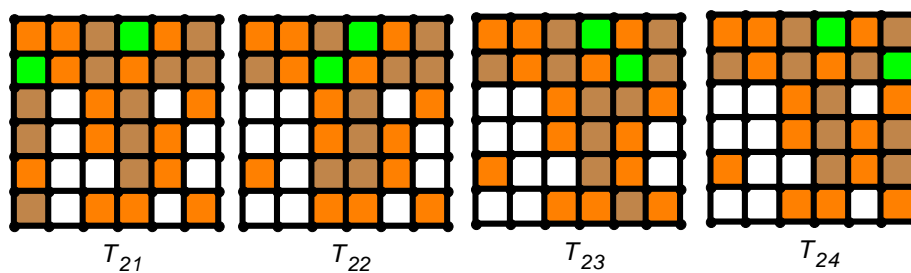
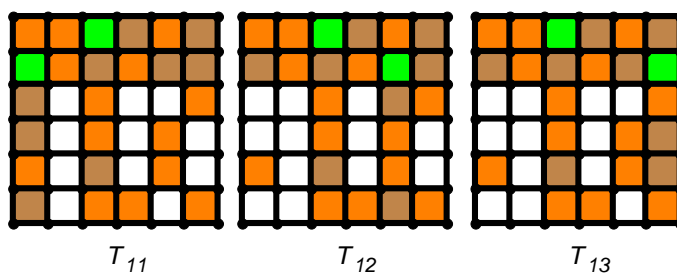
1º Passo



Como podemos ver, há três opções para a colocação duma torre na primeira linha.

2º Passo

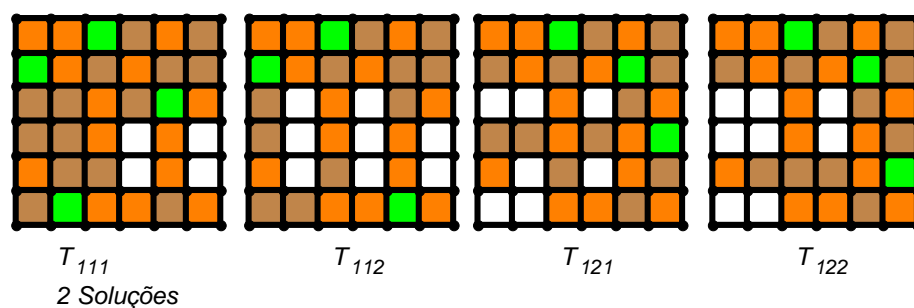
Neste segundo passo, a cada situação do primeiro passo vai corresponder um certo número de opções.



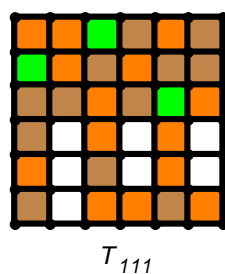
Como podemos ver, o número de opções não tem que ser sempre igual: isso vai depender de qual a linha (ou coluna) que utilizamos.

Neste segundo passo, ainda não obtivemos nenhuma solução.

3º Passo

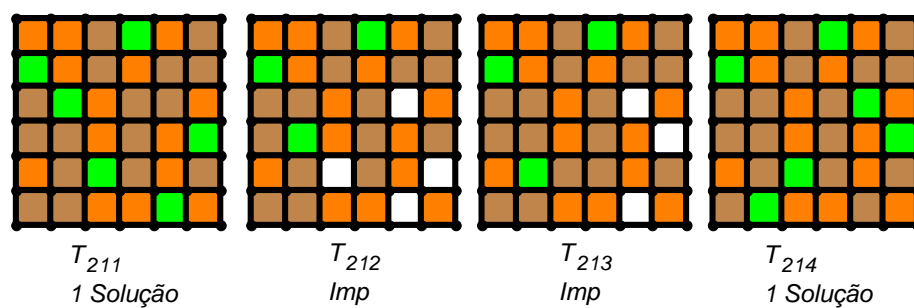


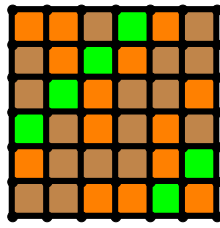
Antes de continuarmos, vamos fazer uma observação importante sobre T_{111} : Na realidade, a situação que obtemos é a seguinte:



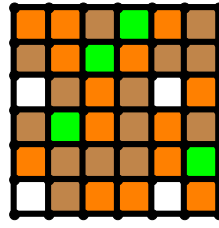
Mas, considerando a última linha do tabuleiro, vemos que só existe uma casa livre. Então, nessa casa, tem de ficar uma torre (casa verde). Então, não podemos colocar mais nenhuma torre na segunda coluna, pelo que se obtém a situação apresentada mais acima. Outras situações análogas vão ocorrer, sem fazermos menção ao facto.

Continuemos:

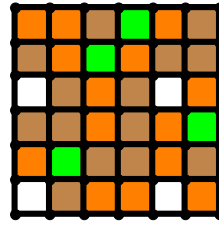




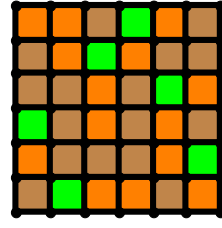
T_{221}
1 Solução



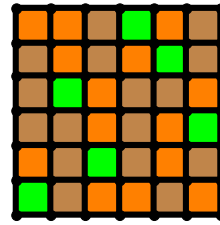
T_{222}
2 Soluções



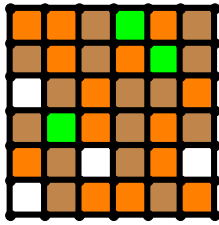
T_{223}
2 Soluções



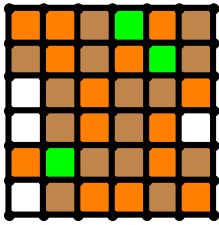
T_{224}
1 Solução



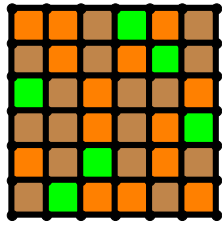
T_{231}
1 Solução



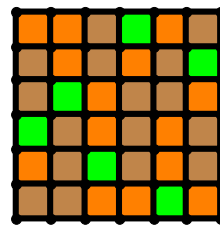
T_{232}
Imp



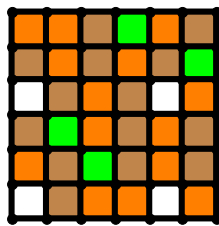
T_{233}
Imp



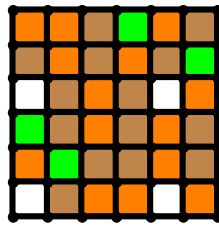
T_{234}
1 Solução



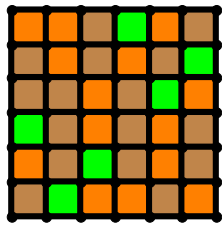
T_{241}
1 Solução



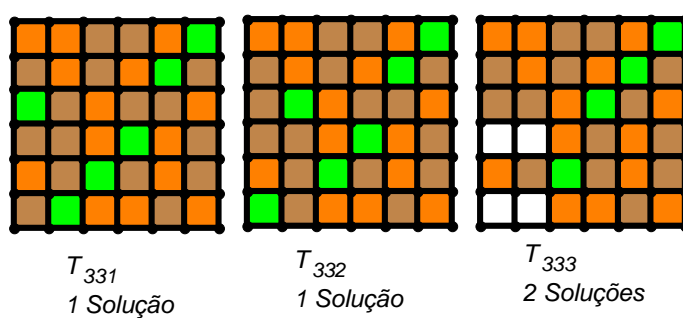
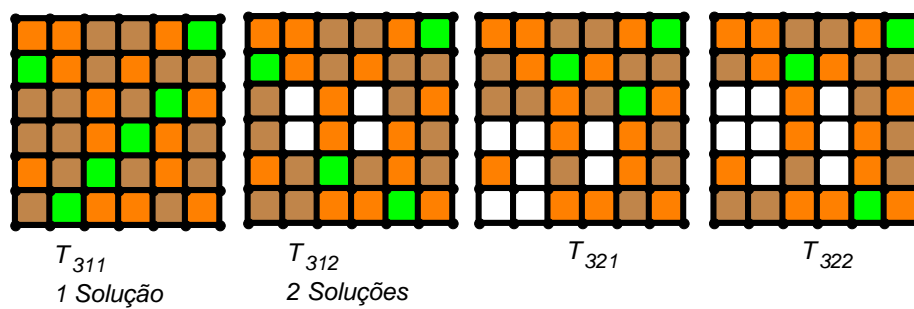
T_{242}
2 Soluções



T_{243}
2 Soluções

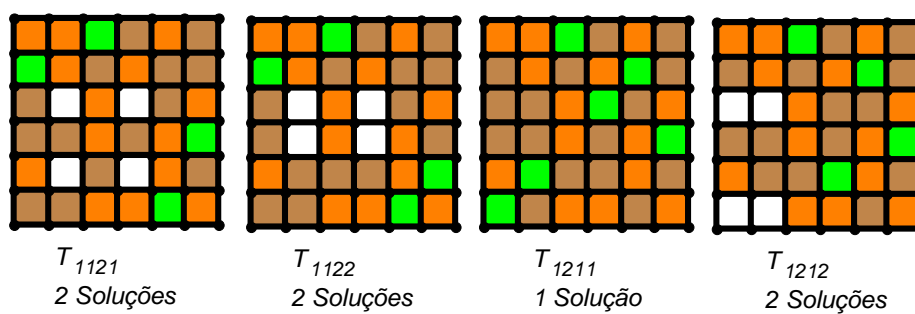


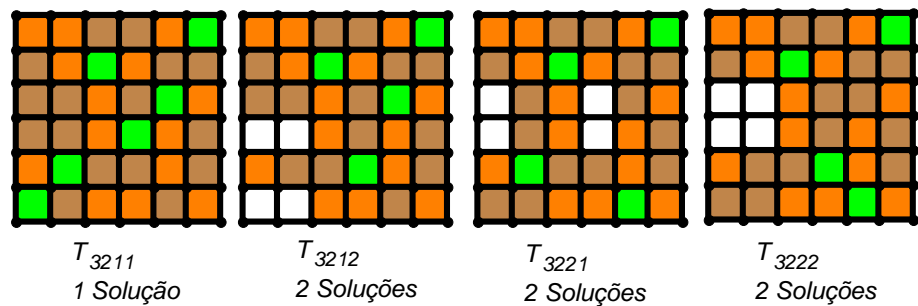
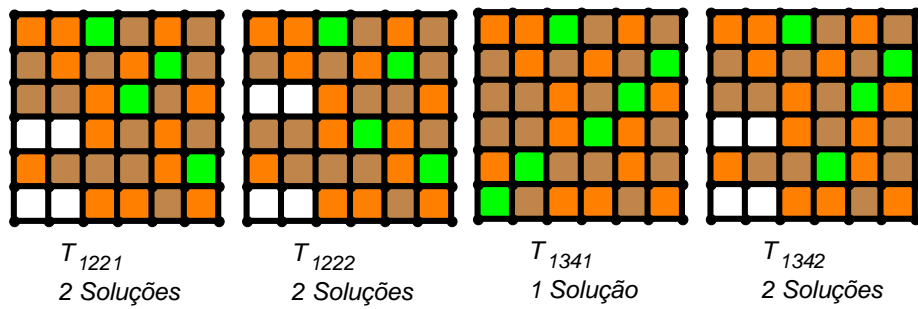
T_{244}
1 Solução



Se não me enganei na contagem, temos 29 soluções, neste terceiro passo. E há seis tabuleiros que avançam para o quarto passo.

4º Passo



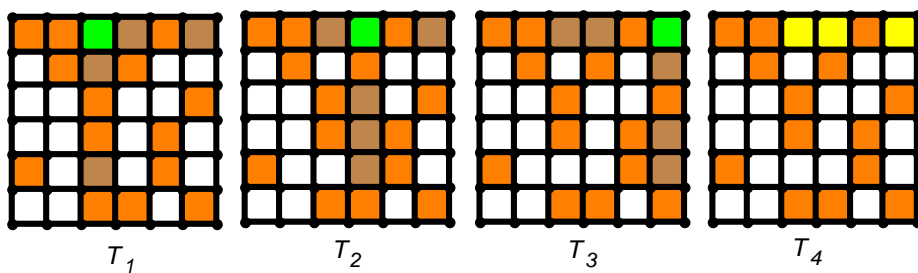


Neste quarto passo, obtivemos 21 soluções, pelo que o número total de soluções é 50.

Observação

Se pretendermos encontrar o polinómio-torre associado ao tabuleiro inicial (com as restrições impostas), podemos seguir o seguinte algoritmo:

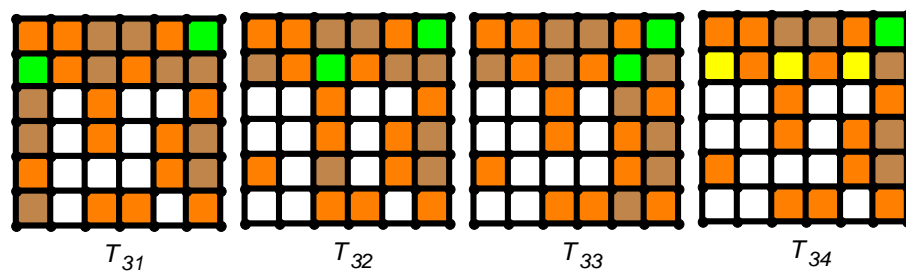
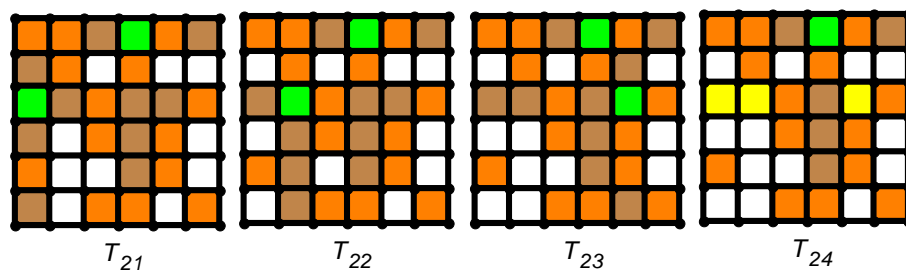
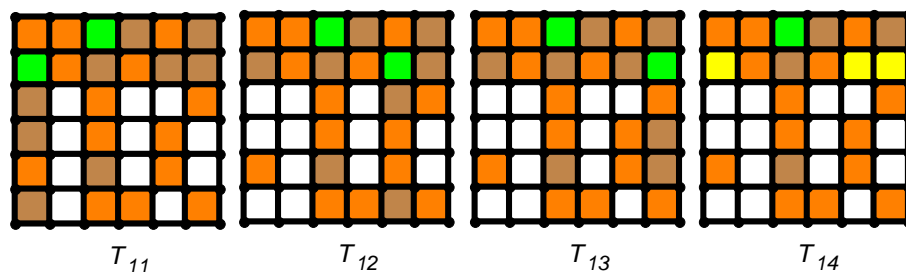
1º Passo

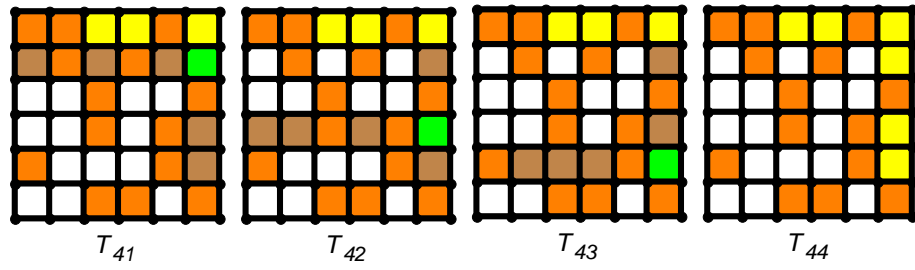


2º Passo

No segundo passo, cada um dos quatro tabuleiros anteriores vai originar um determinado número de sub-tabuleiros (opções), consoante a fila que utilizemos. Note-se que o número de opções é igual

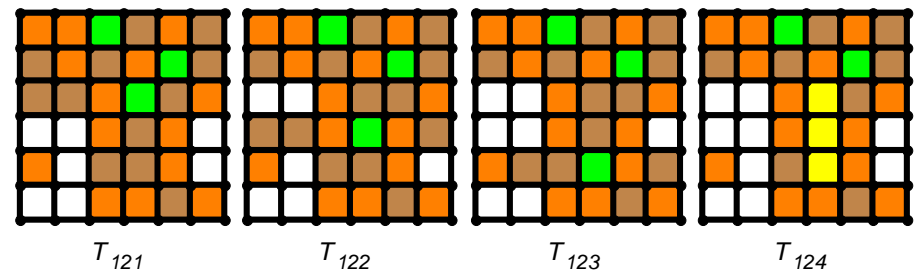
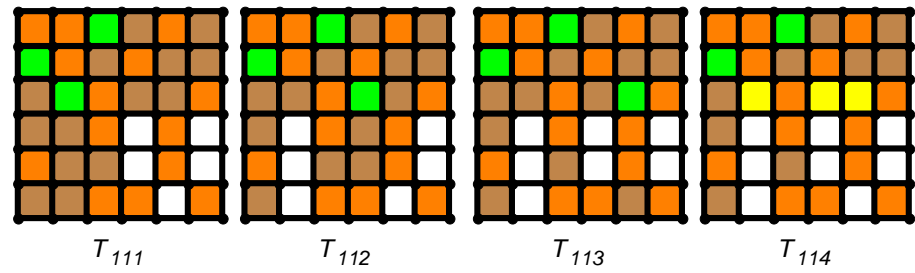
ao número de casas livres da fila considerada somado com 1 (corresponde à opção de não colocar nenhuma torre). Assim, se considerarmos a primeira coluna de T_1 , vamos ter 5 situações, enquanto que, se utilizarmos a segunda linha, teremos 4 situações.

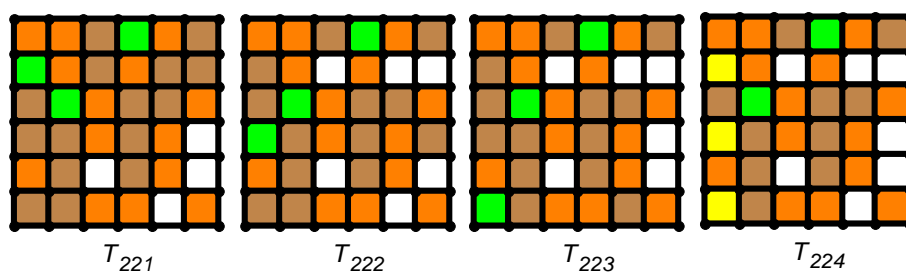
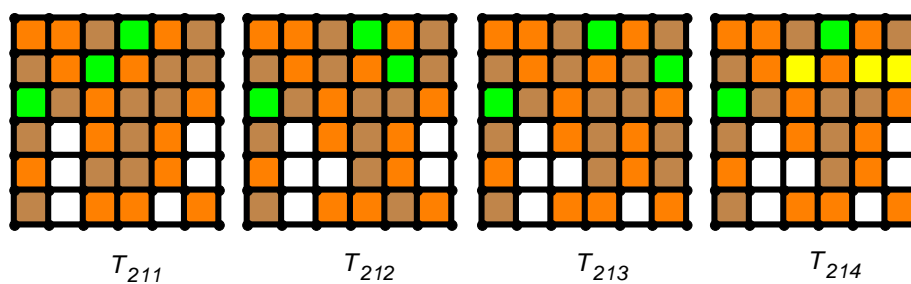
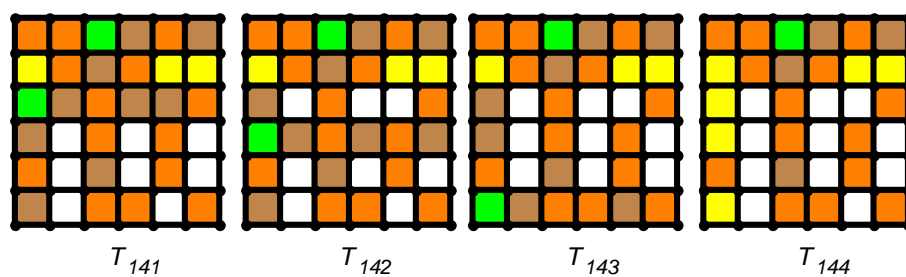
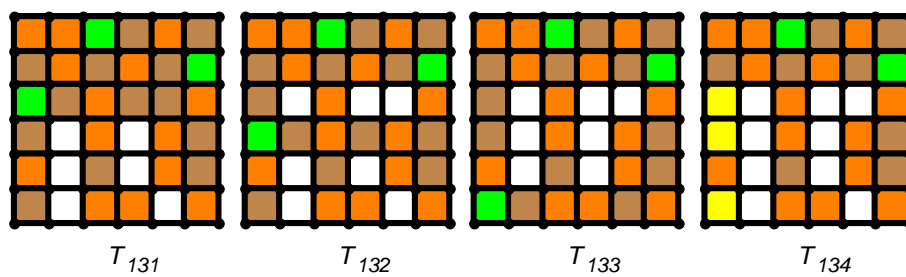


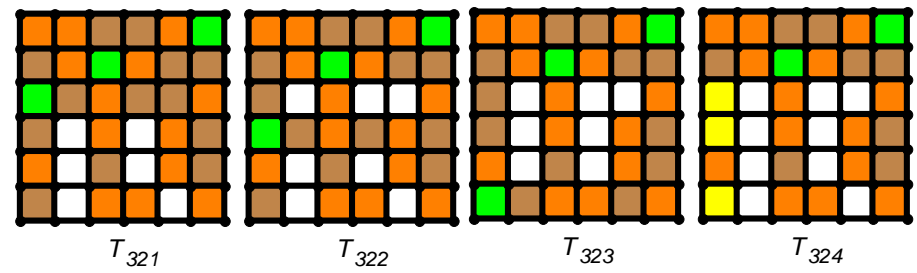
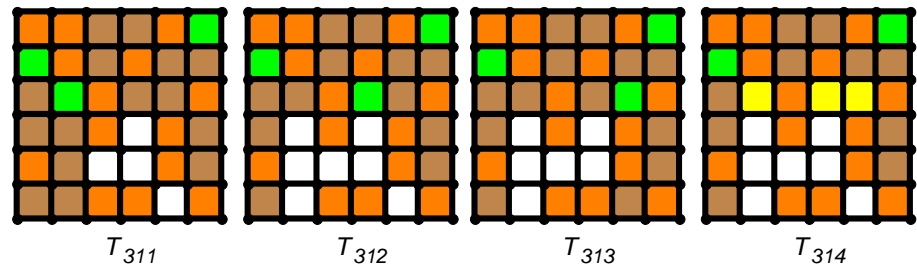
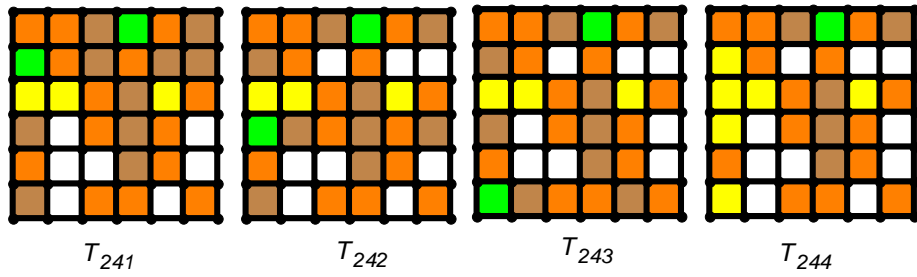
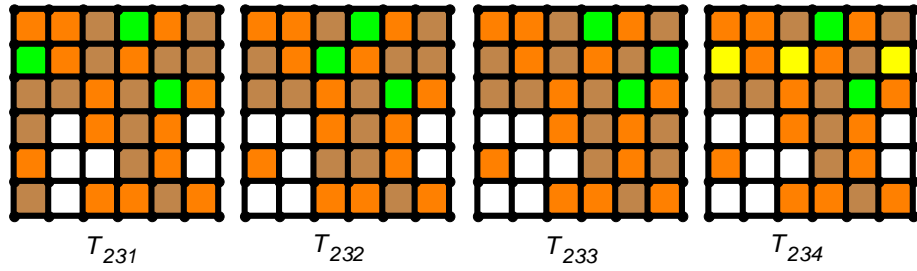


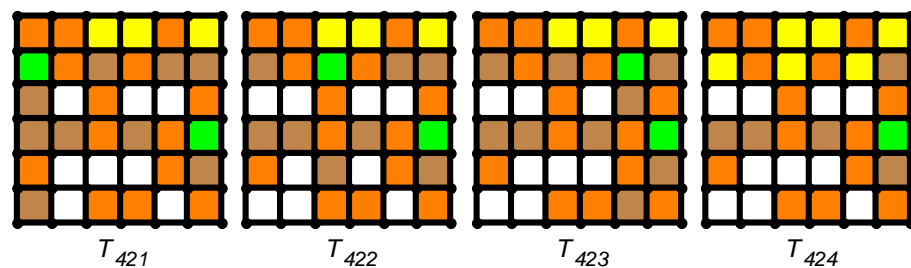
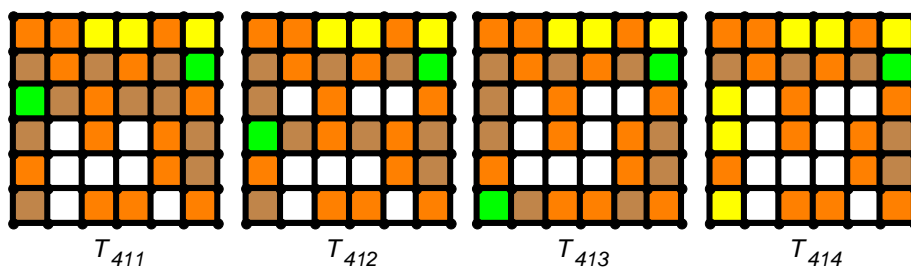
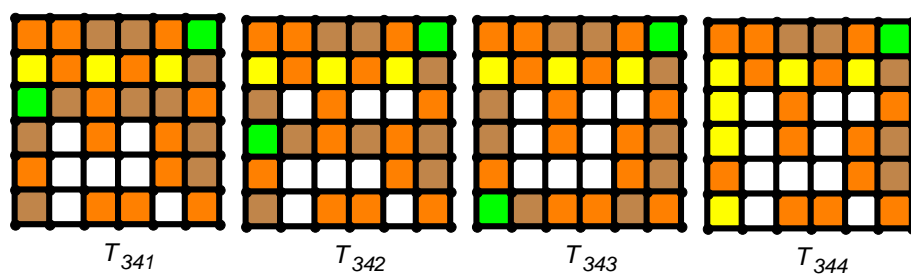
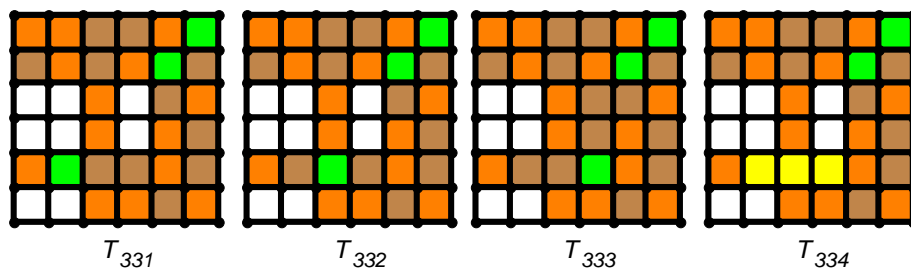
No próximo passo, se cada tabuleiro originar quatro, teremos 64 tabuleiros.

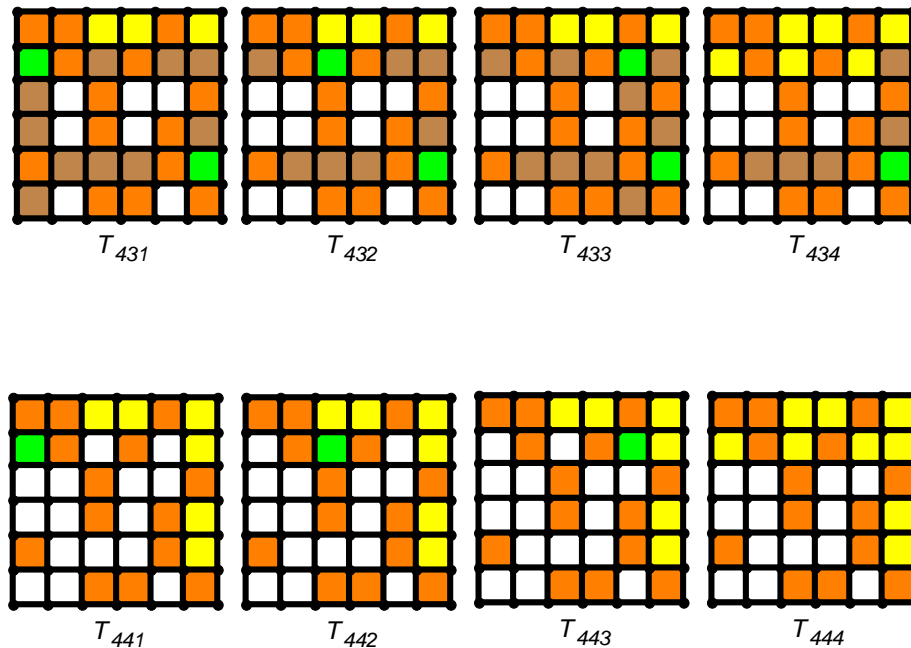
3º Passo











Neste ponto, podemos encontrar o polinómio-torre associado a alguns tabuleiros, sem passar ao próximo passo.

Observe-se que vamos considerar o polinómio-torre, incluindo as torres já colocadas.

Polinómios-torres deste passo:

Tab	Polinómio-torre
T_{111}	$x^3(1+x)(1+4x+2x^2) = x^3 + x^4 + 6x^5 + 2x^6$
T_{221}	$x^3(1+x)(1+3x+x^2) = x^3 + 4x^4 + 4x^5 + x^6$
T_{311}	$x^3(1+x)(1+3x+x^2) = x^3 + 4x^4 + 4x^5 + x^6$
T_{333}	$x^3(1+6x+6x^2) = x^3 + 6x^4 + 6x^5$

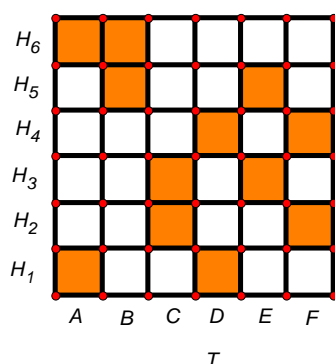
O primeiro caso é simples, pois temos dois sub-tabuleiros disjuntos.

É possível calcular muitos mais polinómios-torres, mas a análise dá algum trabalho, pelo que vamos seguir para o próximo passo.

4º Passo

Exemplo 710 Numa Escola, há seis professores duma certa disciplina, tendo sido elaborados seis horários, um para cada professor. Os professores podiam manifestar-se sobre as suas preferências, mas de forma negativa, ou seja, podiam dizer quais os horários que não queriam, num máximo de 3. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a distribuição do serviço docente, supondo que

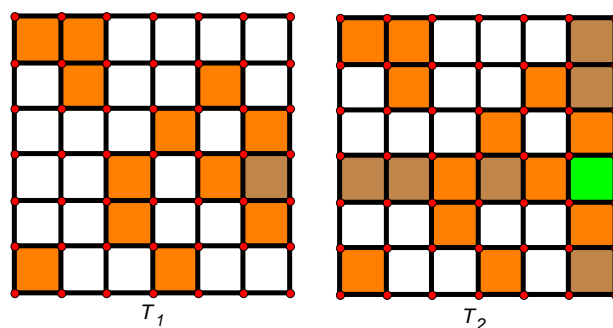
temos o seguinte quadro?



Resolução

Vamos colorir a verde as células onde temos uma Torre e a castanho claro, as células onde não vamos colocar nenhuma Torre, sendo que a cor laranja é reservada às condições iniciais (células sem Torre, por opção dos professores). No que se segue, vamos omitir os professores e os horários, para não complicar as figuras.

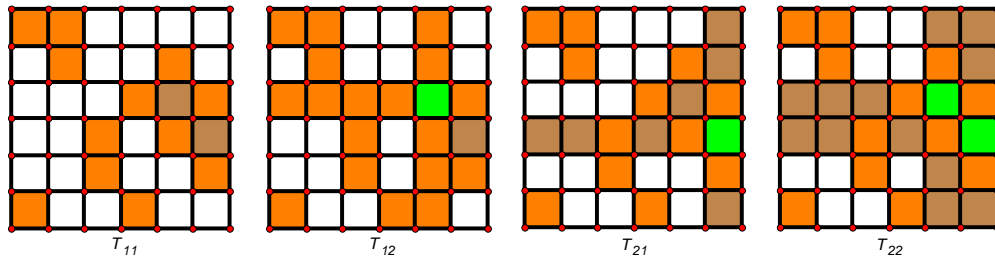
Em cada tabuleiro (quadro), vamos escolher uma célula e tomar as duas opções acima referidas. Então, o tabuleiro T , da figura anterior, dá origem a dois (sub)tabuleiros: T_1 e T_2 :



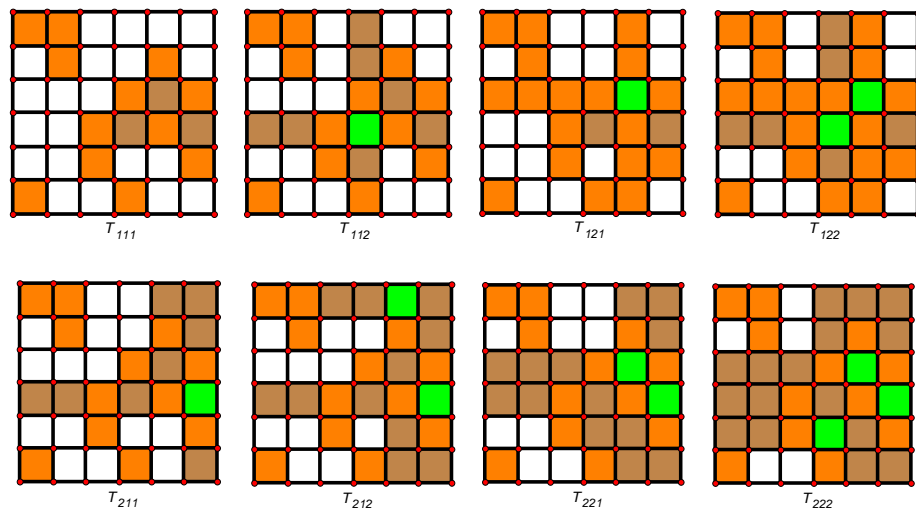
A célula verde indica que o professor F fica com o Horário 3. Por isso, F já não recebe mais nenhum horário e nenhum outro professor recebe o Horário 3.

Em T_1 , sabemos que o professor F não vai receber o Horário 3. Se pensarmos um pouco, percebemos que esta questão está intimamente ligada aos movimentos duma torre de xadrez.

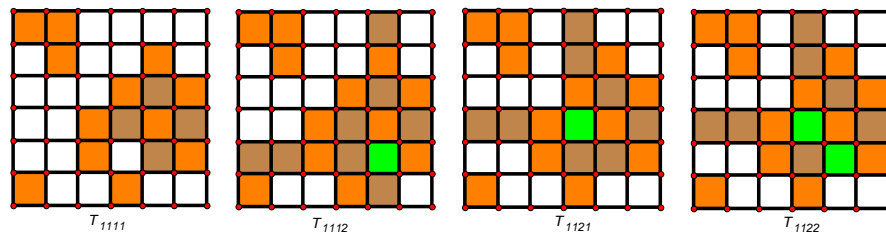
Voltando à questão, temos que cada um dos tabuleiros anteriores origina dois (sub)tabuleiros:

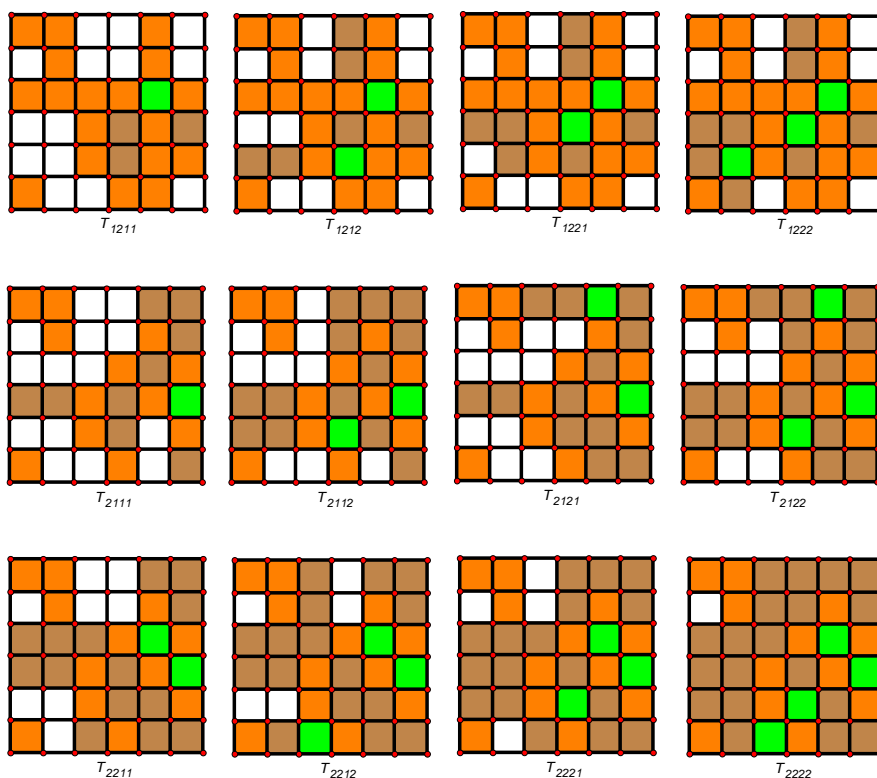


Note-se que, em T_{22} , já temos dois horários atribuídos, enquanto que, em T_{11} , não temos nenhum. No próximo passo, o número de tabuleiros passa para 8.



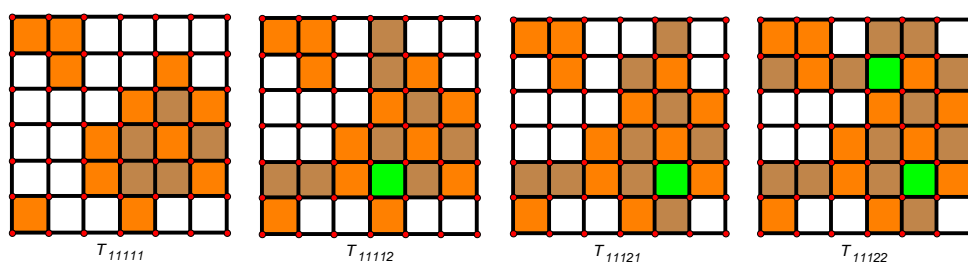
Note-se que, para atribuir os seis horários; já podemos completar T_{222} , mas iremos continuar sem ligar a esse facto. Note-se, ainda, que o número de vezes que 2 aparece no índice é o número de horários já atribuídos. É claro, que vamos passar a ter 16 tabuleiros:

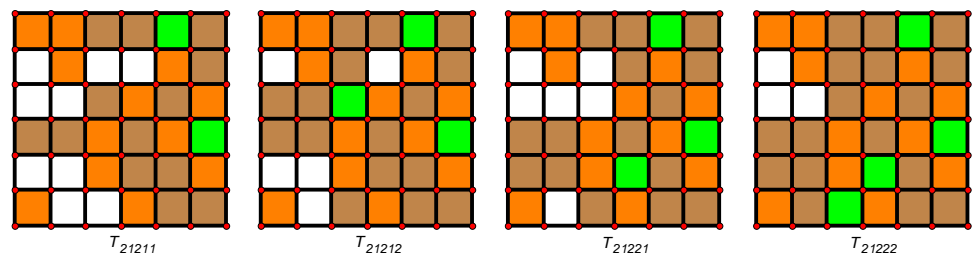
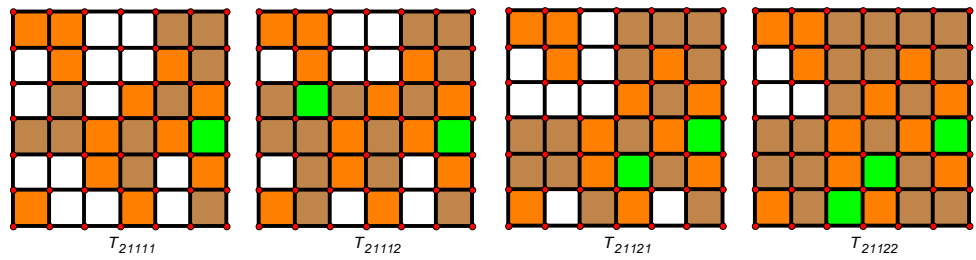
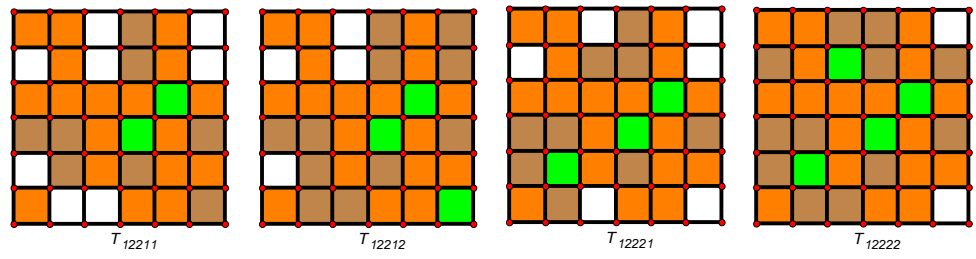
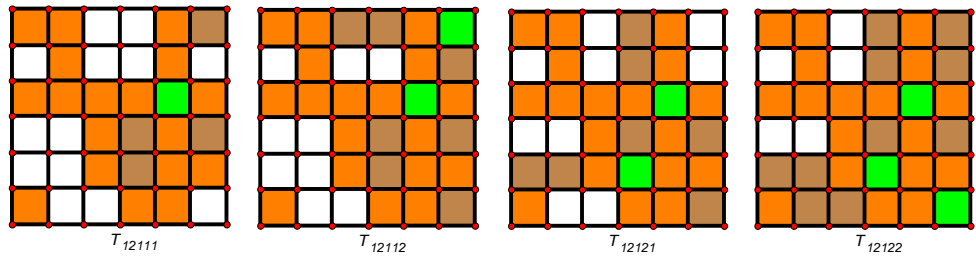
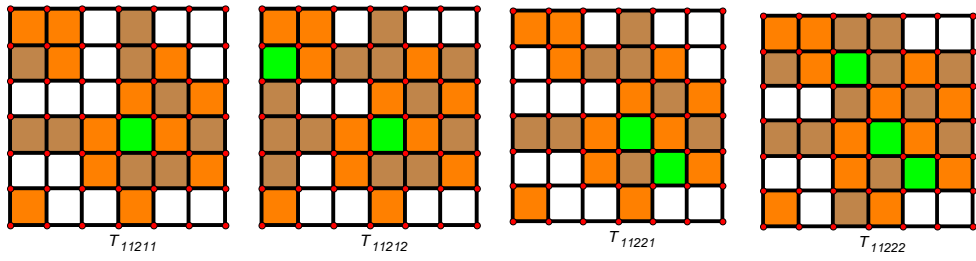


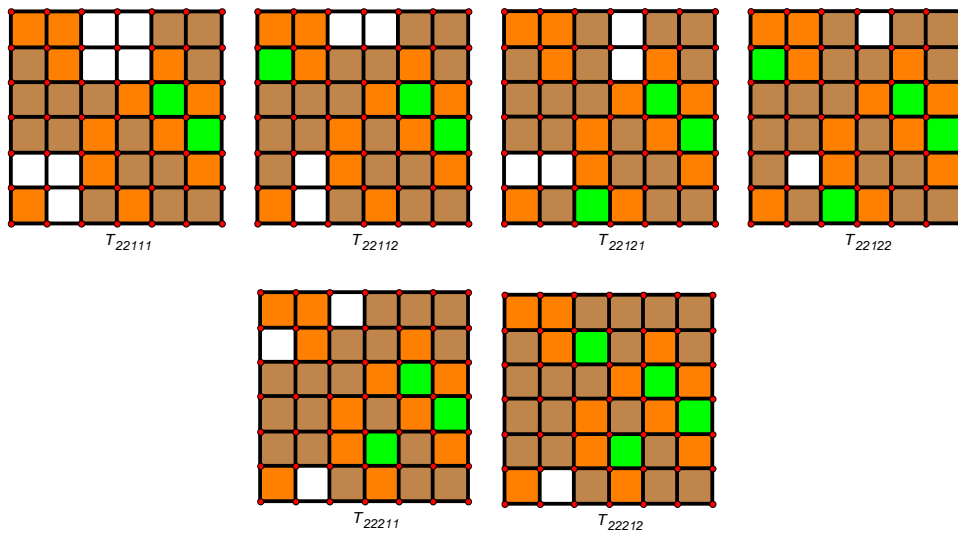


Note-se que o tabuleiro T_{2222} não serve para distribuir os seis horários, pelo que o polinómio correspondente não tem termo de 6º grau. É de referir que há dois polinómios que correspondem a cada sub-tabuleiro. Assim, por exemplo, $p(T_{2222}) = 1 + x$, mas o polinómio que nos interessa para o cálculo de $p(T)$ é $x^4(1 + x) = x^4 + x^5$.

Dos 16 tabuleiros anteriores, já temos um definitivo (embora possa originar 2): trata-se de T_{2222} . Então, no próximo passo, teremos 30 tabuleiros.







Atenção: não esquecer o tabuleiro T_{2222} .

Nos tabuleiros anteriores, há muitos em que já podemos calcular o polinómio torre associado. Em alguns deles, temos sub-tabuleiros disjuntos, pelo que multiplicamos os polinómios associados a esses sub-tabuleiros.

Relativamente ao problema inicial (a distribuição dos horários pelos professores), há muitos tabuleiros que não conduzem a nenhuma solução, pelo que poderiam ser eliminados. No entanto, se quisermos encontrar o polinómio torre associado ao tabuleiro dado, temos de contar todos os casos.

Vamos parar por aqui, no que respeita a imagens de tabuleiros, pois esperamos que esta questão tenha suficientemente clara para os eventuais leitores.

Vejam os alguns polinómios torres:

$$p(T_{22212}) = 1 + x;$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^4(1 + x) = x^5 + x^4$$

Note-se que temos duas maneiras de controlarmos o expoente inicial, neste caso, o expoente de x^4 . Há quatro células verdes e 2 aparece quatro vezes, no índice do tabuleiro.

$$\text{Continuemos: } p(T_{22211}) = (1 + x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^3(1 + x)^3 = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3$$

$$\text{Agora, } p(T_{22121}) = (1 + 2x)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^3(1 + 2x)^2 = 4x^5 + 4x^4 + x^3$$

$$\text{E } p(T_{22122}) = (1 + x)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^4(1 + x)^2 = x^6 + 2x^5 + x^4$$

$$\text{Mais dois exemplos: } p(T_{22111}) = (1 + 3x + x^2)(1 + 4x + 2x^2) = 2x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 7x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^2(2x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 7x + 1) = 2x^6 + 10x^5 + 15x^4 + 7x^3 + x^2$$

$$\text{E, por fim, } p(T_{22112}) = (1 + 2x)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^3(1 + 2x)^2 = 4x^5 + 4x^4 + x^3$$

Observação

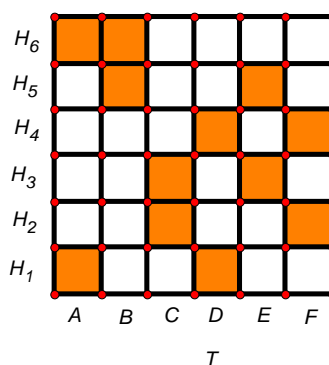
O método de resolução apresentado tem uma dificuldade: um dos dois sub-tabuleiros que são obtidos só tem menos uma célula colorida que o tabuleiro que lhes dão origem. Isso significa que vamos ter sequências longas (com muitos 1 no índice). Podemos arranjar um pequeno artifício para evitar índices muito longos: substituir, no índice, 2 por zero e escrever o número resultante na base hexadecimal (supondo que o índice resultante é um número escrito na base 2). Para quem não saiba trabalhar na base hexadecimal, pode escrever o número na base 10. Atenção, será preciso definir o comprimento do número, pois pode haver zeros no início.

Outra maneira é considerar que o índice é um número escrito na base 3 e passá-lo para a base 9. Neste caso, o número de dígitos passa para metade (no caso de haver um número par de dígitos) e pouco mais de metade (no caso ímpar).

Assim, em vez de escrevermos T_{11111} , podemos escrever T_{144} (onde 144 está escrito na base 9). Para descodificar, basta passar cada dígito para a base 3. No caso de T_{144} , como $4_9 = 11_3$. Os índices 3 e 9 indicam a base.

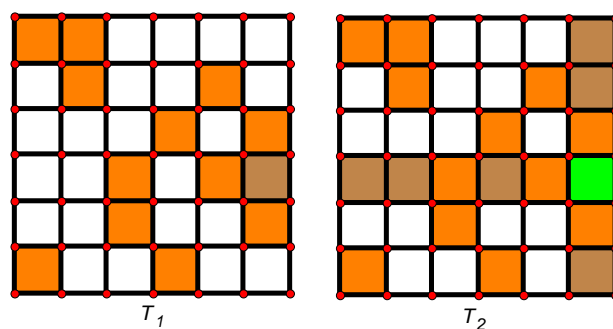
Note-se que nem precisamos de escrever o índice, se seguirmos o processo anteriormente descrito (utilização de três cores, ou mesmo duas, se utilizarmos a cor laranja, em vez do castanho claro).

Situação inicial: Tabuleiro T com as opções dos professores.



Vamos colocar a verde as células onde temos uma Torre e a castanho claro, as células onde não vamos colocar nenhuma Torre, sendo que a cor laranja é reservada às condições iniciais (células sem Torre, por opção dos professores). No que se segue, vamos omitir os professores e os horários, para não complicar as figuras.

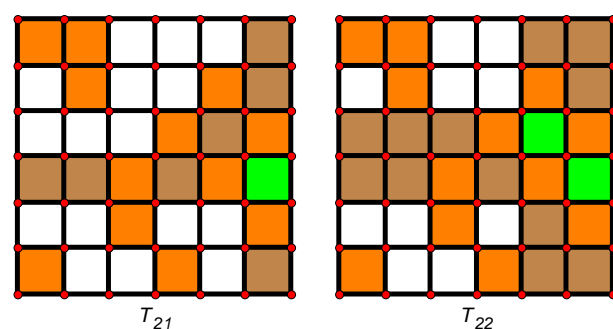
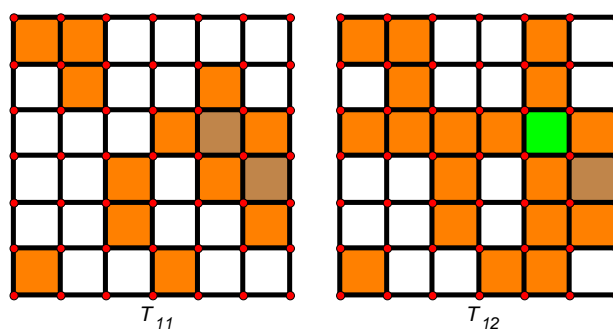
Em cada tabuleiro (quadro), vamos escolher uma célula e tomar as duas opções acima referidas. Então, o tabuleiro T , da figura anterior, dá origem a dois (sub)tabuleiros: T_1 e T_2 :



A célula verde indica que o professor F fica com o Horário 3. Por isso, F já não recebe mais nenhum horário e nenhum outro professor recebe o Horário 3.

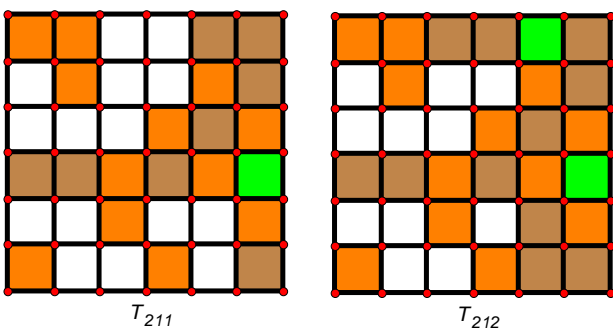
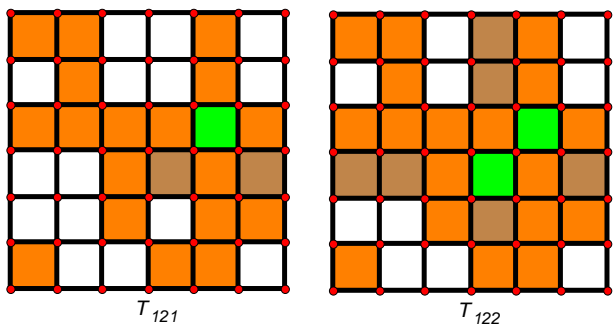
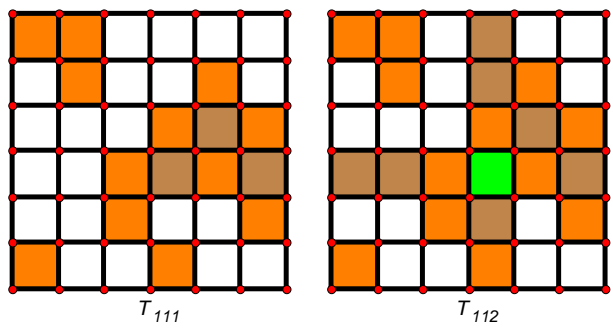
Em T_1 , sabemos que o professor F não vai receber o Horário 3.

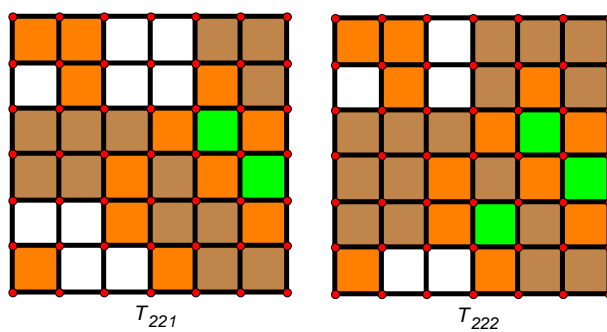
Agora, cada um dos tabuleiros anteriores origina dois:



Em T_{22} , já temos dois horários atribuídos.

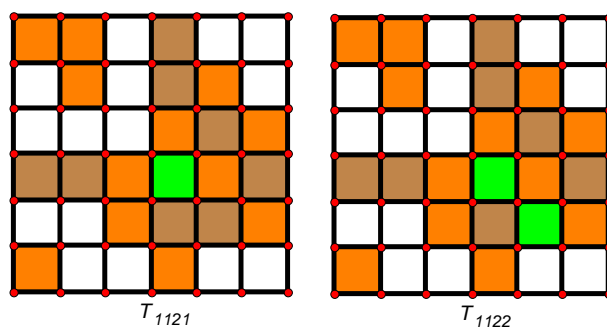
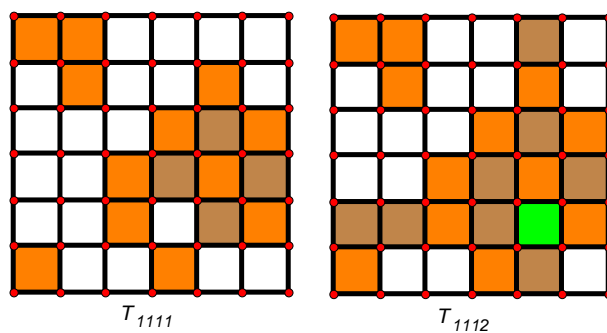
No próximo passo, o número de tabuleiros passa para 8.

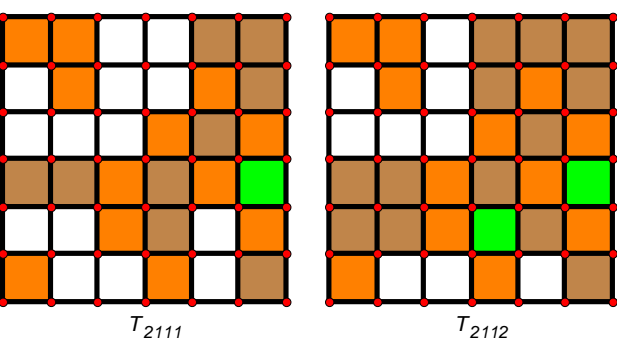
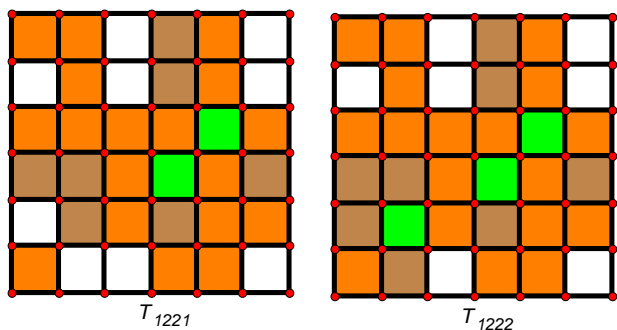
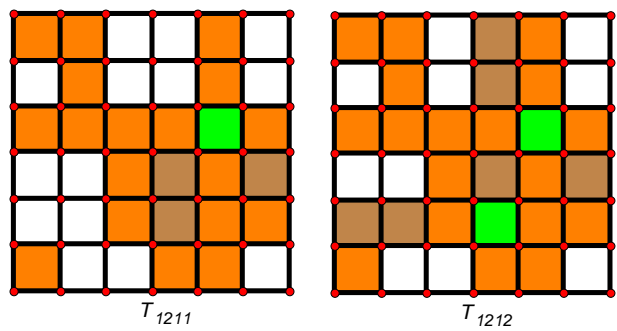


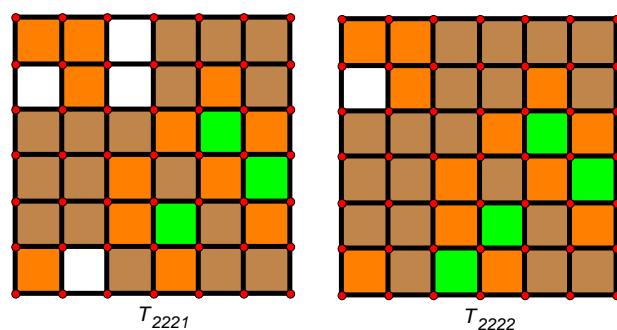
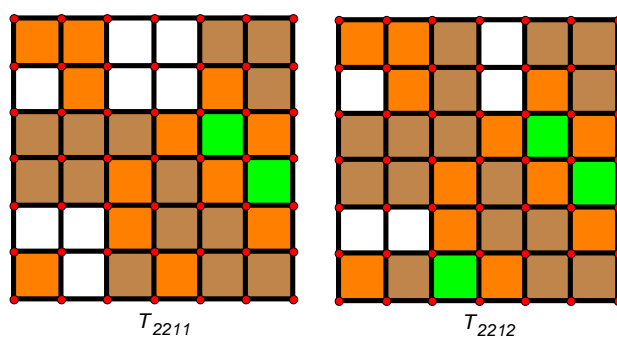
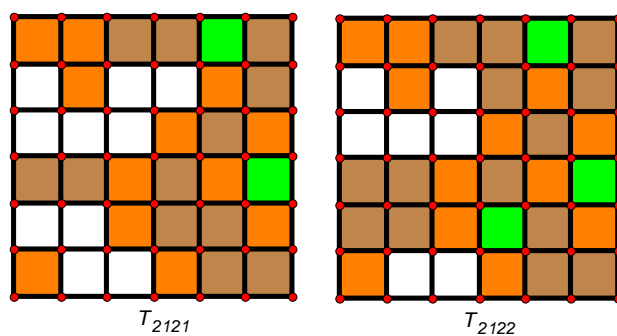


Note-se que já podemos completar T_{222} , mas iremos continuar sem ligar a esse facto. Note-se, ainda, que o número de vezes que 2 aparece no índice é o número de horários já atribuídos.

É claro, que vamos passar a ter 16 tabuleiros:

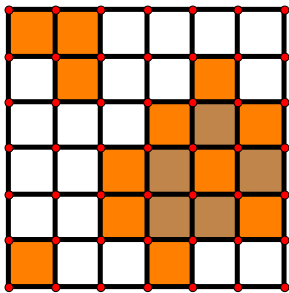




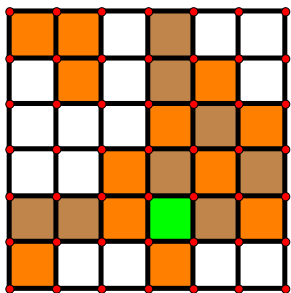


Note-se que o tabuleiro T_{2222} não serve para distribuir os seis horários, pelo que o polinómio correspondente não tem termo de 6º grau. É de referir que há dois polinómios que correspondem a cada sub-tabuleiro. Assim, por exemplo, $p(T_{2222}) = 1 + x$, mas o polinómio que nos interessa para o cálculo de $p(T)$ é $x^4(1 + x) = x^4 + x^5$.

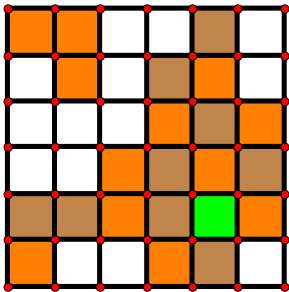
Dos 16 tabuleiros anteriores, já temos um definitivo (embora possa originar 2): trata-se de T_{2222} . Então, no próximo passo, teremos 30 tabuleiros.



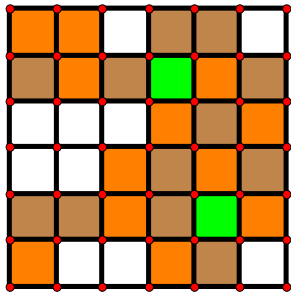
T_{11111}



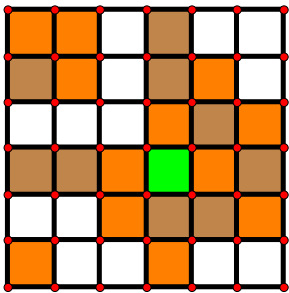
T_{11112}



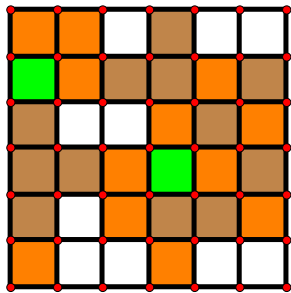
T_{11121}



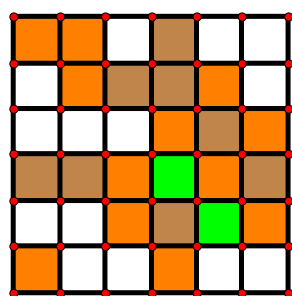
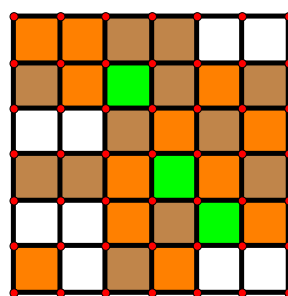
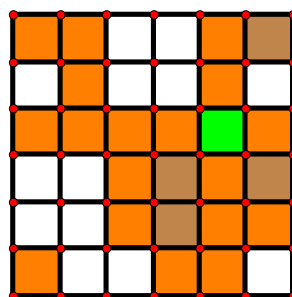
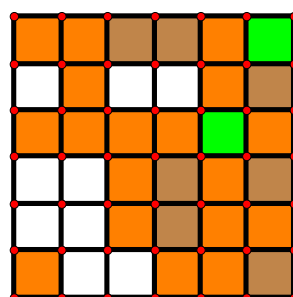
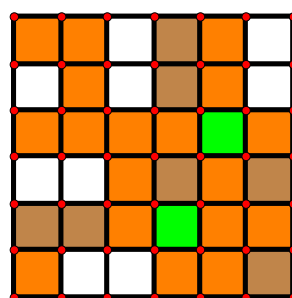
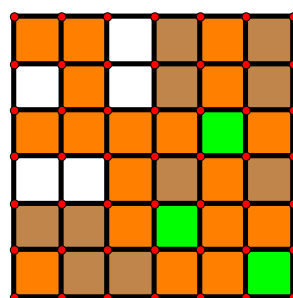
T_{11122}

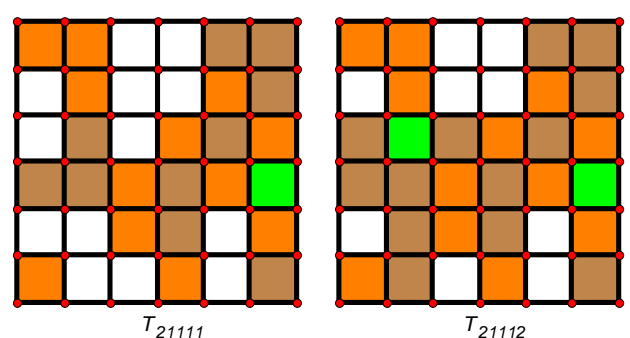
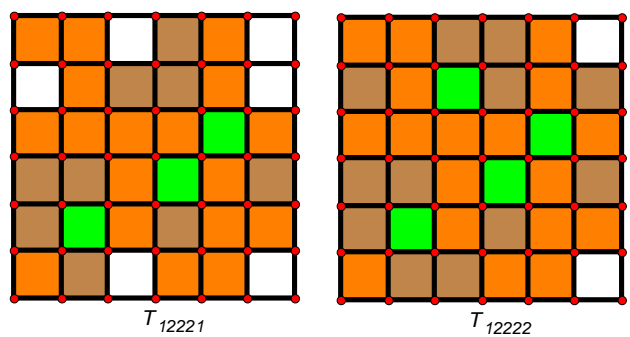
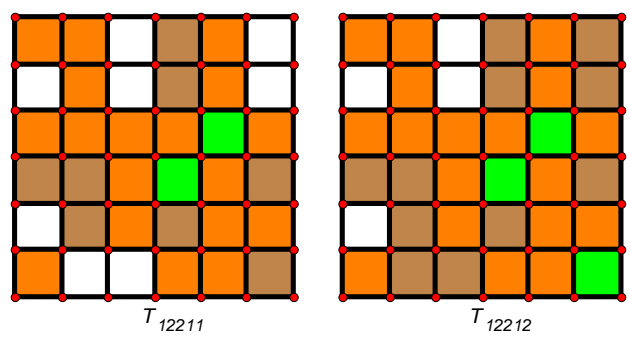


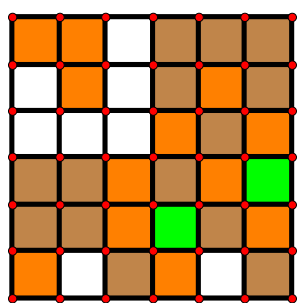
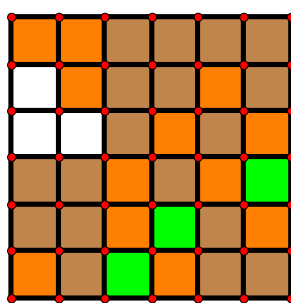
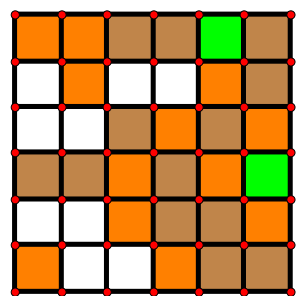
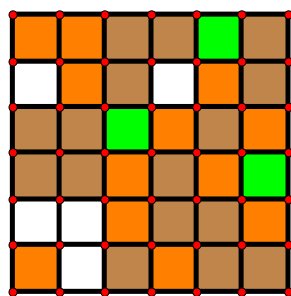
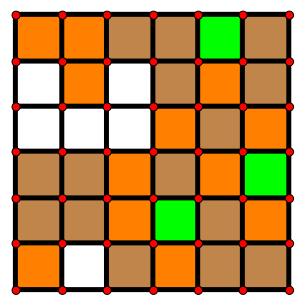
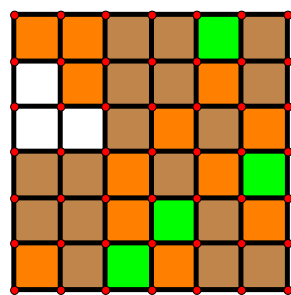
T_{11211}

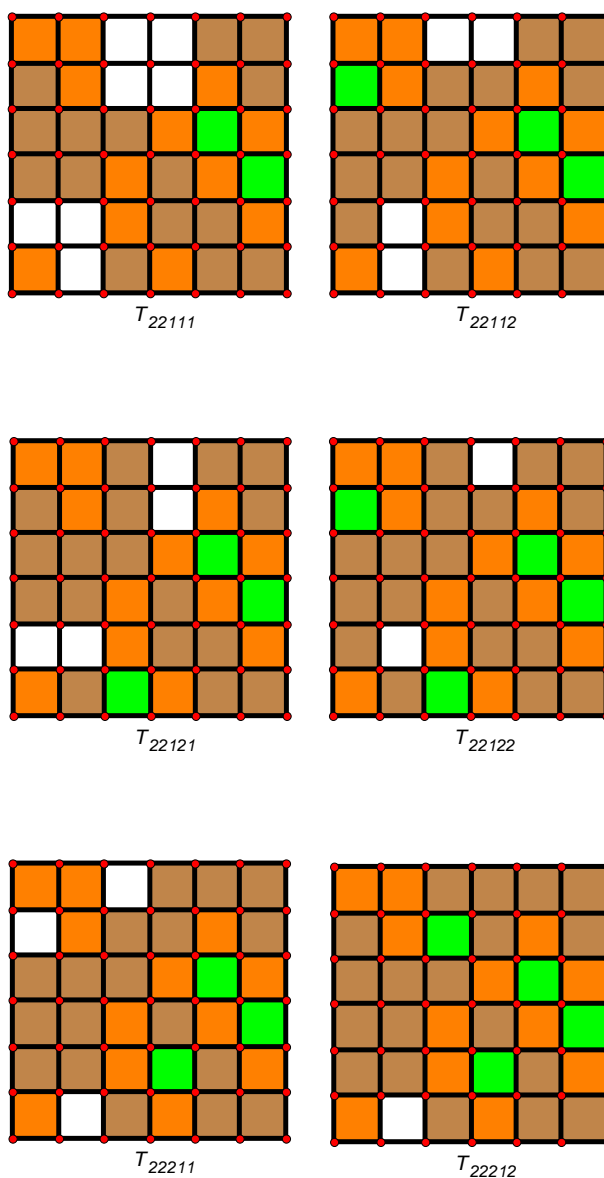


T_{11212}

 T_{11221}  T_{11222}  T_{12111}  T_{12112}  T_{12121}  T_{12122}



 T_{21121}  T_{21122}  T_{21211}  T_{21212}  T_{21221}  T_{21222}



Atenção: não esquecer o tabuleiro T_{2222} .

Nos tabuleiros anteriores, há muitos em que já podemos calcular o polinómio torre associado. Em alguns deles, temos sub-tabuleiros disjuntos, pelo que multiplicamos os polinómios associados a esses sub-tabuleiros.

Relativamente ao problema inicial (a distribuição dos horários pelos professores), há muitos tabuleiros que não conduzem a nenhuma solução, pelo que poderiam ser eliminados. No entanto, se quisermos encontrar o polinómio torre associado ao tabuleiro dado, temos de contar todos os casos.

Vamos parar por aqui, no que respeita a imagens de tabuleiros, pois esperamos que esta questão tenha suficientemente clara para os eventuais leitores.

Vejamos alguns polinómios torres:

$$p(T_{22212}) = 1 + x;$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^4(1+x) = x^5 + x^4$$

Note-se que temos duas maneiras de controlarmos o expoente inicial, neste caso, o expoente de x^4 . Há quatro células verdes e 2 aparece quatro vezes, no índice do tabuleiro.

$$\text{Continuemos: } p(T_{22211}) = (1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^3(1+x)^3 = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3$$

$$\text{Agora, } p(T_{22121}) = (1+2x)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^3(1+2x)^2 = 4x^5 + 4x^4 + x^3$$

$$\text{E } p(T_{22122}) = (1+x)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^4(1+x)^2 = x^6 + 2x^5 + x^4$$

$$\text{Mais dois exemplos: } p(T_{22111}) = (1+3x+x^2)(1+4x+2x^2) = 2x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 7x + 1$$

$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^2(2x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 7x + 1) = 2x^6 + 10x^5 + 15x^4 + 7x^3 + x^2$$

$$\text{E, por fim, } p(T_{22112}) = (1+2x)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

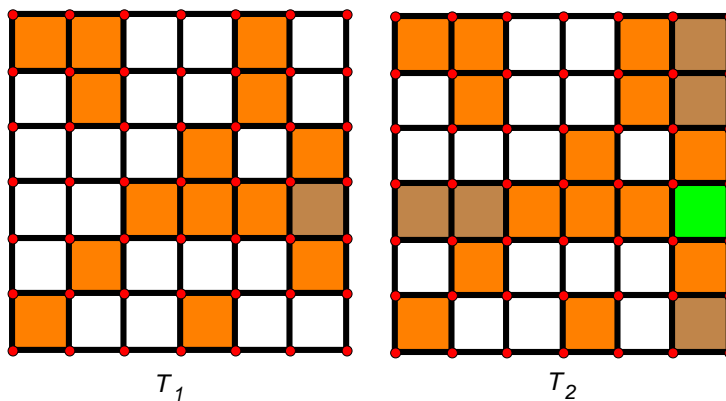
$$\text{Contribuição para o polinómio final: } x^3(1+2x)^2 = 4x^5 + 4x^4 + x^3$$

Observação

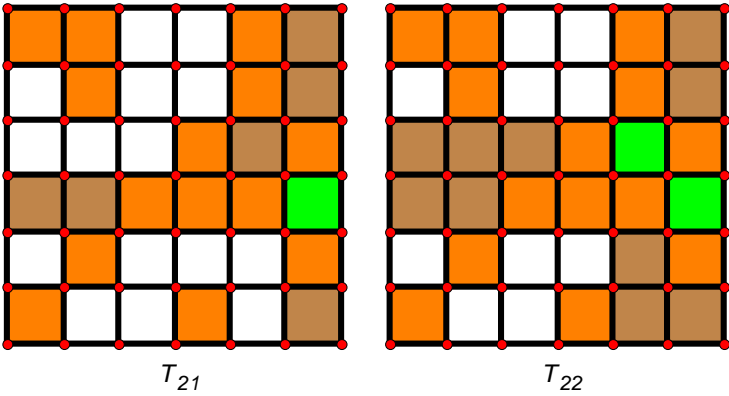
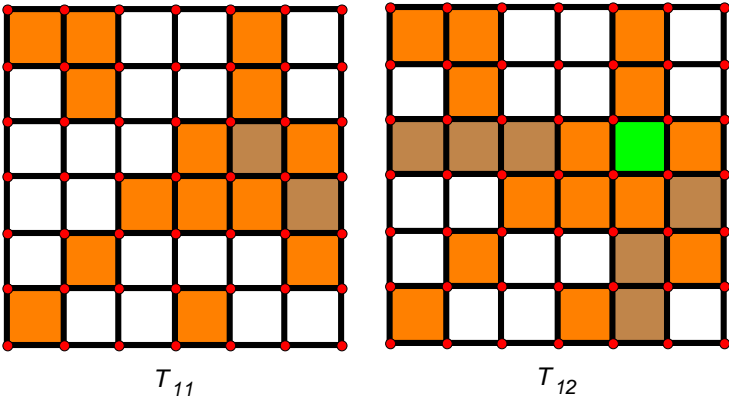
O método de resolução apresentado tem uma dificuldade: um dos dois sub-tabuleiros que são obtidos só tem menos uma célula colorida que o tabuleiro que lhes dão origem. Isso significa que vamos ter sequências longas (com muitos 1 no índice). Podemos arranjar um pequeno artifício para evitar índices muito longos: substituir o índice pelo correspondente número na base decimal, supondo que o índice é um número escrito na base 2. Assim, em vez de escrevermos T_{11111} , podemos escrever T_{31} . No final, nem precisamos de escrever o índice na base 2, se seguirmos o processo anteriormente descrito (utilização de três cores). No entanto, não precisamos dos índices para o cálculo do polinómio torre associado a cada tabuleiro (final), pois temos as torres "colocadas" no tabuleiro (através da sua cor).

Resolução

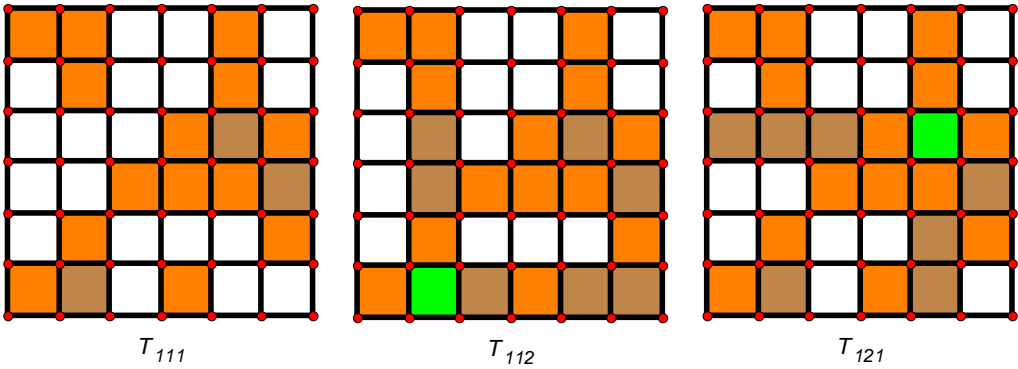
sub-tabuleiros de nível 1:

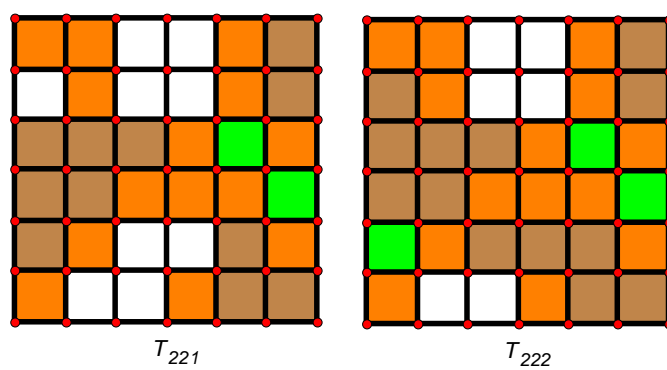
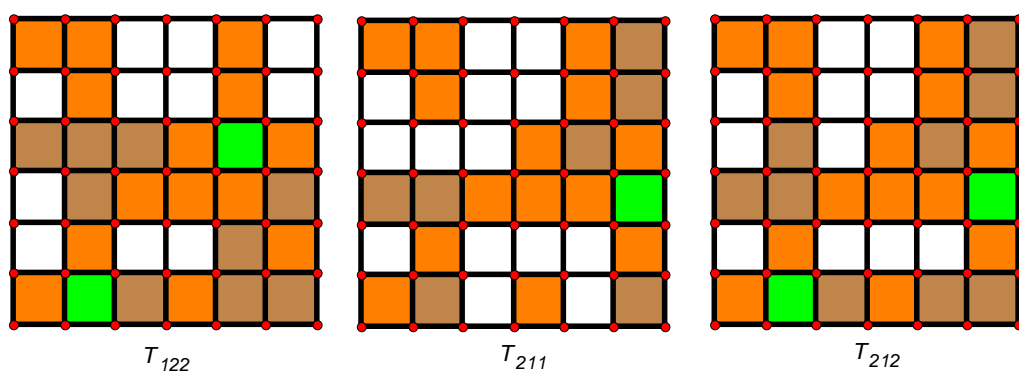


sub-tabuleiros de nível 2:

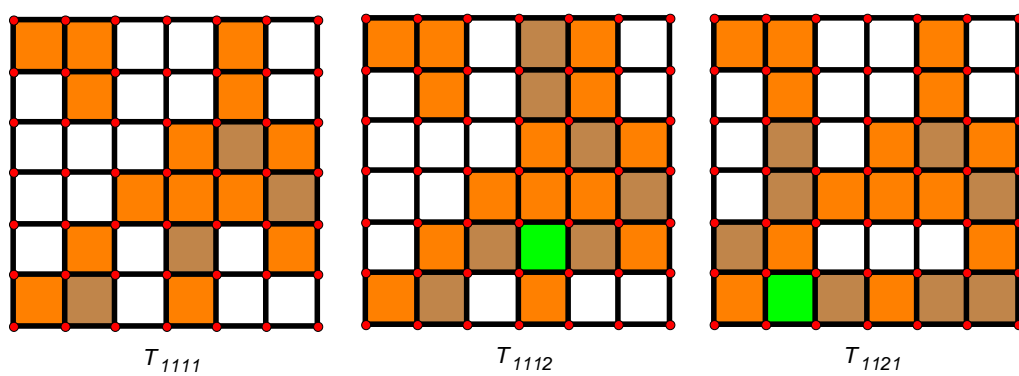


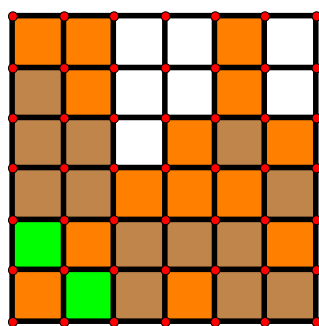
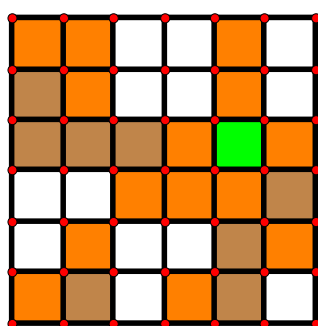
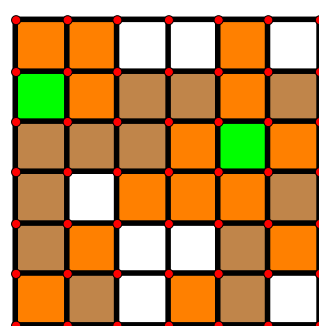
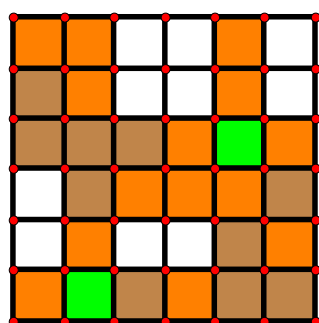
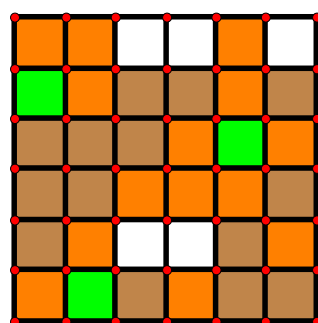
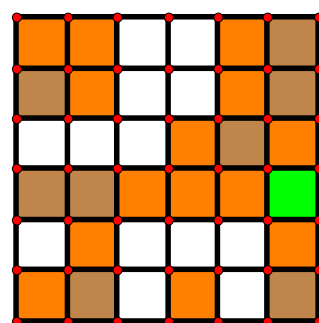
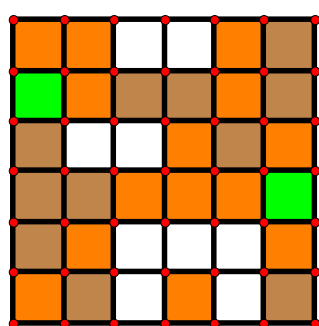
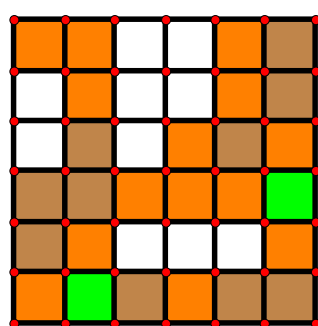
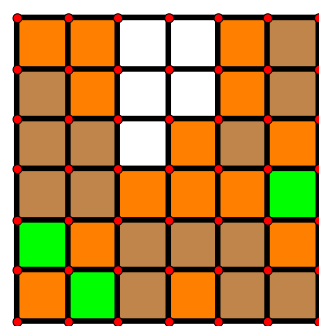
sub-tabuleiros de nível 3:

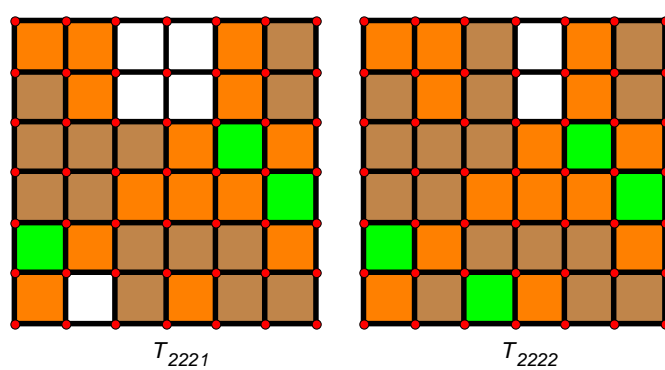
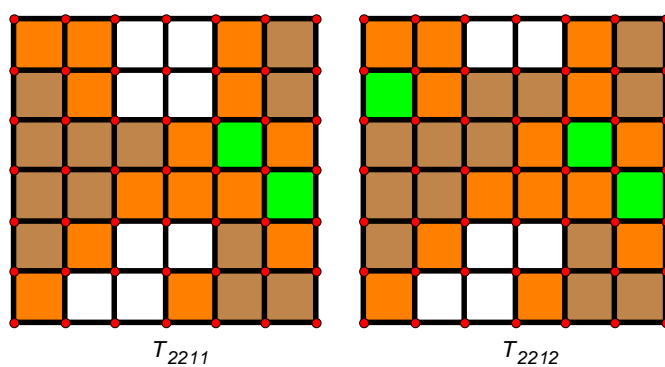




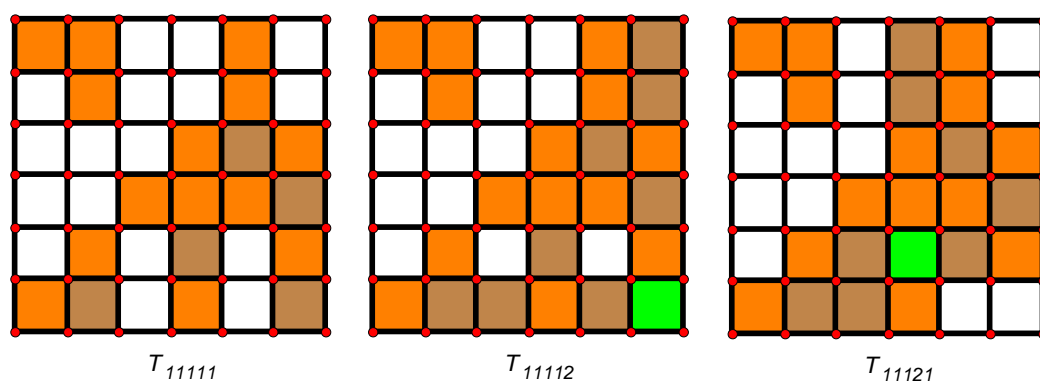
sub-tabuleiros de nível 4:

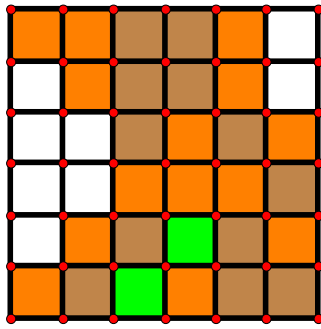


 T_{1122}  T_{1211}  T_{1212}  T_{1221}  T_{1222}  T_{2111}  T_{2112}  T_{2121}  T_{2122}

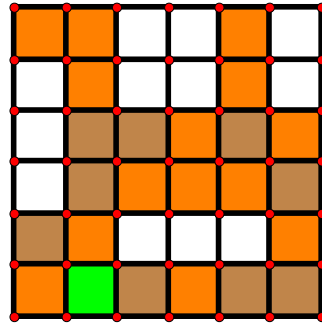


sub-tabuleiros de nível 5:

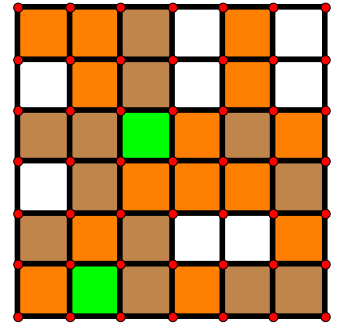




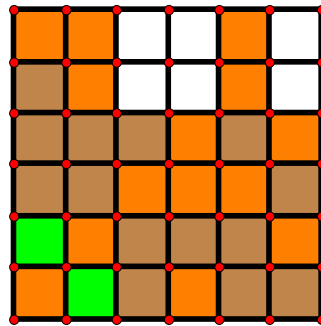
T_{11122}
Nenhuma solução



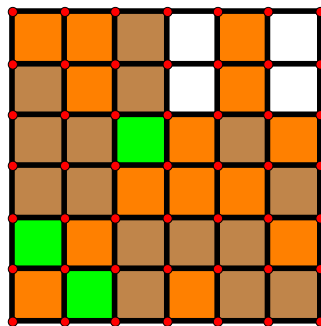
T_{11211}
Nenhuma solução



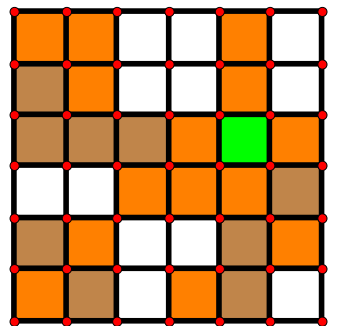
T_{11212}



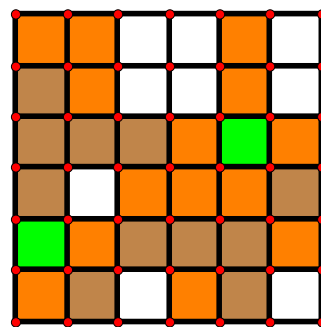
T_{11221}
Nenhuma solução



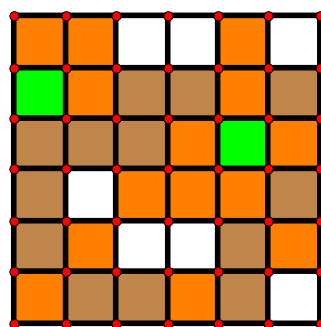
T_{11222}
Nenhuma solução



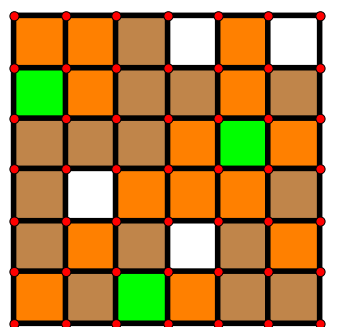
T_{12111}



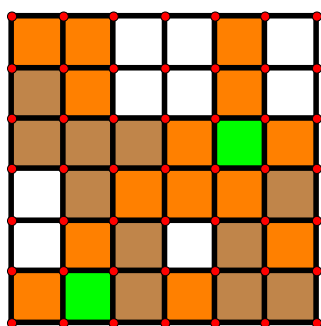
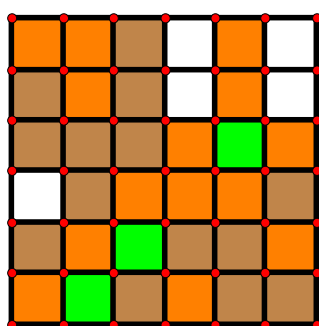
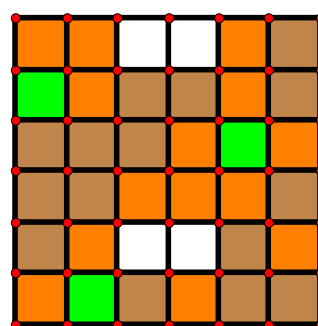
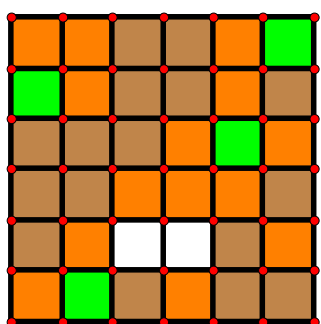
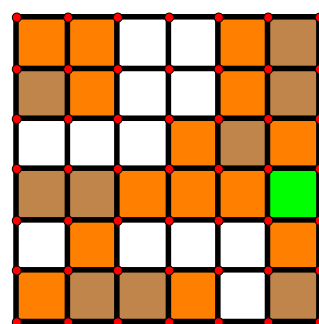
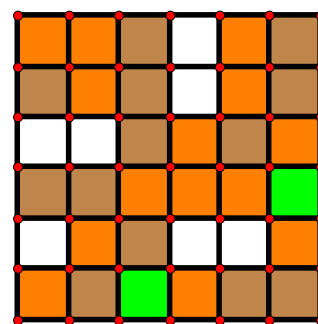
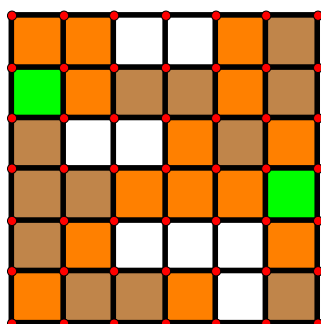
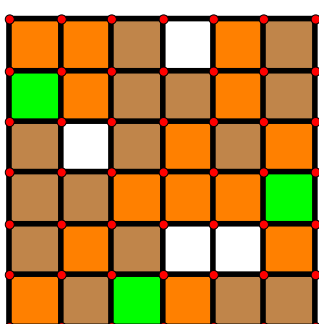
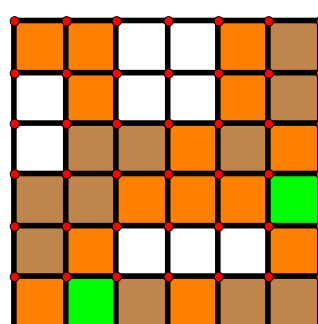
T_{12112}

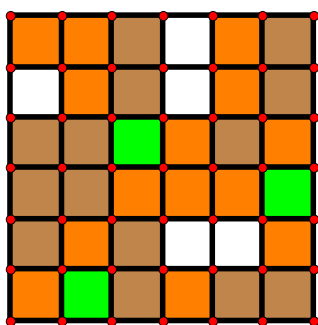


T_{12121}

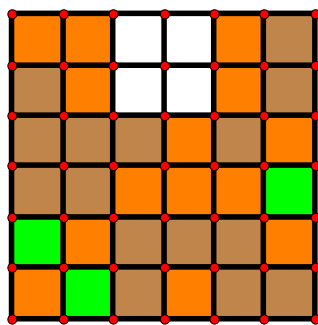


T_{12122}
Uma solução

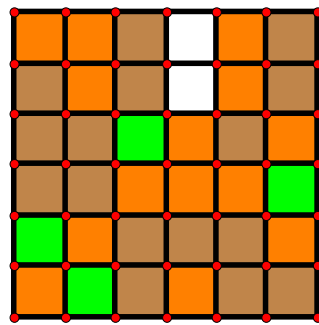

 T_{12211}

 T_{12212}
Duas soluções

 T_{12221}
Nenhuma solução

 T_{12222}
Nenhuma solução

 T_{21111}

 T_{21112}

 T_{21121}

 T_{21122}
Uma solução

 T_{21211}



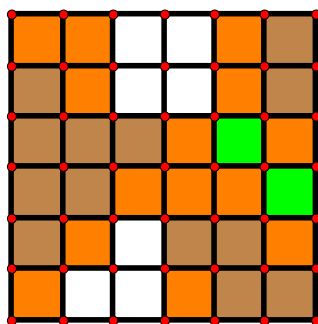
T_{21212}
Uma solução



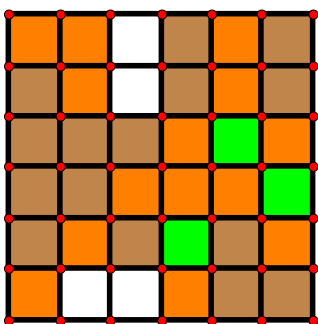
T_{21221}
Nenhuma solução



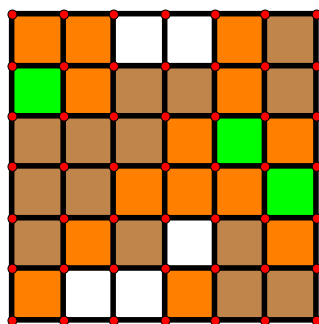
T_{21222}
Nenhuma solução



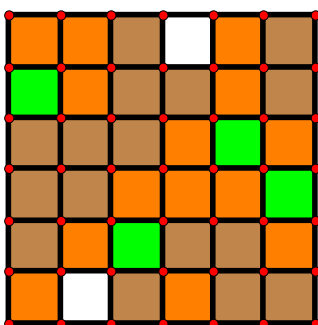
T_{22111}
Nenhuma solução



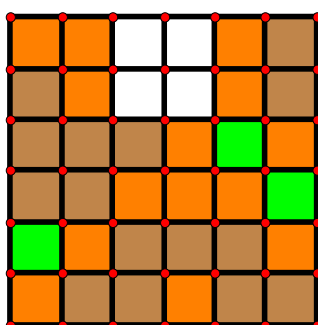
T_{22112}
Nenhuma solução



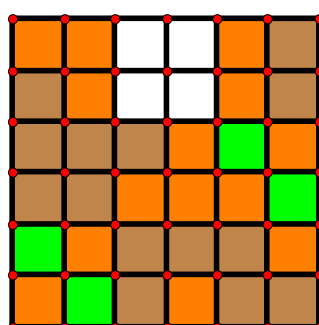
T_{22121}
Uma solução



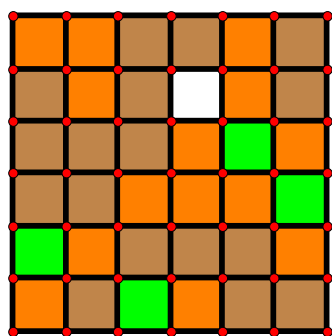
T_{22122}
Uma solução



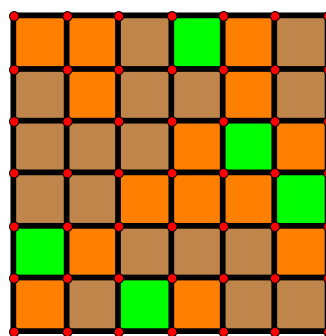
T_{22211}
Nenhuma solução



T_{22212}
Duas soluções



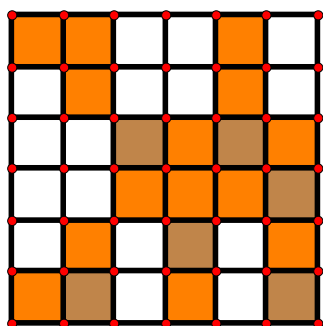
T_{22221}
Nenhuma solução



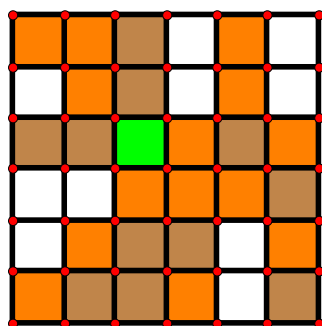
T_{22222}
Nenhuma solução

Vinte tabuleiros já estão definidos (com solução ou sem solução). Falta saber o que acontece com os restantes 12 tabuleiros.

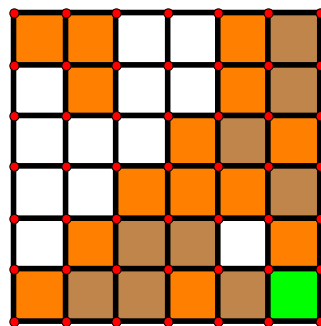
sub-tabuleiros de nível 6:



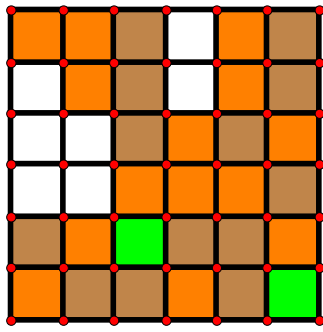
T_{111111}



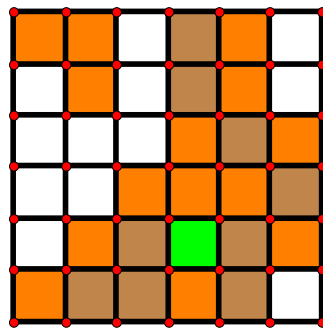
T_{111112}



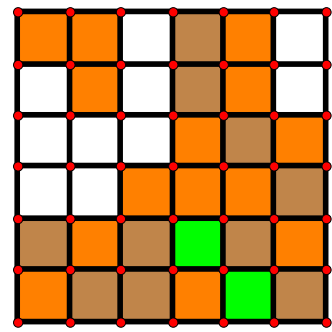
T_{111121}



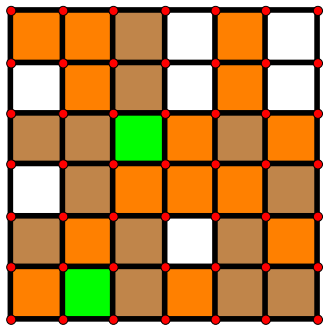
T_{111122}
Nenhuma solução



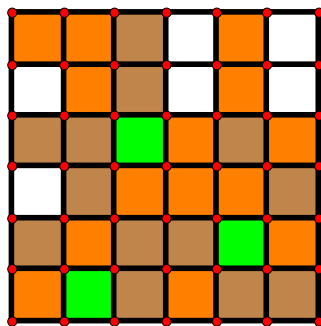
T_{111211}
Nenhuma solução



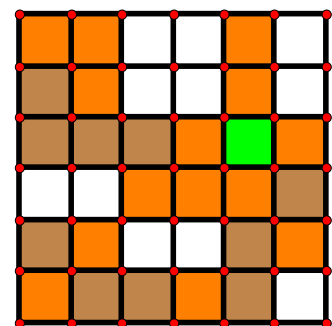
T_{111212}



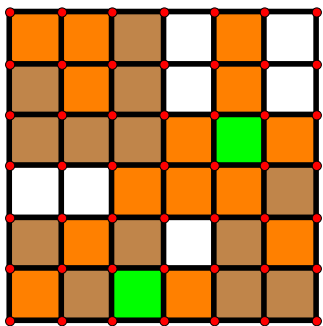
T_{112121}
Nenhuma solução



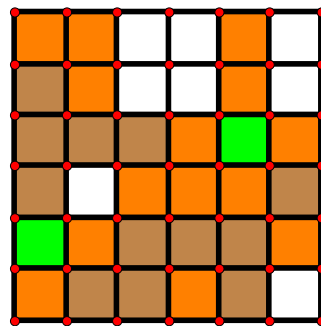
T_{112122}



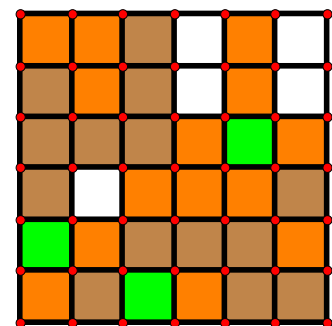
T_{121111}



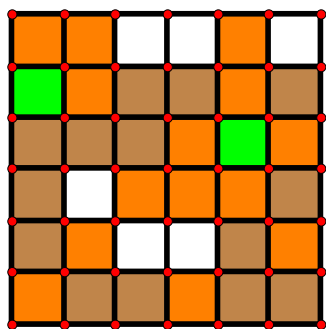
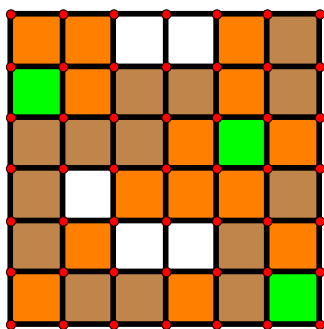
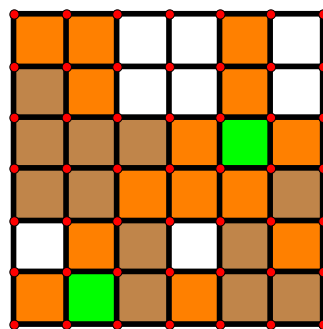
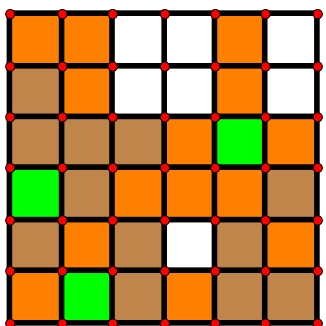
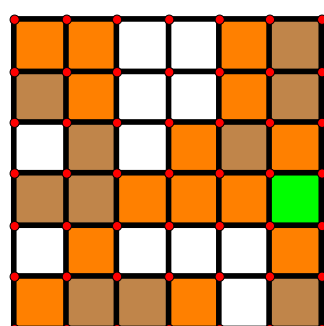
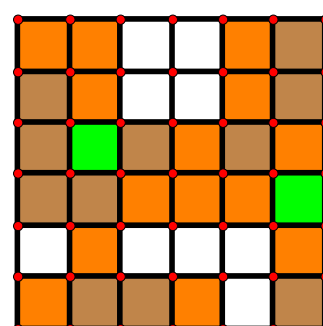
T_{121112}

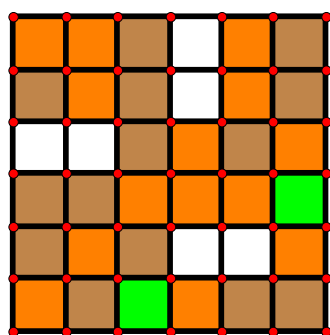
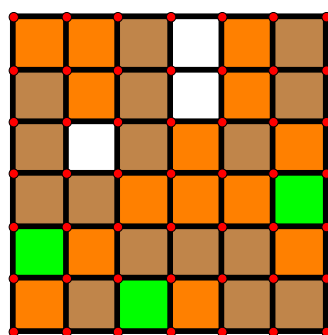
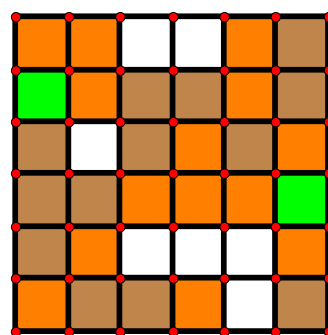
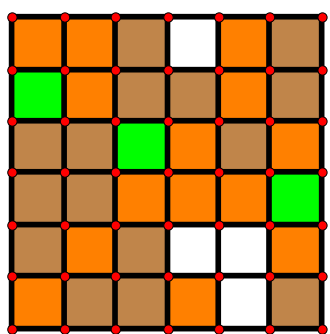
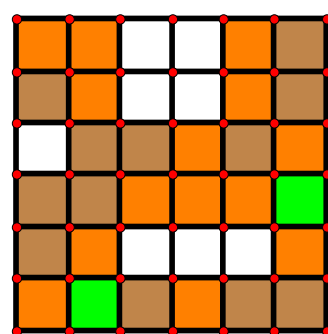
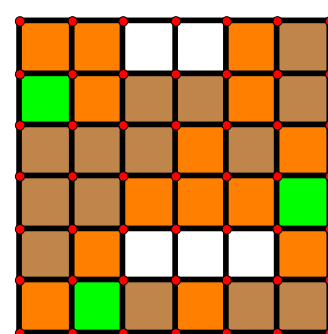


T_{121121}



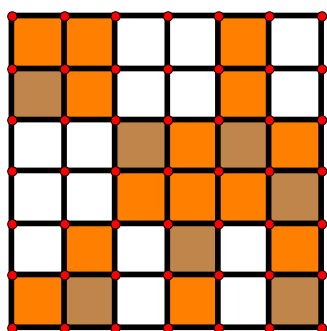
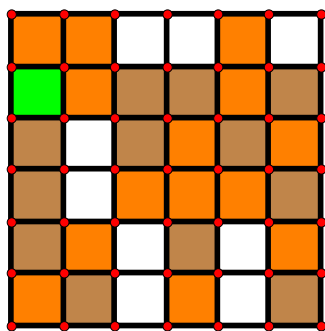
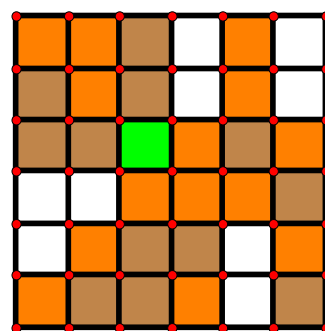
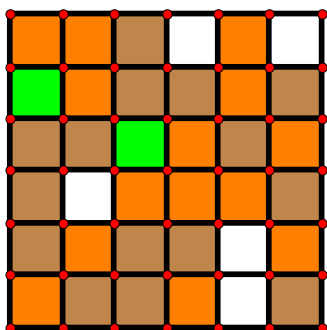
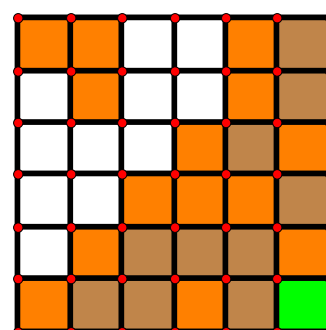
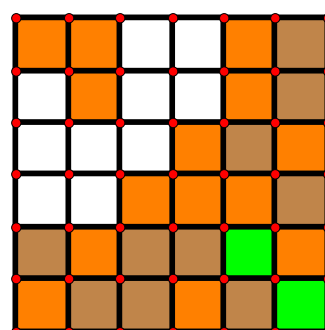
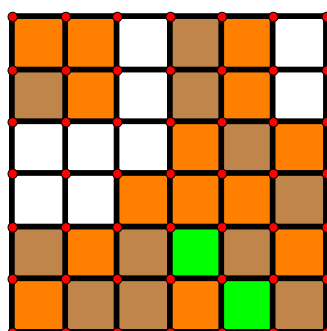
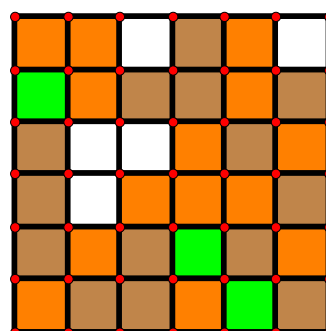
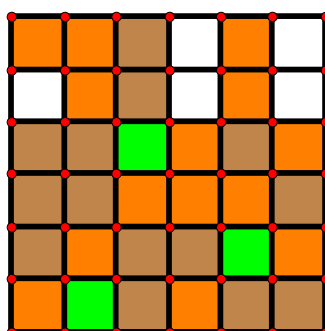
T_{121122}
Duas soluções

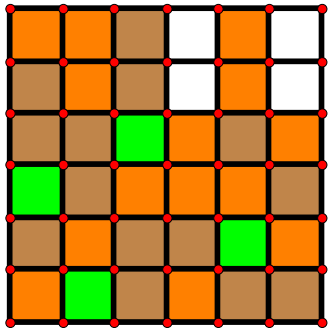
T_{112121}
Nenhuma solução

 T_{121211}
Duas soluções

 T_{121212}
Duas soluções

 T_{122111}
Nenhuma solução

 T_{122112}

 T_{211111}

 T_{211112}

 T_{211121}  T_{211122} *Nenhuma solução* T_{211211}  T_{211212} *Nenhuma solução* T_{212111}  T_{212112} *Nenhuma solução*

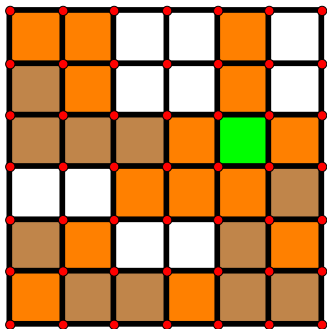
Dos 24 tabuleiros, há 9 que têm um número definido de soluções. Restam 15, para continuarmos

sub-tabuleiros de nível 7:

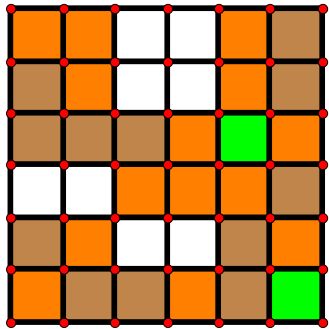

 $T_{1111111}$

 $T_{1111112}$
 Nenhuma solução

 $T_{1111121}$

 $T_{1111122}$
 Nenhuma solução

 $T_{1111211}$
 Nenhuma solução

 $T_{1111212}$

 $T_{1112121}$

 $T_{1112122}$

 $T_{1121221}$
 Nenhuma solução



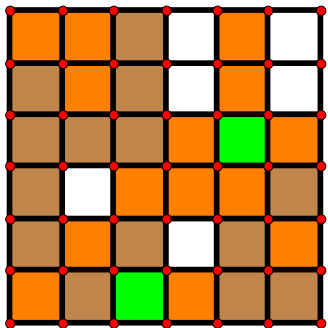
$T_{1121222}$
Duas soluções



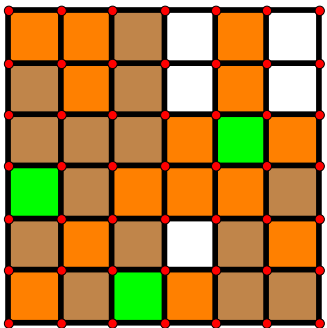
$T_{1211111}$
Nenhuma solução



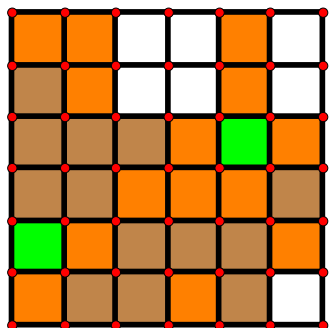
$T_{1211112}$
Nenhuma solução



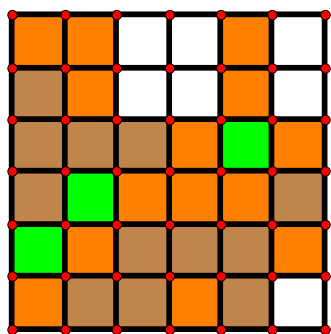
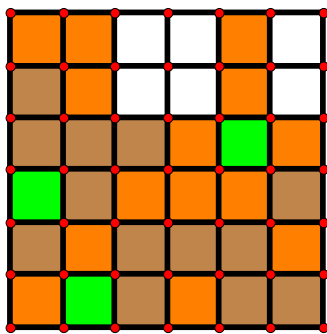
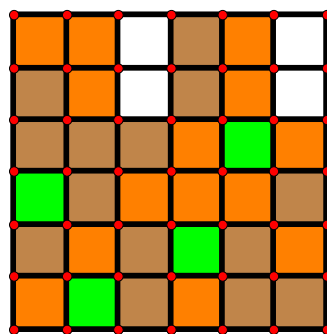
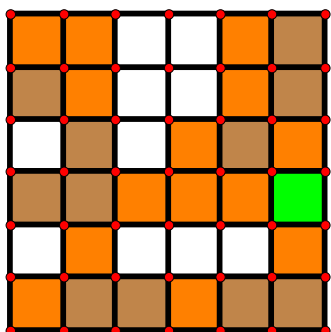
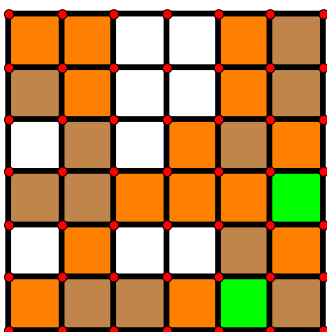
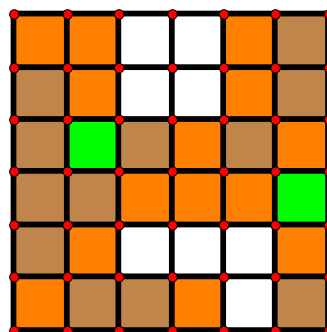
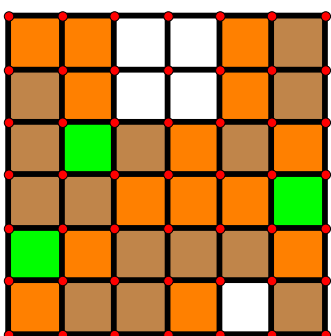
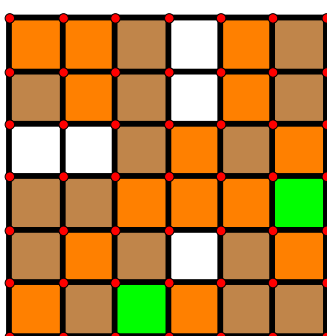
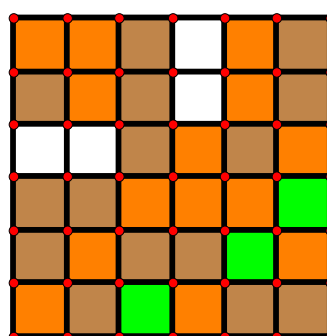
$T_{1211121}$
Nenhuma solução

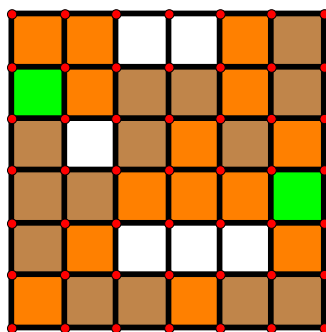


$T_{1211122}$
Nenhuma solução

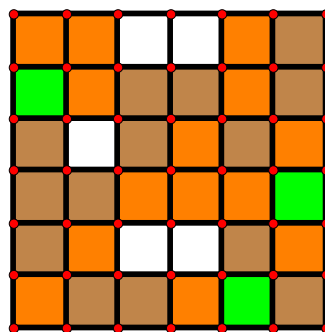


$T_{1211211}$
Nenhuma solução

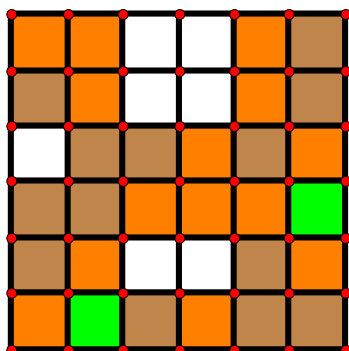

 $T_{1211212}$

 $T_{1221121}$
 Nenhuma solução

 $T_{1221122}$
 Duas soluções

 $T_{2111111}$

 $T_{2111112}$
 Nenhuma solução

 $T_{2111121}$
 Nenhuma solução

 $T_{2111122}$
 Duas soluções

 $T_{2111211}$
 Nenhuma solução

 $T_{2111212}$
 Nenhuma solução



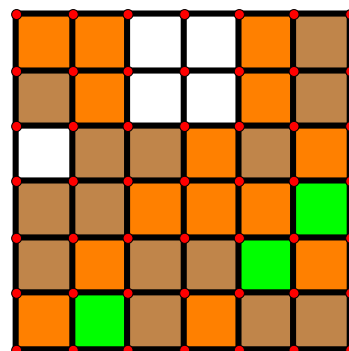
$T_{2112111}$
Nenhuma solução



$T_{2112112}$
Duas soluções

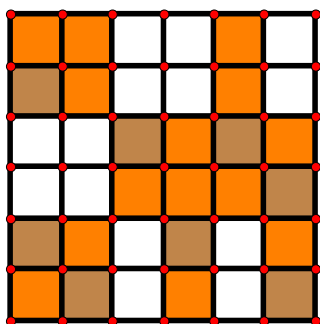
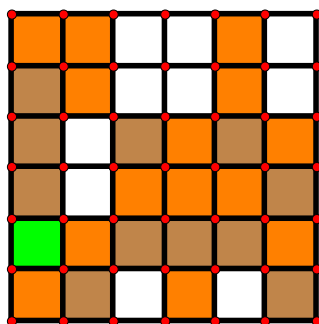
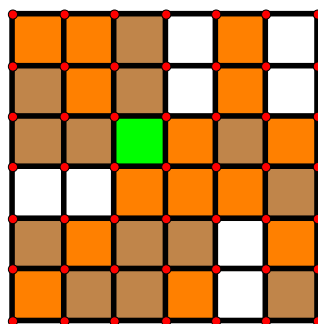
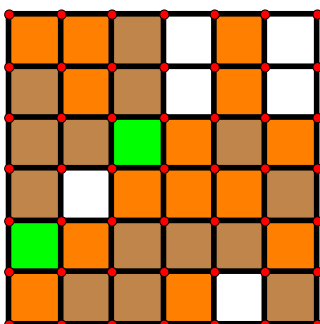
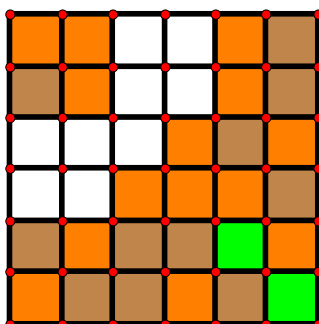
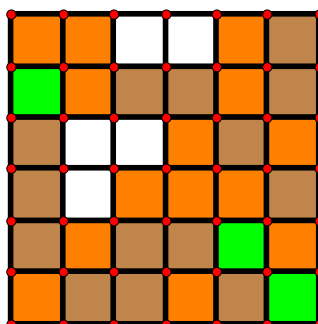
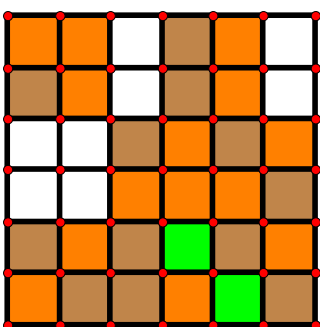
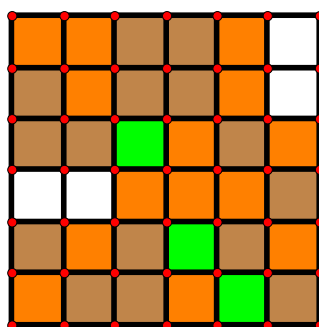
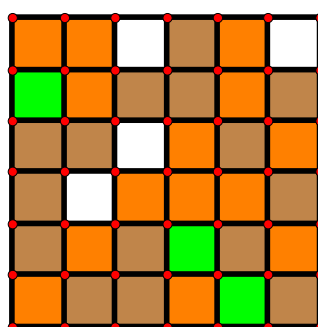


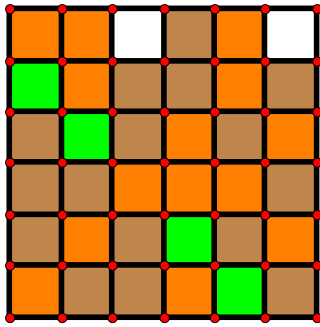
$T_{2121111}$
Nenhuma solução



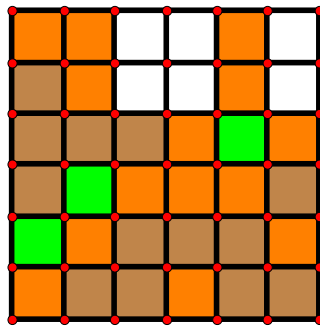
$T_{2121112}$
Duas soluções

sub-tabuleiros de nível 8:

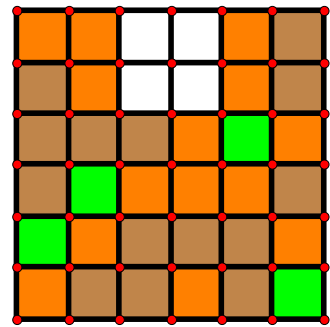

 $T_{11111111}$

 $T_{11111112}$
 Nenhuma solução

 $T_{11111211}$
 Nenhuma solução

 $T_{11111212}$
 Duas soluções

 $T_{11112121}$

 $T_{11112122}$
 Uma solução

 $T_{11121211}$
 Quatro soluções

 $T_{11121212}$
 Nenhuma solução

 $T_{11121221}$
 Uma solução



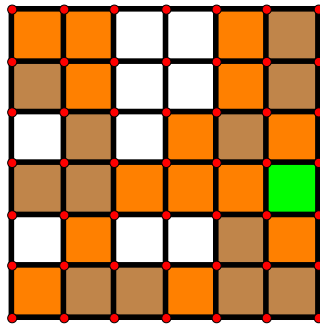
$T_{11121222}$
Nenhuma solução



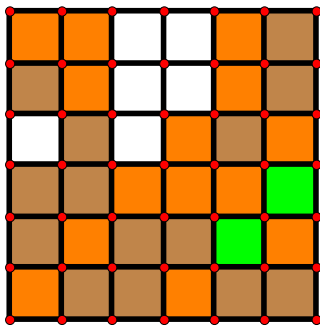
$T_{1211211}$
Nenhuma solução



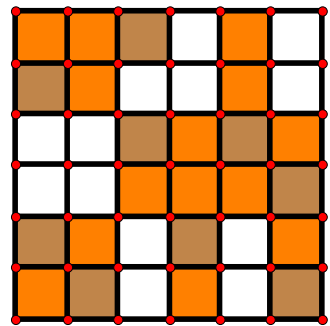
$T_{1211212}$
Duas soluções



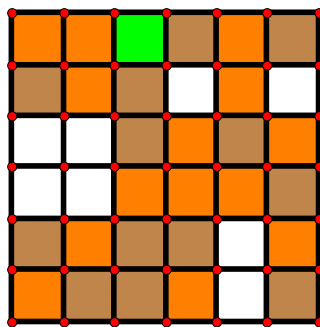
$T_{21111111}$
Nenhuma solução



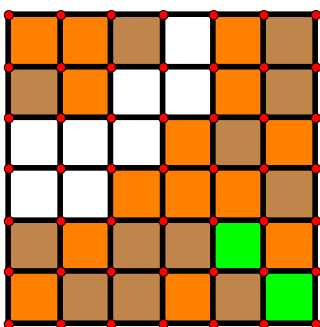
$T_{21111112}$
Nenhuma solução



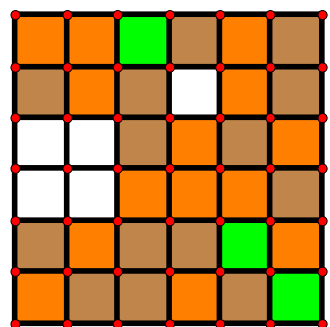
$T_{111111111}$



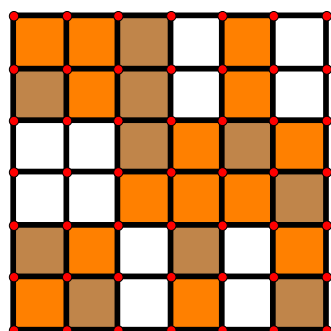
$T_{111111112}$
Nenhuma solução



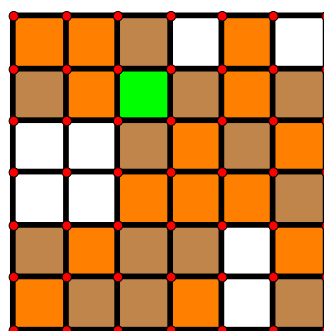
$T_{111121211}$



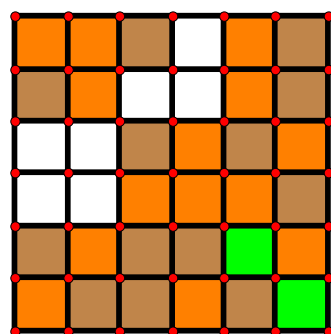
$T_{111121212}$
Duas soluções



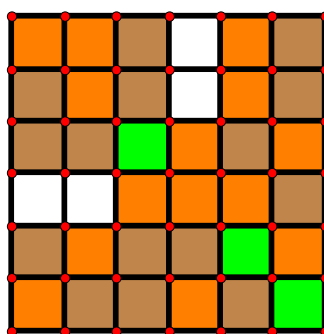
$T_{1111111111}$
Oito soluções



$T_{1111111112}$
Nenhuma solução



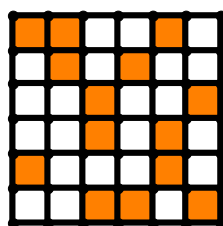
$T_{1111212111}$
Duas soluções



$T_{1111212112}$
Nenhuma solução

Vejamos como podemos simplificar a resolução dos problemas anteriores:

Exemplo 711 Numa escola, as preferências dos professores, na escolha dos horários, são as seguintes:

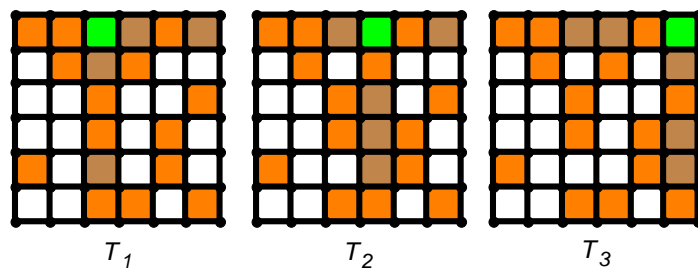


As casas assinaladas a cor de laranja correspondem aos horários que os professores não querem. Os professores estão na horizontal e os horários estão na vertical.

Resolução

Como pretendemos colocar seis torres no tabuleiro, vamos alterar ligeiramente o algoritmo que temos vindo a aplicar. No caso da figura anterior, não há nenhuma linha nem nenhuma coluna em que tenhamos só duas casas livres (casas a branco). No entanto, podemos escolher uma linha ou uma coluna e teremos um certo número de hipóteses para a colocação duma torre.

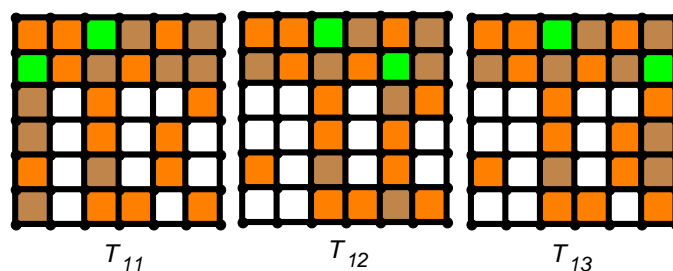
1º Passo

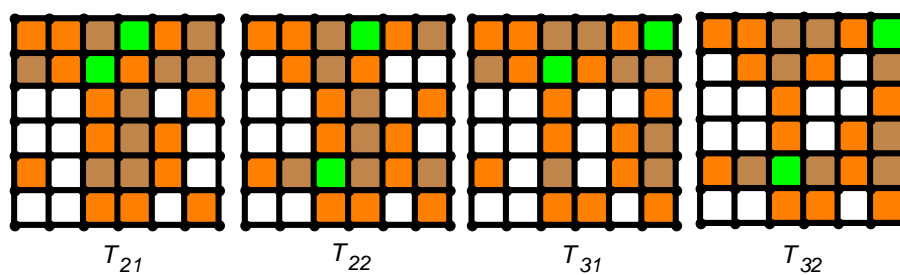


No caso da figura anterior, escolhemos a primeira linha (usando a terminologia das matrizes). Como, nessa primeira linha, havia três casas brancas, temos três possibilidades para a colocação da torre. Note-se que o número de horários é igual ao número de professores. Em cada caso, as casas brancas da mesma linha e as casas brancas da mesma coluna foram "eliminadas", tendo ficado preenchidas a castanho.

2º Passo

No segundo passo, procedemos de igual modo:

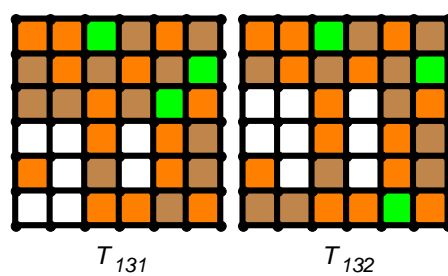
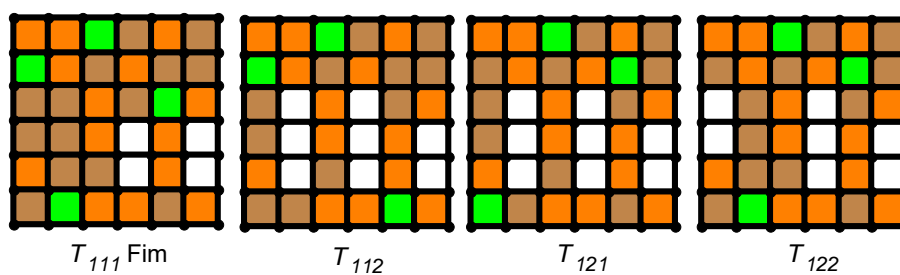


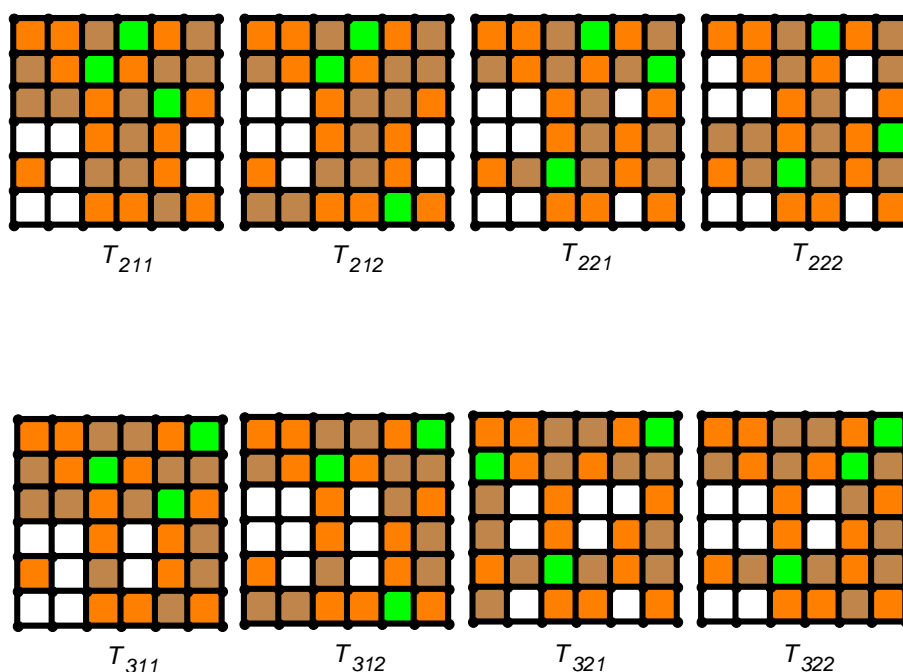


Note-se que temos uma ligeira diferença entre T_1 e os tabuleiros T_2 e T_3 . Em T_1 , não temos nenhuma linha nem nenhuma coluna com só duas casas livres. Daí, o aparecimento de três sub-tabuleiros de T_1 . Já os tabuleiros T_2 e T_3 originaram dois sub-tabuleiros (apenas).

Registe-se o facto de podermos proceder de maneira diferente: em vez de escolhermos a linha ou coluna com menos casas livres, podemos escolher a linha ou a coluna com mais casas livres.

3º Passo





Neste passo, há uma observação importante a fazer (e que vai ser utilizada nos passos seguintes): Se, após a colocação duma torre, com a consequente interdição das casas da mesma linha e das casas da mesma coluna, ficarmos com uma fila (linha ou coluna) com uma só casa livre, então nessa casa tem de ficar uma torre. Foi isso que aconteceu em T_{111} . A palavra "Fim", colocada junto ao tabuleiro, significa que já sabemos o número de soluções. No caso de T_{111} , há duas soluções (duas maneiras de colocarmos duas torres, nas casas livres).

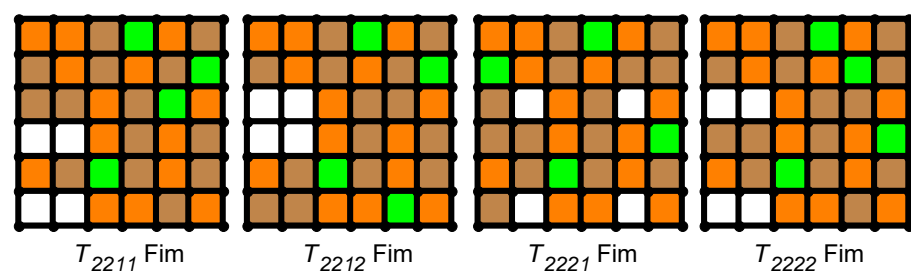
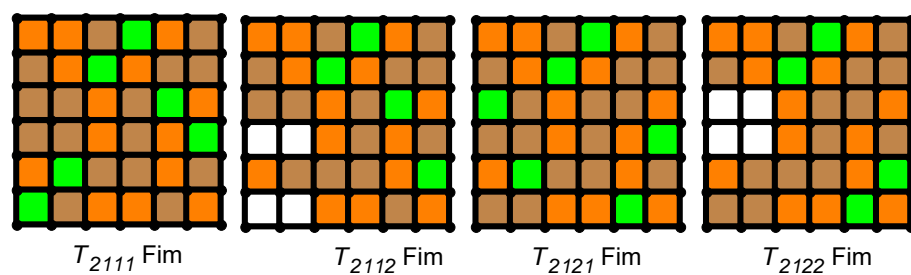
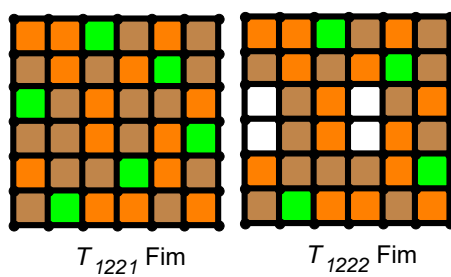
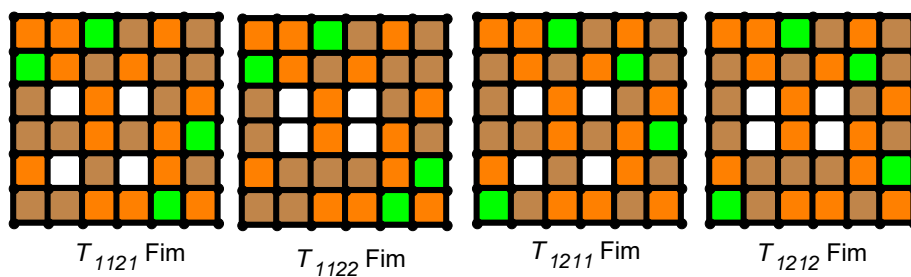
Passo	Tabuleiro	Nº de Soluções
3º	T_{111}	2

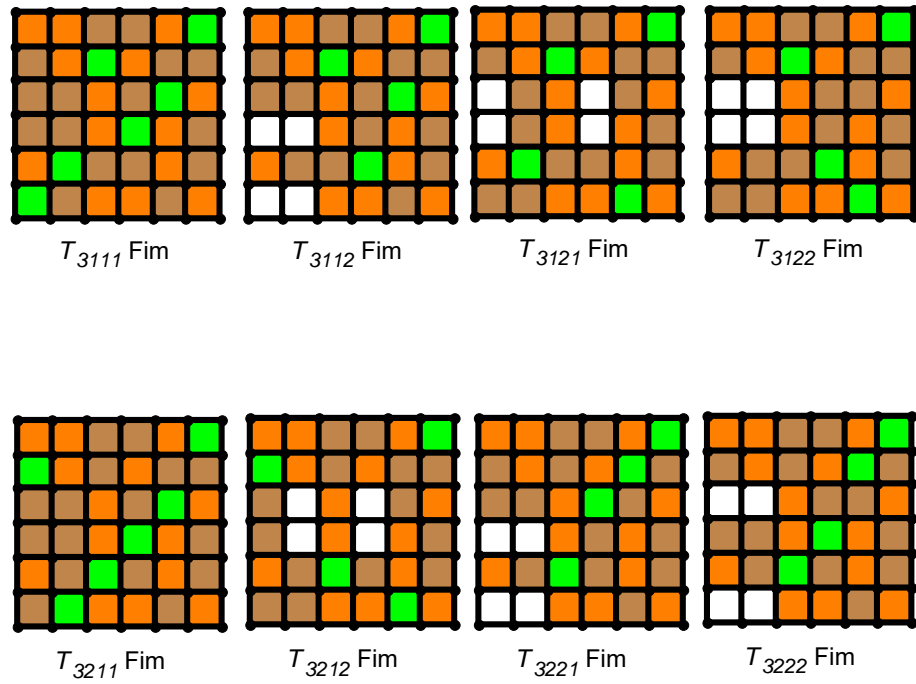
O quadro anterior pode ser ligeiramente alterado, de modo a permitir uma maior facilidade de resolução.

Passo	Tabuleiro	Nº de Soluções
3º	T_{111}	2
	Nº de soluções deste passo	2
	Nº de soluções dos passos anteriores	0
	Nº de soluções de todos os passos resolvidos	2

Procedendo deste modo, a contagem fica mais simples, embora isso não seja visível no presente exemplo, pois só temos mais um passo.

4º Passo



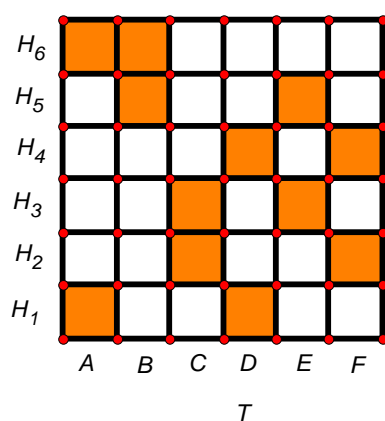


Quadro-resumo das soluções (incluindo as soluções do terceiro passo):

Tab.	Nº de Sol.	Tab.	Nº de Sol.	Tab.	Nº de Sol.
T_{111}	2	T_{2112}	2	T_{3112}	2
T_{1121}	2	T_{2121}	1	T_{3121}	1
T_{1122}	2	T_{2122}	2	T_{3122}	2
T_{1211}	2	T_{2211}	2	T_{3211}	1
T_{1212}	2	T_{2212}	2	T_{3212}	2
T_{1221}	1	T_{2221}	2	T_{3221}	2
T_{1222}	2	T_{2222}	2	T_{3222}	2
T_{2111}	1	T_{3111}	1		

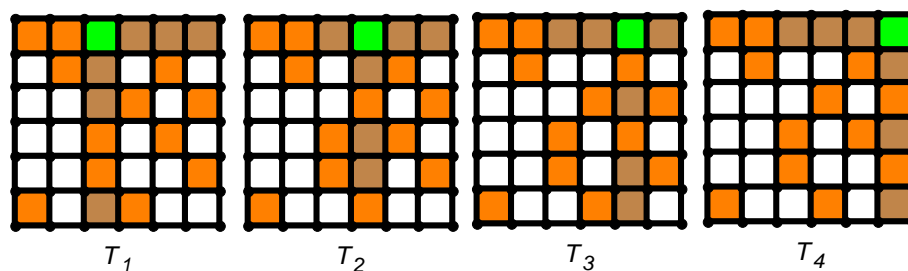
Agora, basta somarmos as soluções, obtendo-se 40 soluções.

Exemplo 712 *Vamos resolver, por este novo processo, um exemplo já resolvido e que deu muito trabalho:*



Resolução

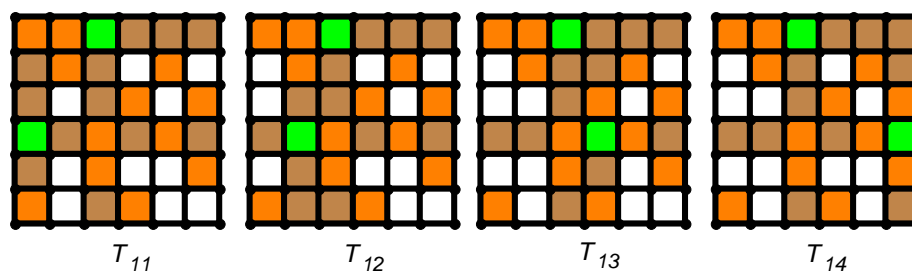
1º Passo

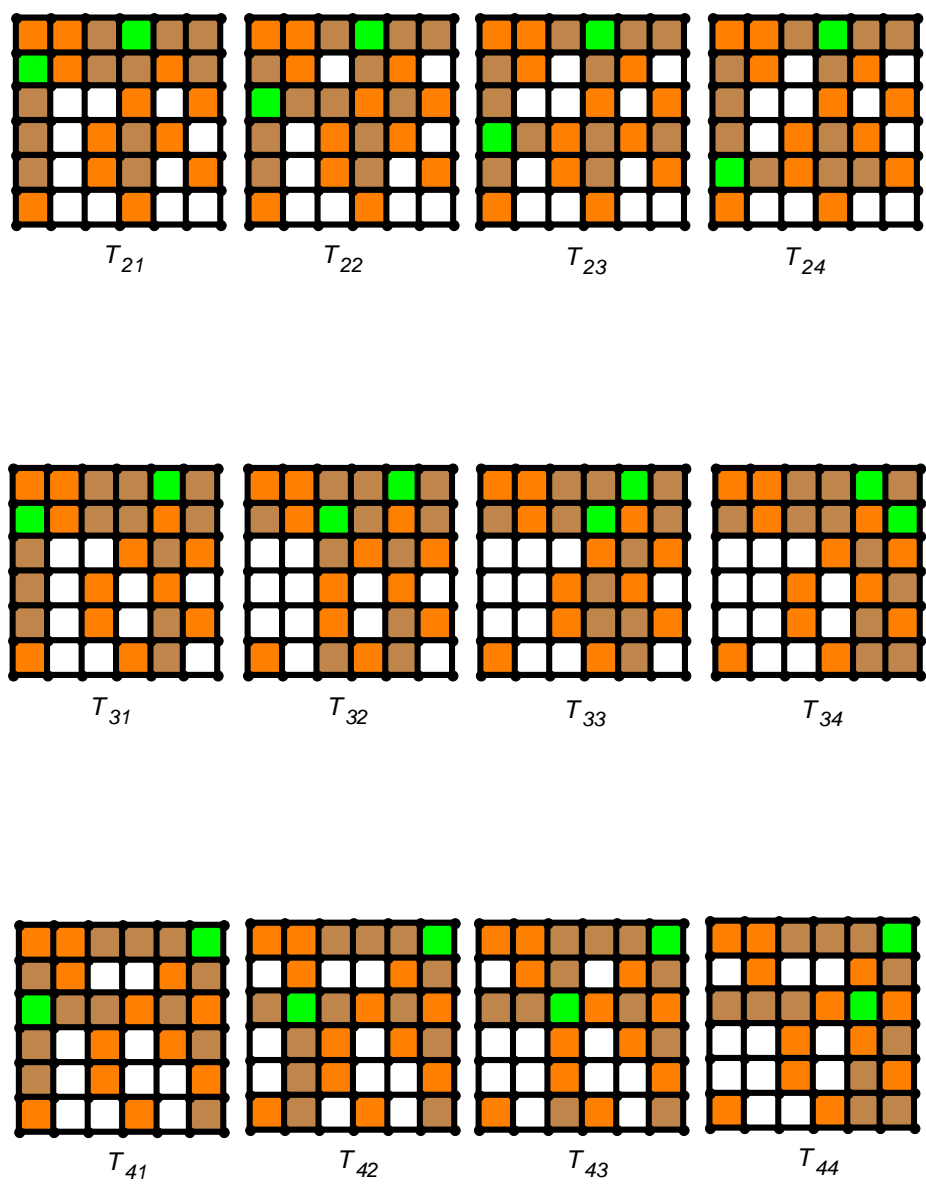


Neste primeiro passo, temos as quatro maneiras de colocarmos uma torre na primeira linha.

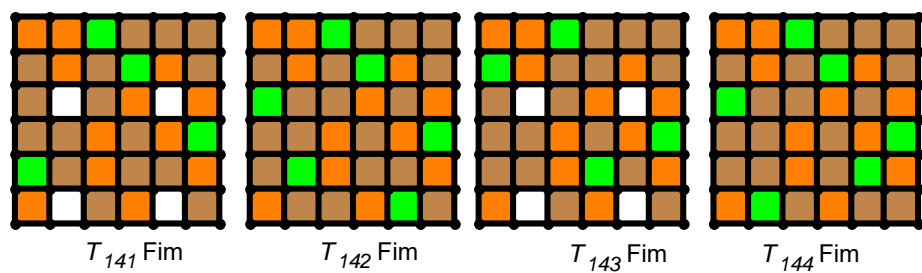
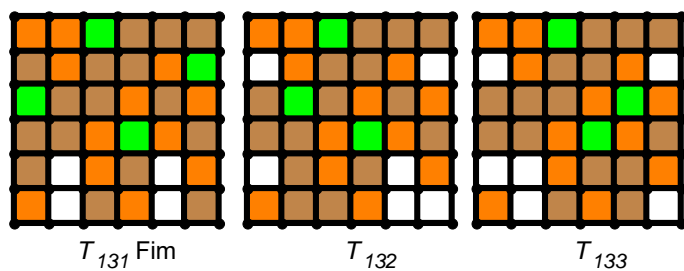
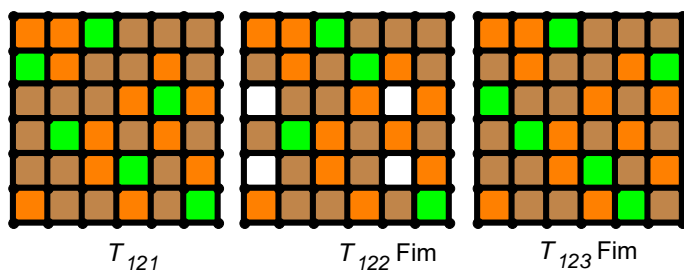
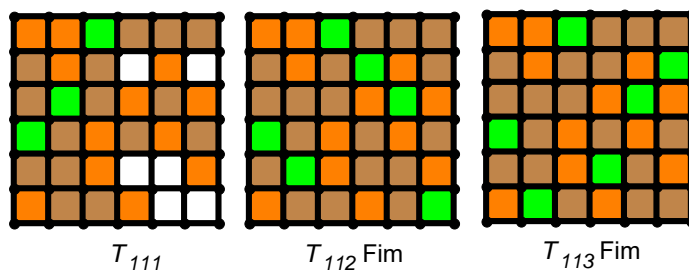
2º Passo

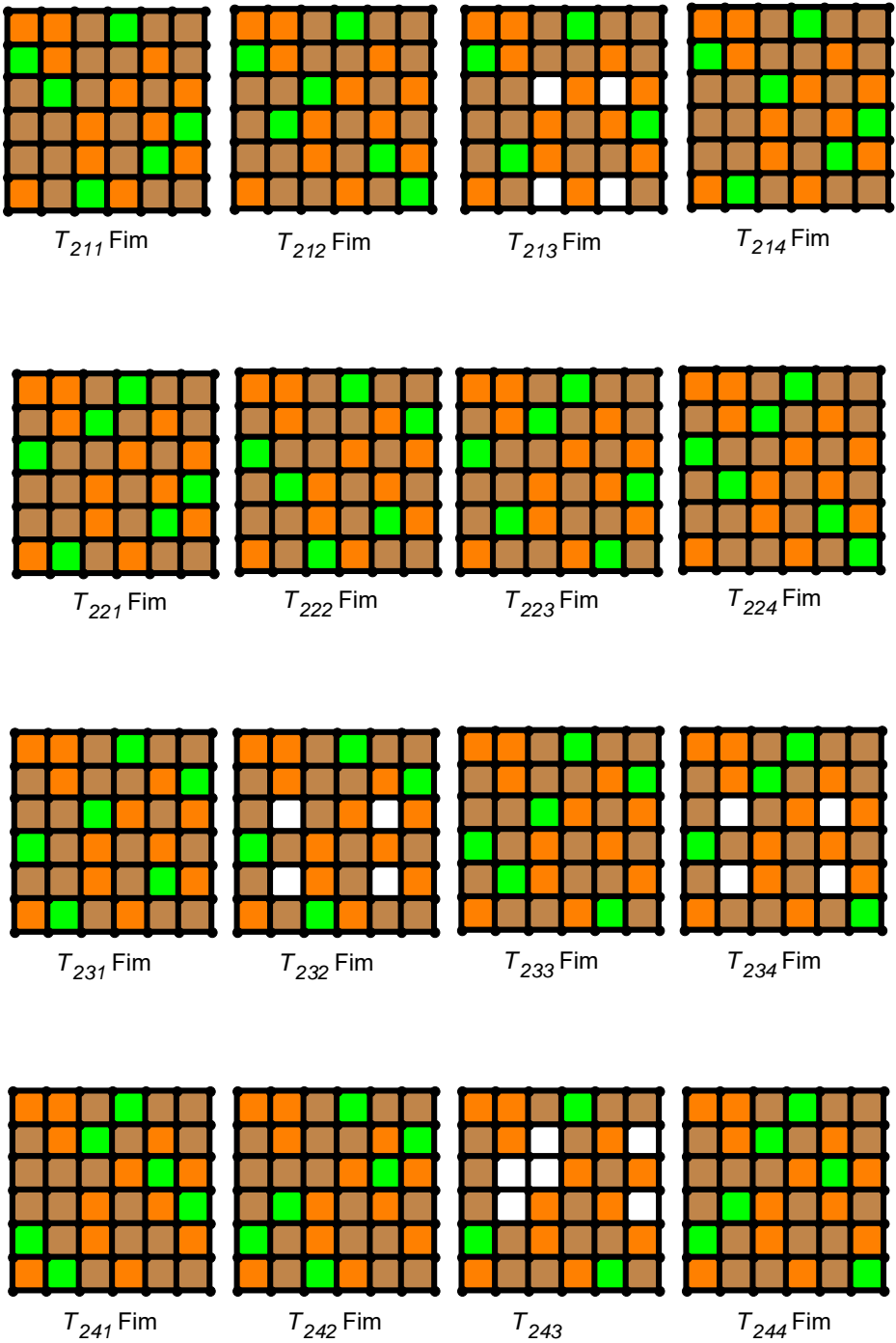
Neste segundo passo, vamos escolher uma linha com quatro casas livres (podíamos escolher uma linha ou coluna com três casas livres, mas estamos a optar pelo maior número). Optemos pela quarta linha, no caso de T_1 .

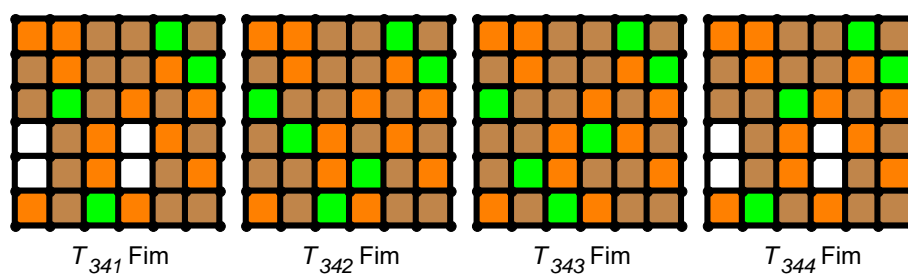
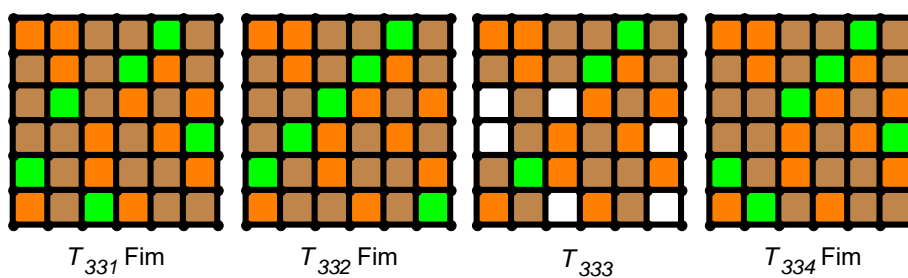
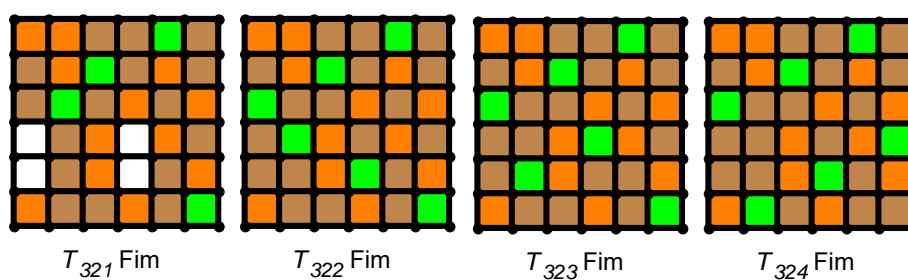
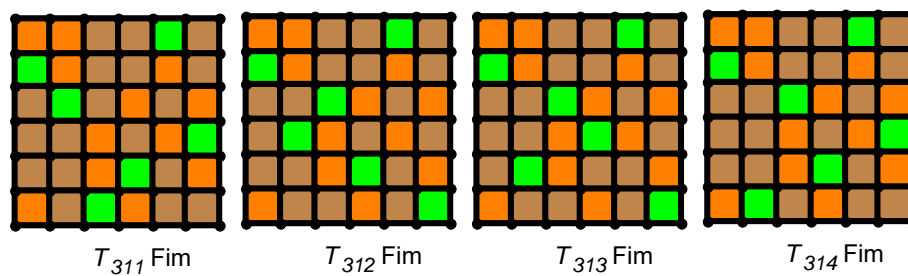


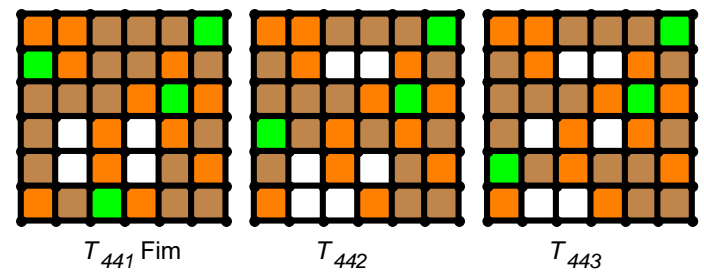
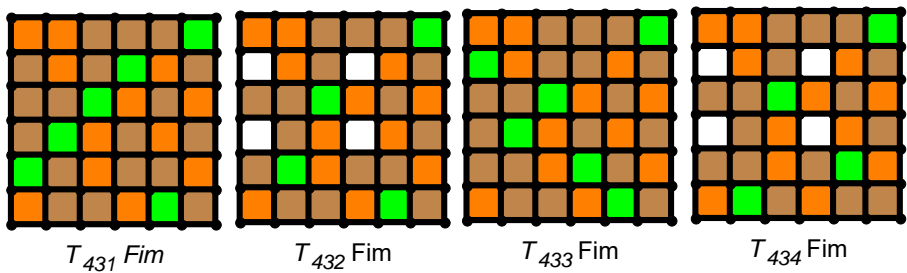
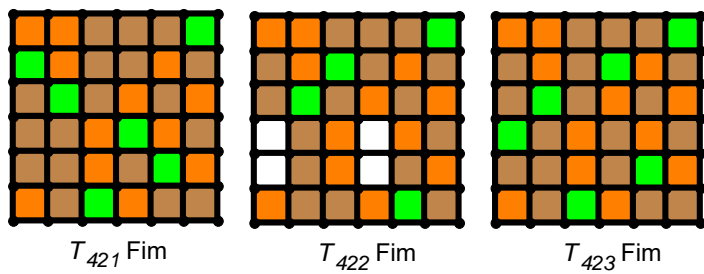
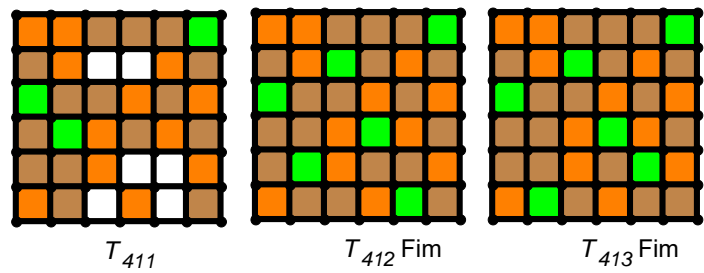


3º Passo



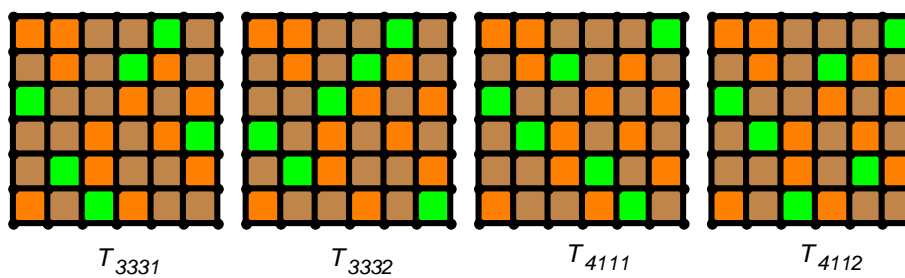
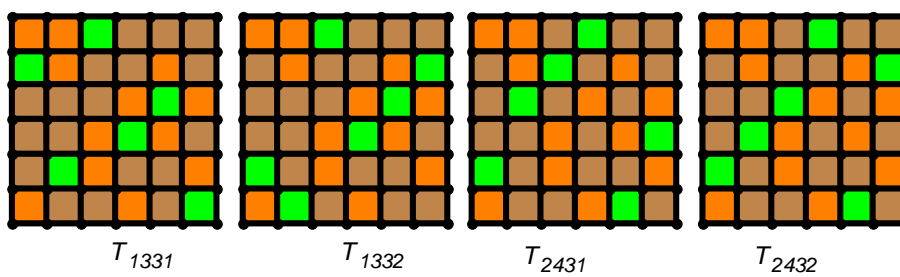
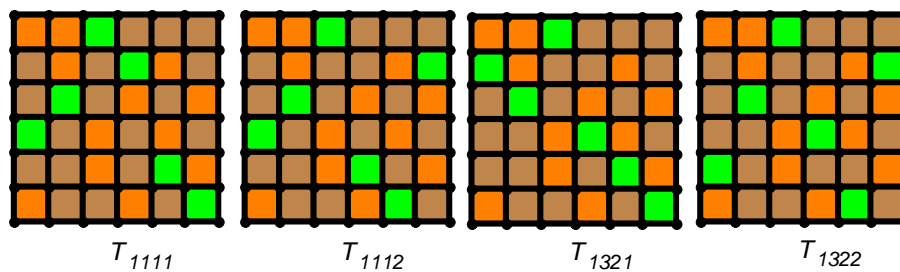


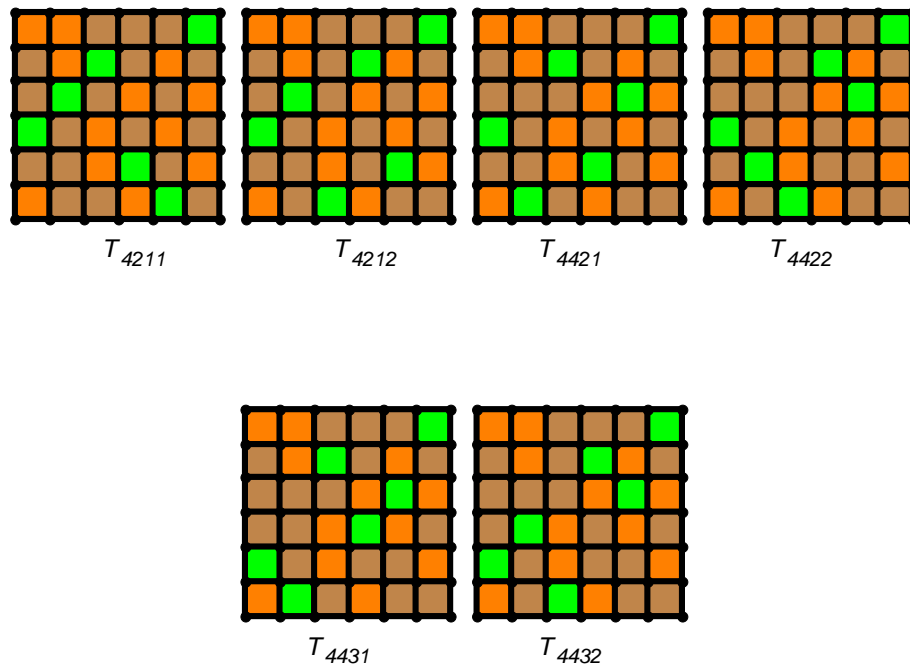




Neste terceiro passo, se não houve erros, temos 64 soluções.

4º Passo

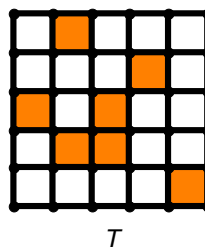




Neste último passo, temos uma solução em cada um dos tabuleiros, num total de 18 soluções (neste passo).

Então, salvo melhor opinião, o número de maneiras de fazer a distribuição dos horários é 82 (há 64 soluções no terceiro passo).

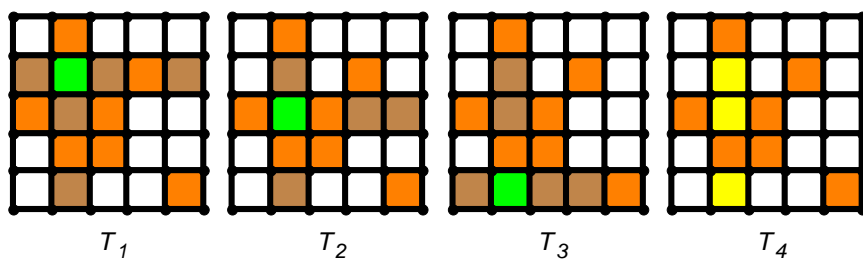
Exemplo 713 *Determine o polinómio-torre do seguinte tabuleiro, com as restrições assinaladas:*



Resolução

Vamos utilizar o processo alternativo (resolução fila a fila em vez de resolução casa a casa).

1º Passo

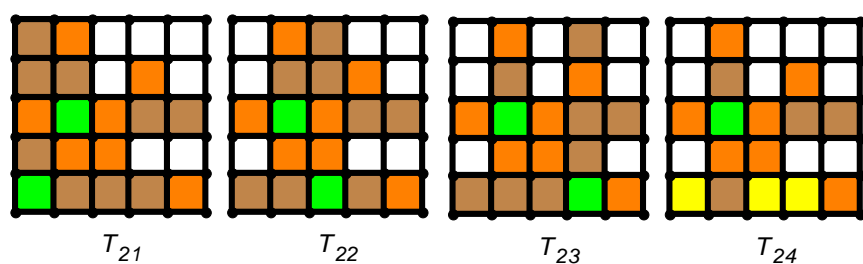
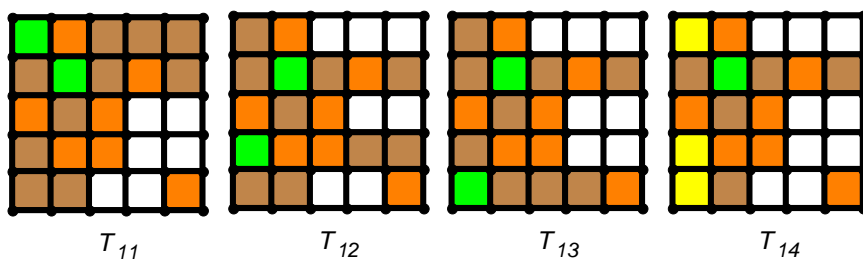


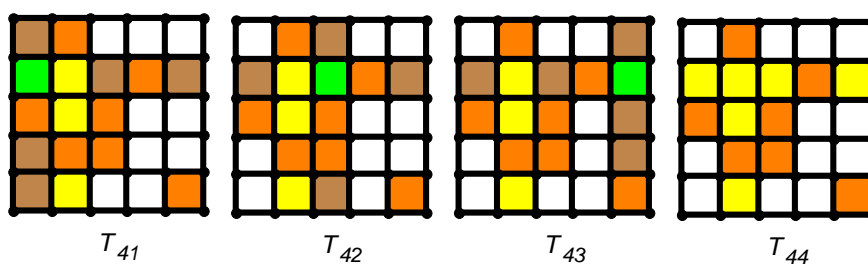
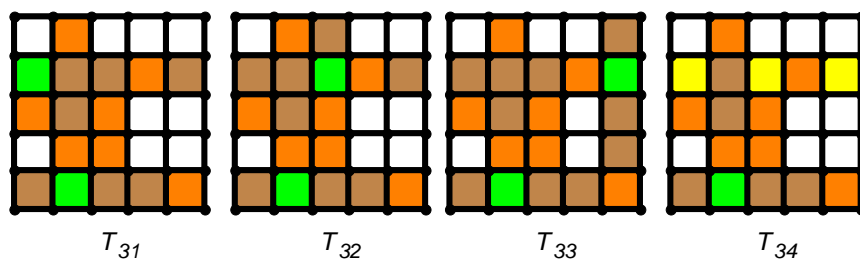
O tabuleiro foi "desenvolvido", na segunda coluna. Na segunda coluna, fica uma torre ou não fica nenhuma torre. Se ficar uma torre, tem de ser numa das três casas livres. Este processo tem a vantagem de ser mais rápido. Se quisermos, podemos escrever

$$r(T) = xr(T_1) + xr(T_2) + xr(T_3) + r(T_4)$$

Nota: estamos a considerar que T_k é o tabuleiro formado unicamente pelas casas livres (casas a branco).

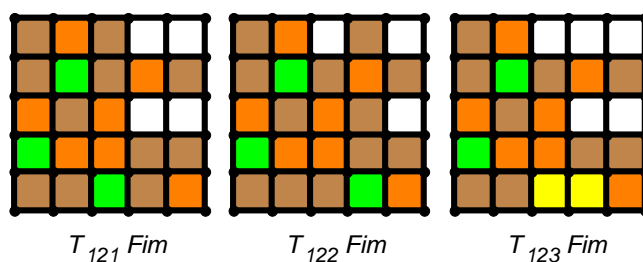
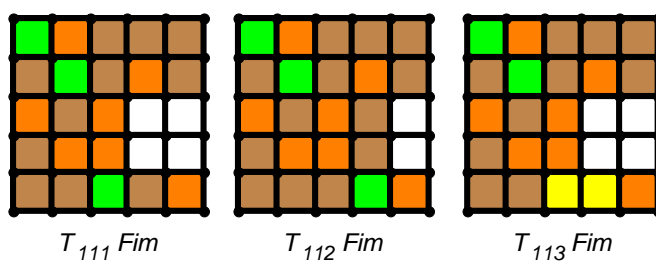
2º Passo

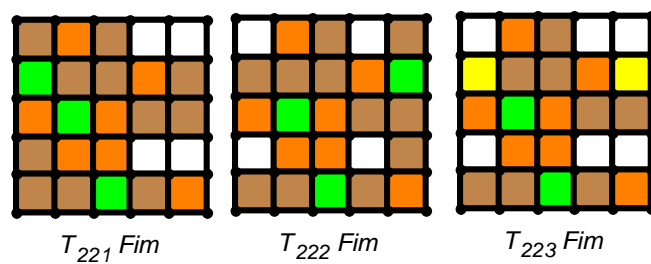
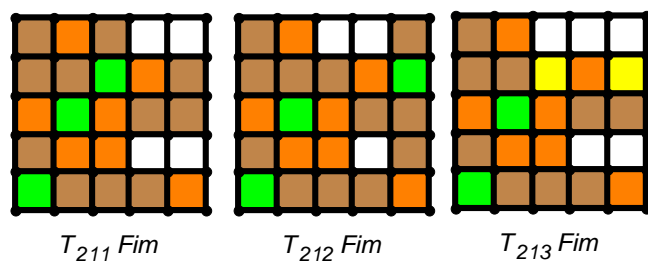
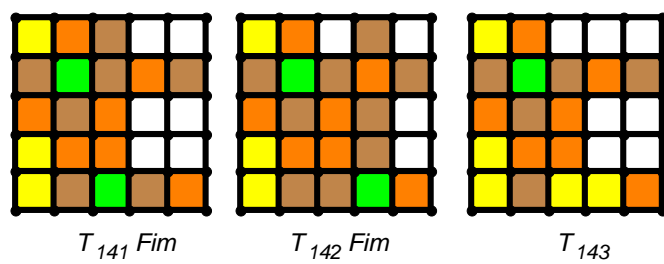
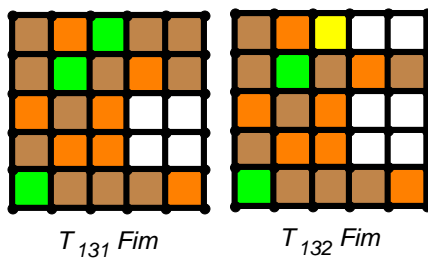


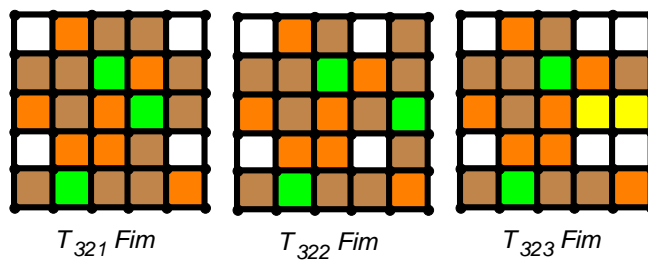
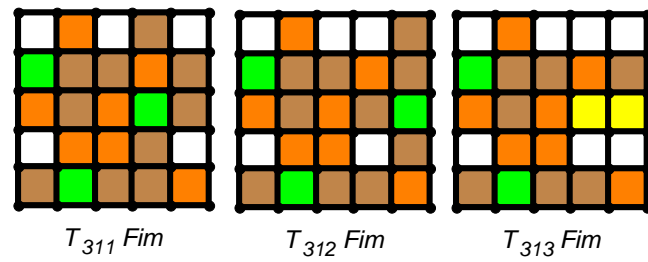
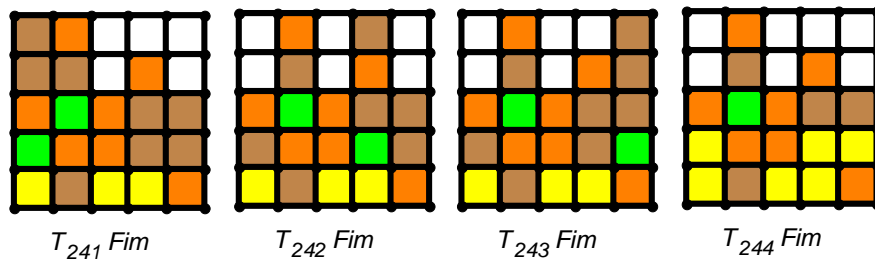
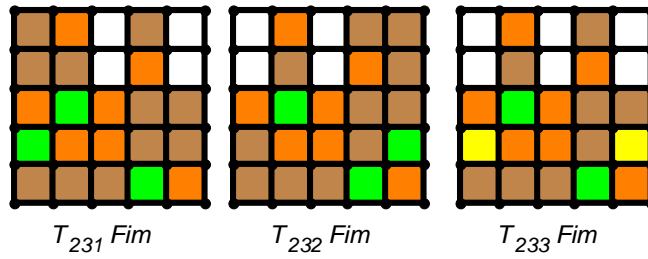


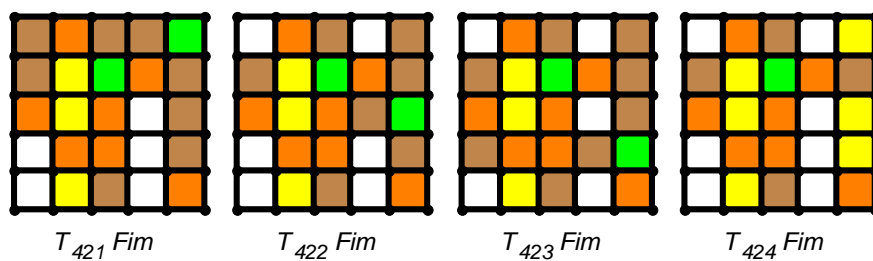
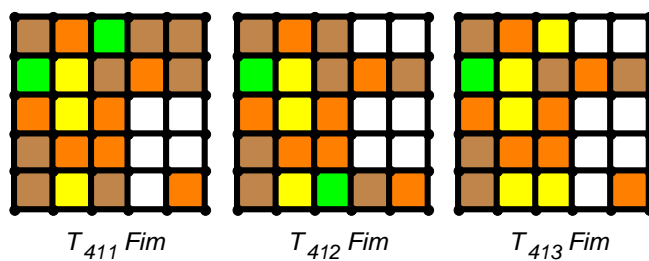
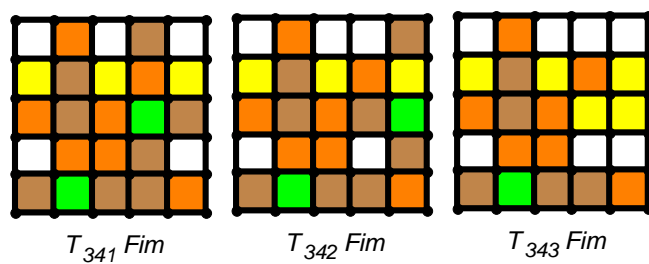
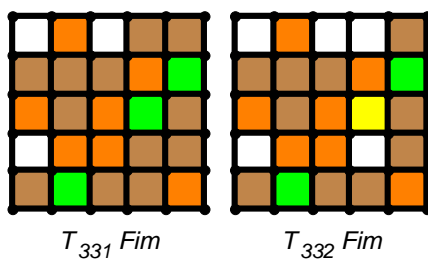
Embora seja possível calcular o polinómio associado a alguns dos tabuleiros, é preferível dar mais um passo, antes desse cálculo.

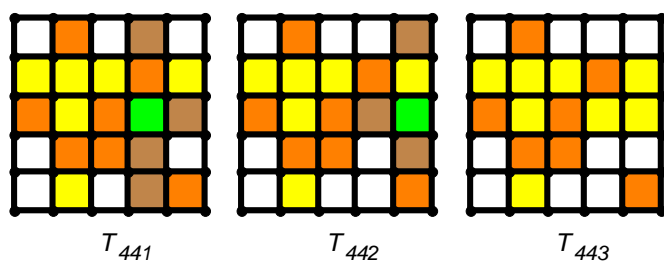
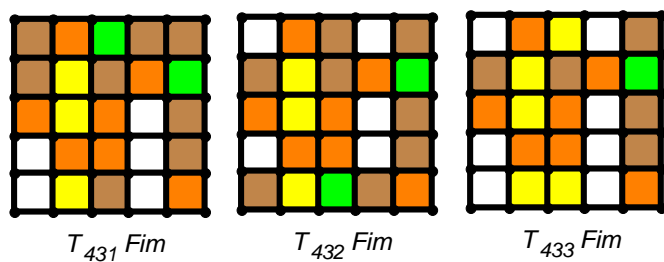
3º Passo





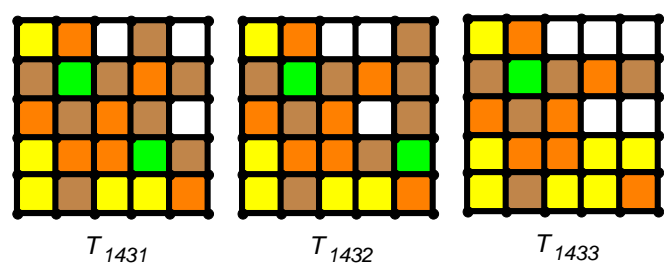


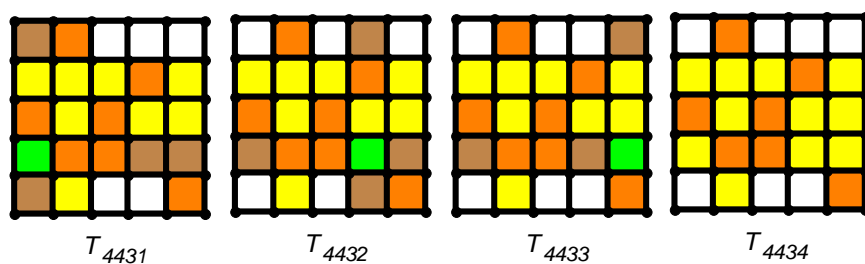
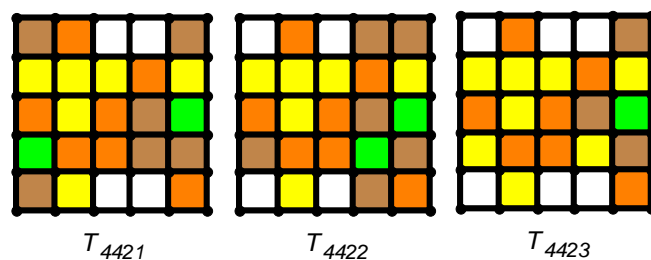
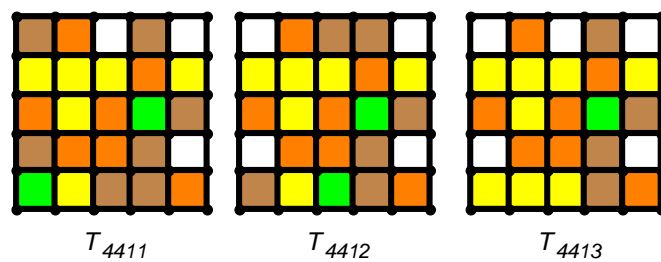




Os tabuleiros assinalados com "Fim" são aqueles em que o polinómio associado é de cálculo imediato. Em apenas quatro dos tabuleiros não está escrita a palavra "Fim", pelo que esses passarão para o passo seguinte.

4º Passo





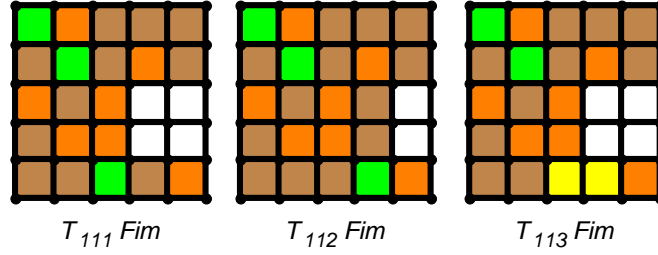
Em todos os casos, temos as casas livres distribuídas por duas únicas linhas, pelo que o cálculo do polinómio associado a cada tabuleiro é imediato.

Agora, o único problema é o número de tabuleiros a serem considerados.

Cálculo do polinómio-torre

Polinómios do 3º Passo

Os primeiros três tabuleiros são os seguintes:



Ora, $r(T_{111}) = 1 + 4x + 2x^2$, considerando as casas livres. No entanto, o que nos interessa verdadeiramente é o polinómio

$$x^3 r(T_{111}) = x^3 (1 + 4x + 2x^2) = x^3 + 4x^4 + 2x^5$$

Então, vamos usar a letra maiúscula R , para $x^3 r(T_{111})$, ou seja, $R(T_{111}) = x^3 (1 + 4x + 2x^2) = x^3 + 4x^4 + 2x^5$.

Note-se que $R(T_{113}) = x^2 (1 + 4x + 2x^2) = x^2 + 4x^3 + 2x^4$, pois só estão colocadas duas torres no tabuleiro T_{113} .

Como já foi observado, em vez de $R(T_{113})$, podemos escrever $R(T_{113}, x)$. No entanto, vamos optar por escrever, apenas, $R(T_{113})$.

Tab T_k	Pol $R(T_k)$	Tab T_k	Pol $R(T_k)$
T_{111}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$	T_{211}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$
T_{112}	$x^3 + 2x^4$	T_{212}	$x^2 + 3x^3 + x^4$
T_{113}	$x^2 + 4x^3 + 2x^4$	T_{213}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$
T_{121}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$	T_{221}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$
T_{122}	$x^3 + 3x^4 + x^5$	T_{222}	$x^2 + 4x^3 + 2x^4$
T_{123}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$	T_{223}	$x^2 + 6x^3 + 6x^4$
T_{131}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$	T_{231}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$
T_{132}	$x^2 + 6x^3 + 6x^4$	T_{232}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$
T_{141}	$x^2 + 6x^3 + 6x^4$	T_{233}	$x^2 + 6x^3 + 6x^4$
T_{142}	$x^2 + 4x^3 + 2x^4$	T_{241}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$
		T_{242}	$x^2 + 6x^3 + 6x^4$
		T_{243}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$
		T_{244}	$x + 7x^2 + 9x^3$

$$\text{Soma} \quad 5x^2 + 30x^3 + 37x^4 + 7x^5 \quad \text{Soma} \quad x + 15x^2 + 53x^3 + 49x^4 + 8x^5$$

Somando os dois polinómios obtidos, vem

$$x + 20x^2 + 83x^3 + 86x^4 + 15x^5$$

Continuemos, com mais polinómios do terceiro passo:

Tab T_k	Pol $R(T_k)$	Tab T_k	Pol $R(T_k)$
T_{311}	$x^3 + 5x^4 + 4x^5$	T_{411}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$
T_{312}	$x^3 + 5x^4 + 4x^5$	T_{412}	$x^2 + 6x^3 + 6x^4$
T_{313}	$x^2 + 7x^3 + 9x^4$	T_{413}	$x + 7x^2 + 9x^3$
T_{321}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$	T_{421}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$
T_{322}	$x^3 + 4x^4 + 2x^5$	T_{422}	$x^2 + 6x^3 + 6x^4$
T_{323}	$x^2 + 6x^3 + 6x^4$	T_{423}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$
T_{331}	$x^3 + 3x^4 + x^5$	T_{424}	$x + 7x^2 + 9x^3$
T_{332}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$	T_{431}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$
T_{341}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$	T_{432}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$
T_{342}	$x^2 + 5x^3 + 4x^4$	T_{433}	$x + 7x^2 + 9x^3$
T_{343}	$x + 7x^2 + 9x^3$		
Soma	$x + 12x^2 + 42x^3 + 48x^4 + 13x^5$	Soma	$3x + 28x^2 + 64x^3 + 32x^4$

Somando os dois polinômios obtidos, vem

$$4x + 40x^2 + 106x^3 + 80x^4 + 13x^5$$

Polinômios do 4º Passo

Tab T_k	Pol $R(T_k)$	Tab T_k	Pol $R(T_k)$
T_{1431}	$x^2 + 3x^3 + x^4$	T_{4421}	$x^2 + 4x^3 + 2x^4$
T_{1432}	$x^2 + 3x^3 + x^4$	T_{4422}	$x^2 + 4x^3 + 2x^4$
T_{1433}	$x + 5x^2 + 4x^3$	T_{4423}	$x + 6x^2 + 6x^3$
T_{4411}	$x^2 + 3x^3 + x^4$	T_{4431}	$x + 5x^2 + 4x^3$
T_{4412}	$x^2 + 4x^3 + 2x^4$	T_{4432}	$x + 5x^2 + 4x^3$
T_{4413}	$x + 5x^2 + 4x^3$	T_{4433}	$x + 6x^2 + 6x^3$
		T_{4434}	$1 + 7x + 9x^2$
Soma	$2x + 14x^2 + 21x^3 + 5x^4$	Soma	$1 + 11x + 33x^2 + 28x^3 + 4x^4$

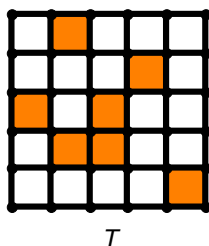
Somando os dois polinômios obtidos, vem

$$1 + 13x + 47x^2 + 49x^3 + 9x^4$$

Agora, vamos somar as três somas (realçadas no texto), obtendo-se o polinômio-torre associado ao tabuleiro inicial (com as restrições impostas):

$$R(T) = 1 + 18x + 107x^2 + 238x^3 + 175x^4 + 28x^5$$

O resultado anterior não está muito mal, pois começa por $1 + 18x$, sendo que o tabuleiro tem 7 casas interditas às torres, pelo que ficam 18 casas livres. Então, temos 18 maneiras de colocar uma torre. Logo, pelo menos dois termos do polinômio-torre estão certos...



Esta é uma questão interessante, mas terrível para um ser humano (como eu). No meio de tanta figura a construir e de tanto CtrlC e CtrlV utilizado, só num milagre faz com que o resultado esteja certo. Acresce o facto da impressão em papel ser cara...

Capítulo 33

Estatística

Há duas questões que costumam ser tratadas de maneiras diferentes consoante os autores: os quartis e os quantis.

Parece-me que seria fácil chegar a um consenso, se houvesse vontade de consegui-lo.

Vejamos alguns exemplos gráficos sobre quartis:

Exemplo 714 *As alturas dos 25 alunos de uma turma de 10^o Ano são as seguintes (em cm):*

158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 165, 166, 167, 168, 168, 169, 169, 169, 170,
172, 173, 174, 175, 176, 176, 177, 178, 179

Vejamos como obter graficamente o 1^o e o 3^o quartis e a mediana:

Começamos por marcar os pontos $A_1 = (1, y_1) = (1, 158)$, $A_2 = (2, y_2) = (2, 159)$, \dots , $A_{25} = (25, y_{25}) = (25, 179)$.

Depois, unimos os pontos A_1, A_2, \dots, A_{25} através de segmentos de reta, obtendo-se o gráfico duma função f de domínio $[1, 25]$.

Agora, divide-se o intervalo $[1, 25]$ em quatro partes iguais:

$$\begin{cases} a = \frac{1+25}{2} = 13 \\ b = \frac{1+13}{2} = 7 \\ c = \frac{13+25}{2} = 19 \end{cases}$$

Obtemos, assim, $I_1 = [1, 7]$, $I_2 = [7, 13]$, $I_3 = [13, 19]$ e $I_4 = [19, 25]$.

Extremo inferior: $f(1) = 158$

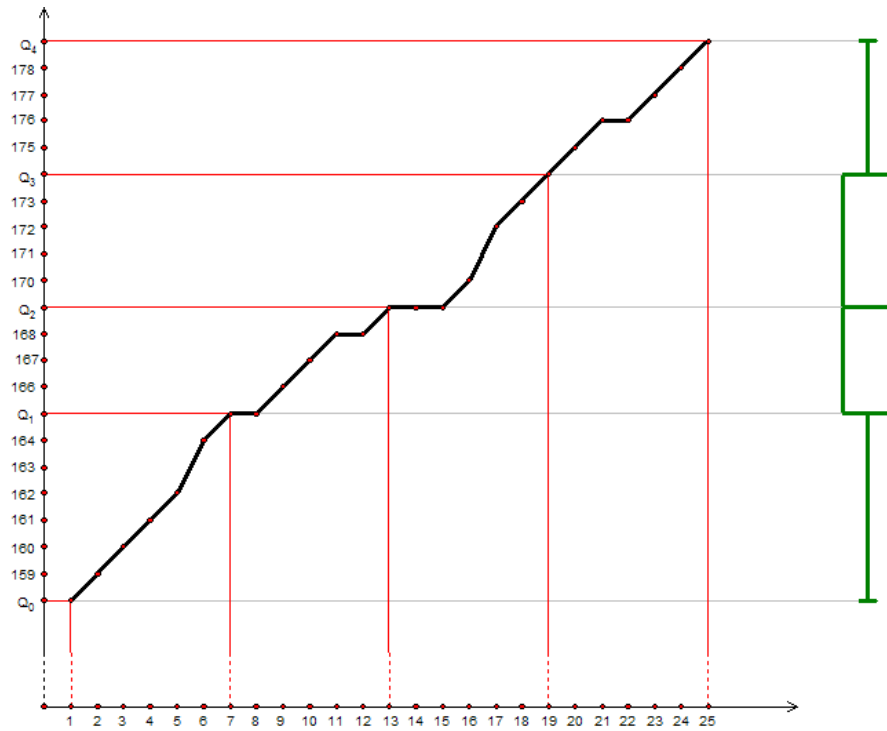
1^o quartil: $Q_1 = f(7) = 165$

2^o quartil (mediana): $Q_2 = f(13) = 169$

3^o quartil: $Q_3 = f(19) = 174$

Extremo superior: $f(25) = 179$

É claro que os valores anteriores são considerados em cm.



À direita, na figura anterior, está desenhado o diagrama de extremos e quartis.

Exemplo 715 As alturas dos 24 alunos de uma turma de 10^o Ano são as seguintes (em cm):

158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 165, 166, 167, 168, 168, 169, 169, 169, 170,
172, 173, 174, 175, 176, 176, 177, 178

Neste caso, temos $D_f = [1, 24]$.

$$\begin{cases} a = \frac{1+24}{2} = \frac{25}{2} = 1 + 2 \times \frac{23}{4} \\ b = \frac{1+\frac{25}{2}}{2} = \frac{27}{4} = 1 + \frac{23}{4} \\ c = \frac{\frac{25}{2}+24}{2} = \frac{73}{4} = 1 + 3 \times \frac{23}{4} \\ 24 = 1 + 4 \times \frac{23}{4} \end{cases}$$

Logo, $I_1 = [1, \frac{27}{4}]$, $I_2 = [7, 13]$, $I_3 = [13, 19]$ e $I_4 = [19, 24]$.

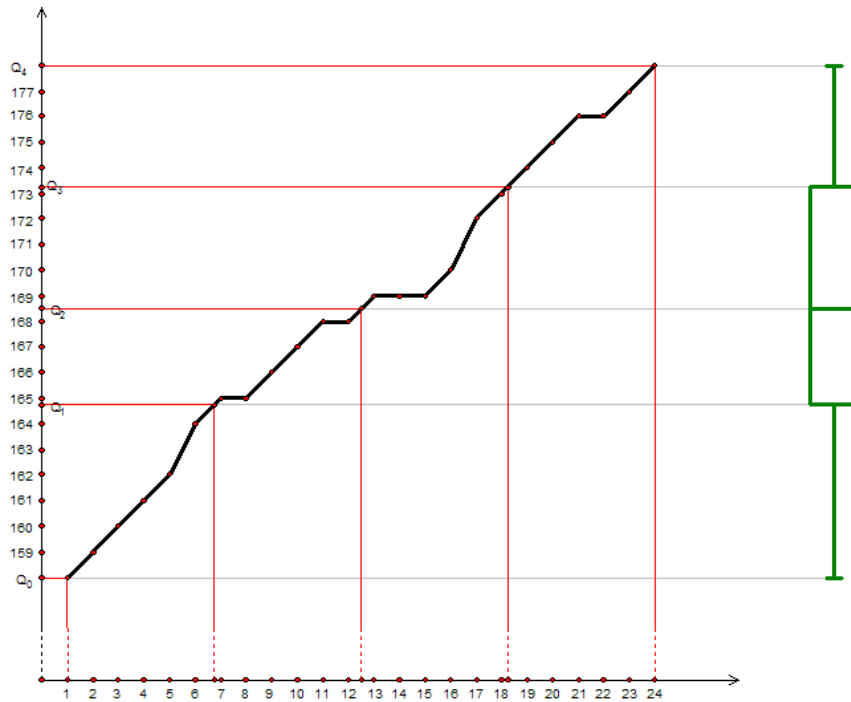
Extremo inferior: $f(1) = 158$

1^o quartil: $Q_1 = f(\frac{27}{4})$

2^o quartil (mediana): $Q_2 = f(\frac{25}{2})$

3^o quartil: $Q_3 = f(\frac{73}{4})$

Extremo superior: $f(24) = 178$



À direita, na figura anterior, está desenhado o diagrama de extremos e quartis.

Exemplo 716 As alturas dos 23 alunos de uma turma de 10ª Ano são as seguintes (em cm):

158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 165, 166, 167, 168, 168, 169, 169, 169, 170,
172, 173, 174, 175, 176, 176, 177

Neste caso, temos $D_f = [1, 23]$.

$$\begin{cases} a = \frac{1+23}{2} = 12 = 1 + 2 \times \frac{22}{4} \\ b = \frac{1+12}{2} = \frac{13}{2} = 1 + \frac{22}{4} \\ c = \frac{12+23}{2} = \frac{35}{2} = 1 + 3 \times \frac{22}{4} \\ 23 = 1 + 4 \times \frac{22}{4} \end{cases}$$

Logo, $I_1 = [1, \frac{13}{2}]$, $I_2 = [\frac{13}{2}, 12]$, $I_3 = [12, \frac{35}{2}]$ e $I_4 = [\frac{35}{2}, 23]$.

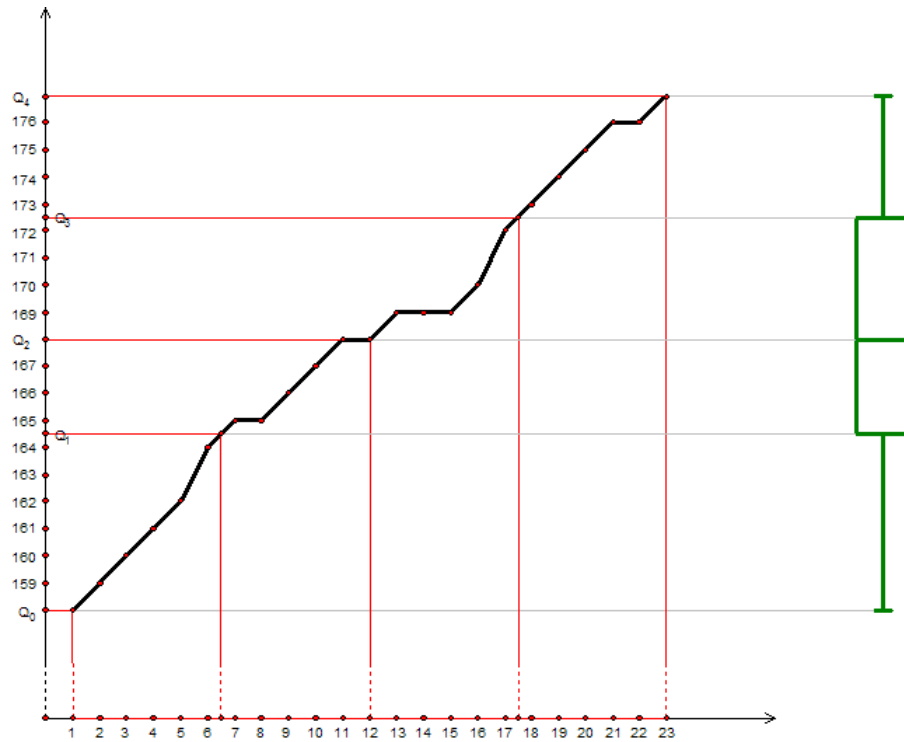
Extremo inferior: $f(1) = 158$

1º quartil: $Q_1 = f(\frac{13}{2})$

2º quartil (mediana): $Q_2 = f(12)$

3º quartil: $Q_3 = f(\frac{35}{2})$

Extremo superior: $f(23) = 177$



À direita, na figura anterior, está desenhado o diagrama de extremos e quartis.

Exemplo 717 As alturas dos 22 alunos de uma turma de 10^o Ano são as seguintes (em cm):

158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 165, 166, 167, 168, 168, 169, 169, 170,
172, 173, 174, 175, 176, 176

Neste caso, temos $D_f = [1, 22]$.

$$\begin{cases} a = \frac{1+22}{2} = \frac{23}{2} = 1 + 2 \times \frac{21}{4} \\ b = \frac{1+\frac{23}{2}}{2} = \frac{25}{4} = 1 + \frac{21}{4} \\ c = \frac{\frac{23}{2}+22}{2} = \frac{67}{4} = 1 + 3 \times \frac{21}{4} \\ 22 = 1 + 4 \times \frac{21}{4} \end{cases}$$

Logo, $I_1 = [1, \frac{13}{2}]$, $I_2 = [\frac{13}{2}, 12]$, $I_3 = [12, \frac{35}{2}]$ e $I_4 = [\frac{35}{2}, 23]$.

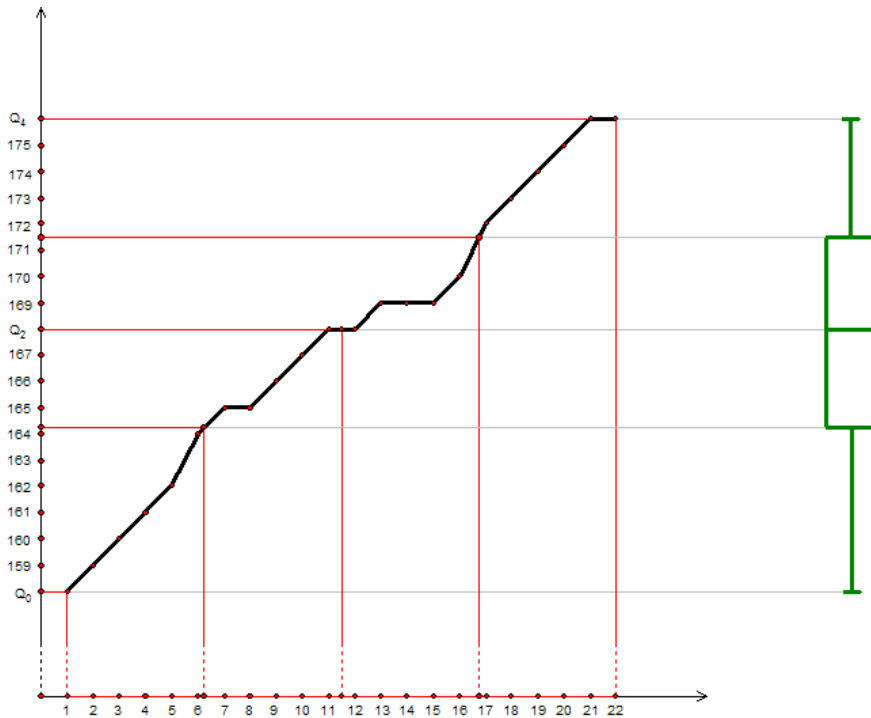
Extremo inferior: $f(1) = 158$

1^o quartil: $Q_1 = f(\frac{25}{4})$

2^o quartil (mediana): $Q_2 = f(\frac{23}{2})$

3^o quartil: $Q_3 = f(\frac{67}{4})$

Extremo superior: $f(22) = 176$



À direita, na figura anterior, está desenhado o diagrama de extremos e quartis.

Exemplo 718 As alturas dos N alunos de uma Escola são y_1, y_2, \dots, y_N (em cm). Estamos a supor que a lista anterior está ordenada por ordem crescente, isto é, $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_{N-1} \leq y_N$.

É claro que o extremo inferior é y_1 e o extremo superior é y_N .

De modo análogo aos exemplos anteriores, temos uma função f de domínio $[1, N]$.

Dividindo o intervalo $I = [1, N]$ em quatro intervalos de igual comprimento, obtemos:

$$\begin{cases} I_1 = \left[1, 1 + \frac{N-1}{4}\right] \\ I_2 = \left[1 + \frac{N-1}{4}, 1 + \frac{2(N-1)}{4}\right] \\ I_3 = \left[1 + \frac{2(N-1)}{4}, 1 + \frac{3(N-1)}{4}\right] \\ I_4 = \left[1 + \frac{3(N-1)}{4}, N\right] \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} Q_1 = f\left(1 + \frac{N-1}{4}\right) = f\left(\frac{N+3}{4}\right) \\ Q_2 = f\left(1 + \frac{2(N-1)}{4}\right) = f\left(\frac{N+1}{2}\right) \\ Q_3 = f\left(1 + \frac{3(N-1)}{4}\right) = f\left(\frac{3N+1}{4}\right) \end{cases}$$

Os valores $f\left(\frac{N+3}{4}\right)$, $f\left(\frac{N+1}{2}\right)$ e $f\left(\frac{3N+1}{4}\right)$ podem ser calculados analiticamente, como veremos a seguir.

Como calcular, por exemplo, $f\left(\frac{11}{2}\right)$? Como f é uma função crescente, $f\left(\frac{11}{2}\right)$ está entre $f(5)$ e $f(6)$, sendo razoável admitir que $f\left(\frac{11}{2}\right)$ tem de ser a média aritmética entre $f(5)$ e $f(6)$.

Logo, $f\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2}f(5) + \frac{1}{2}f(6) = \frac{1}{2}y_5 + \frac{1}{2}y_6$.

E se quisermos calcular $f\left(\frac{35}{4}\right)$?

Ora, $f(8) \leq f\left(\frac{35}{4}\right) \leq f(9)$, tendo-se que $\frac{35}{4}$ está mais próximo de 9 do que de 8. Então, intuitivamente, temos que $f\left(\frac{35}{4}\right)$ é obtido por uma média ponderada entre $f(8)$ e $f(9)$, ou seja, $f\left(\frac{35}{4}\right) = \frac{1}{4}f(8) + \frac{3}{4}f(9)$.

Vejamos como obter $f(x)$, com $n < x < n+1$ e $n \in \mathbb{N}$:

Sejam $A_n = (n, y_n)$ e $A_{n+1} = (n+1, y_{n+1})$.

Então, $\overrightarrow{A_n A_{n+1}} = A_{n+1} - A_n = (n+1, y_{n+1}) - (n, y_n) = (1, y_{n+1} - y_n)$.

Logo, o declive da reta definida por A_n e A_{n+1} é $y_{n+1} - y_n$.

O segmento $[A_n, A_{n+1}]$ é definido pela equação $y - y_n = (y_{n+1} - y_n)(x - n)$, com $n \leq x \leq n+1$.

Então, $y = (x - n)y_{n+1} + (n + 1 - x)y_n = (x - n)y_{n+1} + (1 - (x - n))y_n$.

Se representarmos $x - n$ por α , temos $f(n + \alpha) = \alpha f(n) + (1 - \alpha)f(n + 1)$, com $0 < \alpha < 1$.

Então, por exemplo, $f(7, 35) = 0,65f(7) + 0,35f(8)$.

De forma sugestiva, escrevemos $y_{7,35} = 0,65y_7 + 0,35y_8$.

Então, numa lista ordenada de 24 elementos, temos

$$\begin{cases} Q_1 = f\left(1 + \frac{24-1}{4}\right) = f\left(\frac{27}{4}\right) = y_{\frac{27}{4}} = y_{6,75} = 0,25y_6 + 0,75y_7 \\ Q_2 = f\left(1 + \frac{2(24-1)}{4}\right) = f\left(\frac{25}{2}\right) = y_{\frac{25}{2}} = \frac{1}{2}y_{12} + \frac{1}{2}y_{13} \\ Q_3 = f\left(1 + \frac{3(N-1)}{4}\right) = f\left(\frac{73}{4}\right) = y_{18,25} = 0,75y_{18} + 0,25y_{19} \end{cases}$$

Relativamente aos últimos três exemplos, temos:

1. Lista com 24 elementos

1º quartil:

$$\begin{aligned} Q_1 &= f\left(\frac{27}{4}\right) = f(6,75) = 0,25y_6 + 0,75y_7 = 0,25 \times 164 + 0,75 \times 165 \\ &= 41 + 123,75 = 164,75 \end{aligned}$$

2º quartil (mediana):

$$Q_2 = f\left(\frac{25}{2}\right) = f(12,5) = 0,5y_{12} + 0,5y_{13} = 0,5 \times 168 + 0,5 \times 169 = 168,5$$

3º quartil:

$$\begin{aligned} Q_3 &= f\left(\frac{73}{4}\right) = f(18,25) = 0,75y_{18} + 0,25y_{19} = 0,75 \times 173 + 0,25 \times 174 \\ &= 129,75 + 43,5 = 173,25 \end{aligned}$$

2. Lista com 23 elementos

1º quartil:

$$Q_1 = f\left(\frac{13}{2}\right) = f(6,5) = 0,5y_6 + 0,5y_7 = 0,5 \times 164 + 0,5 \times 165 = 164,5$$

2º quartil (mediana):

$$Q_2 = f(12) = y_{12} = 168$$

3º quartil:

$$Q_3 = f\left(\frac{35}{2}\right) = f(17,5) = 0,5y_{17} + 0,5y_{18} = 0,5 \times 172 + 0,5 \times 173 = 172,5$$

3. Lista com 22 elementos

1º quartil:

$$\begin{aligned} Q_1 &= f\left(\frac{25}{4}\right) = f(6,25) = 0,75y_6 + 0,25y_7 = 0,75 \times 164 + 0,25 \times 165 \\ &= 123 + 41,25 = 164,25 \end{aligned}$$

2º quartil (mediana):

$$Q_2 = f\left(\frac{23}{2}\right) = f(11,5) = 0,5y_{11} + 0,5y_{12} = 0,5 \times 168 + 0,5 \times 168 = 168$$

3º quartil:

$$\begin{aligned} Q_3 &= f\left(\frac{67}{4}\right) = f(16,75) = 0,25y_{16} + 0,75y_{17} = 0,25 \times 170 + 0,75 \times 172 \\ &= 127,5 + 43 = 170,5 \end{aligned}$$

E, agora, podemos passar aos quantis, sem qualquer dificuldade.

Definição 719 Dada uma lista crescente y_1, y_2, \dots, y_N , profundidade dum elemento y_k , com $k \in \mathbb{N}$, é $k - 1$ e a profundidade da lista é $N - 1$.

Observação

A definição de profundidade apresentada é semelhante à profundidade num poço, enquanto que a definição habitual é análoga à profundidade num túnel.

Definição 720 Dada uma lista crescente $y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, y_N$ e um número real α , com $\alpha \in [0, 1]$, q_α , o quantil correspondente a α , é dado por $q_\alpha = y_{1+\alpha(N-1)}$.

Note-se que $q_0 = y_{1+0(N-1)} = y_1$ e $q_1 = y_{1+1(N-1)} = y_N$. Esta não é a definição habitual, mas tem a vantagem de ser mais precisa e coincide com as definições anteriores de quartis e mediana, para os valores $\alpha = \frac{1}{4}$, $\alpha = \frac{3}{4}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

Note-se que, com esta definição, a noção fundamental é a de profundidade e não a de frequência relativa.

Exercício 721 Como obter o quantil correspondente a 0,123, numa lista (crescente) de 24 elementos?

$$q_{0,123} = y_{1+0,123 \times 23} = y_{3,829} = 0,171y_3 + 0,829y_4$$

Exemplo 722 As alturas dos 25 alunos de uma turma de 10^o Ano são as seguintes (em cm):

158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 165, 166, 167, 168, 168, 169, 169, 169, 170,
172, 173, 174, 175, 176, 176, 177, 178, 179

Tabela de frequências:

i	z_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i z_i$		i	z_i	n_i	N_i	f_i	F_i	$n_i z_i$
1	158	1	1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	158		11	169	3	15	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{5}$	507
2	159	1	2	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	159		12	170	1	16	$\frac{1}{25}$	$\frac{16}{25}$	170
3	160	1	3	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	160		13	172	1	17	$\frac{1}{25}$	$\frac{17}{25}$	172
4	161	1	4	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	161		14	173	1	18	$\frac{1}{25}$	$\frac{18}{25}$	173
5	162	1	5	$\frac{1}{25}$	$\frac{5}{25}$	162		15	174	1	19	$\frac{1}{25}$	$\frac{19}{25}$	174
6	164	1	6	$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	164		16	175	1	20	$\frac{1}{25}$	$\frac{20}{25}$	175
7	165	2	8	$\frac{2}{25}$	$\frac{8}{25}$	330		17	176	2	22	$\frac{2}{25}$	$\frac{22}{25}$	352
8	166	1	9	$\frac{1}{25}$	$\frac{9}{25}$	166		18	177	1	23	$\frac{1}{25}$	$\frac{23}{25}$	177
9	167	1	10	$\frac{1}{25}$	$\frac{10}{25}$	167		19	178	1	24	$\frac{1}{25}$	$\frac{24}{25}$	178
10	168	2	12	$\frac{2}{25}$	$\frac{12}{25}$	336		20	179	1	25	$\frac{1}{25}$	1	179

Diagrama de caule-e-folhas:

			15		89		
15		89			16		0124
16		0124556788999	ou		16		5567889999
17		0234566789			17		0234
					17		566789

Dados agrupados em classes:

Cada classe é um intervalo da forma $[a, b[$, sendo k , o número de classes, o menor número natural tal que $2^k \geq 25 = N$.

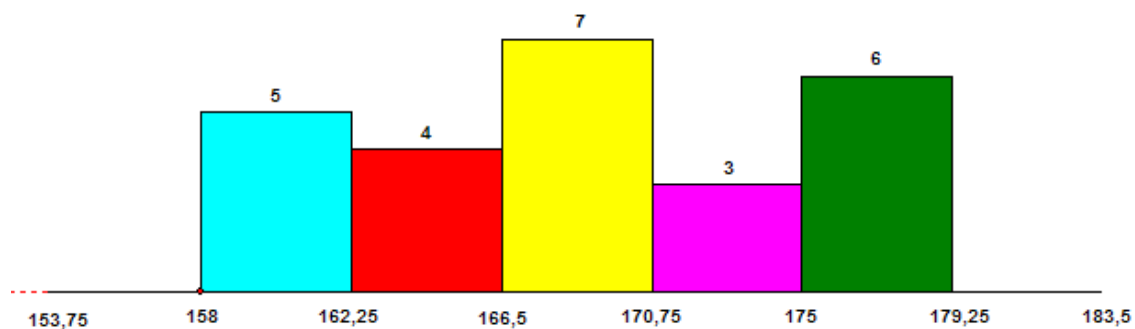
Então, $k = 5$, porque $2^4 = 16 < 25$ e $2^5 = 32 \geq 25$. A amplitude da lista de dados é 21, tendo-se $\frac{21}{5} = 4,2$. Então, a amplitude de cada classe pode ser 4,25. Logo:

$$I_1 = [158; 162, 25[, I_2 = [162, 5; 166, 5[, I_3 = [166, 5; 170, 75[, I_4 = [170, 75; 175[, I_5 = [175; 179, 25[.$$

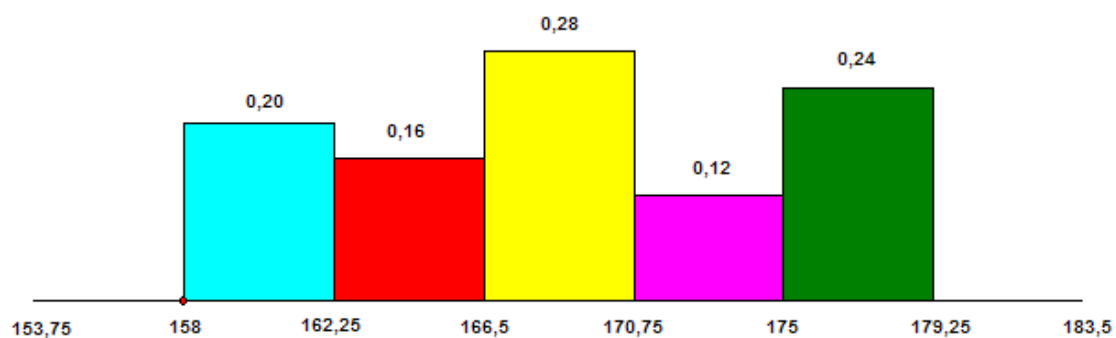
No intervalo I_1 , temos 5 alunos, em I_2 , temos 4 alunos, em I_3 , temos 7 alunos, em I_4 , temos 3 alunos, e em I_5 , temos 6 alunos.

Note-se que há quem considere que a última classe é um intervalo fechado. Nesse caso, não é necessário aumentar a amplitude de cada classe.

Histograma com frequências absolutas:



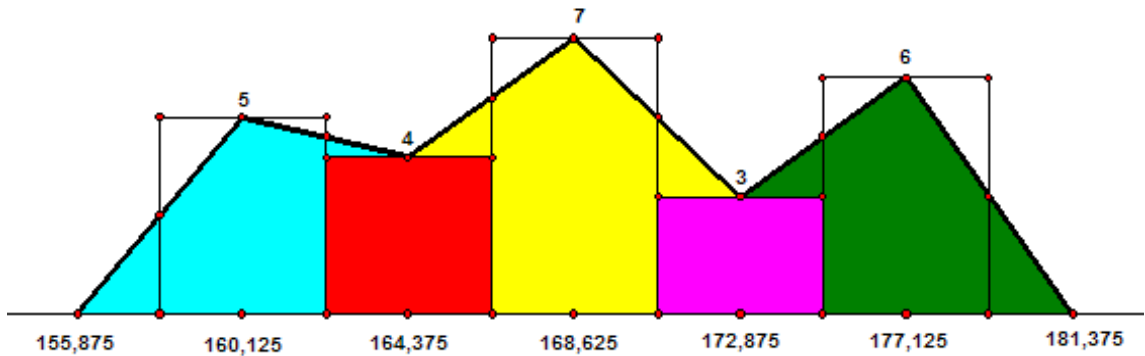
Histograma com frequências relativas:



É imediato verificar que a classe modal é $[166,5; 170,75[$.

Histograma e polígono de frequências:





Note-se que a área colorida é a mesma no histograma e no polígono de frequências.

Média:

Utilizando a marca de cada classe (amplitude média de cada classe), vem:

$$\mu = \frac{5 \times 160,125 + 4 \times 164,375 + 7 \times 168,625 + 3 \times 172,875 + 6 \times 177,125}{25} \text{ cm} = 168,795 \text{ cm}$$

Se utilizarmos a lista inicial, temos:

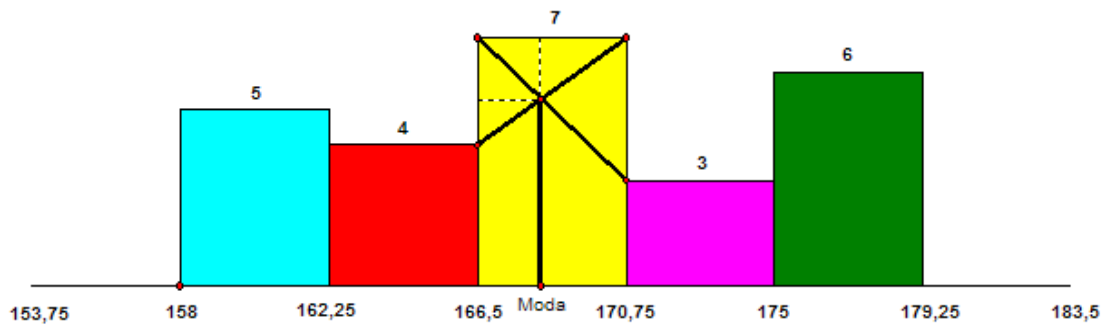
$$\mu = \frac{158+159+160+161+162+164+2 \times 165+166+167+2 \times 168+3 \times 169+170+172+173+174+175+2 \times 176+177+178+179}{25} \text{ cm}$$

Então, $\mu = 168,8 \text{ cm}$.

Neste caso, a diferença entre os dois valores é muito pequena, mas, nalguns casos, pode ser maior.

Moda:

A moda determina-se, graficamente, da seguinte maneira:



Determinação analítica:

Usando semelhança de triângulos, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{4,25} = \frac{y}{x} \wedge \frac{3}{4,25} = \frac{3-y}{x} &\iff \frac{16}{17} = \frac{y}{x} \wedge \frac{12}{17} = \frac{3-y}{x} \\
 &\iff 17y = 16x \wedge 12x = 51 - 17y \\
 &\iff y = \frac{16x}{17} \wedge 12x = 51 - 16x \\
 &\iff y = \frac{16x}{17} \wedge 28x = 51 \\
 &\iff y = \frac{16}{17} \times \frac{51}{28} \wedge x = \frac{51}{28} \\
 &\iff y = \frac{12}{7} \wedge x = \frac{51}{28}
 \end{aligned}$$

Logo, a moda é $(166, 5 + \frac{51}{28})$ cm $\approx 168,32$ cm.

Usando Geometria Analítica:

Sejam $A = (166, 5; 4)$ e $B = (170, 75; 7)$. Então:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 25; 3) \quad m = \frac{3}{4,25} = \frac{12}{17}$$

Equação da reta AB :

$$y - 4 = \frac{12}{17} \left(x - \frac{333}{2} \right)$$

Sejam $C = (166, 5; 7)$ e $D = (170, 75; 3)$. Então:

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (4, 25; -4) \quad m = -\frac{4}{4,25} = -\frac{16}{17}$$

Equação da reta CD :

$$y - 7 = -\frac{16}{17} \left(x - \frac{333}{2} \right)$$

Logo, $\frac{12}{17} \left(x - \frac{333}{2} \right) + 4 = -\frac{16}{17} \left(x - \frac{333}{2} \right) + 7$. Ora:

$$\begin{aligned}
 \frac{12}{17} \left(x - \frac{333}{2} \right) + 4 = -\frac{16}{17} \left(x - \frac{333}{2} \right) + 7 &\iff 12 \left(x - \frac{333}{2} \right) + 68 = -16 \left(x - \frac{333}{2} \right) + 119 \\
 &\iff 12x - 1998 + 68 = -16x + 2664 + 119 \\
 &\iff 28x = 1998 - 68 + 2664 + 119 \\
 &\iff 28x = 4713 \iff x = \frac{4713}{28}
 \end{aligned}$$

Então, a moda é $\frac{4713}{28}$ cm, ou seja, aproximadamente, 168,32 cm.

Retomemos a lista (distribuição) inicial:

Moda: 169 cm

Média: 168,80 cm

Cálculo da variância e do desvio padrão:

i	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	i	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	158	-10.8	116.64	14	169	0.2	0.04
2	159	-9.8	96.04	15	169	0.2	0.04
3	160	-8.8	77.44	16	170	1.2	1.44
4	161	-7.8	60.84	17	172	3.2	10.24
5	162	-6.8	46.24	18	173	4.2	17.64
6	164	-4.8	23.04	19	174	5.2	27.04
7	165	-3.8	14.44	20	175	6.2	38.44
8	165	-3.8	14.44	21	176	7.2	51.84
9	166	-2.8	7.84	22	176	7.2	51.84
10	167	-1.8	3.24	23	177	8.2	67.24
11	168	-0.8	0.64	24	178	9.2	84.64
12	168	-0.8	0.64	25	179	10.2	104.04
13	169	0.2	0.04				

Ora,

$$\left\{ \begin{array}{l} 116,64 + 96,04 + 77,44 + 60,84 + 46,24 + 23,04 + 2 \times 14,44 + 7,84 + 3,24 + 2 \times 0,64 = 461,48 \\ 3 \times 0,04 + 1,44 + 10,24 + 17,64 + 27,04 + 38,44 + 2 \times 51,84 + 67,24 + 84,64 + 104,04 = 454,52 \\ 461,48 + 454,52 = 916,0 \end{array} \right.$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_N^2 = \frac{916}{25} \text{ cm}^2 = 36,64 \text{ cm}^2 \\ \sigma_{N-1}^2 = \frac{916}{24} \text{ cm}^2 \approx 38,17 \text{ cm}^2 \\ \sigma_N = \sqrt{36,64} \text{ cm} \approx 6,05 \text{ cm} \\ \sigma_{N-1} = \sqrt{38,17} \text{ cm} \approx 6,18 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Outro processo de obter a variância

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i^2 - 2\mu y_i + \mu^2)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2 - \sum_{i=1}^N (2\mu y_i) + \sum_{i=1}^N \mu^2}{N} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N} - \frac{2\mu \sum_{i=1}^N y_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N \mu^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N} - 2\mu \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} + \frac{N\mu^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N} - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N} - \mu^2 \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N y_i^2 &= 158^2 + 159^2 + 160^2 + 161^2 + 162^2 + 164^2 + 2 \times 165^2 + 166^2 + 167^2 + 2 \times 168^2 + \\ &\quad + 3 \times 169^2 + 170^2 + 172^2 + 173^2 + 174^2 + 175^2 + 2 \times 176^2 + 177^2 + 178^2 + 179^2 \\ &= 713\,252 \end{aligned}$$

E, $168,8^2 = 28493,44$.

Então,

$$\sigma_N^2 = \frac{713\,252}{25} - 28493,44 = 36,64$$

Se pretendermos calcular σ_{N-1}^2 , temos, em cm^2 :

$$\sigma_{N-1}^2 = \frac{N\sigma_N^2}{N-1} = \frac{25 \times 36,64}{24} \approx 38,17$$

Neste exemplo, não é clara a vantagem deste processo, devido ao facto de termos uma soma de quadrados de números relativamente grandes.

Note-se que as Calculadoras dão o valor de $\sum_{i=1}^N y_i^2$, para além de darem os valores de μ , σ_N e σ_{N-1} .

Ainda outra maneira de obter a variância

Há uma propriedade importante da variância: Se, numa lista (numérica), subtrairmos a (mesma) constante k a todos os elementos da lista, obtemos uma segunda lista com a mesma variância e cuja média vem subtraída de k .

Lista inicial:

158, 159, 160, 161, 162, 164, 165, 165, 166, 167, 168, 168, 169, 169, 169, 170,
172, 173, 174, 175, 176, 176, 177, 178, 179

Subtraindo 170 a todos os elementos da lista anterior, obtemos

-12, -11, -10, -9, -8, -6, -5, -5, -4, -3, -2, -2, -1, -1, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9

Os quadrados dos números anteriores são

144, 121, 100, 81, 64, 36, 25, 25, 16, 9, 4, 4, 1, 1, 1, 0, 4, 9, 16, 25, 36, 36, 49, 64, 81

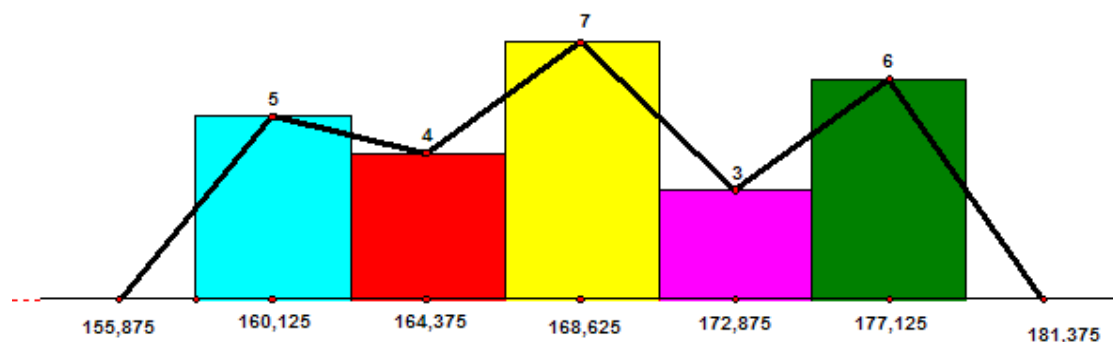
A soma desses quadrados é 952, tendo-se que a média da lista modificada é -1,2.

Então,

$$\sigma_N^2 = \frac{952}{25} - (-1,2)^2 = 38,08 - 1,44 = 36,64$$

E, como pudemos verificar, obtivemos o mesmo resultado, tendo-se simplificado os cálculos.

Cálculo da variância, usando a distribuição por classes:



$$\begin{aligned}
 25\sigma_N^2 &= 5 \times (160,125 - 168,795)^2 + 4 \times (164,375 - 168,795)^2 + 7 \times (168,625 - 168,795)^2 + \\
 &\quad + 3 \times (172,875 - 168,795)^2 + 6 \times (177,125 - 168,795)^2 \\
 &= 920,465
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_N^2 = \frac{920,465}{25} = 36,8186$$

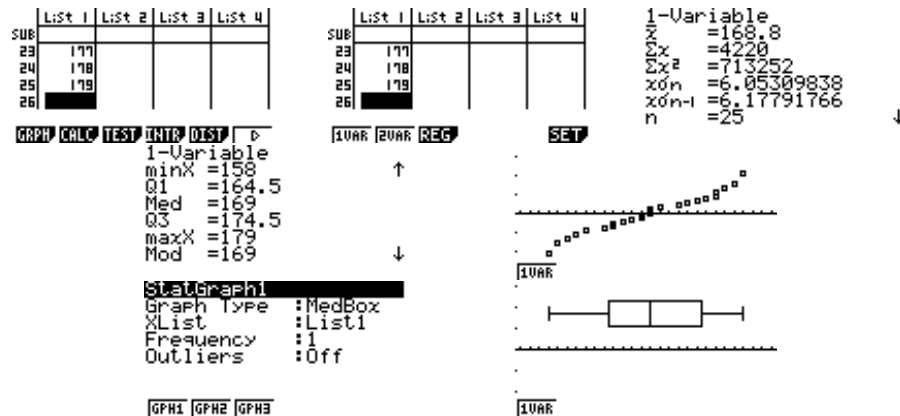
Então, $\sigma_N = \sqrt{36,8186} \approx 6,07$.

Variância: $36,82 \text{ cm}^2$ Desvio padrão: $6,07 \text{ cm}$.

É claro que

$$\sigma_{N-1}^2 = \frac{920,465}{24} \approx 38,35 \wedge \sigma_{N-1} \approx 6,19$$

Utilização da Calculadora Casio FX-9860:



Outra divisão em classes

O número de classes é o menor número natural k , tal que $2^k \geq 25 = N$.

Então, $k = 5$. A amplitude da lista de dados é 21, tendo-se $\frac{21}{5} = 4,2$. A amplitude de cada classe pode ser 4,25.

Ora, $5 \times 4,25 = 21,25$, tendo-se $21,25 - 21 = 0,25$. Metade deste valor pode ser subtraído ao valor mínimo e somado ao valor máximo da lista, obtendo-se $158 - 0,125 = 157,875$ e $179 + 0,125 = 179,125$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= [157,875; 162,125[, \quad I_2 = [162,125; 166,375[, \quad I_3 = [166,375; 170,625[, \quad I_4 = [170,625; 174,875[, \\
 &\quad I_5 = [174,875; 179,125[.
 \end{aligned}$$

No intervalo I_1 , temos 5 alunos, em I_2 , temos 4 alunos, em I_3 , temos 7 alunos, em I_4 , temos 3 alunos, e em I_5 , temos 6 alunos.

Neste caso, não há diferenças no número de elementos de cada classe. A única diferença com algum significado é a marca de cada classe que, neste caso, é ligeiramente inferior.

Capítulo 34

Equações Irracionais

Exemplo 723 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x-4}$.

Resolução

Para que $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x-4}$, devemos ter $2x+1 = 3x-4$, mas também $2x+1 \geq 0$ e $3x-4 \geq 0$. Logo, $x = 5$, $x \geq -\frac{1}{2}$ e $x \geq \frac{4}{3}$. Então, $x = 5$. Logo, $S = \{5\}$.

Exemplo 724 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+4}$.

Resolução

Para que $\sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+4}$, devemos ter $2x+1 = 3x+4$, mas também $2x+1 \geq 0$ e $3x+4 \geq 0$. Logo, $x = -3$, $x \geq -\frac{1}{2}$ e $x \geq -\frac{4}{3}$. Então, a equação dada é impossível, em \mathbb{R} . Logo, $S = \emptyset$.

Exemplo 725 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{3x+1} = x+1$.

Resolução

Neste caso, devemos ter $3x+1 \geq 0$, $x+1 \geq 0$ e $3x+1 = (x+1)^2$.

Então, $x \geq -\frac{1}{3}$, $x \geq -1$ e $x^2 + 2x + 1 - 3x - 1 = 0$.

Logo, $x \geq -\frac{1}{3}$ e $x^2 - x = 0$. Logo, $x \geq -\frac{1}{3}$ e $x(x-1) = 0$.

Então, $x = 0$ ou $x = 1$. Logo, $S = \{0, 1\}$.

Observação

Esta equação (e as outras deste tipo) costuma ser resolvidas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+1} = x+1 &\implies x \geq -\frac{1}{3} \wedge (\sqrt{3x+1})^2 = (x+1)^2 \\ &\implies x \geq -\frac{1}{3} \wedge 3x+1 = x^2 + 2x + 1 \\ &\implies x \geq -\frac{1}{3} \wedge x^2 - x = 0 \implies x \geq -\frac{1}{3} \wedge x(x-1) = 0 \\ &\implies x \geq -\frac{1}{3} \wedge (x=0 \vee x=1) \implies x=0 \vee x=1\end{aligned}$$

Verificação (obrigatória, dado o facto das equações poderem não ser equivalentes):

Para $x = 0$, temos $\sqrt{1} = 1$, pelo que zero é solução da equação inicial.

Para $x = 1$, temos $\sqrt{4} = 2$, pelo que 1 é solução da equação inicial.

Note-se que, em certos casos, não é possível fazer a verificação em todos os casos, dado haver uma infinidade de soluções, pelo que teremos de seguir outro processo:

Exemplo 726 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{x^2} = x$.

Resolução

Devemos ter, por um lado, $x^2 \geq 0$ e, por outro $x \geq 0$. Logo,

$$\left(\sqrt{x^2}\right)^2 = x^2 \wedge x^2 \geq 0 \wedge x \geq 0 \iff x^2 = x^2 \wedge x \geq 0 \iff x \geq 0$$

Logo, $S = [0, +\infty[$.

Exemplo 727 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{x^2} = -x$.

Resolução

Devemos ter, por um lado, $x^2 \geq 0$ e, por outro $-x \geq 0$. Logo,

$$\left(\sqrt{x^2}\right)^2 = (-x)^2 \wedge x^2 \geq 0 \wedge x \leq 0 \iff x^2 = x^2 \wedge x \leq 0 \iff x \leq 0$$

Logo, $S =]-\infty, 0]$.

Exemplo 728 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 1$.

Resolução

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - x - 2} = x - 1 &\iff x^2 - x - 2 \geq 0 \wedge x - 1 \geq 0 \wedge x^2 - x - 2 = (x - 1)^2 \\ &\iff x^2 - x - 2 \geq 0 \wedge x \geq 1 \wedge x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + 1 \\ &\iff (x + 1)(x - 2) \geq 0 \wedge x \geq 1 \wedge x = 3 \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

Então, $S = \{3\}$.

Outro processo

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 1 \implies x^2 - x - 2 = (x - 1)^2 \implies x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + 1 \implies x = 3$$

Para $x = 3$, temos $\sqrt{3^2 - 3 - 2} = 3 - 1$, ou seja, $\sqrt{4} = 2$, obtendo-se uma proposição verdadeira. Logo, $S = \{3\}$.

Exemplo 729 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} = \sqrt{x + 1}$.

Resolução

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} &= \sqrt{x+1} \implies (\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2})^2 = (\sqrt{x+1})^2 \\
&\implies 2x+3 + x-2 - 2\sqrt{(x-2)(2x+3)} = x+1 \\
&\implies 3x+1 - x-1 = 2\sqrt{2x^2+3x-4x-6} \\
&\implies 2x = 2\sqrt{2x^2-x-6} \implies x = \sqrt{2x^2-x-6} \\
&\implies x^2 = (\sqrt{2x^2-x-6})^2 \implies x^2 = 2x^2-x-6 \\
&\implies x^2-x-6 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \\
&\implies x = -2 \vee x = 3
\end{aligned}$$

É claro que -2 não pertence ao domínio de (por exemplo) $\sqrt{2x+3}$.

Quanto a 3 , temos $\sqrt{2 \times 3 + 3} - \sqrt{3 - 2} = \sqrt{3 + 1}$, ou seja, $3 - 1 = 2$.

Logo, 3 é solução de $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$, pelo que $S = \{3\}$.

Exemplo 730 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{3x+2} - \sqrt{x} = \sqrt{3x-4}$.

Resolução

O domínio da equação é dado por

$$3x+2 \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge 3x-4 \geq 0 \iff x \geq -\frac{2}{3} \wedge x \geq 0 \wedge x \geq \frac{4}{3} \iff x \geq \frac{4}{3}$$

Quanto à equação propriamente dita, temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x+2} - \sqrt{x} &= \sqrt{3x-4} \implies (\sqrt{3x+2} - \sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x-4})^2 \\
&\implies 3x+2 + x - 2\sqrt{x}\sqrt{3x+2} = 3x-4 \\
&\implies 4x+2 - 3x+4 = 2\sqrt{3x^2+2x} \implies x+6 = 2\sqrt{3x^2+2x} \\
&\implies (x+6)^2 = (2\sqrt{3x^2+2x})^2 \implies x^2+12x+36 = 4(3x^2+2x) \\
&\implies x^2+12x+36 = 12x^2+8x \implies 11x^2-4x-36 = 0 \\
&\implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4+396}}{11} \implies x = 2 \vee x = -\frac{18}{11}
\end{aligned}$$

Como $-\frac{18}{11}$ não pertence ao domínio, basta-nos verificar se 2 é solução. Ora,

$$\sqrt{3 \times 2 + 2} - \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2 - 4} \iff \sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \iff 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Então, $S = \{2\}$.

Exemplo 731 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{3x+2} - \sqrt[4]{x+4} = 0$.

Resolução

Devemos ter $3x + 2 \geq 0$ e $x + 4 \geq 0$, pelo que $x \geq -\frac{2}{3}$ e $x \geq -4$. Logo, $x \geq -\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+2} - \sqrt[4]{x+4} = 0 &\implies \sqrt{3x+2} = \sqrt[4]{x+4} \implies (\sqrt{3x+2})^4 = (\sqrt[4]{x+4})^4 \\ &\implies (3x+2)^2 = x+4 \implies 9x^2 + 12x + 4 = x+4 \\ &\implies 9x^2 + 11x = 0 \implies x(9x+11) = 0 \\ &\implies x = 0 \vee x = -\frac{11}{9}\end{aligned}$$

Ora $-\frac{11}{9}$ não pertence ao domínio e $\sqrt{3 \times 0 + 2} - \sqrt[4]{0 + 4} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$.
Logo, $S = \{0\}$.

Exemplo 732 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{x^2 + 8x} = 2x + 1$.

Resolução

Se quisermos começar pelo domínio, temos $x^2 + 8x \geq 0$, ou seja, $x(x+8) \geq 0$. Então, $x \leq -8 \vee x \geq 0$.

Por outro lado, deve ser $2x + 1 \geq 0$, pelo que $x \geq -\frac{1}{2}$. Logo, devemos ter $x \geq 0$.

Ora,

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 = x^2 + 8x &\implies 4x^2 + 4x + 1 - x^2 - 8x = 0 \implies 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ &\implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} \implies x = \frac{1}{3} \vee x = 1\end{aligned}$$

Então, $S = \{\frac{1}{3}, 1\}$.

Se pretendermos fazer a verificação, temos $\sqrt{1^2 + 8} = 2 + 1$ (verdadeiro) e $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{8}{3}} = \frac{2}{3} + 1$, ou seja, $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ (verdadeiro).

Observação

Partindo de $A(x) = B(x)$ e elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $(A(x))^2 = (B(x))^2$.

Então, $(A(x))^2 - (B(x))^2 = 0$, pelo que $(A(x) - B(x))(A(x) + B(x)) = 0$.

Logo, $A(x) = B(x) \vee A(x) = -B(x)$. Isto significa que, ao elevarmos ambos os membros duma equação ao quadrado, podemos obter soluções estranhas à equação inicial $A(x) = B(x)$, mas tais soluções têm de ser solução da equação $A(x) = -B(x)$.

Exemplo 733 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 5 - 2x$.

Resolução

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 5 - 2x &\implies x^2 + 2x - 15 = 25 - 20x + 4x^2 \\ &\implies -3x^2 + 22x - 40 = 0 \implies 3x^2 - 22x + 40 = 0 \\ &\implies x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{3} \implies x = \frac{10}{3} \vee x = 4\end{aligned}$$

Para $x = 4$, temos $\sqrt{16 + 8 - 15} = 5 - 2 \times 4$, ou seja, $3 = -3$ (proposição falsa), pelo que 4 não é solução da equação $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 5 - 2x$.

Para $x = \frac{10}{3}$, temos $\sqrt{\frac{100}{9} + \frac{20}{3} - 15} = 5 - 2 \times \frac{10}{3}$, ou seja, $\sqrt{\frac{25}{9}} = -\frac{5}{3}$ (proposição falsa), pelo que $\frac{10}{3}$ não é solução da equação $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 5 - 2x$.

Então, a equação $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 5 - 2x$ é impossível em \mathbb{R} .

Exemplo 734 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 2x - 5$.

Resolução

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 2x - 5 &\implies x^2 + 2x - 15 = 25 - 20x + 4x^2 \\ &\implies -3x^2 + 22x - 40 = 0 \implies 3x^2 - 22x + 40 = 0 \\ &\implies x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{3} \implies x = \frac{10}{3} \vee x = 4\end{aligned}$$

É claro que, neste caso, $S = \{\frac{10}{3}, 4\}$.

Exemplo 735 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{2x - 15} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{8 - x}$.

Resolução

$$\begin{aligned}\sqrt{2x - 15} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{8 - x} &\implies (\sqrt{2x - 15} - \sqrt{x + 1})^2 = (\sqrt{8 - x})^2 \\ &\implies 2x - 15 + x + 1 - 2\sqrt{2x - 15}\sqrt{x + 1} = 8 - x \\ &\implies 4x - 22 = 2\sqrt{2x^2 + 2x - 15x - 15} \\ &\implies \sqrt{2x^2 - 13x - 15} = 2x - 11 \\ &\implies 2x^2 - 13x - 15 = 4x^2 - 44x + 121 \\ &\implies 2x^2 - 31x + 136 = 0 \\ &\implies x = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 1088}}{4}\end{aligned}$$

Logo, a equação é impossível, em \mathbb{R} . Então, $S = \emptyset$.

Exemplo 736 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{2x - 15} = \sqrt{x + 1} - \sqrt{12 - x}$.

Resolução

$$\begin{aligned}\sqrt{x + 1} - \sqrt{12 - x} = \sqrt{2x - 15} &\implies (\sqrt{x + 1} - \sqrt{12 - x})^2 = (\sqrt{2x - 15})^2 \\ &\implies x + 1 + 12 - x - 2\sqrt{x + 1}\sqrt{12 - x} = 2x - 15 \\ &\implies -2\sqrt{12x - x^2 + 12 - x} = 2x - 28 \\ &\implies \sqrt{-x^2 + 11x + 12} = 14 - x \\ &\implies -x^2 + 11x + 12 = 196 - 28x + x^2 \\ &\implies 2x^2 - 39x + 184 = 0 \\ &\implies x = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 1472}}{4} \\ &\implies x = \frac{39 \pm 7}{4} \implies x = 8 \vee x = \frac{23}{2}\end{aligned}$$

Para $x = 8$, temos $\sqrt{16-15} = \sqrt{9} - \sqrt{4}$ que é uma proposição verdadeira.

Para $x = \frac{23}{2}$, temos $\sqrt{8} = \sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Ora, $\sqrt{\frac{25}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{50}{4}} - \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$.

Logo, $\frac{23}{2}$ é solução da equação dada. Então, $S = \{8, \frac{23}{2}\}$.

Exemplo 737 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $2x + \sqrt{2-x} = 1$.

Resolução

$$\begin{aligned} 2x + \sqrt{2-x} = 1 &\implies \sqrt{2-x} = 1 - 2x \\ &\implies (\sqrt{2-x})^2 = (1-2x)^2 \\ &\implies 2-x = 1-4x+4x^2 \\ &\implies 4x^2-3x-1=0 \\ &\implies x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} \\ &\implies x = 1 \vee x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Para $x = 1$, temos $2 + \sqrt{1} = 1$ que é uma proposição falsa.

Para $x = -\frac{1}{4}$, temos $-\frac{1}{2} + \sqrt{2+\frac{1}{4}} = 1$.

Ora, $-\frac{1}{2} + \sqrt{2+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$, pelo que $-\frac{1}{4}$ é solução da equação $2x + \sqrt{2-x} = 1$.

Logo, $S = \{-\frac{1}{4}\}$.

Exemplo 738 Resolva, em \mathbb{R} , a equação $\sqrt{2x-15} - \sqrt{x+1} = \sqrt{16-x}$.

Resolução

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-15} - \sqrt{x+1} = \sqrt{16-x} &\implies \sqrt{2x-15} = \sqrt{x+1} + \sqrt{16-x} \\ &\implies (\sqrt{2x-15})^2 = (\sqrt{x+1} + \sqrt{16-x})^2 \\ &\implies 2x-15 = x+1+16-x+2\sqrt{x+1}\sqrt{16-x} \\ &\implies 2x-32 = 2\sqrt{16x-x^2+16-x} \\ &\implies (x-16)^2 = (\sqrt{-x^2+15x+16})^2 \\ &\implies x^2-32x+256 = -x^2+15x+16 \\ &\implies 2x^2-47x+240 = 0 \\ &\implies x = \frac{47 \pm \sqrt{47^2-8 \times 240}}{4} \\ &\implies x = \frac{47 \pm \sqrt{289}}{4} \\ &\implies x = 16 \vee x = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Para $x = 16$, temos $\sqrt{17} - \sqrt{17} = 0$ que é uma proposição verdadeira.

Para $x = \frac{15}{2}$, temos $\sqrt{0} - \sqrt{\frac{17}{2}} = \sqrt{\frac{17}{2}}$ que é uma proposição falsa.

Logo, $S = \{16\}$.

Exemplo 739 Será possível transformar $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$ numa expressão do tipo $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, com a e b números racionais?

Resolução

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{5 + \sqrt{24}} &\implies (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{5 + \sqrt{24}})^2 \\
 &\implies a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 5 + \sqrt{24} \\
 &\implies a + b = 5 \wedge 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{6} \\
 &\implies a + b = 5 \wedge ab = 6 \\
 &\implies b = 5 - a \wedge a(5 - a) = 6 \\
 &\implies b = 5 - a \wedge 5a - a^2 - 6 = 0 \\
 &\implies b = 5 - a \wedge a^2 - 5a + 6 = 0 \\
 &\implies b = 5 - a \wedge (a = 2 \vee a = 3) \\
 &\implies (a = 2 \wedge b = 3) \vee (a = 3 \wedge b = 2)
 \end{aligned}$$

Logo, $\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Capítulo 35

Duas Funções Curiosas

Começemos por lembrar que a função $I(x) = x$, chamamos função identidade e que esta função é elemento neutro na composição de funções; dada uma função arbitrária $h(x)$, então $I(h(x)) = h(x)$ e $h(I(x)) = h(x)$. Claro que é necessário que os domínios das funções respeitem certas regras.

Consideremos as funções reais de variável real definidas por $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = 1 - x$. A partir destas funções, podemos obter outras por composição, obtendo novas funções que se podem compor com as anteriores. Será que este processo originará um número infinito de funções?

Calculemos algumas funções compostas:

$$\begin{cases} (f \circ f)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \\ (g \circ g)(x) = g(1 - x) = 1 - (1 - x) = x \end{cases}$$

Podemos afirmar que as duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são inversas de si próprias ou que se tratam de involuções, porque a composta de cada uma das funções consigo própria dá a função identidade.

Antes de continuarmos, chama-se a atenção para a questão dos domínios das funções anteriores, mas deixamos essa questão para mais tarde. Continuemos a calcular algumas funções compostas:

$$(f \circ g)(x) = f(1 - x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)\left(f(x)\right) = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1}$$

$$(f \circ g \circ f \circ g)(x) = (f \circ g \circ f)(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x}$$

$$(f \circ g \circ f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g \circ f \circ g)\left(f(x)\right) = \frac{f(x)-1}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}} = 1 - x$$

$$(f \circ g \circ f \circ g \circ f \circ g)(x) = (f \circ g \circ f \circ g \circ f)(g(x)) = 1 - g(x) = 1 - (1 - x) = x$$

E eis-nos chegados a uma situação bastante interessante: obtivemos a função identidade.

Mas continuemos, agora com g à esquerda:

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$(g \circ f \circ g)(x) = (g \circ f)(g(x)) = \frac{g(x)-1}{g(x)} = \frac{1-x-1}{1-x} = \frac{x}{x-1}$$

$$(g \circ f \circ g \circ f)(x) = (g \circ f \circ g)\left(f(x)\right) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$(g \circ f \circ g \circ f \circ g)(x) = (g \circ f \circ g \circ f)(g(x)) = \frac{1}{1-g(x)} = \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$$

$$(g \circ f \circ g \circ f \circ g \circ f)(x) = (g \circ f \circ g \circ f \circ g)\left(f(x)\right) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

E voltámos a obter a função identidade, sem que tenhamos obtido qualquer função, para além das que havíamos obtido anteriormente.

Falta-nos explicar que não pode haver mais funções:

Suponhamos que temos uma sequência de funções f e g . Como $f \circ f$ e $g \circ g$ dão a função identidade, não adianta considerar expressões com dois f ou com dois g seguidos, pelo que só interessa expressões com f e g alternados, podendo as expressões começar por f ou por g . Mas, também, não interessa considerar expressões com seis ou mais funções (f e g alternados), porque 6 funções (com f e g alternados) originam a função identidade.

Então, apenas, podemos obter as seis funções $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{x}, x, \frac{x}{x-1}, \frac{x-1}{x}, 1-x$.

Para evitar problemas, consideramos que o domínio das seis funções anteriores é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Vamos resumir, numa tabela, aquilo que vimos, considerando as 6 funções anteriores:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = 1 - x, f_3(x) = \frac{1}{x}, f_4(x) = \frac{1}{1-x}, f_5(x) = \frac{x}{x-1}, f_6(x) = \frac{x-1}{x}$$

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_5	f_6	f_2	f_1
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_2	f_1	f_3	f_4

Vamos, agora considerar todas as funções bijectivas do conjunto $D = \{1, 2, 3\}$ em si próprio.

É claro que há 6 funções bijectivas de D em D , porque $3! = 6$.

Sejam $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

É claro que f_1 é a função identidade em D , a qual pode ser representada por (1)(2)(3), ou apenas, por (1).

A função f_2 fixa o valor 1 e transforma 2 em 3 e 3 em 2, podendo ser representada por $f_2 = (23)$. Analogamente, temos $f_3 = (12)$ e $f_5 = (13)$.

Quanto à função f_4 , esta não fixa nenhum valor, transformando 1 em 2, 2 em 3 e 3 em 1, podendo ser representada por $f_4 = (123)$.

Analogamente, temos $f_6 = (132)$, o que significa que 1 tem imagem 3, 3 tem imagem 2 e 2 tem imagem 1, terminando o ciclo.

Consideremos a composição de aplicações.

f_1 é o elemento neutro da composição de aplicações.

$$f_2 \circ f_1 = f_2$$

$$f_2 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = f_1$$

$$f_2 \circ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = f_6$$

$$f_2 \circ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_5$$

$$f_2 \circ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_4$$

$$f_2 \circ f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = f_3$$

$$f_6 \circ f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = f_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Com os resultados anteriores, construímos a seguinte tabela:

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_5	f_6	f_2	f_1
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_2	f_1	f_3	f_4

E já deve ter reparado que esta tabela é a mesma que obtivemos com as outras 6 funções; a tabela é a mesma, mas o significado das funções é outro.

Se tivermos a função $f(x) = \frac{1}{x}$, então $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$, obtendo-se a função identidade, pelo que não podemos obter mais funções por composição. O mesmo acontece com todas as funções do tipo $f(x) = \frac{k}{x}$, com k um número real diferente de zero.

Se tivermos, apenas, a função f , então $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$.

Então, não podemos obter mais funções por composição. O mesmo acontece com todas as funções do tipo $f(x) = k - x$, com k um número real qualquer.

Vejamos outro exemplo curioso, com duas funções:

Sejam $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Estas duas funções são inversas de si próprias, ou seja, são involuções.

Então, $(f_1 \circ f_1)(x) = x = I(x) = (f_2 \circ f_2)(x)$.

$$f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_3$$

$$f_2 \circ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_3$$

Então, $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, ou seja, as duas funções são permutáveis (para a composição). Além disso, a composição de funções é associativa.

Então, $f_1 \circ f_2 \circ f_1 = f_2 \circ f_1 \circ f_1 = f_2$ e $f_2 \circ f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_2 \circ f_1 = f_1$.

Se tivermos uma função composta, com um número par de f_1 e um número par de f_2 e nenhuma outra função, o resultado é a função identidade; se tivermos um número par de f_1 e um número ímpar de f_2 , o resultado é a função f_2 ; se tivermos um número ímpar de f_1 e um número par de f_2 , o resultado é a função f_1 ; se tivermos um número ímpar de f_1 e um número ímpar de f_2 , o resultado é a função f_3 .

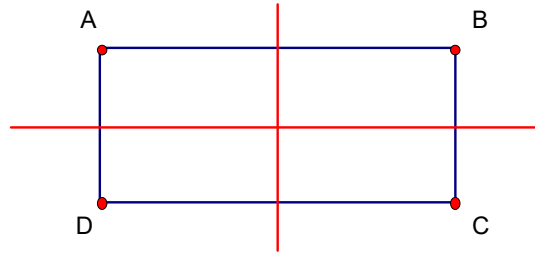
E não há mais hipóteses, pois, no caso de aparecer f_3 , esta função é substituída por $f_1 \circ f_2$.

Então, $f_3 \circ f_3 = f_1 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_2 = I$, $f_3 \circ f_1 = f_1 \circ f_2 \circ f_1 = f_2$, $f_3 \circ f_2 = f_1 \circ f_2 \circ f_2 = f_1$.

Com os resultados anteriores, construímos a seguinte tabela:

\circ	I	f_1	f_2	f_3
I	I	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	I	f_3	f_2
f_2	f_2	f_3	I	f_1
f_3	f_3	f_2	f_1	I

Em vez das aplicações anteriores podemos considerar as isometrias que transformam um rectângulo (que não seja quadrado) nele próprio. Essas isometrias são a função identidade, as simetrias em relação aos eixos de simetria do rectângulo e a rotação de 180° (meia volta ou simetria central) em torno do centro do quadrado:



$$\begin{aligned}
 I &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}, \mathcal{R}_\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} \\
 \mathcal{S}_h &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}, \mathcal{S}_v = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \\
 \mathcal{R}_\pi \circ \mathcal{R}_\pi &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} = I \\
 \mathcal{S}_h \circ \mathcal{S}_h &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} = I \\
 \mathcal{S}_v \circ \mathcal{S}_v &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix} = I \\
 \mathcal{R}_\pi \circ \mathcal{S}_h &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = \mathcal{S}_v = \mathcal{S}_h \circ \mathcal{R}_\pi \\
 \mathcal{R}_\pi \circ \mathcal{S}_v &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} = \mathcal{S}_h = \mathcal{S}_v \circ \mathcal{R}_\pi \\
 \mathcal{S}_h \circ \mathcal{S}_v &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\pi
 \end{aligned}$$

Então,

\circ	I	\mathcal{R}_π	\mathcal{S}_h	\mathcal{S}_v
I	I	\mathcal{R}_π	\mathcal{S}_h	\mathcal{S}_v
\mathcal{R}_π	\mathcal{R}_π	I	\mathcal{S}_v	\mathcal{S}_h
\mathcal{S}_h	\mathcal{S}_h	\mathcal{S}_v	I	\mathcal{R}_π
\mathcal{S}_v	\mathcal{S}_v	\mathcal{S}_h	\mathcal{R}_π	I

Capítulo 36

Como Nascem os Problemas?

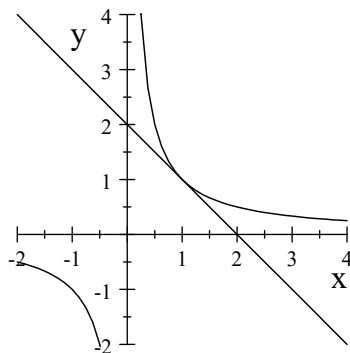
Neste Capítulo, vamos registar o modo como surgiram alguns problemas: uns em plena sala de aula, outros na preparação duma aula, outros na resolução dum problema...

36.1 Tangentes a uma hipérbole

Este problema surgiu numa aula de 11^o Ano, quando se estudava a tão inocente função $f(x) = \frac{1}{x}$.

É claro que vimos que $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. E, depois de várias questões, passámos ao exercício habitual de encontrar uma equação cartesiana da recta tangente ao gráfico de f , no ponto $x = 1$.

Como $f(1) = 1$, temos $T = (1, 1)$; é claro que m , o declive da tangente, é dado por $m = -1$, pelo que uma equação da tangente, no ponto de abcissa 1, é $y - 1 = -1(x - 1)$, ou seja, $y = -x + 2$.



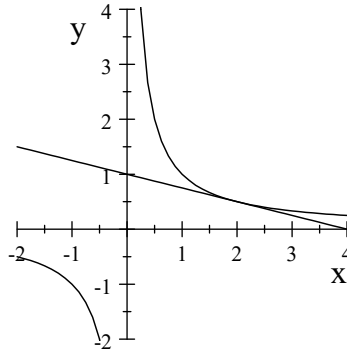
Seguidamente, passámos ao cálculo da área do triângulo definido pela tangente e pelos eixos das coordenadas.

Se $x = 0$, então $y = 2$; se $y = 0$, então $x = 2$. Os vértices do triângulo são $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$. Claro que o triângulo é rectângulo, pelo que a sua área é $\frac{2 \times 2}{2} = 2$ (unidades de área).

Como é natural, resolvemos a mesma questão, mas no ponto de abscissa 2.

E, agora, temos $f(2) = \frac{1}{2}$, $T = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ e $m = f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Então, uma equação da tangente, no ponto de abscissa 2, é $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$, ou seja, $y = -\frac{1}{4}x + 1$.



Os vértices do triângulo são $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(4, 0)$, pelo que a sua área é $\frac{4 \times 1}{2} = 2$ (unidades de área).

Mas este resultado é que não é nada natural, pois é o mesmo que deu no exercício anterior. Não querem ver que a tangente e as assíntotas definem um triângulo cuja área não depende do ponto de tangência?

De $f(a) = \frac{1}{a}$ e $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$, vem (para equação da tangente) $y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$.

Então, $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$. Para $x = 0$, temos $y = \frac{2}{a}$ e, para $y = 0$, $x = 2a$. Supondo $a > 0$, temos que a área do triângulo é dada por $\frac{1}{2} \times \frac{2}{a} \times 2a = 2$.

É claro que a pergunta seguinte é: E se tivermos uma hipérbole em que as assíntotas não sejam perpendiculares?

Evidentemente que o resto é uma questão de tempo. O mais importante é levantar a questão: sem perguntas, não há respostas!

Mas, vejamos um exemplo com uma hipérbole não equilátera:

Seja $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Então, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Consideremos a tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa $x = a$, com $a > 0$.

Então, $T = \left(a, a + \frac{1}{a}\right)$ e $m = f'(a) = 1 - \frac{1}{a^2}$.

Uma equação cartesiana da recta tangente é $y - a - \frac{1}{a} = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)(x - a)$.

$$\begin{aligned} y - a - \frac{1}{a} &= \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)(x - a) \iff y = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)x + a + \frac{1}{a} - a + \frac{1}{a} \\ &\iff y = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a} \end{aligned}$$

As assíntotas são as rectas de equação $x = 0$ e $y = x$.

Para $x = 0$, temos $y = \frac{2}{a}$; para $y = x$, vem $x = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a}$.

$$\begin{aligned} x &= \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a} \iff x = x - \frac{x}{a^2} + \frac{2}{a} \\ &\iff \frac{x}{a^2} = \frac{2}{a} \\ &\iff x = 2a \end{aligned}$$

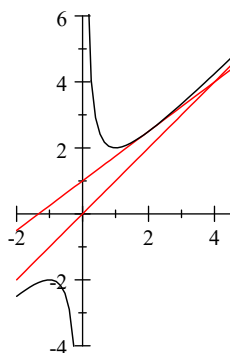
Logo, $y = x = 2a$.

O centro de simetria da hipérbole é $(0, 0)$.

Os vértices do triângulo são $(0, 0)$, $\left(0, \frac{2}{a}\right)$ e $(2a, 2a)$.

O triângulo tem base $\frac{2}{a}$ e altura $2a$, pelo que a sua área é $\frac{1}{2} \times \frac{2}{a} \times 2a = 2$.

Na figura seguinte, temos o caso em que $a = 2$.



36.2 Tangentes a uma parábola

Certo dia, estava eu à procura dum exercício que envolvesse a função exponencial e a tangente ao gráfico, tendo começado pelo seguinte exercício:

Exercício 740 *Determine a equação reduzida da recta que passa pela origem do referencial e é tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$.*

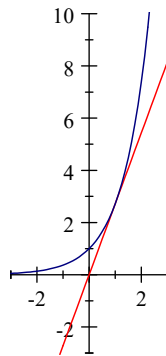
Resolução

Seja k a abscissa do ponto de tangência. Como $f'(k) = e^k = f(k)$, temos que uma equação da recta tangente no ponto $T = (k, e^k)$ é

$$y - e^k = e^k (x - k)$$

Como a recta tem de passar pela origem, temos $-e^k = e^k (-k)$, donde vem $(k - 1)e^k = 0$ e, por fim, $k = 1$.

Então, a equação reduzida da tangente é $y = ex$.



Seguidamente, passei ao exercício seguinte:

Exercício 741 *Determine a equação reduzida da recta que passa pela origem do referencial e é tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x + x$.*

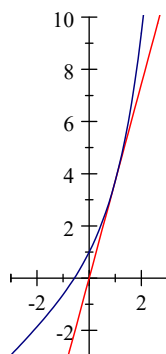
Resolução

Seja k a abscissa do ponto de tangência. Como $f'(k) = e^k + 1$ e $f(k) = e^k + k$, temos que uma equação da recta tangente no ponto $T = (k, e^k + k)$ é

$$\begin{aligned} y - e^k - k &= (e^k + 1)(x - k) &\iff y - e^k - k &= xe^k - ke^k + x - k \\ &&\iff y - e^k &= xe^k - ke^k + x \end{aligned}$$

Como a recta tem de passar pela origem, temos $-e^k = -ke^k$, donde vem $(k - 1)e^k = 0$ e, por fim, $k = 1$.

Então, a equação reduzida da tangente é $y = (e + 1)x$.



Na realidade, entre estes dois exercícios tentei outro, com a função $f(x) = e^x + 1$.

Depois, pensei que o exercício era fácil com uma função quadrática, em vez da função exponencial. Além disso, teria mais do que uma solução (em determinadas condições). Então, passei ao exercício seguinte:

Exercício 742 *Determine a equação reduzida de cada recta que passa pela origem do referencial e é tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$.*

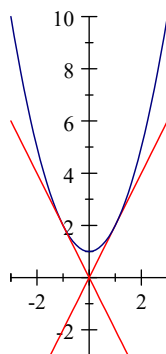
Resolução

Seja k a abcissa do ponto de tangência. Como $f'(k) = 2k$ e $f(k) = k^2 + 1$, temos que uma equação da recta tangente no ponto $T = (k, k^2 + 1)$ é

$$\begin{aligned} y - k^2 - 1 &= 2k(x - k) &\iff y - k^2 - 1 &= 2kx - 2k^2 \\ &&\iff y &= 2kx - k^2 + 1 \end{aligned}$$

Como a recta tem de passar pela origem, temos $k^2 = 1$, donde vem $k = \pm 1$.

Então, $f'(k) = \pm 2$, pelo que as rectas tangentes têm equação $y = \pm 2x$.



É claro que imaginei outro processo de resolução, que não me entusiasmou:

Seja $y = mx$ a equação da tangente. Para que a recta $y = mx$ seja tangente à parábola é necessário que a intersecção da recta com a parábola seja um único ponto:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ x^2 + 1 = mx \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ x^2 - mx + 1 = 0 \end{cases}$$

Logo, $\Delta = m^2 - 4$. Para que haja uma única solução, Δ deve ser zero. Então, $m^2 - 4 = 0$, donde vem $m = \pm 2$. Só que agora, temos uma questão importante: Se uma recta intersecta uma parábola num único ponto, a recta não tem de ser tangente (pode ser paralela ao eixo da parábola). Podemos verificar que $x^2 + 1 \geq \pm 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, mas parece que o primeiro processo é mais fácil. De qualquer modo, se o aluno não conhecer derivadas...

Este exercício levou-me a arranjar outro:

Se nos mantivermos no eixo das ordenadas e nos aproximarmos do vértice da parábola, o ângulo entre as duas tangentes aumenta. Em que condições é que será um ângulo recto?

Exercício 743 *Determine o valor de b , de modo que as rectas que passam por $(0, b)$ e são tangentes ao gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$ sejam perpendiculares.*

Resolução

Seja k a abcissa dum ponto de tangência. Como $f'(k) = 2k$ e $f(k) = k^2 + 1$, temos que uma equação da recta tangente no ponto $T = (k, k^2 + 1)$ é

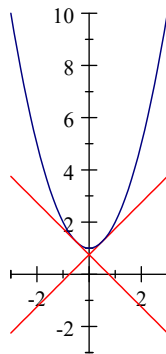
$$\begin{aligned} y - k^2 - 1 &= 2k(x - k) &\iff y - k^2 - 1 &= 2kx - 2k^2 \\ &&\iff y &= 2kx - k^2 + 1 \end{aligned}$$

Como a recta tem de passar pelo ponto $(0, b)$, temos $b = 1 - k^2$, donde vem $k = \pm\sqrt{1 - b}$.

Então, $f'(k) = \pm 2\sqrt{1 - b}$, pelo que $-2\sqrt{1 - b} \times 2\sqrt{1 - b} = -1$, para que as tangentes sejam perpendiculares.

Então, $1 - b = \frac{1}{4}$, donde vem $b = \frac{3}{4}$.

Então, as equações das tangentes são $y = \pm x + \frac{3}{4}$.



Neste ponto, confesso que não suspeitei de nada, mas resolvi ir mais adiante: Para que as duas tangentes sejam perpendiculares, onde deve estar o seu ponto de intersecção?

Exercício 744 *Que relação deve existir entre a e b , de modo que as rectas que passam por (a, b) e são tangentes ao gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$ sejam perpendiculares.*

Resolução

Seja k a abcissa dum ponto de tangência. Como $f'(k) = 2k$ e $f(k) = k^2 + 1$, temos que uma equação da recta tangente no ponto $T_1 = (k, k^2 + 1)$ é

$$\begin{aligned} y - k^2 - 1 &= 2k(x - k) &\iff y - k^2 - 1 &= 2kx - 2k^2 \\ &&\iff y &= 2kx - k^2 + 1 \end{aligned}$$

Como a recta tem de passar pelo ponto (a, b) , temos $b = 2ak - k^2 + 1$, donde vem $k^2 - 2ak + b - 1 = 0$.

No outro ponto de tangência, o declive tem de ser $-\frac{1}{2k}$, pelo que $2x = -\frac{1}{2k}$. Então, $x = -\frac{1}{4k}$, o que significa que a abcissa do outro ponto de tangência é $-\frac{1}{4k}$. Então, uma equação da recta tangente no ponto $T_2 = (-\frac{1}{4k}, \frac{1}{16k^2} + 1)$ é

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{16k^2} - 1 &= -\frac{1}{2k} \left(x + \frac{1}{4k} \right) &\iff y &= -\frac{1}{2k}x - \frac{1}{8k^2} + \frac{1}{16k^2} + 1 \\ &&\iff y &= -\frac{1}{2k}x - \frac{1}{16k^2} + 1 \end{aligned}$$

Então, o ponto (a, b) é a intersecção das duas tangentes, ou seja, a solução do sistema

$$\begin{cases} y = 2kx - k^2 + 1 \\ y = -\frac{1}{2k}x - \frac{1}{16k^2} + 1 \end{cases}$$

Então, $2kx - k^2 + 1 = -\frac{1}{2k}x - \frac{1}{16k^2} + 1$. Ora,

$$\begin{aligned} 2kx - k^2 + 1 &= -\frac{1}{2k}x - \frac{1}{16k^2} + 1 &\iff 2kx + \frac{1}{2k}x &= k^2 - \frac{1}{16k^2} \\ &&\iff \frac{4k^2 + 1}{2k}x &= \frac{16k^4 - 1}{16k^2} \\ &\iff \frac{4k^2 + 1}{2k}x &= \frac{(4k^2 + 1)(4k^2 - 1)}{16k^2} \\ &\iff \frac{1}{2k}x &= \frac{4k^2 - 1}{16k^2} \\ &\iff x &= \frac{4k^2 - 1}{8k} \end{aligned}$$

E continuei a não suspeitar de nada...

$$y = 2kx - k^2 + 1 = 2k \times \frac{4k^2 - 1}{8k} - k^2 + 1 = \frac{4k^2 - 1}{4} - k^2 + 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

E, agora, tudo ficou claro: se duas rectas são tangentes a uma parábola e são perpendiculares entre si, então intersectam-se num ponto que pertence à directriz da parábola.

E não é preciso fazer a demonstração da propriedade anterior para o caso geral, uma vez que utilizamos uma função quadrática particular? A resposta é não, se soubermos que todas as parábolas são semelhantes!

De qualquer modo, vamos resolver o exercício mais geral:

Exercício 745 Considere a parábola de equação $x^2 = 2py$, com $p > 0$. Mostre que duas rectas perpendiculares que sejam tangentes à parábola se intersectam num ponto pertencente à directriz da parábola.

Resolução

Da equação $x^2 = 2py$, concluímos que $y = \frac{x^2}{2p}$. Seja $f(x) = \frac{x^2}{2p}$. Então, $f'(x) = \frac{x}{p}$. Sejam k um número real diferente de zero e $T_1 = \left(k, \frac{k^2}{2p}\right)$ um dos pontos de tangência. Então, uma equação da recta tangente à parábola em T_1 é

$$y - \frac{k^2}{2p} = \frac{k}{p}(x - k) \iff y = \frac{k^2}{2p} + \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{p} \iff y = \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{2p}$$

O declive da outra tangente tem de ser $-\frac{p}{k}$, pelo que a derivada da função f nesse ponto tem de ser $-\frac{p}{k}$.

Então, devemos ter $f'(x) = -\frac{p}{k}$, ou seja, $\frac{x}{p} = -\frac{p}{k}$. Então, $x = -\frac{p^2}{k}$.

Mas, $f\left(-\frac{p^2}{k}\right) = \frac{\left(-\frac{p^2}{k}\right)^2}{2p} = \frac{p^3}{2k^2}$. Então, $T_2 = \left(-\frac{p^2}{k}, \frac{p^3}{2k^2}\right)$.

Então, uma equação da recta tangente à parábola em T_1 é

$$y - \frac{p^3}{2k^2} = -\frac{p}{k}\left(x + \frac{p^2}{k}\right) \iff y = -\frac{p}{k}x - \frac{p^3}{k^2} + \frac{p^3}{2k^2} \iff y = -\frac{p}{k}x - \frac{p^3}{2k^2}$$

Pretendemos determinar o ponto de intersecção das duas rectas:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{2p} \\ y = -\frac{p}{k}x - \frac{p^3}{2k^2} \end{cases} &\iff \begin{cases} y = \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{2p} \\ \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{2p} = -\frac{p}{k}x - \frac{p^3}{2k^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{2p} \\ \left(\frac{k}{p} + \frac{p}{k}\right)x = \frac{k^2}{2p} - \frac{p^3}{2k^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{2p} \\ \frac{k^2 + p^2}{pk}x = \frac{k^4 - p^4}{2pk^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{2p} \\ \frac{k^2 + p^2}{pk}x = \frac{(k^2 + p^2)(k^2 - p^2)}{2pk^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{k}{p}x - \frac{k^2}{2p} \\ \frac{x}{pk} = \frac{k^2 - p^2}{2pk^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{k}{p}\left(\frac{k^2 - p^2}{2k}\right) - \frac{k^2}{2p} \\ x = \frac{k^2 - p^2}{2k} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{k^2 - p^2}{2p} - \frac{k^2}{2p} \\ x = \frac{k^2 - p^2}{2k} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{p}{2} \\ x = \frac{k^2 - p^2}{2k} \end{cases} \end{aligned}$$

A ordenada do ponto de intersecção das duas tangentes não depende de k . Como a directriz da parábola é a recta de equação $y = -\frac{p}{2}$, está resolvido o exercício.

36.3 Termos consecutivos no triângulo de Pascal

Exercício 746 *O quociente entre dois termos consecutivos duma linha do triângulo de Pascal é $\frac{7}{4}$. Qual é a linha?*

Resolução

Esta questão surgiu-me no final duma aula, quando estava a ser resolvido um exercício simples em que tínhamos a seguinte situação:

$$\begin{array}{ccccccc} & a & & 116280 & & 203490 & & c \\ & & 170554 & & b & & 497420 & \end{array}$$

Evidentemente, pretendíamos determinar os números a , b e c . Depois de subtrairmos e somarmos para encontrar a , b , c , ocorreu-me a pergunta "Em que linha estamos?"

Suponhamos que $\binom{n}{p-1} = 116280$ e $\binom{n}{p} = 203490$. Então, $\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = \frac{203490}{116280} = \frac{7}{4}$.

Ora,

$$\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = \frac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(p-1)!(n-p+1)!}{n!} = \frac{n-p+1}{p}$$

Então,

$$\frac{n-p+1}{p} = \frac{7}{4} \iff 4n - 4p + 4 = 7p \iff 4n = 11p - 4 \iff n = \frac{11p-4}{4}$$

Logo, $n = \frac{11p}{4} - 1$, donde vem que p tem de ser múltiplo de 4. Então, $p = 4t$, para certo natural t .

Então, $n = 11t - 1$, pelo que há infinitas linhas que satisfazem a condição $\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = \frac{7}{4}$.

Note-se que, para obter uma solução da equação $\frac{n-p+1}{p} = \frac{7}{4}$, podemos fazer como certos alunos:

$$\begin{cases} n-p+1 = 7 \\ p = 4 \end{cases}$$

Então, $p = 4 \wedge n = 10$. É claro que perdemos uma infinidade de soluções, mas obtivemos uma solução. Se quisermos obter todas as soluções, podemos fazer $\frac{n-p+1}{p} = \frac{7}{4} = \frac{7x}{4x}$, pelo que

$$\begin{cases} n-p+1 = 7x \\ p = 4x \end{cases}, \text{ ou seja, } p = 4x \wedge n = 11x - 1, \text{ com } x \in \mathbb{N}.$$

Mas, ainda falta determinar a linha, o que pode ser feito por tentativas.

Ora, $\binom{10}{4} = 210$, $\binom{21}{8} = 203\,490$ e $\binom{21}{7} = 116\,280$. Então, $n = 21$.

Exercício 747 *O quociente entre dois termos consecutivos duma linha do triângulo de Pascal é k , com $k \in \mathbb{Q}^+$. Qual é a linha? Terá o problema sempre solução?*

Resolução

Se k é um número natural, então existe uma linha em que os dois primeiros elementos são 1 e k , cujo quociente é k .

Partindo de $\frac{\binom{n}{p}}{\binom{n}{p-1}} = k$, temos $\frac{n-p+1}{p} = k$, pelo que $n = (k+1)p - 1$, o que mostra que há infinitas soluções, com $k \in \mathbb{N}$.

No caso de termos um número fraccionário positivo vem $\frac{n-p+1}{p} = \frac{r}{s}$, com $r, s \in \mathbb{N}$ e r, s primos entre si, isto é, $\text{mdc}(r, s) = 1$.

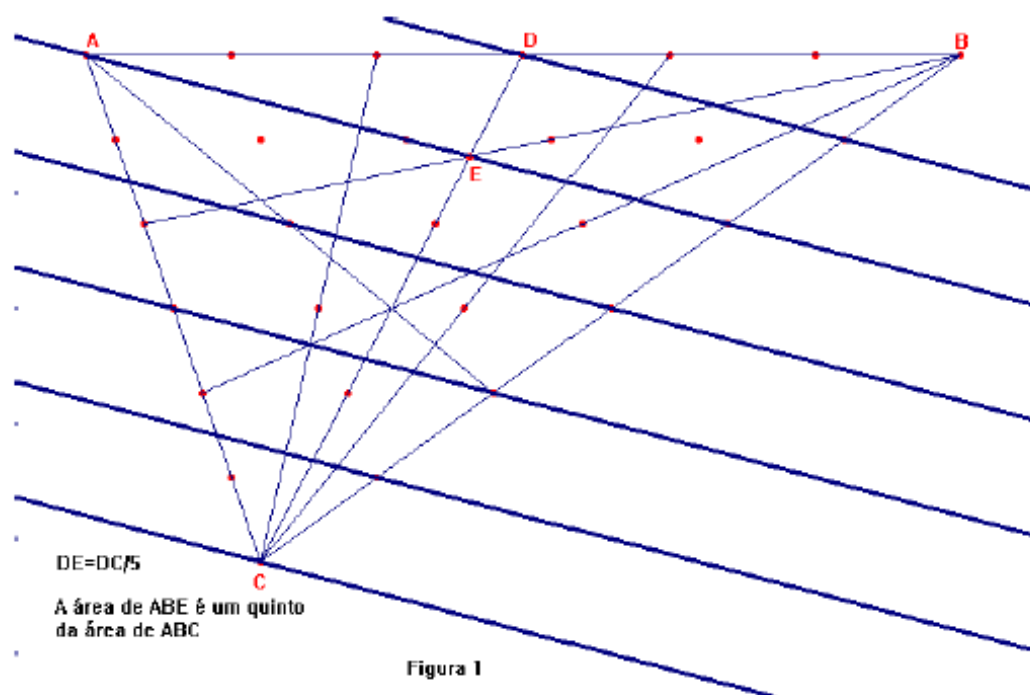
Se quisermos mostrar que há, pelo menos, uma solução, basta-nos fazer $\begin{cases} n-p+1 = r \\ p = s \end{cases}$.

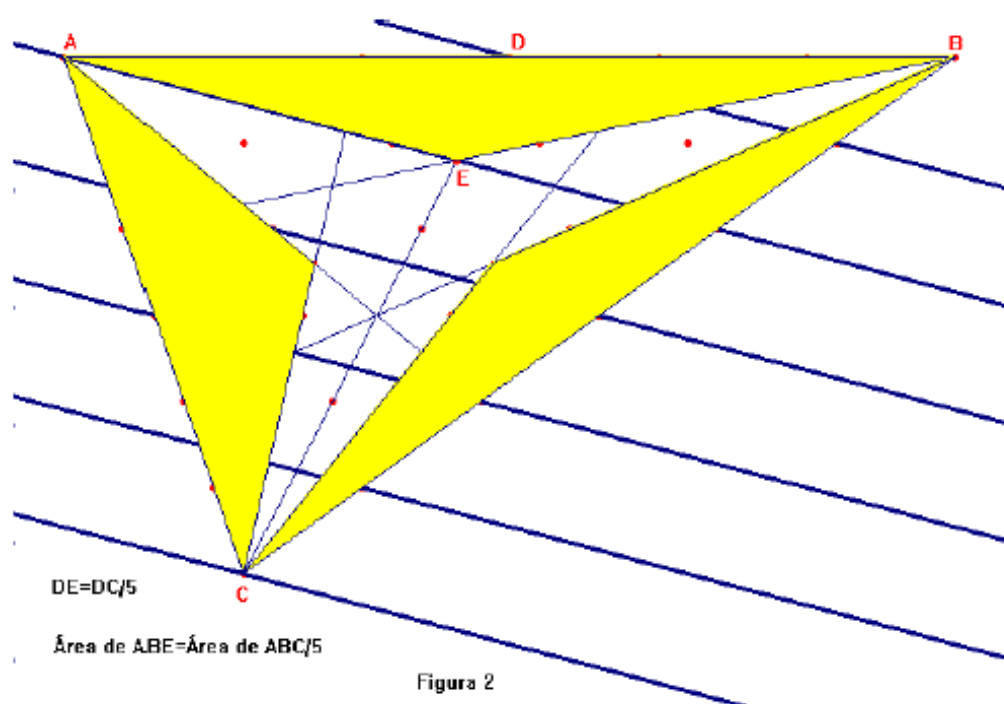
Então, $\begin{cases} n = p + r - 1 \\ p = s \end{cases}$.

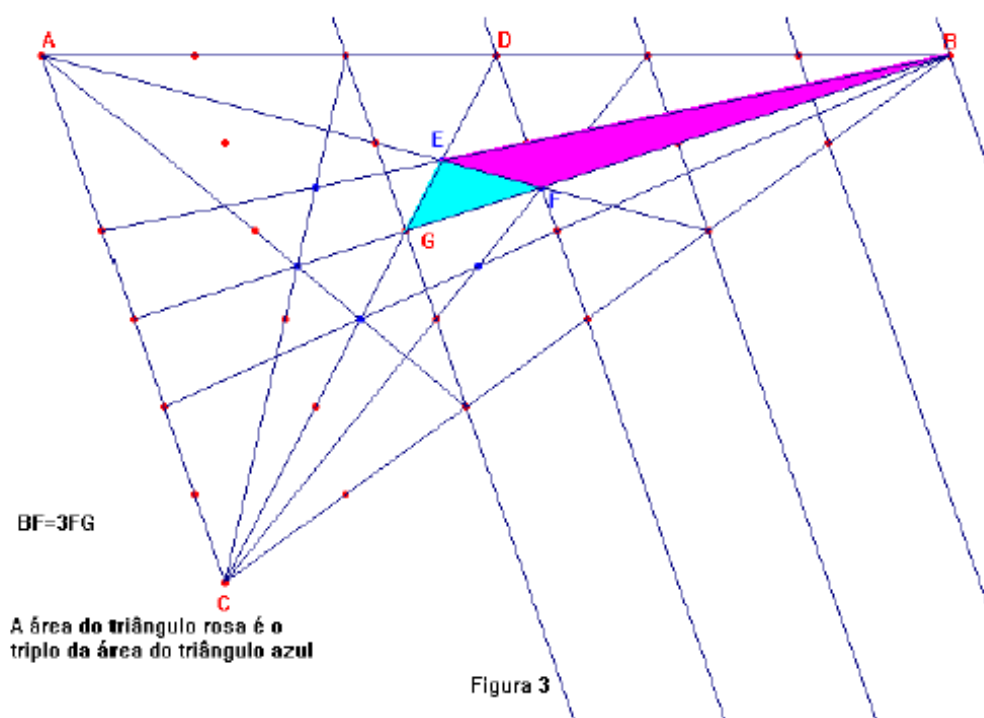
Se quisermos mostrar que há infinitas soluções, fazemos $\begin{cases} n-p+1 = rx \\ p = sx \end{cases}$, isto é, $\begin{cases} n = p + rx - 1 \\ p = sx \end{cases}$.

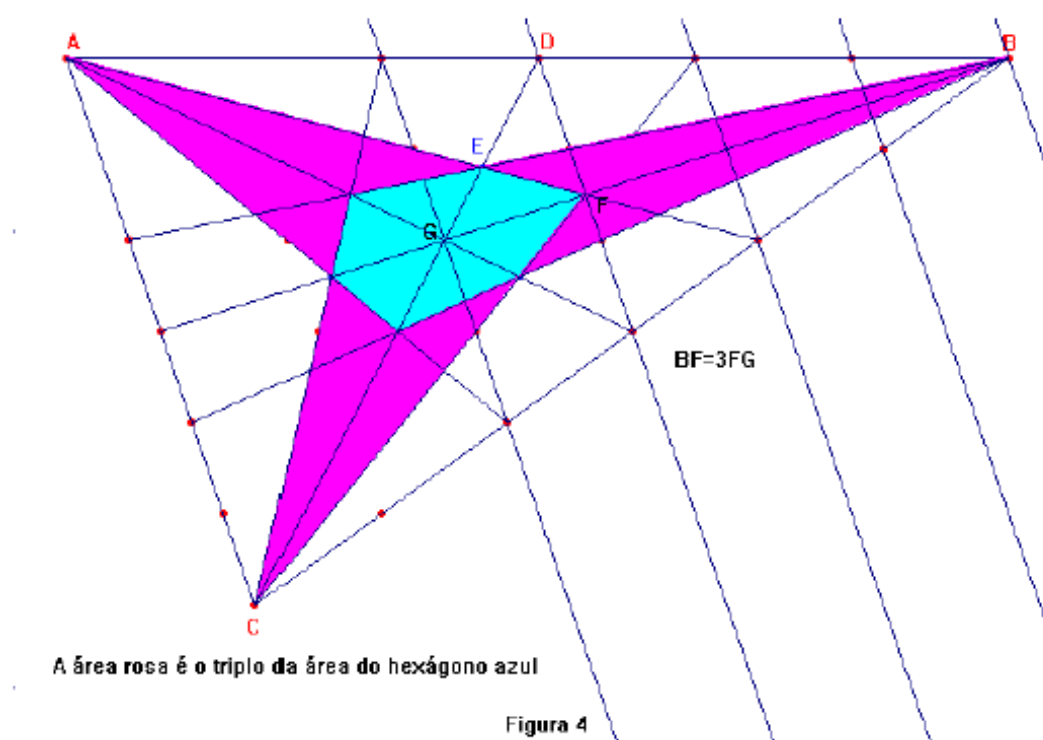
Capítulo 37

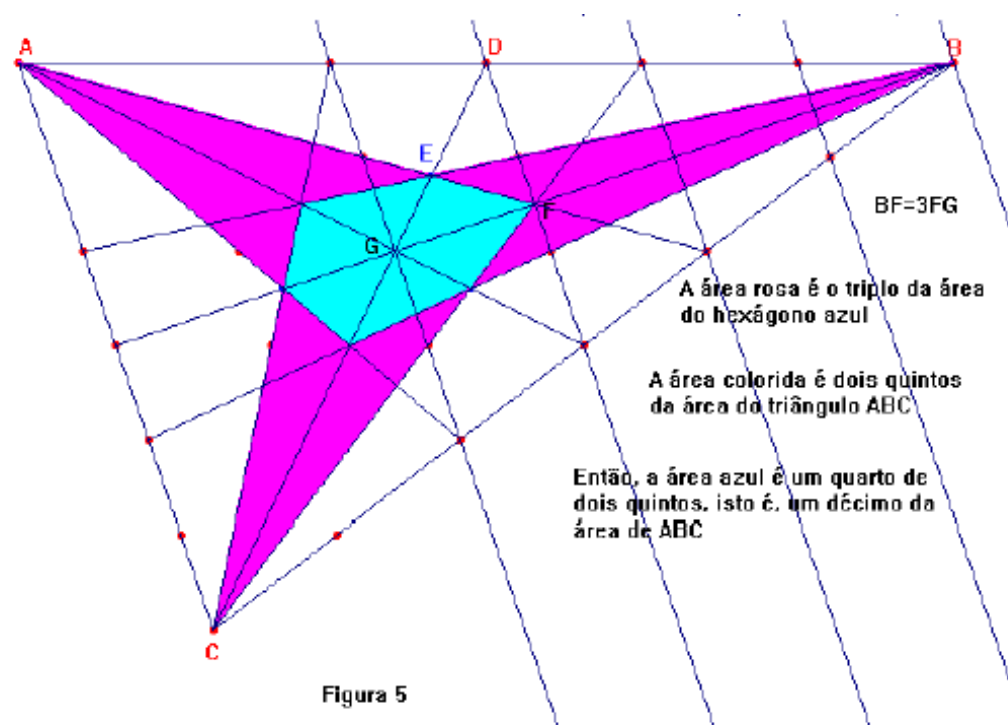
O Teorema de Marion

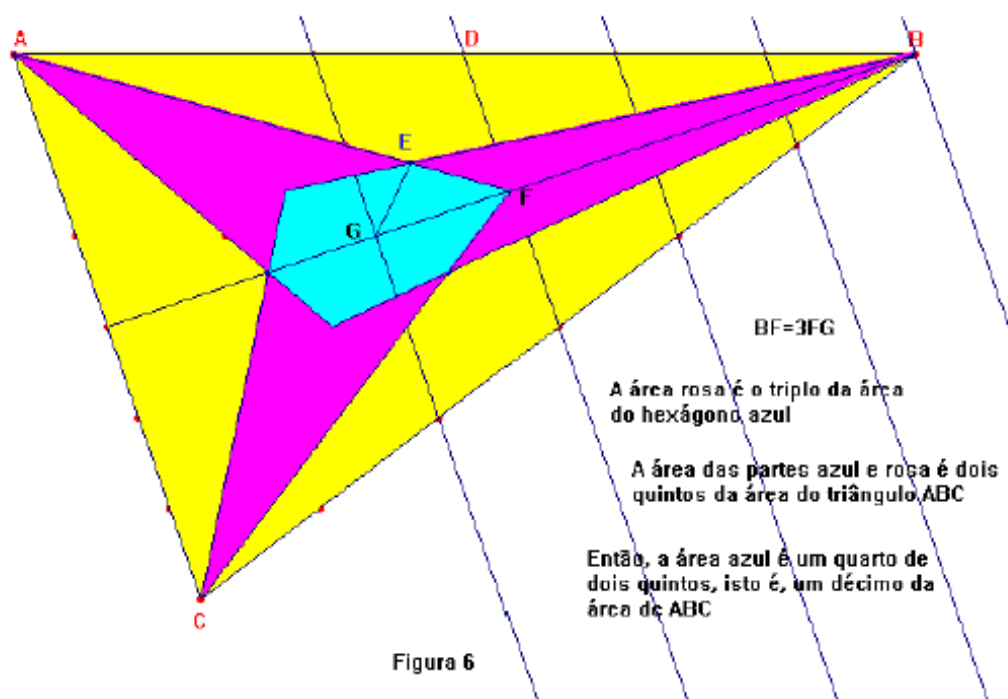


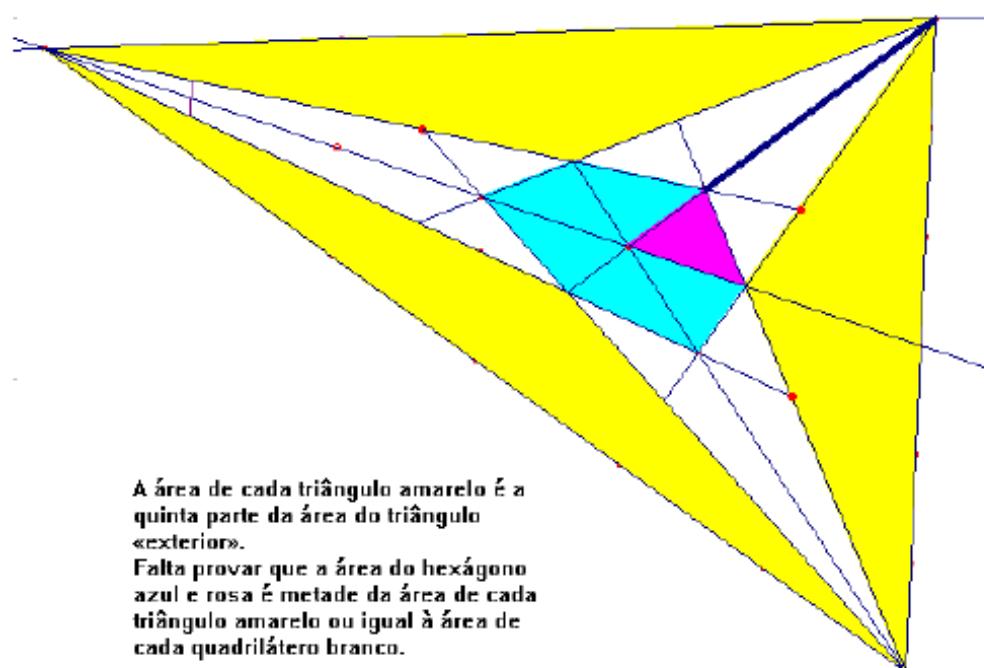
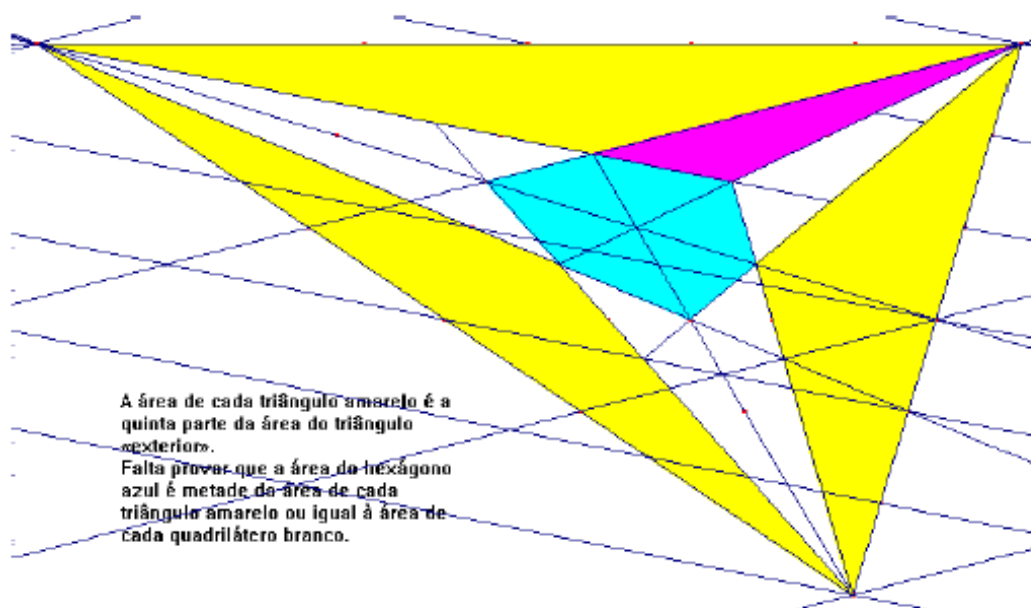


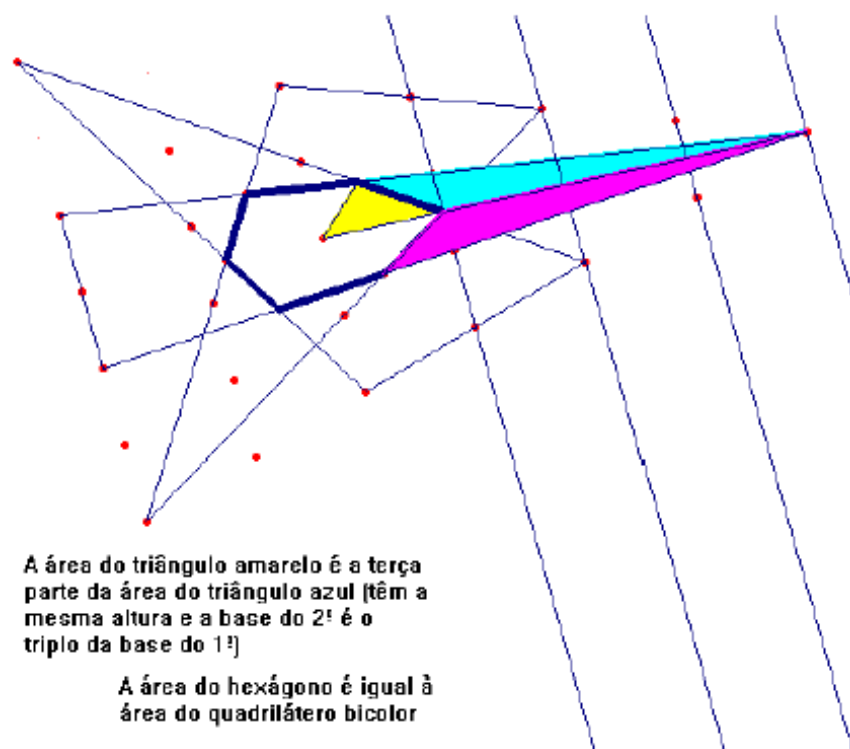


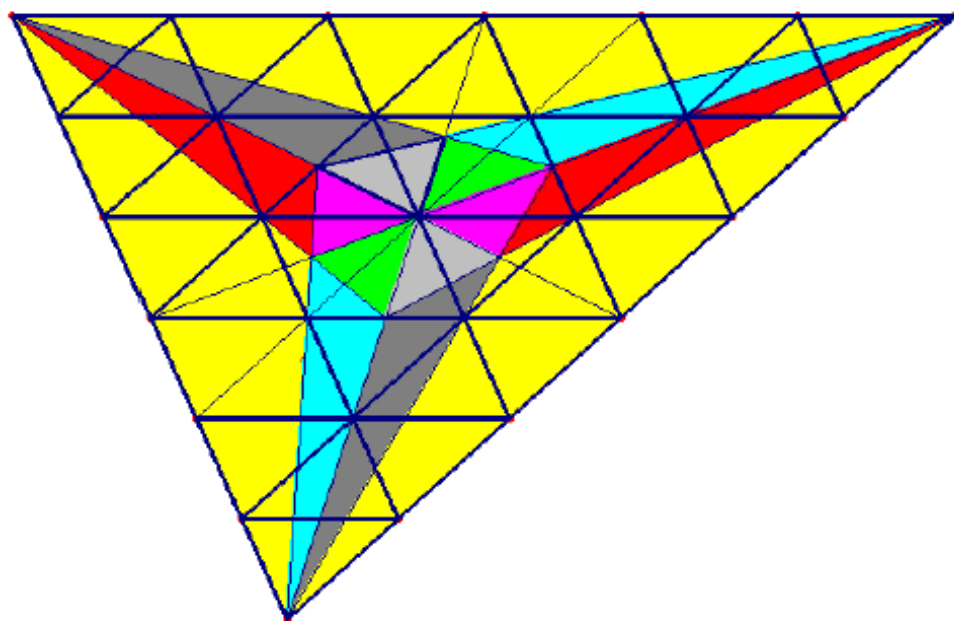


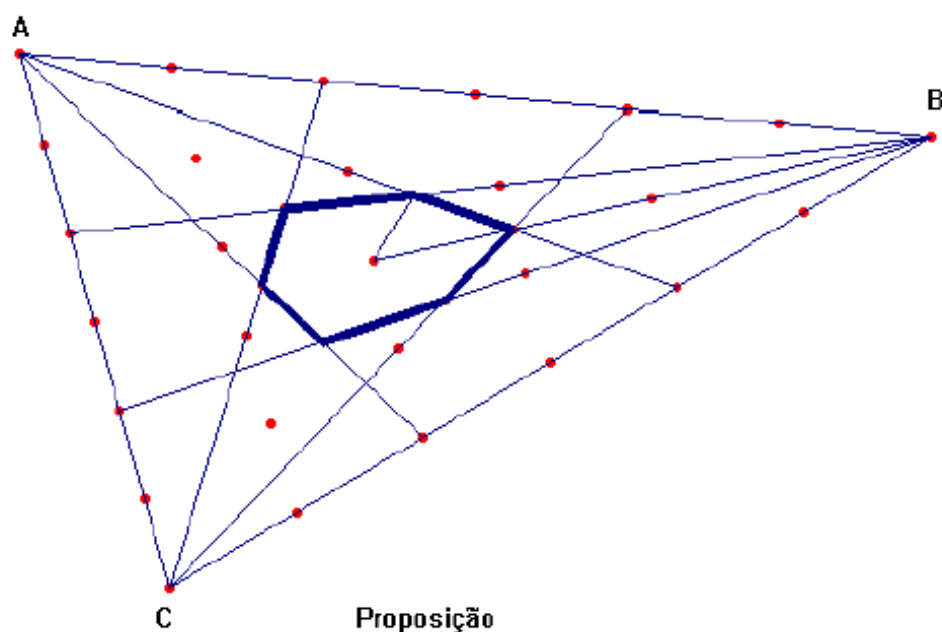


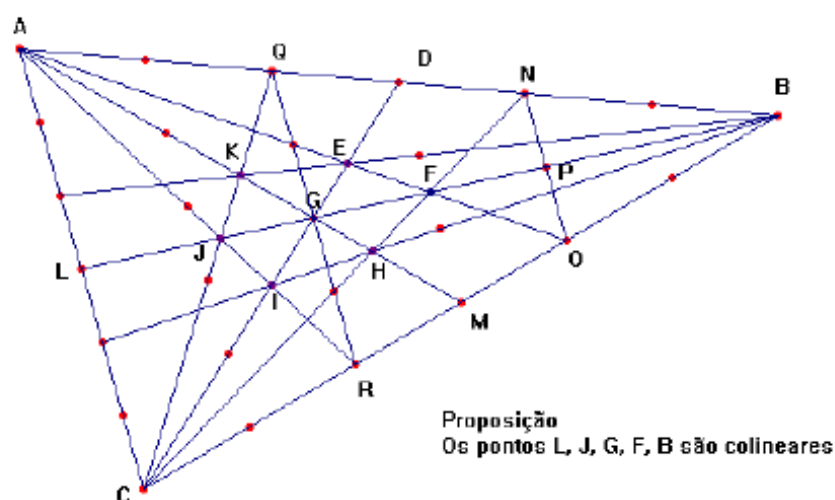












G é o baricentro do triângulo ABC.

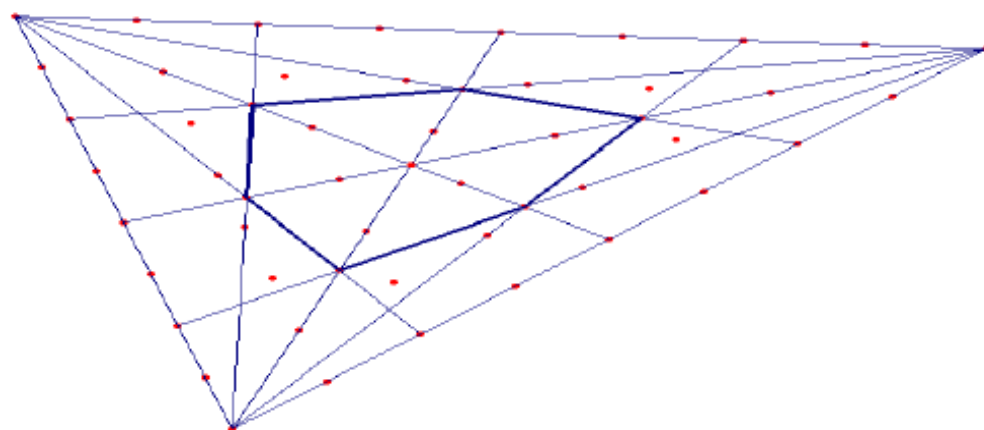
F é o ponto de intersecção das rectas CN e AM.

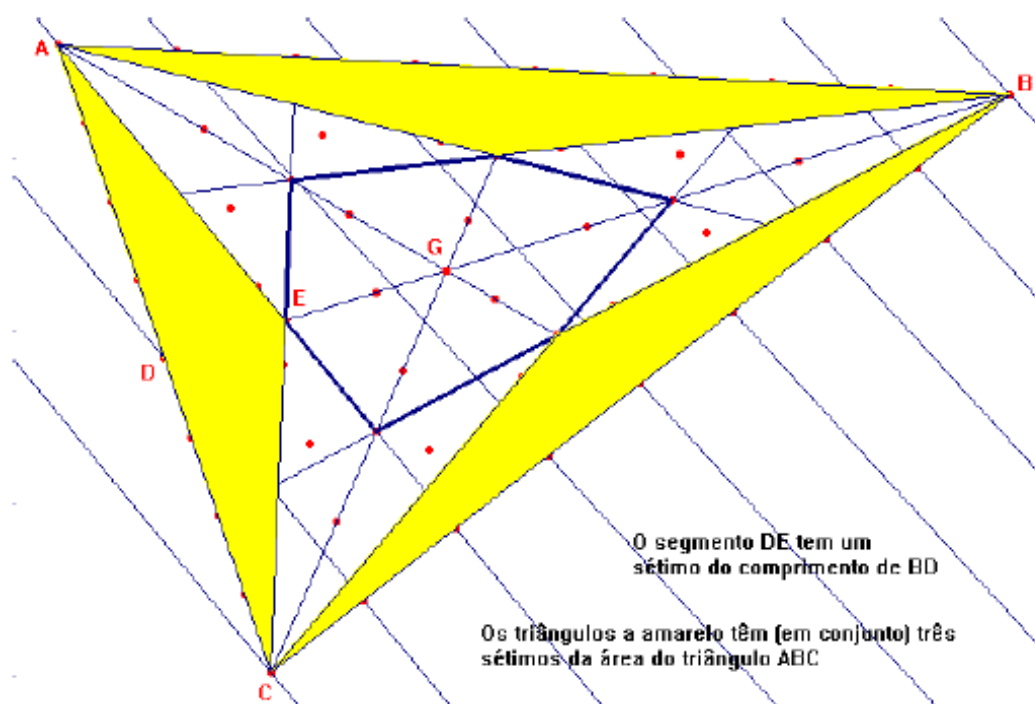
Os triângulos AFC e FNO são semelhantes, com razão de semelhança 3.

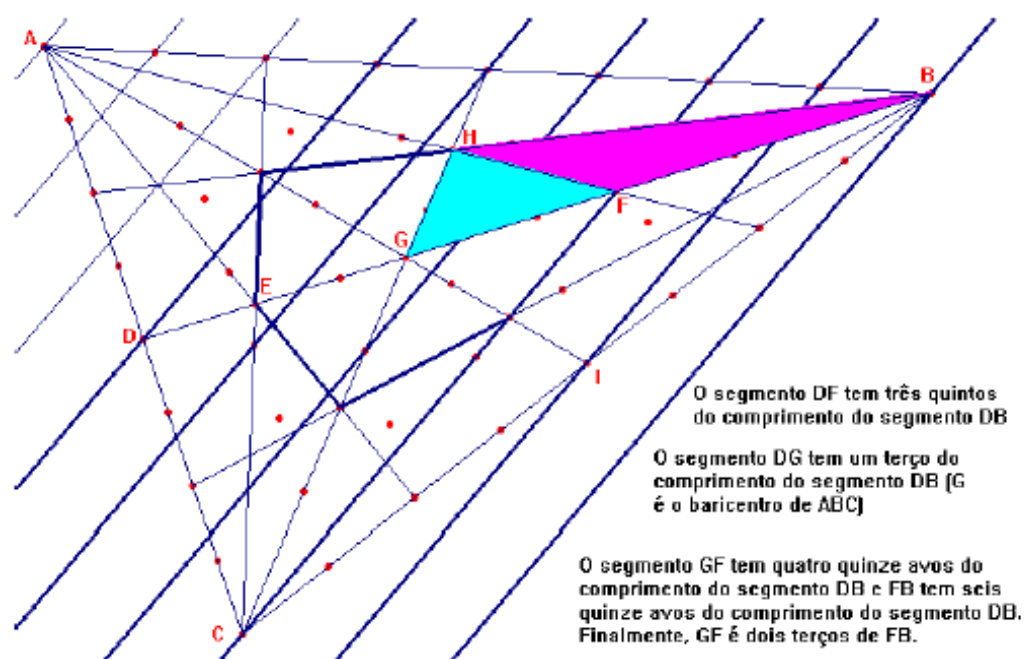
A homotetia de centro F e razão -3 aplica N em C, O em A e P em L. Logo,

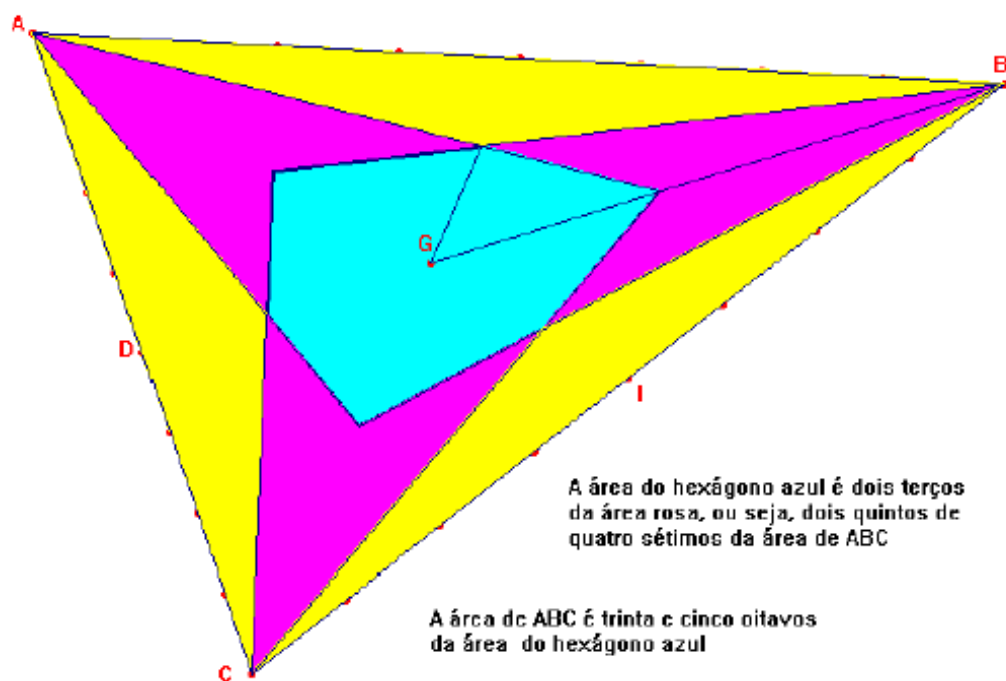
F, P e L são colineares. Então, o ponto F pertence à mediana BL.

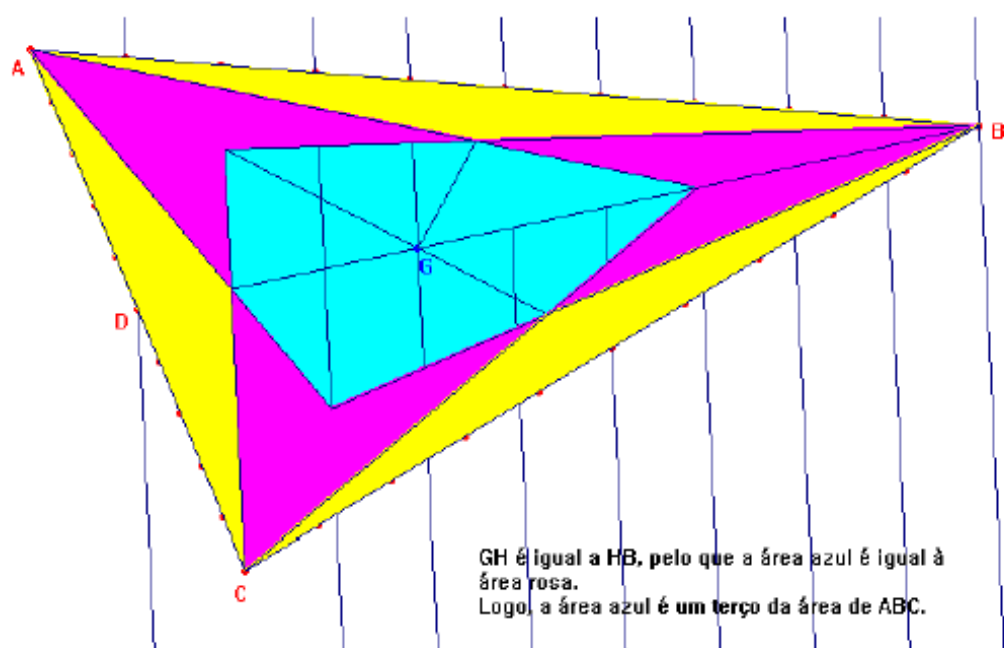
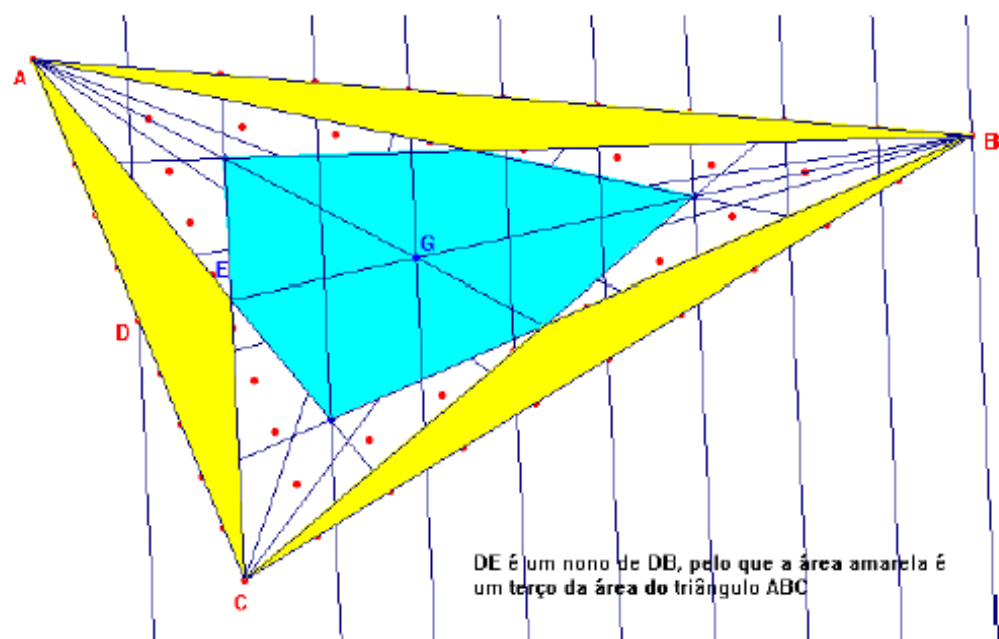
Para o ponto J, basta verificar que existe uma homotetia de centro J que aplica Q em C, R em A e G em L, pelo que L, J e G são colineares (pertencem todos à mediana BL).

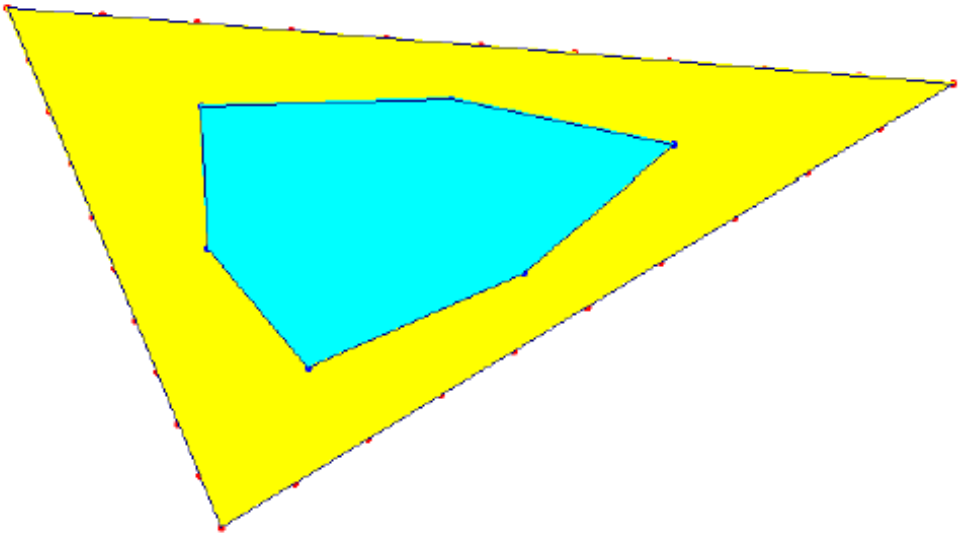


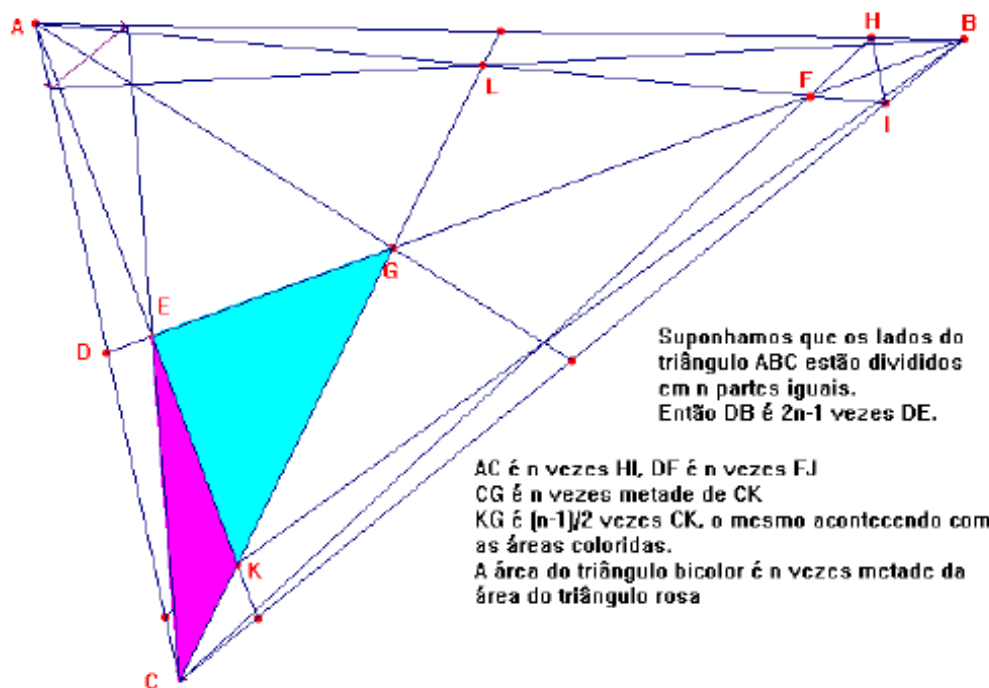


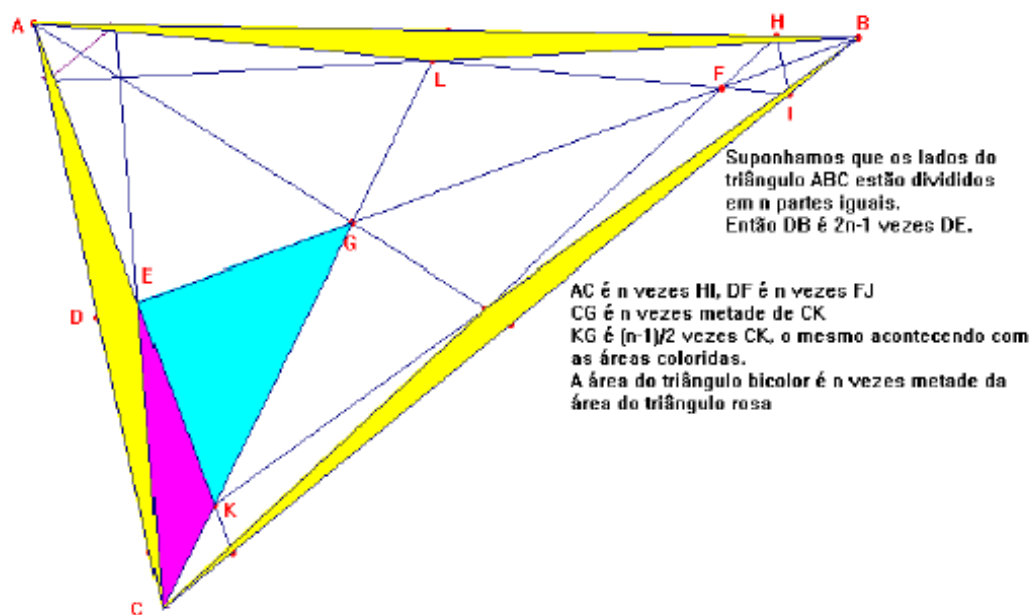


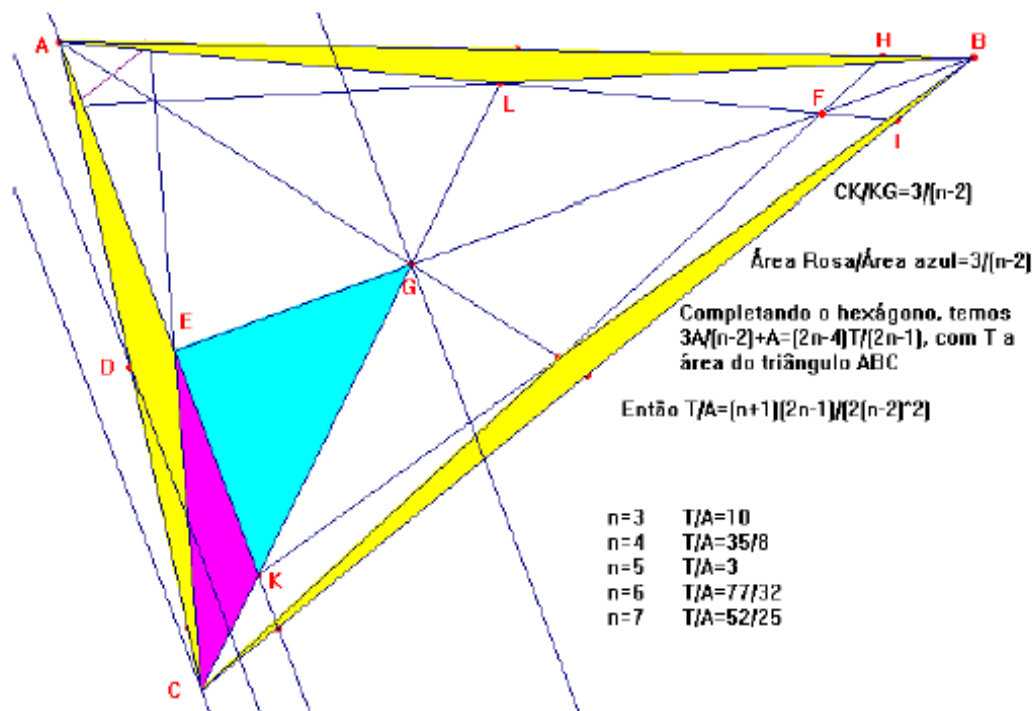












Capítulo 38

As Eleições e o Método de Hondt

No dia 20 de Fevereiro de 2005 realizaram-se, em Portugal, eleições para a Assembleia da República, as quais deram ao Partido Socialista a maioria absoluta dos deputados. Estas eleições destinavam-se a eleger 230 deputados, sendo 226 do território nacional e 4 dos dois círculos da emigração.

Na Região Autónoma da Madeira, foram eleitos 3 deputados do Partido Socialista e 3 deputados do Partido Social Democrata.

Na noite das eleições, o presidente regional do Partido Social Democrata, na Madeira, afirmou que o PS elegia 3 deputados ilegítimamente e que a culpa era do método de Hondt.

Antes de emitirmos qualquer opinião sobre o assunto, vejamos em que consiste o método de Hondt, analisando o que se passou a nível nacional, de modo a percebermos o que está em causa.

No que se segue, vamos utilizar os dados que foram publicados pelo Diário de Notícias, da Madeira, e vamos supor que os 226 deputados eleitos pelos residentes no território português não eram escolhidos em 20 círculos eleitorais, mas, apenas, num único círculo eleitoral (como acontece nas eleições para o Parlamento Europeu).

Como os votos brancos e os votos nulos não elegem deputados, quando nos referirmos a votos, estaremos a referir-nos a votos nem brancos nem nulos.

Os resultados publicados foram os seguintes:

Partido	BE	CDS/PP	PCP/PEV	PCTP/MRPP	PDA	
Nº de Votos	362285	412836	432157	47738	1604	
Partido	PH	PND	PNR	POUS	PPD/PSD	PS
Nº de Votos	16864	39981	9362	5573	1638741	2571615

Como transformar os votos anteriores em deputados?

Comecemos por calcular a percentagem de votos para cada partido:

Partido	BE	CDS/PP	PCP/PEV	PCTP/MRPP	PDA	
% de Votos	6,54%	7,45%	7,80%	0,86%	0,03%	
Partido	PH	PND	PNR	POUS	PPD/PSD	PS
% de Votos	0,30%	0,72%	0,17%	0,10%	29,59%	46,43%

Se a percentagem de deputados fosse a mesma teríamos os seguintes valores para cada partido:

Partido	BE	CDS/PP	PCP/PEV	PCTP/MRPP	PDA
Nº de Deputados	14,78	16,85	17,63	1,95	0,07

Partido	PH	PND	PNR	POUS	PPD/PSD	PS
Nº de Deputados	0,69	1,63	0,38	0,23	66,87	104,93

É claro que o número de deputados tem de ser um número inteiro. Se arredondarmos os números anteriores, obtemos:

Partido	BE	CDS/PP	PCP/PEV	PCTP/MRPP	PDA
Nº de Deputados	15	17	18	2	0

Partido	PH	PND	PNR	POUS	PPD/PSD	PS
Nº de Deputados	1	2	0	0	67	105

E teríamos 227 deputados, quando só queríamos eleger 226. No entanto, mesmo que tivéssemos 226 deputados, este processo poderia não ser correcto. Como resolver este problema?

É aqui que surge o método de Hondt, que consiste em dividir o número de votos de cada partido por 1, por 2, por 3 e assim sucessivamente. Depois, escolhemos os 226 melhores quocientes.

De seguida, apresentamos o número de deputados que seriam eleitos por cada partido, seguindo este método:

Partido	BE	CDS/PP	PCP/PEV	PCTP/MRPP	PDA
Nº de Deputados	15	17	17	1	0
% de Deputados	6,64%	7,52%	7,52%	0,44%	0,00%
% de Votos	6,54%	7,45%	7,80%	0,86%	0,03%

Partido	PH	PND	PNR	POUS	PPD/PSD	PS
Nº de Deputados	0	2	0	0	67	105
% de Deputados	0,00%	0,44%	0,00%	0,00%	30,09%	47,35%
% de Votos	0,30%	0,72%	0,17%	0,10%	29,59%	46,43%

Embora haja diferenças entre as percentagens de votos obtidos e a percentagem de deputados eleitos por cada partido, essa diferença é muito pequena, comparada com as discrepâncias registadas com 20 círculos eleitorais.

Note-se que o último deputado que seria eleito, com um único círculo eleitoral, pertenceria ao Partido Socialista e seria o 107º deputado deste partido.

Dividindo os 2571615 votos do PS por 107, obtemos 24033,78505.

Então, os votos do PS podem ser divididos em 107 pacotes de 24033 votos, sendo que o Bloco de Esquerda só conseguia 15 pacotes de 24033 votos (embora restassem alguns), o CDS/PP conseguia 17 pacotes de 24033 votos e assim por diante...

Quem beneficia com a existência de 20 círculos eleitorais? A resposta é bastante clara: são os grandes partidos, isto é, o Partido Socialista e Partido Social Democrata que são os partidos que podem alterar a lei eleitoral.

É bastante compreensível, embora criticável, o motivo que os leva a manter tal lei, a qual permite que um partido com 46,43% dos votos tenha mais de 50% dos deputados. Repare-se que o PSD, apesar do desastre eleitoral, também fica beneficiado, o que nos leva a afirmar que os dois maiores partidos ficam a ganhar com a existência de 20 círculos eleitorais, quer ganhem as eleições, quer percam.

Vejamos, agora, o que se passou na Região Autónoma da Madeira, onde foram eleitos 6 deputados.

Lista	BE	CDS/PP	PCP/PEV	PCTP/MRPP	PH	PND	PPD/PSD	PS
Nº de Votos	5263	9135	5078	1630	901	1876	63374	49070

Dividindo o número de votos do PSD e do PS por 1, 2, 3 e 4, obtemos:

PPD/PSD	63374	31687	21124,7	15843,5
PS	49070	24535	16356,7	12267,5

Do quadro anterior, concluímos que o 1º deputado a ser eleito é do PSD, o 2º do PS, o 3º do PSD, o 4º do PS, o 5º do PSD e o 6º é do PS, não havendo qualquer ilegitimidade, pois o 4º quociente do PSD é inferior ao 3º do PS.

Como vimos anteriormente, podemos interpretar este quadro da seguinte maneira: O PS consegue 3 pacotes de 16356 votos e o PSD também, embora restem cerca de 14300 votos (o que não dá para um novo pacote de 16356 votos).

Repare-se que nas Eleições para a Assembleia Regional da Madeira, já não há um único círculo eleitoral (a manter-se a actual lei eleitoral), o que provoca uma diferença significativa entre as percentagens de votos e de deputados.

É claro que essa situação se fica a dever à existência de vários círculos eleitorais e não ao método de Hondt.

Registe-se que, na altura em que este texto está a ser escrito, estão a ser discutidas propostas de alteração da lei eleitoral. Curiosamente, o PSD propõe vários círculos eleitorais (embora menos do que 11 os actuais), o mesmo acontecendo com o PS, embora o PS proponha um círculo corrector.

A posição dos dois partidos pretende defender os seus interesses e não acabar com a injustiça da diferença entre as percentagens de votos e deputados.

Quanto ao PS, é estranho que proponha, de raiz, uma nova lei eleitoral, a qual precisa, à partida, de ser corrigida (com um círculo corrector).

Há uma maneira muito simples de obtermos uma boa correspondência entre votos e deputados: criar um único círculo eleitoral.

Se, com a nova lei eleitoral, continuarmos a verificar uma discrepância entre as percentagens de votos e de deputados, tal ficará a dever-se a uma opção político-partidária e não à falta de alternativas

A existência dum único círculo eleitoral tem, ainda, a vantagem de fazer com que todos os votos tenham o mesmo valor, evitando que um deputado seja eleito com 2000 votos e outro com 2300 (por exemplo). Iríamos, assim, ao encontro do preceito constitucional da igualdade de direitos dos cidadãos.

Vejamos o que teria acontecido nas eleições regionais em 2000, se houvesse um único círculo eleitoral:

	PPD/PSD	PS	CDS/PP	UDP	CDU	PSN
Nº de Votos	72560	27263	12601	6150	6011	2335
Nº de deputados	36	13	6	3	2	1
Percent. de votos	57,2%	21,5%	9,9%	4,8%	4,7%	1,8%
Percent. de deputados	59,0%	21,3%	9,8%	4,9%	3,3%	1,6%

Repare-se que a discrepância significativa é a percentagem de deputados que a CDU elegeria, o que se deve ao facto de serem eleitos 61 deputados e a CDU ter direito ao 62º lugar. Mas é claro que algum partido terá de ser o primeiro a não eleger um deputado.

Note-se que o 2º partido mais votado (o PS) não sai beneficiado na percentagem de deputados, porque o PS é um pequeno partido em muitos círculos eleitorais (pelo menos, era um pequeno partido, nas eleições de 2000).

Como observação final, registre-se que, na Assembleia Regional da Madeira, está a ser discutido um projecto de lei que estabelece o subsídio a atribuir a cada partido. Tal subsídio, segundo o partido maioritário (PSD), deve depender do número de deputados de cada partido e não, como defendem os pequenos partidos, do número de votos obtidos. Esperemos para ver o resultado dessa discussão.

Como vemos, isto anda tudo ligado... e é muito previsível...

Terminamos, registando o facto do número de deputados a eleger por cada círculo eleitoral ser calculado pelo método de Hondt, considerando-se o número de eleitores recenseados em cada círculo. Mas, segundo consta, os cadernos eleitorais estão desactualizados, havendo muitos eleitores fantasma, pelo que o número de deputados a eleger em cada círculo pode não corresponder à realidade.

Capítulo 39

Geometria Analítica no Plano

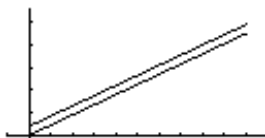
Começamos por referir que, salvo referência expressa em contrário, utilizamos *sempre* um referencial ortonormado, embora nalgumas imagens tal não aconteça.

Exemplo 748 *Suponhamos que o preço do m^3 de água é 2,25 Euros e que se consumiu $c \text{ m}^3$ de água. Qual o preço a pagar?*

É claro que, se apenas fosse paga a água, o preço a pagar seria de $2,25 \times c$ Euros.

Se houver uma parcela fixa a pagar, digamos f Euros, o preço a pagar será de $(2,25 \times c + f)$ Euros.

Neste exemplo, tem de ser $c \geq 0$. A representação gráfica, em referencial não monométrico, é a seguinte:



As duas semi-rectas definidas por $y = 2,25x$ e $y = 2,25x + f$, com $x \geq 0$ e $f > 0$ são estritamente paralelas.

Observação

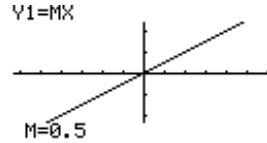
Alguns modelos de Calculadoras Casio têm a possibilidade de fazer gráficos dinâmicos. Nesses modelos podemos visualizar os gráficos de $Y = MX$, fazendo o parâmetro M tomar valores dum determinado intervalo:



```

Y1=MX
Dynamic Settings
M
Start:-2
End:2
Step:0.25

```



É claro que também podemos visualizar os gráficos de $Y = 2X + B$.

No caso das Calculadoras que não têm gráficos dinâmicos, podemos considerar, por exemplo, $Y_1 = -2X$, $Y_2 = -\frac{3}{2}X$, $Y_3 = -X$, $Y_4 = 2X$, $Y_5 = \frac{3}{2}X$, $Y_6 = X$ ou $Y_1 = -2X - 2$, $Y_2 = -2X - 1$, $Y_3 = -2X$, $Y_4 = -2X + 1$, $Y_5 = -2X + 2$, etc. e tirar conclusões intuitivas e importantes.

Vejamos alguns exemplos importantes sobre o estudo da recta:

1. Equação reduzida da recta (no plano): $y = mx + b$
2. Equação da recta de declive m que passa pelo ponto A :

Como o ponto A pertence à recta, temos que $y_A = mx_A + b$, donde vem $b = y_A - mx_A$.

Então, a equação da recta é $y = mx + y_A - mx_A$.

A equação anterior costuma ser escrita com o seguinte aspecto:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

3. Equação reduzida da recta de declive 2 que passa pelo ponto $A = (3, 4)$:

$$y - 4 = 2(x - 3) \iff y = 2x - 6 + 4 \iff y = 2x - 2$$

4. Equação reduzida da recta de declive -3 que passa pelo ponto $A = (2, -5)$:

$$y + 5 = -3(x - 2) \iff y = -3x + 6 - 5 \iff y = -3x + 1$$

5. Equação da recta que passa pelos pontos (distintos) A e B :

1º Caso $x_A = x_B \wedge y_A \neq y_B$

Neste caso, trata-se duma recta vertical, pelo que uma equação da recta AB é $x = x_A$.

2º Caso $x_A \neq x_B$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y_A = mx_A + b \\ y_B = mx_B + b \end{cases} &\implies y_B = mx_B + y_A - mx_A \implies y_B - y_A = m(x_B - x_A) \\ &\implies m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{aligned}$$

Então, uma equação da recta AB é

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

6. Equação reduzida da recta que passa pelos pontos $A = (4, -3)$ e $B = (6, 1)$:

$$\begin{cases} m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 + 3}{6 - 4} = \frac{4}{2} = 2 \\ y + 3 = 2(x - 4) \end{cases} \implies y = 2x - 8 - 3 \implies y = 2x - 11$$

7. Equação da mediatriz de $[AB]$:

Seja $P = (x, y)$. Então, $\overline{AP} = \overline{BP}$, donde vem

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e substituindo (x_P, y_P) por (x, y) , obtemos

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

Então,

$$x^2 - 2xx_A + x_A^2 + y^2 - 2yy_A + y_A^2 = x^2 - 2xx_B + x_B^2 + y^2 - 2yy_B + y_B^2$$

Logo,

$$2yy_B - 2yy_A = -2xx_B + 2xx_A + x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2$$

Então,

$$2y(y_B - y_A) = -2x(x_B - x_A) + x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2$$

E, por fim

$$y = -\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}x + \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{2(y_B - y_A)}$$

Como podemos verificar, a recta AB e a mediatriz de AB têm declives cujo produto é -1 .

É claro que a fórmula anterior só é válida se $y_B \neq y_A$. Se $y_B = y_A$, a mediatriz será uma recta vertical.

Note-se que, num plano, toda a recta é mediatriz de algum segmento de recta, pelo que toda a recta admite uma equação da forma $Ax + By + C = 0$, com $A \neq 0 \vee B \neq 0$.

8. Equação da recta AB , com $A = (3, -2)$ e $B = (7, 6)$:

$$m = \frac{6+2}{7-3} = \frac{8}{4} = 2 \quad y + 2 = 2(x - 3)$$

9. Equação da mediatriz de $[AB]$, com $A = (3, -2)$ e $B = (7, 6)$:

$$m = -\frac{7-3}{6+2} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ponto médio de } [AB]: M = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (5, 2)$$

$$\text{Equação da mediatriz: } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 5)$$

10. Equação da recta AB , com $A = (3, -4)$ e $B = (7, -4)$: $y = -4$

11. Equação da mediatriz de $[AB]$, com $A = (3, -4)$ e $B = (7, -4)$:

$$M = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{-4-4}{2}\right) = (5, -4) \quad x = 5$$

12. Sejam $A = (3, -4)$, $B = (5, 1)$ e $C = (2, -6)$. Qual a distância do ponto C à recta AB ?

$$m_1 = \frac{1+4}{5-3} = \frac{5}{2} \quad \text{Logo, o declive de qualquer recta perpendicular a } AB \text{ é } -\frac{2}{5}.$$

Equação reduzida da recta que passa por C e é perpendicular a AB :

$$y + 6 = -\frac{2}{5}(x - 2) \iff y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5} - 6 \iff y = -\frac{2}{5}x - \frac{26}{5}$$

Equação reduzida da recta AB :

$$y + 4 = \frac{5}{2}(x - 3) \iff y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} - 4 \iff y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2}$$

Intersecção das duas rectas:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -\frac{2}{5}x - \frac{26}{5} \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{23}{2} = -\frac{2}{5}x - \frac{26}{5} \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 25x - 115 = -4x - 26 \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 25x + 4x = 115 - 26 \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 29x = 89 \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{89}{29} \\ y = \frac{5}{2} \times \frac{89}{29} - \frac{23}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{89}{29} \\ y = \frac{445 - 667}{58} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{89}{29} \\ y = -\frac{111}{29} \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $I = (\frac{89}{29}, -\frac{111}{29})$. Então, a distância do ponto C à recta AB é \overline{IC} .

$$\begin{aligned} \overline{IC} &= \sqrt{\left(2 - \frac{89}{29}\right)^2 + \left(-6 + \frac{111}{29}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{31}{29}\right)^2 + \left(-\frac{63}{29}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{961 + 3969}}{29} = \frac{\sqrt{4930}}{29} \end{aligned}$$

13. Sejam $A = (1, -1)$, $B = (5, 5)$ e $C = (2, -2)$. Determine uma equação cartesiana da circunferência de centro C e que é tangente à recta AB .

O raio da circunferência é a distância do ponto C à recta AB , pelo que este exercício é muito parecido com o exercício anterior.

Equação reduzida da recta AB :

$$m_1 = \frac{5+1}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \iff y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$$

O declive duma recta perpendicular a AB é $-\frac{2}{3}$. Então, uma equação da recta que passa por C e é perpendicular à recta AB é $y + 2 = -\frac{2}{3}(x - 2)$, ou seja, $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

Intersecção das duas rectas:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \end{cases} &\iff \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 9x - 15 = -4x - 4 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ 13x = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{3}{2} \times \frac{11}{13} - \frac{5}{2} \\ x = \frac{11}{13} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{16}{13} \\ x = \frac{11}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $I = \left(\frac{11}{13}, -\frac{16}{13}\right)$ e r o raio da circunferência pretendida. Então,

$$\begin{aligned} r &= \overline{CI} = \sqrt{\left(\frac{11}{13} - 2\right)^2 + \left(-\frac{16}{13} + 2\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{15}{13}\right)^2 + \left(\frac{10}{13}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{225 + 100}}{13} = \frac{\sqrt{325}}{13} = \frac{5\sqrt{13}}{13} = \frac{5}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Equação da circunferência:

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = \frac{25}{13}$$

14. Sejam $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e $C = (5, -4)$. Determine uma equação da circunferência que passa por A , B e C .

$$M_1 = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (2, 3) \quad M_2 = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (3, -1)$$

$$m_1 = \frac{4-2}{3-1} = 1 \quad m_2 = \frac{-4-2}{5-1} = -\frac{3}{2}$$

Mediatriz de $[AB]$:

$$y - 3 = -1(x - 2) \iff y = -x + 2 + 3 \iff y = -x + 5$$

Mediatriz de $[AC]$:

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 3) \iff y = \frac{2}{3}x - 2 - 1 \iff y = \frac{2}{3}x - 3$$

Intersecção das mediatrizes:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \frac{2}{3}x - 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = -x + 5 \\ -x + 5 = \frac{2}{3}x - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x + 5 \\ -x - \frac{2}{3}x = -3 - 5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -x + 5 \\ -3x - 2x = -24 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{24}{5} + 5 \\ x = \frac{24}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ x = \frac{24}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $I = \left(\frac{24}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Então,

$$\begin{aligned} r &= \overline{AI} = \sqrt{\left(\frac{24}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{19}{5}\right)^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{361 + 81}}{5} = \frac{\sqrt{442}}{5} \end{aligned}$$

Equação da circunferência:

$$\left(x - \frac{24}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}$$

Se pretendermos obter uma equação na forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, temos

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{24}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 &= \frac{442}{25} &\iff x^2 - \frac{48}{5}x + \frac{576}{25} + y^2 - \frac{2}{5}y + \frac{1}{25} - \frac{442}{25} &= 0 \\ &&\iff x^2 + y^2 - \frac{48}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{135}{25} &= 0 \\ &&\iff x^2 + y^2 - \frac{48}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{27}{5} &= 0 \end{aligned}$$

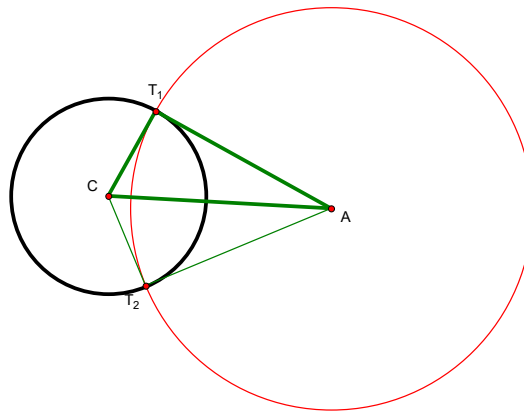
15. Considere a circunferência definida por $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$ e o ponto $A = (10, 2)$.

- (a) Determine a distância do ponto A ao centro da circunferência e compare essa distância com o raio.
- (b) Determine a equação reduzida de cada uma das rectas que passam por A e são tangentes à circunferência, começando por achar a distância de A aos dois pontos de tangência.

Resolução

a. $C = (2, 3)$ $A = (10, 2)$ $\overline{AC} = \sqrt{(2 - 10)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65} > \sqrt{13} = r$

b. $d^2 + r^2 = (\sqrt{65})^2 \implies d^2 = 65 - 13$ Logo, $d = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.



Consideremos a circunferência de centro A e raio $\sqrt{52}$. Então,

$$\begin{aligned} (x - 10)^2 + (y - 2)^2 &= 52 &\iff x^2 - 20x + 100 + y^2 - 4y + 4 &= 52 \\ &&\iff x^2 + y^2 &= 20x + 4y - 52 \end{aligned}$$

Intersecção das duas circunferências:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 20x + 4y - 52 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 20x + 4y - 52 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 13 \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 20x + 4y - 52 \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4x + 6y \\ 20x + 4y - 52 = 4x + 6y \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4x + 6y \\ 16x - 2y = 52 \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 4x + 6y \\ 8x - y = 26 \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + (8x - 26)^2 = 4x + 6(8x - 26) \\ y = 8x - 26 \end{array} \right. \\
 &\implies \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 64x^2 - 416x + 676 = 4x + 48x - 156 \\ y = 8x - 26 \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} 65x^2 - 468x + 832 = 0 \\ y = 8x - 26 \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{16}{5} \vee x = 4 \\ y = 8x - 26 \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{16}{5} \\ y = 8 \times \frac{16}{5} - 26 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 8 \times 4 - 26 \end{array} \right. \\
 &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{16}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 6 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$A = (10, 2) \quad T_1 = \left(\frac{16}{5}, -\frac{2}{5}\right) \quad m_1 = \frac{-\frac{2}{5} - 2}{\frac{16}{5} - 10} = \frac{-2 - 10}{16 - 50} = \frac{-12}{-34} = \frac{6}{17}$$

$$y - 2 = \frac{6}{17}(x - 10) \iff y = \frac{6}{17}x - \frac{60}{17} + 2 \iff y = \frac{6}{17}x - \frac{26}{17}$$

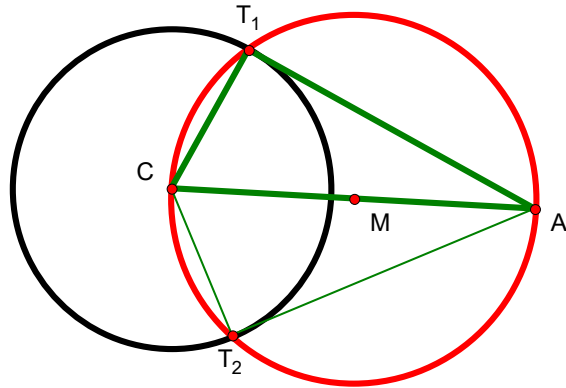
$$A = (10, 2) \quad T_2 = (4, 6) \quad m_2 = \frac{6 - 2}{4 - 10} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 10) \iff y = -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3} + 2 \iff y = -\frac{2}{3}x + \frac{26}{3}$$

Segundo Processo

Como o triângulo $[ACT]$ é rectângulo em T , a circunferência de diâmetro $[AC]$ passa

por T . Seja M o ponto médio de $[AC]$. Então, $M = \left(\frac{10+2}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(6, \frac{5}{2}\right)$.



Equação da circunferência de centro M e raio $\frac{\sqrt{65}}{2}$:

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{65}{4} \iff x^2 - 12x + 36 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{65}{4} \\ &\iff x^2 + y^2 = 12x + 5y - 26 \end{aligned}$$

Intersecção das duas circunferências:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 12x + 5y - 26 \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases} &\iff \begin{cases} 12x + 5y - 26 = 4x + 6y \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 8x - 26 = y \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 8x - 26 \\ x^2 + (8x - 26)^2 = 4x + 6(8x - 26) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 8x - 26 \\ x^2 + 64x^2 - 416x + 676 = 52x - 156 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 8x - 26 \\ 65x^2 - 468x + 832 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 8x - 26 \\ 5x^2 - 36x + 64 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 8x - 26 \\ x = \frac{16}{5} \vee x = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 8 \times \frac{16}{5} - 26 \\ x = \frac{16}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 32 - 26 \\ x = 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -\frac{2}{5} \\ x = \frac{16}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 6 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, os pontos de intersecção são $I_1 = \left(\frac{16}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ e $I_2 = (4, 6)$. Ora, $A = (10, 2)$.

$$\text{Então, } m_1 = \frac{2 + \frac{2}{5}}{10 - \frac{16}{5}} = \frac{10 + 2}{50 - 16} = \frac{12}{34} = \frac{6}{17}.$$

$$\text{Equação da recta } AI_1: y - 2 = \frac{6}{17}(x - 10)$$

$$\text{E } m_2 = \frac{2 - 6}{10 - 4} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Equação da recta } AI_2: y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 10)$$

Terceiro Processo

As rectas não verticais que passam por A têm equação do tipo $y - 2 = m(x - 10)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x + 6y \\ y = m(x - 10) + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (mx - 10m + 2)^2 = 4x + 6(mx - 10m + 2) \\ y = m(x - 10) + 2 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} x^2 + m^2x^2 + 100m^2 + 4 - 20m^2x + 4mx - 40m = 4x + 6mx - 60m + 12 \\ y = m(x - 10) + 2 \end{cases}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} (1 + m^2)x^2 + (-20m^2 - 2m - 4)x + 100m^2 + 20m - 8 = 0 \\ y = m(x - 10) + 2 \end{cases}$$

Ora,

$$\Delta = (-20m^2 - 2m - 4)^2 - 4(1 + m^2)(100m^2 + 20m - 8) = -204m^2 - 64m + 48$$

Então,

$$\Delta = 0 \iff -204m^2 - 64m + 48 = 0 \iff 51m^2 + 16m - 12 = 0 \iff m = -\frac{2}{3} \vee m = \frac{6}{17}$$

E, agora, calculávamos os valores de b , obtendo-se as mesmas equações dos processos anteriores.

Observação

Duas rectas não verticais são paralelas se e só se têm o mesmo declive.

Consideremos duas rectas r e s que não têm o mesmo declive. Então, $y = m_r x + b_r$ e $y = m_s x + b_s$, com $m_r \neq m_s$ são as equações reduzidas das duas rectas. Resolvamos o sistema $\begin{cases} y = m_r x + b_r \\ y = m_s x + b_s \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = m_r x + b_r \\ y = m_s x + b_s \end{cases} &\iff \begin{cases} y = m_r x + b_r \\ m_r x + b_r = m_s x + b_s \end{cases} \iff \begin{cases} y = m_r x + b_r \\ (m_r - m_s)x = b_s - b_r \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{m_r(b_s - b_r)}{m_r - m_s} + b_r \\ x = \frac{b_s - b_r}{m_r - m_s} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, existe um único ponto de intersecção, pelo que as rectas não são paralelas.

Consideremos duas rectas r e s que têm o mesmo declive m . Então, $y = mx + b_r$ e $y = mx + b_s$ são as equações reduzidas das duas rectas.

Se $b_r = b_s$, as duas rectas são coincidentes, pelo que são paralelas.

Se $b_r \neq b_s$, o sistema $\begin{cases} y = mx + b_r \\ y = mx + b_s \end{cases}$ é impossível, pelo que as duas rectas não têm pontos comuns. Então, r e s são estritamente paralelas.

Exercício 749 Considere o ponto $A = (2, 3)$ e o vector $\vec{u} = (4, 5)$. Seja r , a recta que passa pelo ponto A e tem a direcção do vector \vec{u} . Determine:

- a) Uma equação vectorial da recta r .
- b) Um sistema de equações paramétricas da recta r .
- c) Uma equação cartesiana da recta r .
- d) A equação reduzida da recta r .

Resolução

a) $(x, y) = (2, 3) + \alpha(4, 5), \alpha \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = 2 + 4\alpha \\ y = 3 + 5\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x = 2 + 4\alpha \\ y = 3 + 5\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-2}{4} = \alpha \\ \frac{y-3}{5} = \alpha \end{cases}$

Uma equação cartesiana da recta é, por exemplo, $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5}$.

d)
$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5} \iff 4y - 12 = 5x - 10 \iff 4y = 5x + 2 \iff y = \frac{5x}{4} + \frac{1}{2}$$

Exercício 750 Considere a recta r que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e tem a direcção do vector $\vec{u} = (p, q)$, com $p \neq 0 \wedge q \neq 0$. Determine:

- a) Uma equação vectorial da recta r .
- b) Um sistema de equações paramétricas da recta r .
- c) Uma equação cartesiana da recta r .
- d) A equação reduzida da recta r .

Resolução

a) $(x, y) = (x_0, y_0) + \alpha(p, q), \alpha \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = x_0 + p\alpha \\ y = y_0 + q\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x = x_0 + p\alpha \\ y = y_0 + q\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-x_0}{p} = \alpha \\ \frac{y-y_0}{q} = \alpha \end{cases}$

Uma equação cartesiana da recta é, por exemplo, $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}$.

- d) Obtenção da equação reduzida da recta :

$$py - py_0 = qx - qx_0 \iff py = qx + py_0 - qx_0 \iff y = \frac{q}{p}x + y_0 - \frac{q}{p}x_0$$

Registe-se que a equação anterior costuma ser substituída por $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $m = \frac{q}{p}$.

Observação

Os vectores (p, q) e $(q, -p)$ são perpendiculares, porque o seu produto interno é zero. Este facto é bastante importante e é explorado constantemente, para escrever uma equação cartesiana duma recta.

Habitualmente, aplicamos a seguinte regra:

Se o vector $\vec{n} = (a, b)$ é um vector não nulo e perpendicular a uma recta que passa pelo ponto (x_0, y_0) , então uma equação cartesiana da recta é

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

E, para obter um vector director da recta, basta-nos trocar a ordem e um dos sinais das coordenadas do vector \vec{n} , obtendo-se, por exemplo, $\vec{u} = (b, -a)$.

Então, uma equação vectorial da recta é

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \alpha(b, -a), \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercício 751 Considere a recta r definida pelos pontos $A = (1, 3)$ e $B = (5, 5)$. Determine:

- Uma equação vectorial da recta r .
- Um sistema de equações paramétricas da recta r .
- Uma equação cartesiana da recta r .
- A equação reduzida da recta r .

Resolução

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 5) - (1, 3) = (4, 2) \parallel (2, 1)$

Então, $(x, y) = (1, 3) + \alpha(2, 1), \alpha \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 3 + \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

c) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1}$

d)

$$2y - 6 = x - 1 \iff 2y = x + 5 \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Exercício 752 Considere os pontos $A = (1, 3)$ e $B = (5, 5)$. Determine a equação reduzida da mediatriz de $[AB]$.

Resolução

O ponto médio de $[AB]$ é dado por $M = (\frac{1+5}{2}, \frac{3+5}{2}) = (3, 4)$.

$\overrightarrow{AM} = M - A = (3, 4) - (1, 3) = (2, 1)$ é um vector perpendicular à mediatriz de . Então:

$$2(x - 3) + 1(y - 4) = 0 \iff 2x - 6 + y - 4 = 0 \iff y = -2x + 10$$

Exercício 753 Considere os pontos $A = (1, 2)$, $B = (5, 6)$ e $C = (7, 0)$. Determine o baricentro, o ortocentro, o circuncentro e o incentro do triângulo $[ABC]$.

Resolução

a) Determinação do baricentro ou centro de gravidade:

O baricentro dum triângulo é o ponto de intersecção das três medianas do triângulo, tendo-se que mediana é o segmento de recta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

O ponto médio de $[AB]$ é $M_1 = (3, 4)$.

$$\overrightarrow{CM_1} = M_1 - C = (3, 4) - (7, 0) = (-4, 4) \perp (1, 1)$$

Uma equação cartesiana da recta que contém a mediana anterior é:

$$x - 7 + y = 0$$

O ponto médio de $[BC]$ é $M_2 = (6, 3)$.

$$\overrightarrow{AM_2} = M_2 - A = (6, 3) - (1, 2) = (5, 1) \perp (1, -5)$$

Uma equação cartesiana da recta que contém a mediana anterior é:

$$x - 1 - 5(y - 2) = 0$$

Já não é necessário obter a terceira equação, a menos que queiramos verificar que, de facto, as três medianas têm um ponto comum.

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ 7 - y - 1 - 5y + 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 - y \\ -6y = -16 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Logo, o baricentro do triângulo é o ponto $G = (\frac{13}{3}, \frac{8}{3})$.

Como curiosidade, calculemos \overrightarrow{AG} e $\overrightarrow{GM_2}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AG} = G - A = (\frac{13}{3}, \frac{8}{3}) - (1, 2) = (\frac{10}{3}, \frac{2}{3}) \\ \overrightarrow{GM_2} = M_2 - G = (6, 3) - (\frac{13}{3}, \frac{8}{3}) = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3}) \end{cases}$$

A conclusão é que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GM_2}$, que é uma propriedade que se verifica em qualquer triângulo e relativamente a qualquer das medianas. Esta propriedade costuma enunciar-se do seguinte modo: as medianas dum triângulo trissectam-se.

Uma última curiosidade: $G = (\frac{1+5+7}{3}, \frac{2+6+0}{3}) = (\frac{13}{3}, \frac{8}{3})$.

b) Determinação do ortocentro:

O ortocentro dum triângulo é o ponto de intersecção das rectas que contêm as alturas do triângulo.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, 6) - (1, 2) = (4, 4) \parallel (1, 1)$$

Uma equação cartesiana da recta que passa por C e é perpendicular a $[AB]$ é $x - 7 + y = 0$.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 0) - (1, 2) = (6, -2) \parallel (3, -1)$$

Uma equação cartesiana da recta que passa por B e é perpendicular a $[AC]$ é $3(x - 5) - (y - 6) = 0$, ou seja, $3x - y - 9 = 0$.

$$\begin{cases} x = 7 - y \\ 21 - 3y - y - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 - y \\ -4y = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Logo, o ortocentro do triângulo $[ABC]$ é o ponto $H = (4, 3)$.

c) Determinação do circuncentro:

O ponto médio de $[AB]$ é $M_1 = (3, 4)$; o ponto médio de $[AC]$ é $M_2 = (4, 1)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4, 4) \parallel (1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (6, -2) \parallel (3, -1) \\ M_1 = (3, 4); M_2 = (4, 1) \end{cases}$$

Equações cartesianas das mediatrizes de $[AB]$ e $[AC]$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1(x-3) + 1(y-4) = 0 \\ 3(x-4) - 1(y-1) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+y=7 \\ 3x-12-y+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=7-x \\ 3x-12-7+x+1=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y=7-x \\ 4x=18 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{5}{2} \\ x=\frac{9}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, o circuncentro do triângulo é o ponto $D = (\frac{9}{2}, \frac{5}{2})$.

Verificação:

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (\frac{9}{2}, \frac{5}{2}) - (1, 2) = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}) \implies \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (\frac{9}{2}, \frac{5}{2}) - (5, 6) = (-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \implies \|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (\frac{9}{2}, \frac{5}{2}) - (7, 0) = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) \implies \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente, observe-se que uma equação da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ é:

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

d) Determinação do incentro:

O incentro dum triângulo é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo, ou seja é o ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo.

Para encontrar um vector director da bissetriz do ângulo interno A (por exemplo), encontramos os dois vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} e depois temos de obter dois outros vectores com a mesma norma e que tenham a direcção e o sentido dos vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} . A soma dos dois vectores encontrados é um vector director da bissetriz.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 4) = 4(1, 1); \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (6, -2) = 3(3, -1);$$

Sejam $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (3, -1)$. Então, $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{10} = \sqrt{5}\|\vec{u}\|$.

Seja $\vec{w} = \sqrt{5}\vec{u} + \vec{v} = (\sqrt{5}, \sqrt{5}) + (3, -1) = (\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 1)$.

Então, \vec{w} é um vector director da bissetriz do ângulo A , pelo que uma equação cartesiana da (recta) bissetriz é:

$$\frac{x-1}{\sqrt{5}+3} = \frac{y-2}{\sqrt{5}-1}$$

Analogamente, temos:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -6) = 2(1, -3); \quad \|(1, -3)\| = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-4, -4) = 4(-1, -1); \quad \|(-1, -1)\| = \sqrt{2}$$

Seja $\vec{t} = (1, -3) + \sqrt{5}(-1, -1) = (1 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5})$.

Equação cartesiana da (recta) bissetriz do ângulo B :

$$\frac{x-5}{\sqrt{5}-1} = \frac{y-6}{\sqrt{5}+3}$$

O incentro do triângulo obtém-se resolvendo o sistema formado pelas equações das duas bissec-trizes:

$$\begin{cases} (x-1)(\sqrt{5}-1) = (y-2)(\sqrt{5}+3) \\ (x-5)(\sqrt{5}+3) = (y-6)(\sqrt{5}-1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ y = 5 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Apenas apresentámos a solução do sistema, sem a resolução do mesmo, por não haver interesse na sua apresentação.

E, agora, podemos afirmar que o incentro é $(2 + \sqrt{5}, 5 - \sqrt{5})$.

Uma equação da circunferência inscrita ao triângulo é:

$$(x - 2 - \sqrt{5})^2 + (y - 5 + \sqrt{5})^2 = r^2$$

Na expressão anterior, r é a distância do ponto $E = (2 + \sqrt{5}, 5 - \sqrt{5})$ à recta que contém um dos lados do triângulo, tendo-se $r = \sqrt{10} - \sqrt{2}$:

Cálculo da distância do ponto à recta AB :

$$\overrightarrow{AB} = (4, 4) = 4(1, 1) \implies m = 1; \quad A = (1, 2)$$

Então, a recta AB é definida por $y = x + 1$, equação que é equivalente a $x - y + 1 = 0$;

A distância do ponto E à recta AB é dada por:

$$r = \frac{|2 + \sqrt{5} - 5 + \sqrt{5} + 1|}{\sqrt{1+1}} = \left(\frac{2\sqrt{5}-2}{2} \right) \sqrt{2} = (\sqrt{5}-1) \sqrt{2} = \sqrt{10} - \sqrt{2}$$

Então, uma equação da circunferência inscrita no triângulo é:

$$(x - 2 - \sqrt{5})^2 + (y - 5 + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$$

Exercício 754 Considere os pontos $A = (1, 3)$, $B = (5, 1)$ e $C = (4, 5)$. Sem usar o produto interno, determine uma equação cartesiana e uma equação vectorial da recta que passa por C e é perpendicular à recta AB .

Resolução

O que se pretende neste exercício é obter uma equação duma recta perpendicular a outra, utilizando, apenas, o conhecimento de que rectas paralelas têm o mesmo declive e a fórmula da distância entre dois pontos, para definir a mediatriz dum segmento de recta.

Seja $P = (x, y)$, um ponto equidistante de A e B . Então:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1$$

A equação anterior é equivalente a $8x - 4y = 16$, donde se conclui que $y = 2x - 4$.

Então, a equação reduzida da recta pretendida é $y = 2x + b$, com b a determinar de modo que o ponto $C = (4, 5)$ satisfaça a equação.

Então, $5 = 2 \times 4 + b$, donde se conclui que $b = -3$, pelo que a equação reduzida da recta é $y = 2x - 3$.

Como o declive da recta é 2, então $\vec{u} = (1, 2)$ é um vector director da recta, pelo que uma equação vectorial da recta é:

$$(x, y) = (4, 5) + \alpha(1, 2), (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exercício 755 Considere os pontos $O = (0, 0)$, $A = (-4, -12)$ e $B = (8, -8)$. Determine o baricentro, o ortocentro e o circuncentro do triângulo $[ABC]$.

Resolução

Determinação do baricentro:

Seja G o baricentro de $[OAB]$. Então, $G = \left(\frac{0-4+8}{3}, \frac{0-8-12}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}\right)$.

Se pretendermos utilizar equações das rectas que contêm as medianas, para obter o baricentro:

Seja M_1 o ponto médio de $[OA]$. Então, $M_1 = (-2, -6)$.

Logo, $\vec{M_1B} = B - M_1 = (8, -8) - (-2, -6) = (10, -2)$.

Então, uma equação cartesiana da recta M_1B é

$$\frac{x+2}{10} = \frac{y+6}{-2}$$

Logo, $x+2 = -5y-30$, donde vem $x = -5y-32$.

Seja M_2 o ponto médio de $[OB]$. Então, $M_2 = (4, -4)$.

Logo, $\vec{M_2A} = A - M_2 = (-4, -12) - (4, -4) = (-8, -8)$.

Então, uma equação cartesiana da recta M_2A é

$$\frac{x+4}{-8} = \frac{y+12}{-8}$$

Logo, $x+4 = y+12$, donde vem $x = y+8$.

Determinação do ponto de intersecção das duas rectas anteriores:

$$\begin{cases} x = -5y - 32 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y + 8 = -5y - 32 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 6y = -40 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{20}{3} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Logo, $G = \left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}\right)$.

Determinação do ortocentro:

O ortocentro é o ponto de intersecção das rectas que contêm as alturas do triângulo.

Ora, $\vec{OA} = (-4, -12) - (0, 0) = (-4, -12)$, pelo que o declive da recta OA é 3. Logo, as rectas perpendiculares a OA têm declive $-\frac{1}{3}$.

Então, uma equação da recta que passa por B e é perpendicular a OA é

$$y + 8 = -\frac{1}{3}(x - 8)$$

Logo, $-3y - 24 = x - 8$, donde vem $x = -3y - 16$.

Repetindo o raciocínio, temos $\overrightarrow{OB} = (8, -8) - (0, 0) = (8, -8)$, pelo que o declive da recta OB é -1 . Então, as rectas perpendiculares a OB têm declive 1 .

Então, uma equação da recta que passa por A e é perpendicular a OB é

$$y + 12 = x + 4$$

Logo, $x = y + 8$.

Determinação do ponto de intersecção das duas rectas anteriores:

$$\begin{cases} x = -3y - 16 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y + 8 = -3y - 16 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = -24 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Logo, o ortocentro do triângulo é o ponto $(2, -6)$.

Determinação do circuncentro:

O circuncentro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo.

Já vimos que as rectas perpendiculares a OA têm declive $-\frac{1}{3}$ e que o ponto médio de $[OA]$ é $(-2, -6)$.

Equação da recta perpendicular a OA e que passa pelo ponto médio de $[OA]$:

$$y + 6 = -\frac{1}{3}(x + 2)$$

Logo, $x + 2 = -3y - 18$, pelo que $x = -3y - 20$.

As rectas perpendiculares a OB têm declive 1 . Então, uma equação da recta perpendicular a OB e que passa pelo ponto médio de $[OB]$ é:

$$y + 4 = x - 4$$

Logo, $x = y + 8$.

Determinação do ponto de intersecção das duas rectas anteriores:

$$\begin{cases} x = -3y - 20 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y + 8 = -3y - 20 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = -28 \\ x = y + 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -7 \\ x = 1 \end{cases}$$

Logo, o circuncentro do triângulo é o ponto $E = (1, -7)$.

A partir do circuncentro, podemos encontrar o raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[OAB]$:

$$r = \overline{OE} = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Logo, uma equação da circunferência circunscrita ao triângulo $[OAB]$ é:

$$(x - 1)^2 + (y + 7)^2 = 50$$

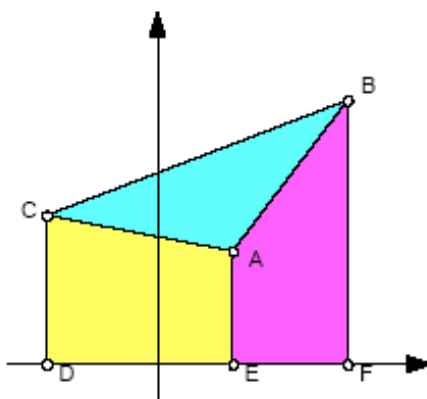
Exercício 756 Considere os pontos $A = (2, 3)$, $B = (5, 7)$ e $C = (-3, 4)$. Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Resolução

a) Começamos por referir que estamos sempre a supor que utilizamos um referencial ortonormal.

Determinação da área do triângulo $[ABC]$, usando trapézios:

É fácil verificar, na figura abaixo, que a área do triângulo $[ABC]$ é a diferença entre a área do trapézio $[BCDF]$ e a soma das áreas dos trapézios $[ACDE]$ e $[ABFE]$.



Área do trapézio $[BCDE]$: $\frac{4+7}{2} \times 8 = 44$.

Área do trapézio $[ACDE]$: $\frac{4+3}{2} \times 5 = \frac{35}{2}$.

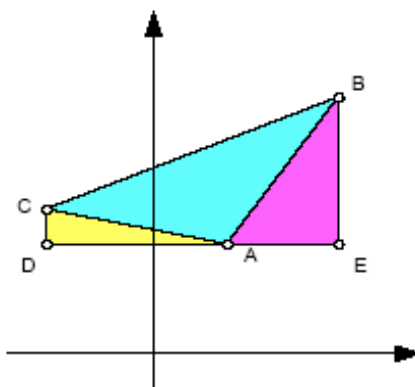
Área do trapézio $[ABFE]$: $\frac{7+3}{2} \times 3 = 15$.

Área do triângulo $[ABC]$: $44 - \frac{35}{2} - 15 = \frac{23}{2}$.

Então, a área do triângulo é $\frac{23}{2}$ unidades de área.

É claro que a unidade de área depende da unidade de comprimento.

b) Determinação da área do triângulo $[ABC]$, usando triângulos e um trapézio:



Área do trapézio $[BCDE]$: $\frac{1+4}{2} \times 8 = 20$.

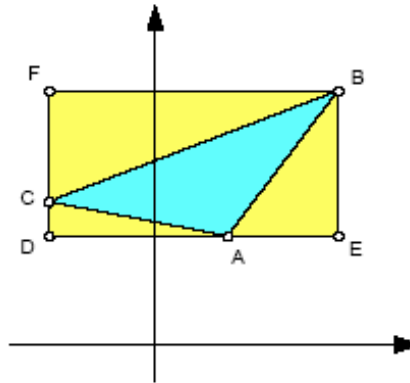
Área do triângulo $[ACD]$: $\frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$.

Área do triângulo $[ABE]$: $\frac{3 \times 4}{2} = 6$

Área do triângulo $[ABC]$: $20 - 6 - \frac{5}{2} = \frac{23}{2}$.

Então, a área do triângulo é $\frac{23}{2}$ unidades de área.

c) Determinação da área do triângulo, usando triângulos e um rectângulo:



Área do rectângulo $[BEDF]$: $8 \times 4 = 32$.

Área do triângulo $[ABE]$: $\frac{3 \times 4}{2} = 6$.

Área do triângulo $[ACD]$: $\frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$.

Área do triângulo $[BCF]$: $\frac{8 \times 3}{2} = 12$.

Área do triângulo $[ABC]$: $32 - 6 - 12 - \frac{5}{2} = \frac{23}{2}$.

Então, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{23}{2}$ unidades de área.

Exercício 757 Considere os pontos $A = (2, 1)$ e $B = (4, 5)$. Determine o(s) ponto(s) C , de modo que o triângulo $[ABC]$ seja equilátero.

1ª Resolução

Os três lados do triângulo devem ter o mesmo comprimento.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 5) - (2, 1) = (2, 4)$. Então, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

Seja $C = (x, y)$. Então, $\overrightarrow{AC} = C - A = (x, y) - (2, 1) = (x - 2, y - 1)$.

Logo, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$. Então, devemos ter $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{20}$.

E procede-se de modo análogo para o ponto B .

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (x, y) - (4, 5) = (x - 4, y - 5).$$

$$\text{Logo, } \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}. \text{ Então, } \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{20}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 20 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 20 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 20 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x + 2y + 15 \\ 4x + 2y + 15 - 8x - 10y = -21 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 \\ -4x - 8y = -36 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (9-2y-2)^2 + (y-1)^2 = 20 \\ x = 9-2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (7-2y)^2 + (y-1)^2 = 20 \\ x = 9-2y \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Então: } (7-2y)^2 + (y-1)^2 = 50 - 30y + 5y^2$$

$$\begin{aligned} (7-2y)^2 + (y-1)^2 = 20 &\iff 49 - 28y + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 20 \\ &\iff 5y^2 - 30y + 30 = 0 \iff y^2 - 6y + 6 = 0 \\ &\iff y = 3 \pm \sqrt{9-6} \iff y = 3 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, $x = 9 - 2(3 \pm \sqrt{3}) = 3 \pm 2\sqrt{3}$, pelo que

$$C = (3 + 2\sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}) \vee C = (3 - 2\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$$

Esta resolução consiste em considerar a intersecção da circunferência de centro A e que passa por B , com a circunferência de centro B e que passa por A e mostra que a intersecção de duas circunferências é transformada na intersecção duma recta com uma circunferência. Este problema de determinar um ponto de forma a definir com outros dois, um triângulo equilátero tem sempre duas soluções.

2ª Resolução

O ponto $C = (x, y)$ tem de ser equidistante de A e de B , pelo que tem de pertencer à mediatriz de $[AB]$. Além disso, a distância de C ao ponto A deve ser igual à distância entre A e B . Seja M o ponto médio de $[AB]$.

$$\text{Então, } M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (3, 3). \text{ Ora, } \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 5) - (2, 1) = (2, 4) \parallel (1, 2).$$

Então, uma equação cartesiana da mediatriz de $[AB]$ é

$$x - 3 + 2(y - 3) = 0$$

$$\text{Então, } x = 2y - 9 \text{ e } \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}.$$

$$\text{Por outro lado, } \overrightarrow{AC} = C - A = (x, y) - (2, 1) = (x - 2, y - 1) = (9 - 2y - 2, y - 1) = (7 - 2y, y - 1).$$

Então:

$$\begin{aligned}(7-2y)^2 + (y-1)^2 = 20 &\iff 4y^2 - 28y + 49 + y^2 - 2y + 1 - 20 = 0 \\ &\iff 5y^2 - 30y + 30 = 0 \\ &\iff y = 3 \pm \sqrt{3}\end{aligned}$$

Logo, há duas soluções $\begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ y = 3 - \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 - 2\sqrt{3} \\ y = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

3ª Resolução

Consideremos um triângulo equilátero de lado l . Seja h , uma altura do triângulo. Então, usando Trigonometria ou o Teorema de Pitágoras, temos $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Seja M o ponto médio de $[AB]$. Então, $M = (3, 3)$.

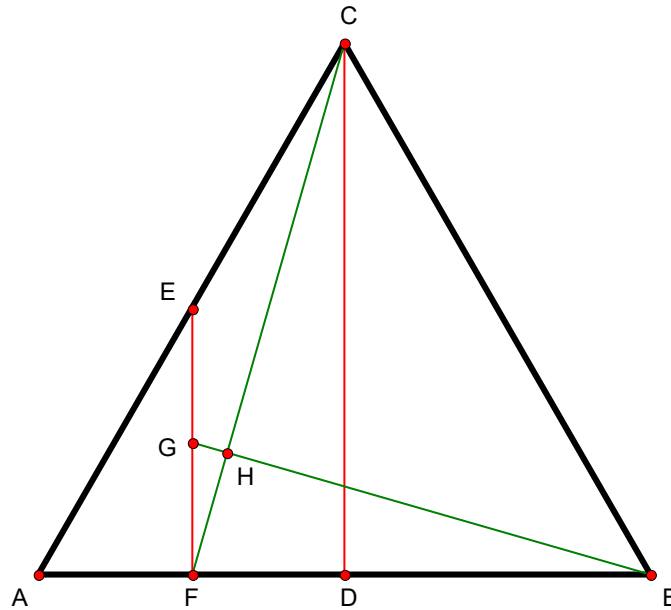
Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 5) - (2, 1) = (2, 4)$, temos $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

O vector $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}(4, -2)$ é perpendicular a \overrightarrow{AB} e tem norma igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$, pelo que temos:

$$C = M \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(4, -2) = (3, 3) \pm (2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

Logo, $C = (3, 3) + (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (3 + 2\sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$ ou $C = (3, 3) - (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (3 - 2\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

Exercício 758 Na figura seguinte, temos que $[ABC]$ é um triângulo equilátero, D é o ponto médio de $[AB]$, E é o ponto médio de $[AC]$, F é o ponto médio de $[AD]$, G é o ponto médio de $[EF]$ e H é o ponto de intersecção de BG com CF . Mostre que $BH \perp CF$.



Resolução 1

Esta questão foi-me apresentada por um colega da Escola Secundária Jaime Moniz. Esta foi a minha primeira resolução, embora não exactamente desta maneira:

Suponhamos que utilizávamos um referencial ortonormado, de modo que $A = (0, 0)$ e $B = (8, 0)$. Então, $D = (4, 0)$ e $C = (4, 4\sqrt{3})$.

Logo, $F = (2, 0)$ e $E = (2, 2\sqrt{3})$, pelo que $G = (2, \sqrt{3})$.

Então, o declive da recta CF é dado por $m_{CF} = \frac{4\sqrt{3}-0}{4-2} = 2\sqrt{3}$, enquanto que o declive da recta BG é dado por $m_{BG} = \frac{0-\sqrt{3}}{8-2} = -\frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Então, $m_{CF} \times m_{BG} = 2\sqrt{3} \times (-\frac{1}{6}\sqrt{3}) = -1$, pelo que as rectas BG e CF são perpendiculares. Logo, $BH \perp CF$.

Resolução 2

Ainda usando a Geometria Analítica, temos $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (4, 4\sqrt{3})$, $D = (4, 0)$, $E = (2, 2\sqrt{3})$, $F = (2, 0)$ e $G = (2, \sqrt{3})$.

Então, $\overrightarrow{BG} = G - B = (2, \sqrt{3}) - (8, 0) = (-6, \sqrt{3})$.

Além disso, vem $\overrightarrow{CF} = F - C = (2, 0) - (4, 4\sqrt{3}) = (-2, -4\sqrt{3})$.

Logo, $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CF} = (-6, \sqrt{3}) \cdot (-2, -4\sqrt{3}) = 12 - 4 \times 3 = 0$.

Então, $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{BG}$, pelo que $BH \perp CF$.

Resolução 3

É claro que o declive duma recta está relacionado com a Trigonometria, o que nos permite outra resolução:

$\overline{CD} = 4 \times \tan 60^\circ = 4\sqrt{3}$. Então, $\overline{EF} = 2\sqrt{3}$ e $\overline{FG} = \sqrt{3}$.

Sejam α e β as amplitudes (em graus) dos ângulos FCD e GBF .

Então, $\tan \alpha = \frac{\overline{DF}}{\overline{CD}} = \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e $\tan \beta = \frac{\overline{GF}}{\overline{BF}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Então, $\tan \alpha = \tan \beta$, pelo que $\alpha = \beta$ (estamos a considerar ângulos agudos).

Ora, os ângulos EFC e FCD são iguais (a α), pelo que a amplitude do ângulo DFC é $90^\circ - \alpha$, ou seja, $90^\circ - \beta$.

Então, a amplitude do ângulo FHB é 90° , uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos dum triângulo é 180° .

Resolução 4

É claro que a Trigonometria está relacionada com semelhanças de triângulos.

Seja h a altura de $[ABC]$. Então, $h^2 + 4^2 = 8^2$, pelo que $h = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, pois $h > 0$.

É claro que $[AEF]$ e $[ABC]$ são semelhantes, sendo 2 a razão de semelhança. Então, $\overline{EF} = 2\sqrt{3}$ e $\overline{FG} = \sqrt{3}$.

Logo, $\overline{BG}^2 = (\sqrt{3})^2 + 6^2 = 39$. Então, $\overline{BG} = \sqrt{39}$.

Por outro lado, $\overline{CF}^2 = 2^2 + (4\sqrt{3})^2 = 52$. Logo, $\overline{CF} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Ora, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{39}}{2\sqrt{13}} = \frac{6}{4\sqrt{3}}$, pelo que os lados dos triângulos $[CDF]$ e $[BFG]$ são directamente proporcionais.

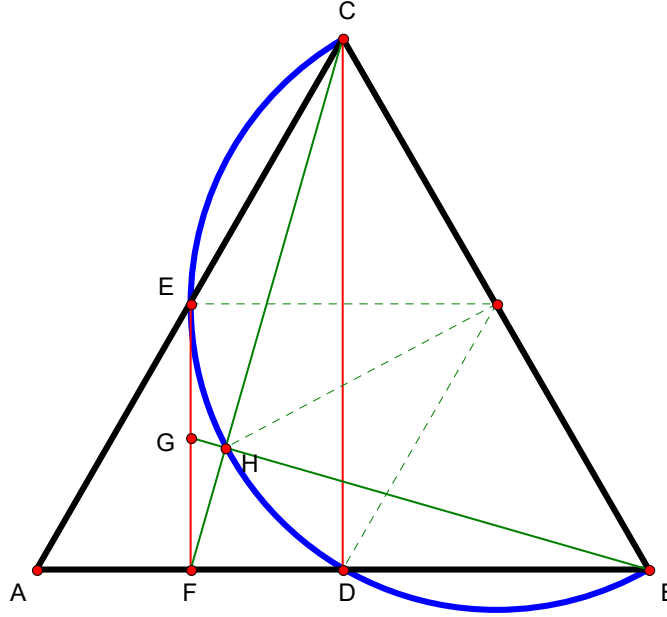
Então, os triângulos $[CDF]$ e $[BFG]$ são semelhantes pelo que os ângulos de um são iguais aos ângulos do outro. Então, os ângulos FCD e GBF são iguais.

Logo, como vimos na resolução anterior, $BH \perp CF$.

Observações

1. Usando a Geometria Analítica, podemos encontrar as coordenadas do ponto H .

2. Como o ângulo BHC é recto, pode ser inscrito numa semi-circunferência:



3. O triângulo $[BFH]$ é semelhante aos triângulos $[CDF]$ e $[BFG]$.
4. Depois de ter escrito as observações anteriores, tentei outros pontos, de modo a obter um ângulo recto. Depois de várias tentativas falhadas, descobri algo de muito interessante: se unisse os pontos médios de $[EG]$ e $[EG]$ com B e C , respectivamente, obtinha um ângulo recto. O mais difícil estava feito. Com alguma paciência, descobri o seguinte exercício:

Exercício 759 Nas condições do exercício anterior, sejam $G_\alpha = E + \alpha \overrightarrow{EF}$ e $F_\alpha = A + \alpha \overrightarrow{AD}$. Então, as rectas BG_α e CF_α são perpendiculares.

Resolução

Ora, $A = (0, 0)$, $E = (2, 2\sqrt{3})$, $F = (2, 0)$, $D = (4, 0)$, $B = (8, 0)$ e $C = (4, 4\sqrt{3})$.
Então,

$$\begin{cases} G_\alpha = (2, 2\sqrt{3}) + \alpha (0, -2\sqrt{3}) = (2, 2\sqrt{3} - 2\alpha\sqrt{3}) = (2, 2(1 - \alpha)\sqrt{3}) \\ F_\alpha = (0, 0) + \alpha (4, 0) = (4\alpha, 0) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \overrightarrow{BG_\alpha} = (2, 2(1 - \alpha)\sqrt{3}) - (8, 0) = (-6, 2(1 - \alpha)\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{CF_\alpha} = (4\alpha, 0) - (4, 4\sqrt{3}) = (4\alpha - 4, -4\sqrt{3}) \end{cases}$$

Declive da recta BG_α :

$$m_1 = \frac{2(1-\alpha)\sqrt{3}}{-6} = \frac{(\alpha-1)\sqrt{3}}{3}$$

Declive da recta CF_α :

$$m_2 = \frac{-4\sqrt{3}}{4\alpha-4} = \frac{\sqrt{3}}{1-\alpha}$$

Então, $m_1 \times m_2 = \frac{(\alpha-1)\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{1-\alpha} = -1$, pelo que as rectas BG_α e CF_α são perpendiculares (para $\alpha \neq 1$).

Se $\alpha = 1$, então $\overrightarrow{BG_\alpha} = (-6, 0)$ e $\overrightarrow{CF_\alpha} = (0, -4\sqrt{3})$, pelo que as duas rectas são perpendiculares.

Então, se representarmos o ponto de intersecção das duas rectas BG_α e CF_α por H_α , temos que H_α pertence à circunferência de diâmetro $[BC]$.

Equação da recta BG_α :

$$y = \frac{(\alpha-1)\sqrt{3}}{3}(x-8)$$

Equação da recta CF_α :

$$y - 4\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{1-\alpha}(x-4)$$

Inteseccção das rectas BG_α e CF_α :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{(\alpha-1)\sqrt{3}}{3}(x-8) \\ y = 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{1-\alpha}(x-4) \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{(\alpha-1)\sqrt{3}}{3}(x-8) \\ \frac{(\alpha-1)\sqrt{3}}{3}(x-8) = 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{1-\alpha}(x-4) \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{(\alpha-1)\sqrt{3}}{3} \left(\frac{8\alpha^2-4\alpha+8}{\alpha^2-2\alpha+4} - 8 \right) \\ x = \frac{8\alpha^2-4\alpha+8}{\alpha^2-2\alpha+4} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{8\alpha^2-4\alpha+8}{\alpha^2-2\alpha+4} \\ y = \frac{4(\alpha-2)(\alpha-1)\sqrt{3}}{\alpha^2-2\alpha+4} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Então,

$$H_\alpha = \left(\frac{8\alpha^2-4\alpha+8}{\alpha^2-2\alpha+4}, \frac{4(\alpha-2)(\alpha-1)\sqrt{3}}{\alpha^2-2\alpha+4} \right)$$

Seja $f(\alpha) = \left(\frac{8\alpha^2-4\alpha+8}{\alpha^2-2\alpha+4} - 6 \right)^2 + \left(\frac{4(\alpha-2)(\alpha-1)\sqrt{3}}{\alpha^2-2\alpha+4} - 2\sqrt{3} \right)^2$. Então,

Como $x > 1$, então $x = 1 + \sqrt{32} = 1 + 4\sqrt{2}$.

Então, $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ e $B = (1 + 4\sqrt{2}, 0)$. Logo, $E = (1 + 4\sqrt{2}, 4)$.

De $\frac{\overline{DA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{BC}}$, vem $\frac{2}{\overline{AC}} = \frac{4}{\overline{AC} + 4\sqrt{2}}$. Logo, $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$. Então, $C = (1 + 4\sqrt{2}, 0)$.

Declive da recta DE : $m_1 = \frac{4-2}{1+4\sqrt{2}-1} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Equação da recta DE : $y - 4 = \frac{\sqrt{2}}{4}(x - 1 - 4\sqrt{2})$. Logo, $y = \frac{1}{4}\sqrt{2}x - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 2$.

Declive da recta FB : $m_2 = -2\sqrt{2}$.

Equação da recta FB : $y = -2\sqrt{2}(x - 1 - 4\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 16$.

Intersecção das rectas DE e FB :

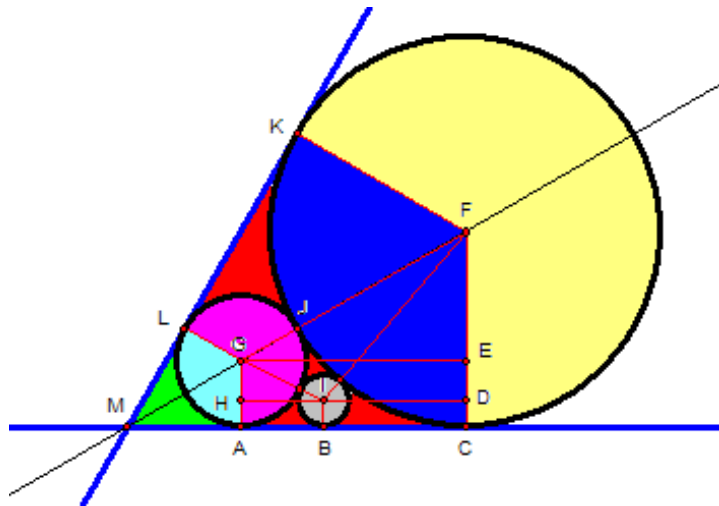
$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{1}{4}\sqrt{2}x - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 2 \\ y = -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 16 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = \frac{1}{4}\sqrt{2}x - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 2 \\ \frac{1}{4}\sqrt{2}x - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 2 = -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 16 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\frac{1}{18}(9\sqrt{2} + 56)\sqrt{2}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{2} + 2 \\ x = \frac{1}{18}(9\sqrt{2} + 56)\sqrt{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{32}{9} \\ x = 1 + \frac{28}{9}\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $I = (1 + \frac{28}{9}\sqrt{2}, \frac{32}{9})$. Então, $\overrightarrow{BI} = (1 + \frac{28}{9}\sqrt{2}, \frac{32}{9}) - (1 + 4\sqrt{2}, 0) = (-\frac{8}{9}\sqrt{2}, \frac{32}{9})$.

Logo, $F = I + \overrightarrow{BI} = (1 + \frac{28}{9}\sqrt{2}, \frac{32}{9}) + (-\frac{8}{9}\sqrt{2}, \frac{32}{9}) = (1 + \frac{20}{9}\sqrt{2}, \frac{64}{9})$.

Então, $G = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} = (1, 2) + \frac{1}{2}(-\frac{8}{9}\sqrt{2}, \frac{32}{9}) = (1 - \frac{4}{9}\sqrt{2}, \frac{34}{9})$.

Exercício 761 Considere a figura seguinte, onde temos três circunferências tangentes entre si. A recta AB é tangente às três circunferências, enquanto que a recta LK é tangente a duas delas. A amplitude do ângulo CMF é 30° e $\overline{LG} = 1$ cm. M é o ponto de intersecção das rectas LK e AB . As circunferências têm centros F , G e I .



1. Determine \overline{AB} , \overline{BC} e o raio de cada circunferência.

2. Determine a área de cada uma das regiões coloridas.
3. Considere um referencial ortonormado de origem no ponto M , em que o semi-eixo positivo das abscissas é a semi-recta MC e em que o ponto K tem ordenada positiva. Determine as coordenadas dos pontos assinalados (com uma letra).
4. Determine a equação reduzida da recta MF .
5. Determine a equação reduzida da recta MK .
6. Determine a equação reduzida da recta LG .
7. Determine a equação reduzida da recta GI .
8. Determine a equação reduzida da recta FI .
9. Determine uma equação vectorial da recta MK .
10. Determine a área do triângulo $[FGI]$.

Resolução

1. $\overline{MG} = 2$ cm, pelo que $\overline{MJ} = 3$ cm. Seja N o simétrico do ponto J , em relação ao ponto G . Então, $\frac{\overline{MJ}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{KF}}{\overline{LG}}$, ou seja, $\frac{3 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = \frac{\overline{KF}}{1 \text{ cm}}$, donde vem $\overline{KF} = 3$ cm.

Seja r o raio da circunferência menor (em cm). Como $[GHI]$ é um triângulo rectângulo, temos que $\overline{GI}^2 = \overline{HI}^2 + \overline{GH}^2$.

Então, $(1+r)^2 = (1-r)^2 + \overline{HI}^2$, pelo que $1+2r+r^2 = 1-2r+r^2 + \overline{HI}^2$. Logo, $4r = \overline{HI}^2$.

Ora, $\overline{MA} = \sqrt{3}$ cm, pelo que $\overline{MC} = 3\sqrt{3}$ cm. Então, $\overline{AC} = 2\sqrt{3}$ cm.

Consideremos o triângulo rectângulo $[DFI]$. Então, $\overline{FI}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{DI}^2$.

Logo, $(3+r)^2 = (3-r)^2 + \overline{DI}^2$, pelo que $9+6r+r^2 = 9-6r+r^2 + \overline{DI}^2$.

Logo, $12r = \overline{DI}^2 = \overline{BC}^2$. Fazendo $\overline{AB} = x$ cm, vem $\overline{BC} = (2\sqrt{3} - x)$ cm, pelo que

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 4r = x^2 \\ 12r = (2\sqrt{3} - x)^2 \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} 12r = 3x^2 \\ 12r = (2\sqrt{3} - x)^2 \end{array} \right. \implies 3x^2 = (2\sqrt{3} - x)^2 \\ &\implies 3x^2 = 12 - 4\sqrt{3}x + x^2 \implies 2x^2 + 4\sqrt{3}x - 12 = 0 \\ &\implies x^2 + 2\sqrt{3}x - 6 = 0 \implies x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3+6} \\ &\implies x = -3 - \sqrt{3} \vee x = 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo, $\overline{AB} = (3 - \sqrt{3})$ cm e $\overline{BC} = (2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3})$ cm $= (3\sqrt{3} - 3)$ cm.

E, por fim, temos $r = \frac{x^2}{4} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{4} = \frac{9 + 3 - 6\sqrt{3}}{4} = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Logo, o raio da circunferência menor é $\left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ cm.

2. $A_{\text{azul claro}} = \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \text{ cm}^2 = \frac{1}{3}\pi \text{ cm}^2$.
 $A_{\text{rosa}} = \frac{2}{3}\pi \times 1^2 \text{ cm}^2 = \frac{2}{3}\pi \text{ cm}^2$.
 $A_{\text{verde}} = A_{[\text{MAGL}]} - A_{\text{azul claro}} = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi\right) \text{ cm}^2$.
 $A_{\text{azul escuro}} = 9 \times A_{\text{azul claro}} = 9 \times \frac{1}{3}\pi \text{ cm}^2 = 3\pi \text{ cm}^2$.
 $A_{\text{amarela}} = 9 \times A_{\text{rosa}} = 9 \times \frac{2}{3}\pi \text{ cm}^2 = 6\pi \text{ cm}^2$.
 $A_{\text{cinzenta}} = \pi \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 \text{ cm}^2 = 9\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$.
 $A_{[\text{MCFK}]} = 9 \times A_{[\text{MAGL}]} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
 $A_{\text{verde}} + A_{\text{azul claro}} + A_{\text{rosa}} + A_{\text{cinzenta}} + A_{\text{azul escuro}} = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi + \frac{63}{4}\pi - 9\pi\sqrt{3} + 3\pi\right) \text{ cm}^2$.
Logo, $A_{\text{verde}} + A_{\text{azul claro}} + A_{\text{rosa}} + A_{\text{cinzenta}} + A_{\text{azul escuro}} = \left(\sqrt{3} + \frac{233}{12}\pi - 9\pi\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$.
Então, $A_{\text{vermelha}} = \left(9\sqrt{3} - \sqrt{3} - \frac{233}{12}\pi + 9\pi\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2 = \left(8\sqrt{3} - \frac{233}{12}\pi + 9\pi\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2$.
3. $M = (0, 0)$, $A = (\sqrt{3}, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (3\sqrt{3}, 0)$, $G = (\sqrt{3}, 1)$,
 $F = (3\sqrt{3}, 3)$, $H = A + \left(0, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$,
 $I = \left(3, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $D = \left(3\sqrt{3}, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $E = (3\sqrt{3}, 1)$.
 $J = \left(j, \frac{3}{2}\right)$, tendo-se $j^2 + \frac{9}{4} = 3^2$, pelo que $j = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Logo, $J = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$.
Podemos obter as coordenadas de L e K , utilizando Trigonometria:
 $K = F + 3(\cos 150^\circ, \sin 150^\circ) = (3\sqrt{3}, 3) + 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\right)$
 $L = G + (\cos 150^\circ, \sin 150^\circ) = (\sqrt{3}, 1) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$
4. O declive da recta MF é $\tan 30^\circ$, ou seja, $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Então, a equação reduzida de MF é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.
5. O declive da recta MK é $\tan 60^\circ$, ou seja, $\sqrt{3}$. Então, a equação reduzida de MK é $y = \sqrt{3}x$.
6. A recta LG é perpendicular à recta MK , pelo que o seu declive é $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Uma equação de LG : $y - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - \sqrt{3})$.
Equação reduzida de LG : $y = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$.
7. Determine a equação reduzida da recta GI .
 $G = (\sqrt{3}, 1)$, $I = \left(3, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$
- $$m = \frac{3 - \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{3}} = \frac{(4 - 3\sqrt{3})(6 + 2\sqrt{3})}{(6 - 2\sqrt{3})(6 + 2\sqrt{3})}$$
- $$= \frac{24 + 8\sqrt{3} - 18\sqrt{3} - 18}{36 - 12} = \frac{6 - 10\sqrt{3}}{24} = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{12}$$

$$\begin{aligned}
y - 1 &= \frac{3 - 5\sqrt{3}}{12} (x - \sqrt{3}) \iff y = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{12} x + 1 - \frac{3\sqrt{3} - 15}{12} \\
&\iff y = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{12} x + 1 - \frac{\sqrt{3} - 5}{4} \\
&\iff y = \frac{3 - 5\sqrt{3}}{12} x + \frac{9 - \sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

$$8. I = \left(3, 3 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \right), \quad F = (3\sqrt{3}, 3)$$

$$\begin{aligned}
m &= \frac{3 - \frac{3}{2}\sqrt{3} - 3}{3 - 3\sqrt{3}} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}}{3 - 3\sqrt{3}} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{3}(3 + 3\sqrt{3})}{(3 - 3\sqrt{3})(3 + 3\sqrt{3})} = \frac{-3\sqrt{3}(3 + 3\sqrt{3})}{2(3 - 3\sqrt{3})(3 + 3\sqrt{3})} \\
&= \frac{-9\sqrt{3} - 27}{2(9 - 27)} = \frac{27 + 9\sqrt{3}}{36} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y - 3 &= \frac{3 + \sqrt{3}}{4} (x - 3\sqrt{3}) \iff y = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} x + 3 - \frac{(3 + \sqrt{3})3\sqrt{3}}{4} \\
&\iff y = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} x + 3 - \frac{9 + 9\sqrt{3}}{4} \\
&\iff y = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} x + \frac{3 - 9\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

$$9. K = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2} \right), \quad M = (0, 0)$$

$$(x, y) = (0, 0) + \alpha \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2} \right) \text{ ou } (x, y) = \alpha (\sqrt{3}, 3) \text{ ou } (x, y) = \alpha (1, \sqrt{3}), \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

10. Determine a área do triângulo $[FGI]$.

Área do trapézio $[GHDF]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{GH} + \overline{DF}}{2} \times \overline{HD} &= \frac{1 - 3 + \frac{3}{2}\sqrt{3} + 3 - 3 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} \text{ cm}^2 \\
&= \frac{3\sqrt{3} - 2}{2} \times 2\sqrt{3} \text{ cm}^2 = (3\sqrt{3} - 2) \sqrt{3} \text{ cm}^2 = (9 - 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Área do triângulo $[GHI]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{GH} \times \overline{HI}}{2} &= \frac{\left(1 - 3 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \right) (3 - \sqrt{3})}{2} \text{ cm}^2 = \frac{\left(-2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \right) (3 - \sqrt{3})}{2} \text{ cm}^2 \\
&= \frac{(-4 + 3\sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{4} \text{ cm}^2 = \frac{-12 + 4\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 9}{4} \text{ cm}^2 \\
&= \frac{-21 + 13\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Área do triângulo $[IDF]$:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{ID} \times \overline{DF}}{2} &= \frac{\left(3 - 3 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)(2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3})}{2} \text{ cm}^2 = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}(3\sqrt{3} - 3)}{2} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}(3\sqrt{3} - 3)}{4} \text{ cm}^2 = \frac{27 - 9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2\end{aligned}$$

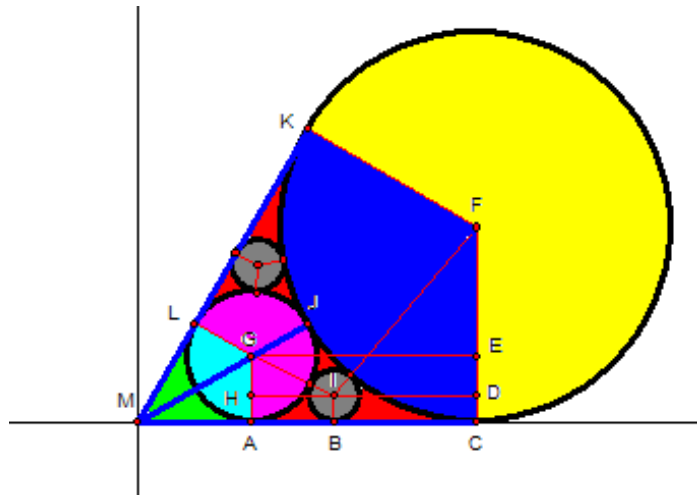
Soma das áreas dos dois triângulos anteriores:

$$\frac{-21 + 13\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 + \frac{27 - 9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Área do triângulo $[FGI]$:

$$(9 - 2\sqrt{3}) \text{ cm}^2 - \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 = \frac{18 - 4\sqrt{3} - 3 - 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 = \frac{15 - 6\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

Exercício 762 Considere a figura seguinte, em vez da anterior e resolva determine as áreas das regiões coloridas.



Resolução

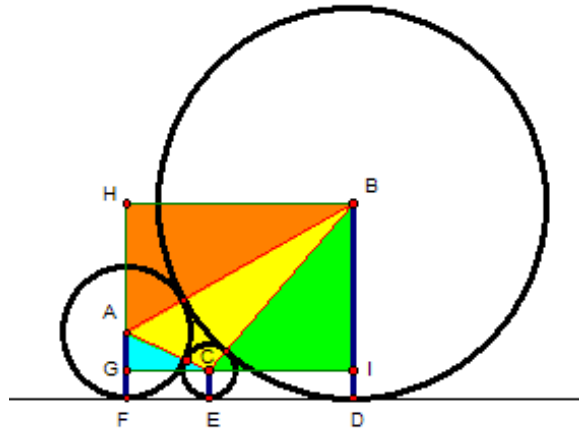
Evidentemente, temos:

$$A_{\text{cinzenta}} = 2 \times \pi \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 \text{ cm}^2 = 18\pi \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\text{vermelha}} = (8\sqrt{3} - \frac{233}{12}\pi + 9\pi\sqrt{3}) \text{ cm}^2 - \pi \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 \text{ cm}^2 = (8\sqrt{3} - \frac{211}{6}\pi + 18\pi\sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

E todas as restantes áreas são iguais às áreas do exercício anterior.

Exercício 763 Considere as três circunferências seguintes:



1. Que relação existe entre os raios das três circunferências?
2. Calcule a área de cada um dos triângulos coloridos.

Resolução

1. Sejam $a = \overline{AF}$, $b = \overline{BD}$, $c = \overline{CE}$, $d = \overline{FE}$, $e = \overline{ED}$. Então,

$$\overline{AC} = a + c \wedge \overline{AB} = a + b \wedge \overline{BC} = b + c \wedge \overline{AG} = a - c \wedge \overline{AH} = b - a \wedge \overline{BI} = b - c$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ACG]$, $[ABH]$ e $[BCI]$, vem:

$$\begin{cases} (a+c)^2 = (a-c)^2 + d^2 \\ (a+b)^2 = (a-b)^2 + (d+e)^2 \\ (b+c)^2 = (b-c)^2 + e^2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} a^2 + 2ac + c^2 = a^2 - 2ac + c^2 + d^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + (d+e)^2 \\ b^2 + 2bc + c^2 = b^2 - 2bc + c^2 + e^2 \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 4ac = d^2 \\ 4ab = (d+e)^2 \\ 4bc = e^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} d = 2\sqrt{ac} \\ 4ab = (2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc})^2 \\ e = 2\sqrt{bc} \end{cases} \iff \begin{cases} d = 2\sqrt{ac} \\ 4ab = 4ac + 8\sqrt{abc^2} + 4bc \\ e = 2\sqrt{bc} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} ab = ac + 2c\sqrt{ab} + bc \\ d = 2\sqrt{ac} \\ e = 2\sqrt{bc} \end{cases} \iff \begin{cases} (a + 2\sqrt{ab} + b)c = ab \\ d = 2\sqrt{ac} \\ e = 2\sqrt{bc} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} c = \frac{ab}{a + 2\sqrt{ab} + b} \\ d = 2\sqrt{ac} \\ e = 2\sqrt{bc} \end{cases} \iff \begin{cases} c = \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \\ d = 2\sqrt{ac} \\ e = 2\sqrt{bc} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$c = \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}$$

Observação

Suponhamos que $a = b$. Então, $\begin{cases} x_1 = x_2 = 2\sqrt{ac} \\ ac + ac + 2ac = a^2 \end{cases}$, pelo que $\begin{cases} x_1 = x_2 = 2\sqrt{ac} \\ 4c = a \end{cases}$.

$$\text{Então, } \begin{cases} x_1 = x_2 = a \\ c = \frac{a}{4} \end{cases}.$$

2. Área de $[ABH]$:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2}(b-a)(d+e) = \frac{1}{2}(b-a)(2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}) = (b-a)(\sqrt{ac} + \sqrt{bc}) \\
 &= (b-a)(\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{c} = (b-a)(\sqrt{a} + \sqrt{b})\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = (b-a)\sqrt{ab}
 \end{aligned}$$

Área de $[AGC]$:

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{1}{2}(a-c)d = \frac{1}{2}(a-c)2\sqrt{ac} = (a-c)\sqrt{ac} = \left(a - \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}\right)\sqrt{a}\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
 &= a^2\left(1 - \frac{b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}\right)\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = a^2 \times \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
 &= \frac{a^2\sqrt{b}(a + 2\sqrt{ab})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} = \frac{a^2(a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3}
 \end{aligned}$$

Área de $[BCI]$:

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{2} (b-c) e = \frac{1}{2} (b-c) 2\sqrt{bc} = (b-c) \sqrt{bc} = \left(b - \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \right) \sqrt{b} \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= b^2 \left(1 - \frac{a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \right) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{b^2 (b\sqrt{a} + 2a\sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} \end{aligned}$$

Área de $[BIGH]$:

$$\begin{aligned} A_4 &= (b-c)(d+e) = (b-c) (2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}) = 2(b-c) \sqrt{c} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= 2 \left(b - \frac{ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \right) \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= 2b \left(1 - \frac{a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \right) \sqrt{ab} = 2b \times \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \sqrt{ab} = 2b \times \frac{2\sqrt{ab} + b}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \sqrt{ab} \\ &= 2b \times \frac{2ab + b\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = 2b^2 \times \frac{2a + \sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{4ab^2 + 2b^2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \end{aligned}$$

Área de $[ABC]$: Seja s o semi-perímetro do triângulo. Logo,

$$s = \frac{2a + 2b + 2c}{2} = a + b + c$$

Então, aplicando a fórmula de Heron, vem

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(a+b+c)(a+b+c-b-c)(a+b+c-a-c)(a+b+c-a-b)} \\ &= \sqrt{(a+b+c)abc} \end{aligned}$$

Suponhamos que $a = 9$ e $b = 36$.

$$\text{Então, } c = \frac{9 \times 36}{(\sqrt{9} + \sqrt{36})^2} = \frac{9 \times 36}{(3+6)^2} = 4.$$

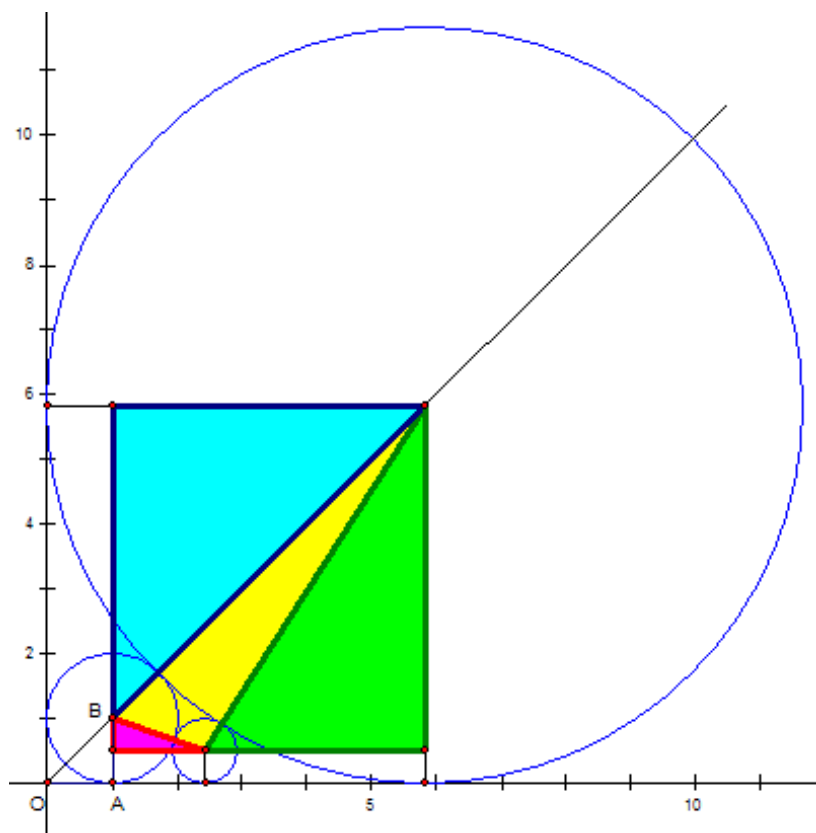
Por outro lado, temos $d = 2\sqrt{ac} = 2\sqrt{9 \times 4} = 12$ e $e = 2\sqrt{bc} = 2\sqrt{36 \times 4} = 24$.

Área de $[ABH]$: $\frac{1}{2} \times 27 \times (12 + 24) = 486$.

Substituindo na expressão obtida anteriormente, vem, para a área de $[ABH]$:

$$(b-a)\sqrt{ab} = (36-9) \times \sqrt{9 \times 36} = 486$$

Exercício 764 Sabendo que $A = (1, 0)$ e $B = (1, 1)$, determine:



1. A área de cada região colorida.
2. Uma equação de cada uma das três circunferências.

Resolução

1. Seja $C = (c, c)$, com $c > 0$, o centro da circunferência de maior raio (o raio é c). Logo, $\overline{OB} = \sqrt{2}$.

Então, $\overline{OC} = c\sqrt{2}$, pelo que $c\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = c$. Então, $c(\sqrt{2} - 1) = 1 + \sqrt{2}$. Logo,

$$c = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = (1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Logo, $C = (3 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$.

Representando os raios das três circunferências por r_1 , r_2 e r_3 , temos $r_1 = 1$ e $r_2 = 3 + 2\sqrt{2}$, pelo que

$$r_3 = \frac{1(1 + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{1} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2})^2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{(1 + 1 + \sqrt{2})^2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6 + 4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Seja x a base do triângulo rosa. Então, $x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$, pelo que $x = \sqrt{2}$.

Logo, a área do triângulo rosa é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Área do triângulo verde:

$$\begin{aligned} A_{\text{verde}} &= \frac{1}{2} \times \left(3 + 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}\right) \times \left(3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times (2 + \sqrt{2}) \times \left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4} \times (2 + \sqrt{2}) \times (5 + 4\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{4} \times (10 + 8\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 8) = \frac{1}{4} \times (18 + 13\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Área do triângulo azul:

$$\begin{aligned} A_{\text{azul}} &= \frac{1}{2} \times (3 + 2\sqrt{2} - 1) \times (3 + 2\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2} \times (2 + 2\sqrt{2}) \times (2 + 2\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{2} \times (2 + 2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times (4 + 8\sqrt{2} + 8) = 6 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Área do retângulo quadricolor:

$$\begin{aligned} A_{\text{rectângulo}} &= (3 + 2\sqrt{2} - 1) \times \left(3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) = (2 + 2\sqrt{2}) \times \left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}\right) \\ &= (1 + \sqrt{2}) \times (5 + 4\sqrt{2}) = 5 + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 8 = 13 + 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

Área do triângulo amarelo:

$$\begin{aligned} A_{\text{amarela}} &= 13 + 9\sqrt{2} - \frac{1}{4}(18 + 13\sqrt{2}) - 6 - 4\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ &= 7 + 5\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{9}{2} - \frac{13}{4}\sqrt{2} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

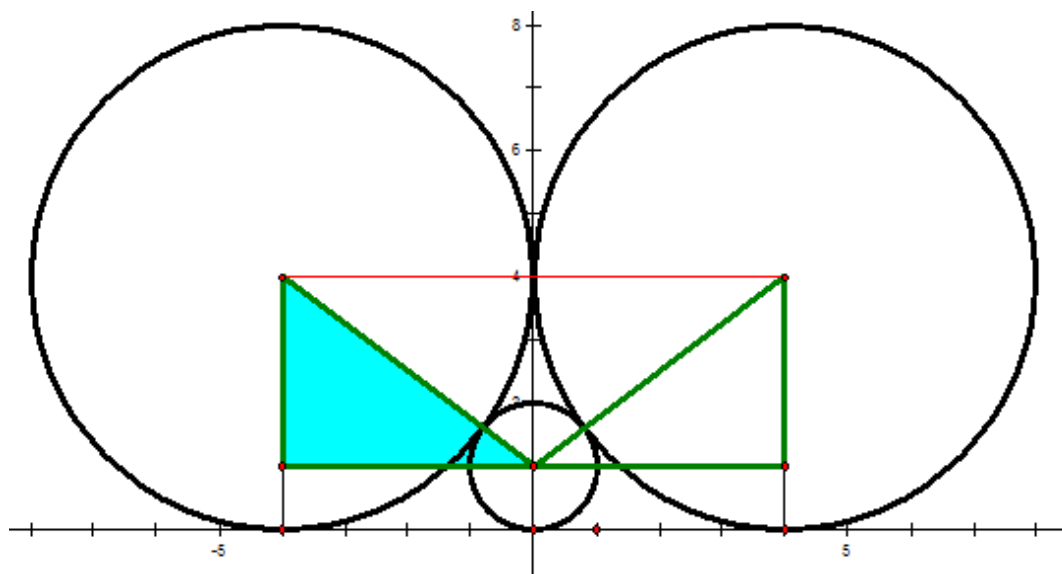
2. Equações das circunferências:

$$(a) (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$(b) (x - 3 - 2\sqrt{2})^2 + (y - 3 - 2\sqrt{2})^2 = (3 + 2\sqrt{2})^2$$

$$(c) \text{?????????} ACABAR \quad d = 2\sqrt{ac} = 2\sqrt{ac} =$$

Exercício 765 Sabendo que o raio da circunferência menor é 1 cm e que as duas circunferências maiores têm o mesmo raio (e que as circunferências são tangentes são duas a duas e todas elas são tangentes ao eixo das abscissas), determine a (medida da) área a azul.



Resolução

As duas circunferências maiores têm raio 4 cm (conforme vimos anteriormente, se $a = b$, então $c = \frac{a}{4}$).

Então, $x^2 + (4 - 1)^2 = (4 + 1)^2$, pelo que $x^2 = 16$. Então, $x = 4$.

Logo, a área azul é $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \text{ cm}^2$, ou seja, 6 cm^2 .

Exercício 766 *Mostre que, num referencial ortogonal e monométrico (referencial ortonormado), os vectores não nulos $\vec{u} = (p, q)$ e $\vec{v} = (q, -p)$ são perpendiculares e têm a mesma norma.*

Resolução

Quanto às normas, temos $\|\vec{u}\| = \sqrt{p^2 + q^2}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{q^2 + p^2}$, pelo que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Consideremos os pontos $O = (0, 0)$, $A = (p, q)$ e $B = (q, -p)$.

Então,

$$\begin{cases} \overline{OA} = \left\| \overrightarrow{OA} \right\| = \|(p, q)\| = \sqrt{p^2 + q^2} \\ \overline{OB} = \left\| \overrightarrow{OB} \right\| = \|(q, -p)\| = \sqrt{q^2 + p^2} \end{cases}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \|(q, -p) - (p, q)\| = \|(q - p, -p - q)\| = \sqrt{(q - p)^2 + (-p - q)^2} \\ &= \sqrt{(q - p)^2 + (p + q)^2} = \sqrt{q^2 - 2qp + p^2 + p^2 + 2pq + q^2} = \sqrt{2p^2 + 2q^2} \end{aligned}$$

Então,

$$\overline{AB}^2 = \left(\sqrt{2p^2 + 2q^2} \right)^2 = 2p^2 + 2q^2 = p^2 + q^2 + q^2 + p^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

Logo, pelo Teorema de Pitágoras, $[OAB]$ é um triângulo rectângulo em O , pelo que os vectores \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são perpendiculares.

Observação sobre o Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras afirma que, num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Suponhamos que, num triângulo de lados a, b, c , se verifica a condição $c^2 = a^2 + b^2$.

Consideremos um triângulo rectângulo de catetos b e c . Seja x a hipotenusa. Então, $x^2 = a^2 + b^2 = c^2$, pelo que $x = c$.

Então, o triângulo de lados a, b, c é igual ao triângulo de lados a, b, x , pelo que ambos os triângulos são rectângulos.

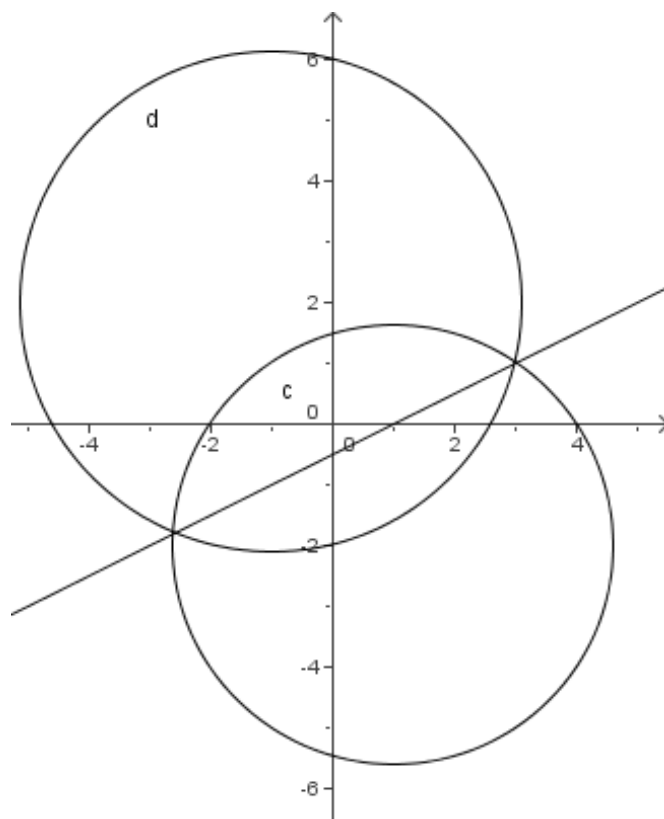
Logo, um triângulo de lados a, b, c , que verifique a condição $c^2 = a^2 + b^2$ é um triângulo rectângulo.

Exercício 767 Determine o(s) ponto(s) de intersecção das duas circunferências definidas por $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ e $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 17$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 13 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 17 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 13 \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 17 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - 4y + 8 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 12 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - 4y + 8 \\ 2x - 4y + 8 + 2x - 4y = 12 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - 4y + 8 \\ 4x - 8y = 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (1+2y)^2 + y^2 = 2(1+2y) - 4y + 8 \\ x = 1 + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 1 + 4y + 4y^2 + y^2 = 2 + 4y - 4y + 8 \\ x = 1 + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 5y^2 + 4y - 9 = 0 \\ x = 1 + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 5y^2 + 4y - 9 = 0 \\ x = 1 + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{10} \\ x = 1 + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{-4 \pm 14}{10} \\ x = 1 + 2y \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = 1 \vee y = -\frac{9}{5} \\ x = 1 + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{9}{5} \\ x = -\frac{13}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Logo, os pontos de intersecção são os pontos $I_1 = (3, 1)$ e $I_2 = \left(-\frac{13}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.

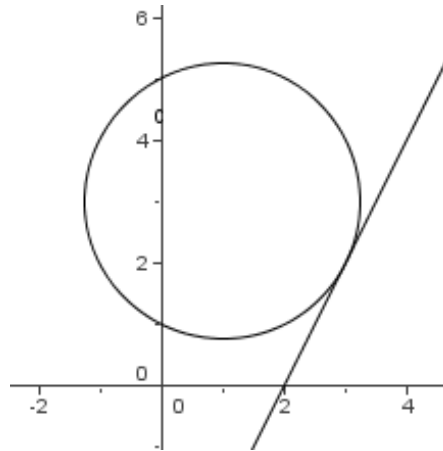


Exercício 768 Determine a intersecção da circunferência definida por $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ com a recta de equação $y = 2x - 4$.

Resolução

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 - 2x + (2x-4)^2 - 6(2x-4) + 5 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 - 2x + 4x^2 - 16x + 16 - 12x + 24 + 5 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 5x^2 - 30x + 45 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

A recta intersecta a circunferência num único ponto, pelo que a recta é tangente à circunferência.



Exercício 769 Determine o(s) ponto(s) de intersecção da circunferência definida por $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ com a recta de equação $y - 2 = 2(x + 1)$.

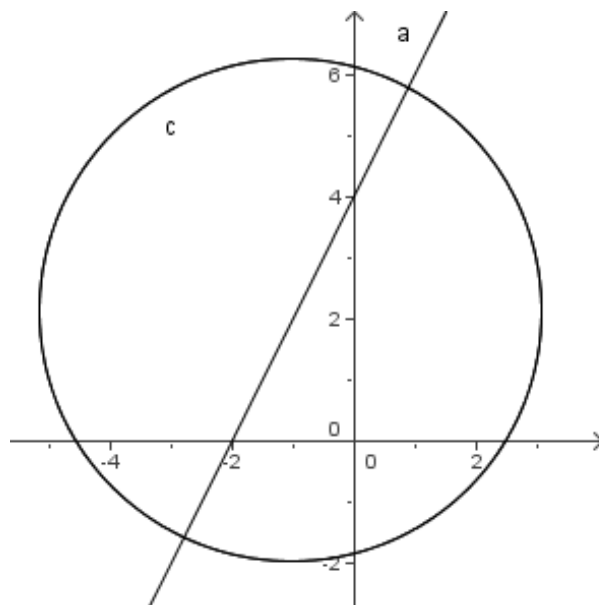
Resolução

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \\ y - 2 = 2(x + 1) \end{cases} &\iff \begin{cases} (x + 1)^2 + [2(x + 1)]^2 = 5 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (x + 1)^2 + 4(x + 1)^2 = 5 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 5(x + 1)^2 = 5 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} (x + 1)^2 = 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 1 = \pm 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \pm 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -2 \vee x = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Os pontos de intersecção da recta com a circunferência são $(-2, 0)$ e $(0, 4)$.

Outra resolução

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \\ y - 2 = 2(x + 1) \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 5 = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + 2x + (2x + 4)^2 - 4(2x + 4) = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x^2 + 2x + 4x^2 + 16x + 16 - 8x - 16 = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 5x^2 + 10x = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x(x + 2) = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$



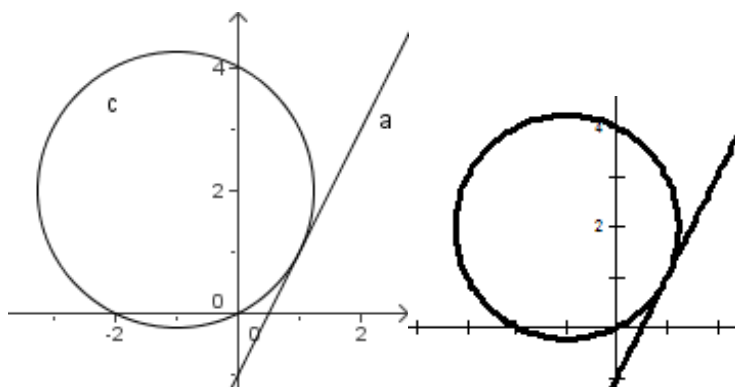
Exercício 770 Determine a equação reduzida da recta tangente à circunferência definida por $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$, no ponto $(1, 1)$.

Resolução

O ponto $T = (1, 1)$ pertence à circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. O centro da circunferência é o ponto $C = (-1, 2)$.

Então, $\overrightarrow{CT} = T - C = (1, 1) - (-1, 2) = (2, -1)$. Então, um vector director da tangente é $\vec{u} = (1, 2)$, pelo que o declive da tangente é 2.

Logo, uma equação da tangente é $y - 1 = 2(x - 1)$. Então, $y = 2x - 1$.



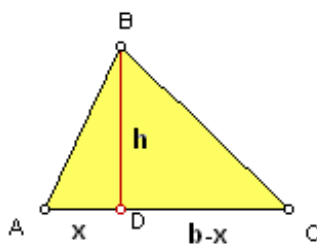
Capítulo 40

O Teorema de Napoleão Bonaparte

O Teorema central deste Capítulo é atribuído a Napoleão Bonaparte, embora não haja a certeza que o teorema tenha sido descoberto pelo imperador.

Vamos começar por enunciar e demonstrar um Lema que será usado numa das demonstrações do Teorema de Napoleão. Este Lema já foi demonstrado, quando provámos a fórmula de Heron. No entanto, vamos repetir a sua demonstração.

Lema 771 *Consideremos o triângulo da figura seguinte, onde estamos a supor que os ângulos BAC e BCA são agudos:*



Então, $\sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc}$, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$.

Demonstração

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = (b-x)^2 + h^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} c^2 - x^2 = h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + c^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h = \pm \sqrt{(c+x)(c-x)} \\ x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $h > 0$, temos $h = \sqrt{(c+x)(c-x)}$, com $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 h &= \sqrt{(c+x)(c-x)} = \sqrt{\left(c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \left(c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)} \\
 &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2b} \times \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{2b} \times \frac{a^2 - (b-c)^2}{2b}} \\
 &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b}} \\
 &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2b}
 \end{aligned}$$

Então,

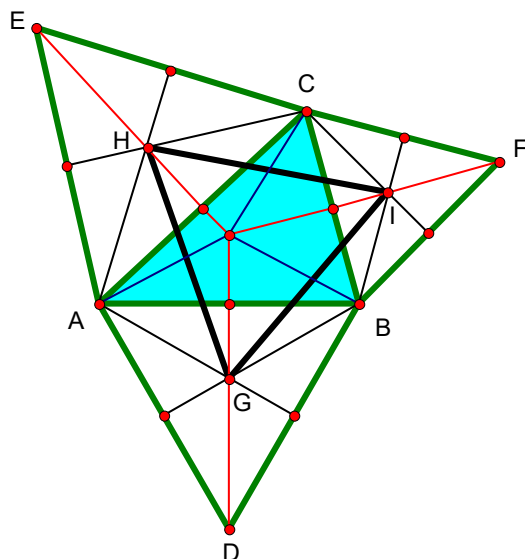
$$\begin{cases} \sin A = \frac{h}{c} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \\ \cos A = \frac{x}{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{cases}$$

Analogamente, temos

$$\begin{cases} \sin C = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ab} \\ \cos C = \frac{b-x}{a} = \frac{1}{a} \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Proposição 772 (Teorema de Napoleão) *Consideremos, num plano, um triângulo arbitrário $[ABC]$. Consideremos (no plano) um ponto D , de modo que $[ABD]$ seja um triângulo equilátero e o ponto D não pertença ao semi-plano de fronteira AB e que contém o ponto C . De modo análogo, obtemos os pontos E e F , como se pode ver na figura seguinte. Sejam G , H e I os centros dos triângulos equiláteros construídos (sobre os lados do triângulo inicial). Então, $[GHI]$ é um triângulo*

equilátero.

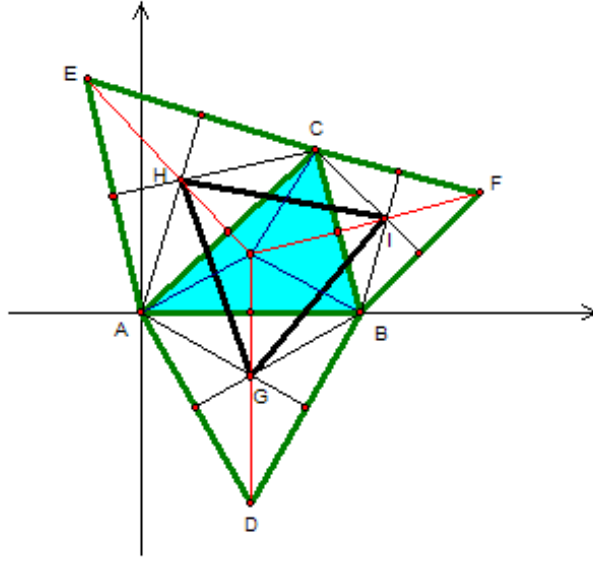


Observação

Ao triângulo $[GHI]$, construído pelo processo acima descrito, chamaremos triângulo de Napoleão.

Demonstração 1

O facto dum triângulo ser equilátero, isósceles ou escaleno, não depende da unidade de comprimento escolhida para medir os lados do triângulo. Então, sem perda de generalidade podemos supor que $\overline{AB} = 1$. Escolhendo convenientemente o referencial, podemos supor que $A = (0, 0)$ e que $B = (1, 0)$. Ainda sem perda de generalidade, podemos supor que $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{1}{2}$ e $y > 0$.



Seja M_1 o ponto médio de $[AB]$. Então, $M_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, tendo-se $D = (\frac{1}{2}, 0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(0, -1)$. No entanto, não precisamos do ponto D , para obter G , o centro do triângulo $[ABD]$, uma vez que as medianas dum triângulo se trissectam. Então,

$$G = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Consideremos, agora, o lado $[AC]$, cujo ponto médio é $M_2 = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Ora, $\overrightarrow{AC} = (x, y)$, pelo que nos interessa considerar o vector perpendicular $(-y, x)$. Este vector tem de ser multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e, depois, soma-se o vector obtido ao ponto M_2 .

Convém notar que o produto do vector $(-y, x)$ por $\frac{\sqrt{3}}{2}$ origina um vector cuja norma é a altura do triângulo $[ACE]$.

Então, o baricentro de $[ACE]$ é dado por

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(-y, x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x\right) \\ &= \left(\frac{3x - y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y + x\sqrt{3}}{6}\right) \end{aligned}$$

Consideremos, agora, o lado $[BC]$, cujo ponto médio é $M_3 = (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2})$. Ora, $\overrightarrow{BC} = (x, y) - (1, 0) = (x-1, y)$, pelo que nos interessa considerar o vector perpendicular $(y, 1-x)$. Este vector tem de ser multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e, depois, soma-se o vector obtido ao ponto M_3 .

Então, o baricentro de $[BCE]$ é dado por

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{6} (y, 1-x) = \left(\frac{3x+3}{6}, \frac{3y}{6} \right) + \left(\frac{y\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{x\sqrt{3}}{6} \right) \\ &= \left(\frac{3x+3+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \overrightarrow{GH} = H - G = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}-3}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{GI} = I - G = \left(\frac{3x+3+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{HI} = I - H = \left(\frac{3x+3+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3+2y\sqrt{3}}{6}, \frac{-2x\sqrt{3}+\sqrt{3}}{6} \right) \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{(3x-y\sqrt{3}-3)^2 + (3y+x\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{(3x+y\sqrt{3})^2 + (3y-x\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{(3+2y\sqrt{3})^2 + (-2x\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}}{6} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 3y^2 + 9 - 6xy\sqrt{3} - 18x + 6y\sqrt{3} + 9y^2 + 3x^2 + 3 + 6xy\sqrt{3} + 6y\sqrt{3} + 6x}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 3y^2 + 6xy\sqrt{3} + 9y^2 + 3x^2 + 12 - 6xy\sqrt{3} + 12y\sqrt{3} - 12x}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{9 + 12y^2 + 12y\sqrt{3} + 12x^2 + 3 - 12x}}{6} \end{cases}$$

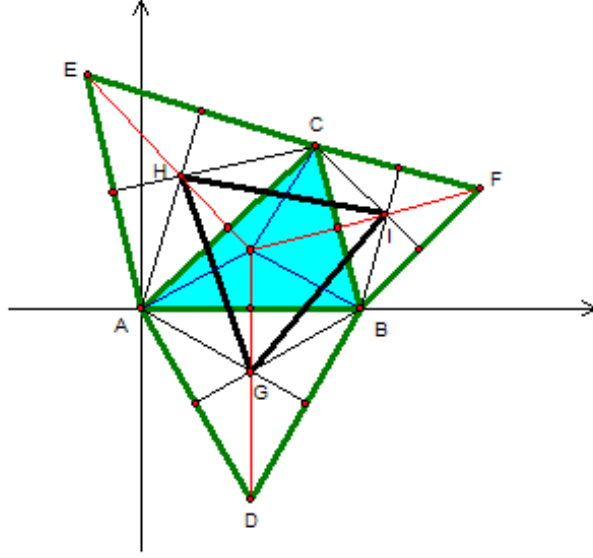
E, por fim,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x + 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x + 3y\sqrt{3}}}{3} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x + 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x + 3y\sqrt{3}}}{3} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x + 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x + 3y\sqrt{3}}}{3} \end{cases}$$

Logo, $\|\vec{GH}\| = \|\vec{GI}\| = \|\vec{HI}\|$, pelo que $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Demonstração 2 (para quem prefira a demonstração mais geral)

Escolhendo convenientemente o referencial, podemos supor que $A = (0, 0)$ e que $B = (c, 0)$, com $c > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{c}{2}$ e $y > 0$.



Seja M_1 o ponto médio de $[AB]$. Então, $M_1 = (\frac{c}{2}, 0)$, tendo-se $D = (\frac{c}{2}, 0) + \frac{c\sqrt{3}}{2}(0, -1)$. No entanto, não precisamos do ponto D , para obter G , o centro do triângulo $[ABD]$, uma vez que as medianas dum triângulo se trissectam. Então,

$$G = \left(\frac{c}{2}, 0\right) + \frac{1}{3} \times \frac{c\sqrt{3}}{2}(0, -1) = \left(\frac{c}{2}, 0\right) + \left(0, -\frac{c\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6}\right)$$

Consideremos, agora, o lado $[AC]$, cujo ponto médio é $M_2 = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Ora, $\vec{AC} = (x, y)$, pelo que nos interessa considerar o vector perpendicular $(-y, x)$. Este vector tem de ser multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e, depois, soma-se o vector obtido ao ponto M_2 .

Convém notar que o produto do vector $(-y, x)$ por $\frac{\sqrt{3}}{2}$ origina um vector cuja norma é a altura do triângulo $[ACE]$.

Então, o baricentro de $[ACE]$ é dado por

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(-y, x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x\right) \\ &= \left(\frac{3x - y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y + x\sqrt{3}}{6}\right) \end{aligned}$$

Consideremos, por fim, o lado $[BC]$, cujo ponto médio é $M_3 = (\frac{x+c}{2}, \frac{y}{2})$. Ora, $\vec{BC} = (x, y) -$

$(c, 0) = (x - c, y)$, pelo que nos interessa considerar o vector perpendicular $(y, c - x)$. Este vector tem de ser multiplicado por $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e, depois, soma-se o vector obtido ao ponto M_3 .

Então, o baricentro de $[BCE]$ é dado por

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{x+c}{2}, \frac{y}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{6} (y, c-x) = \left(\frac{3x+3c}{6}, \frac{3y}{6} \right) + \left(\frac{y\sqrt{3}}{6}, \frac{c\sqrt{3}}{6} - \frac{x\sqrt{3}}{6} \right) \\ &= \left(\frac{3x+3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \overrightarrow{GH} = H - G = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x-3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}+c\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{GI} = I - G = \left(\frac{3x+3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+2c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6} \right) \\ \overrightarrow{HI} = I - H = \left(\frac{3x+3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+c\sqrt{3}-x\sqrt{3}}{6} \right) - \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}}{6} \right) = \left(\frac{3c+2y\sqrt{3}}{6}, \frac{c\sqrt{3}-2x\sqrt{3}}{6} \right) \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{(3x-3c-y\sqrt{3})^2 + (3y+x\sqrt{3}+c\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{(3x+y\sqrt{3})^2 + (3y+2c\sqrt{3}-x\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{(3c+2y\sqrt{3})^2 + (c\sqrt{3}-2x\sqrt{3})^2}}{6} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{9x^2 - 18cx - 6xy\sqrt{3} + 9c^2 + 6cy\sqrt{3} + 3y^2 + 9y^2 + 6xy\sqrt{3} + 6cy\sqrt{3} + 3x^2 + 6cx + 3c^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 6xy\sqrt{3} + 3y^2 + 9y^2 + 12cy\sqrt{3} - 6xy\sqrt{3} + 12c^2 - 12cx + 3x^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{9c^2 + 12cy\sqrt{3} + 12y^2 + 3c^2 - 12cx + 12x^2}}{6} \end{cases}$$

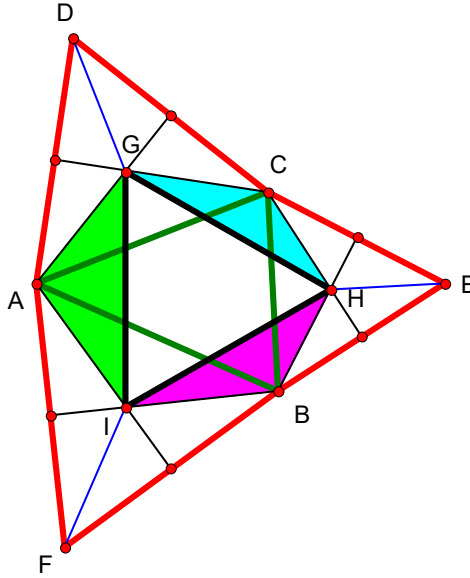
E, por fim,

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{2\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12c^2 - 12cx + 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 - 12cx + 12c^2 + 12cy\sqrt{3} + 12y^2}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \end{cases}$$

Logo, $\|\vec{GH}\| = \|\vec{GI}\| = \|\vec{HI}\|$, pelo que $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Demonstração 3

Consideremos, na figura seguinte, os triângulos $[AGI]$ e $[GCH]$. Sejam α, β, γ as amplitudes (em graus) dos ângulos BAC, ABC e ACB .



Aplicando a esses dois triângulos a lei dos cosenos, vem

$$\begin{cases} \overline{GI}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AG} \times \overline{AI} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ \overline{GH}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2 - 2\overline{GC} \times \overline{CH} \cos(\gamma + 60^\circ) \end{cases}$$

É fácil mostrar que $\begin{cases} \overline{AG} = \overline{GC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{AC} = \frac{b\sqrt{3}}{3} \\ \overline{CH} = \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \overline{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$. Então,

$$\begin{aligned} \overline{GI}^2 &= \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AG} \times \overline{AI} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{b\sqrt{3}}{3} \times \frac{c\sqrt{3}}{3} \times \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(\alpha + 60^\circ) \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
 \overline{GH}^2 &= \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2 - 2\overline{GC} \times \overline{CH} \cos(\gamma + 60^\circ) \\
 &= \left(\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{b\sqrt{3}}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \cos(\gamma + 60^\circ) \\
 &= \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(\gamma + 60^\circ)
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 3\overline{GI}^2 - 3\overline{GH}^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) - b^2 - a^2 + 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) \\
 &= c^2 - a^2 + 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)
 \end{aligned}$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo $[ABC]$, temos

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Então, $\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$ e $b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{c \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}$. Seja $E_1 = c^2 - a^2$.

Então, $E_1 = c^2 - a^2 = c^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) = c^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma}\right)$.

Seja $E_2 = 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)$. Então,

$$\begin{aligned}
 E_2 &= b \left(\frac{2c \sin \alpha}{\sin \gamma} \cos(\gamma + 60^\circ) - 2c \cos(\alpha + 60^\circ) \right) \\
 &= \frac{bc}{\sin \gamma} (2 \sin \alpha \cos(\gamma + 60^\circ) - 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 60^\circ)) \\
 &= \frac{c^2 \sin \beta}{\sin^2 \gamma} (2 \sin \alpha \cos(\gamma + 60^\circ) - 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 60^\circ))
 \end{aligned}$$

Ora, $\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha$. Além disso, temos

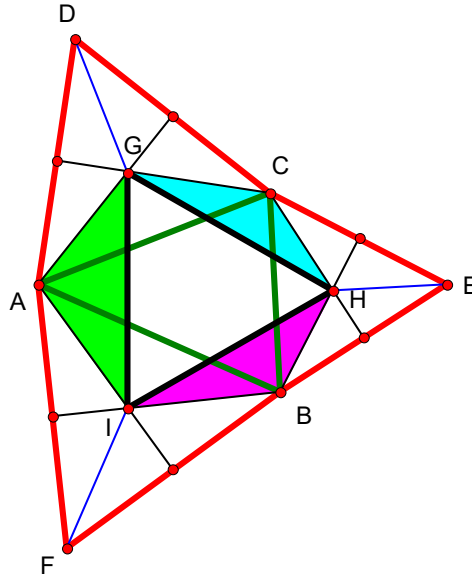
$$\begin{aligned}
 2 \sin \alpha \cos(\gamma + 60^\circ) &= 2 \sin \alpha (\cos \gamma \cos 60^\circ - \sin \gamma \sin 60^\circ) \\
 &= 2 \sin \alpha \left(\frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma \right) \\
 &= \sin \alpha \cos \gamma - \sqrt{3} \sin \alpha \sin \gamma \\
 2 \sin \gamma \cos(\alpha + 60^\circ) &= \sin \gamma \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \gamma \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 E_1 + E_2 &= c^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} \right) + \frac{c^2 \sin \beta}{\sin^2 \gamma} (2 \sin \alpha \cos (\gamma + 60^\circ) - 2 \sin \gamma \cos (\alpha + 60^\circ)) \\
 &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} [\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + \sin \beta (2 \sin \alpha \cos (\gamma + 60^\circ) - 2 \sin \gamma \cos (\alpha + 60^\circ))] \\
 &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} [\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + \sin \beta (\sin \alpha \cos \gamma - \sqrt{3} \sin \alpha \sin \gamma - \sin \gamma \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \gamma \sin \alpha)] \\
 &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} [\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + \sin \beta (\sin \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cos \alpha)] \\
 &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} [\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + (\sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha) (\sin \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cos \alpha)] \\
 &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} (\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \cos^2 \alpha) \\
 &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} (\sin^2 \gamma (1 - \cos^2 \alpha) - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \gamma)) \\
 &= \frac{c^2}{\sin^2 \gamma} (\sin^2 \gamma \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma) = 0
 \end{aligned}$$

Então, $3\overline{GI}^2 - 3\overline{GH}^2 = 0$, donde se conclui que $\overline{GI}^2 - \overline{GH}^2 = 0$. Logo, $\overline{GI} = \overline{GH}$. Analogamente se mostra que $\overline{GH} = \overline{HI}$, pelo que $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Demonstração 4



Aplicando a lei dos cosenos, obtemos

$$\begin{cases} \overline{GI}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AG} \times \overline{AI} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ \overline{GH}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CH}^2 - 2\overline{GC} \times \overline{CH} \cos(\gamma + 60^\circ) \\ \overline{HI}^2 = \overline{BI}^2 + \overline{BH}^2 - 2\overline{BI} \times \overline{BH} \cos(\beta + 60^\circ) \end{cases}$$

Então, no caso dos ângulos BAC e ACB serem agudos, vem

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + 60^\circ) &= \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4bc} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \overline{GI}^2 &= \overline{AG}^2 + \overline{AI}^2 - 2\overline{AG} \times \overline{AI} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4bc} + \frac{2bc}{3} \times \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4bc} \\ &= \frac{2b^2}{6} + \frac{2c^2}{6} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} \\ &= \frac{b^2 + c^2 + a^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} \end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{GH}^2 = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} = \overline{GI}^2$$

Se o ângulo ABC for agudo, teremos $\overline{HI}^2 = \overline{GI}^2 = \overline{GH}^2$, pelo que o triângulo $[GHI]$ é equilátero.

No caso do ângulo ABC ser obtuso, temos duas alternativas: deduzimos as expressões que dão $\sin \beta$ e $\cos \beta$ ou aplicamos as fórmulas $\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha$ e $\cos \beta = -\cos(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma$.

Então,

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cos \gamma &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ab^2c} \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \sin \gamma \cos \alpha &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ab} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{(b^2 + c^2 - a^2) \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ab^2c} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \sin \beta &= \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2 + b^2 + c^2 - a^2) \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ab^2c} \\
 &= \frac{2b^2 \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ab^2c} \\
 &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ac}
 \end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha \sin \gamma &= \frac{\left(\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \right)^2}{2bc \times 2ab} \\
 &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4ab^2c}
 \end{aligned}$$

E

$$\cos \alpha \cos \gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{4ab^2c}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \beta &= -\cos(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \\
 &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4ab^2c} - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{4ab^2c} \\
 &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) - (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{4ab^2c} \\
 &= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 - 2b^4}{4ab^2c} = \frac{2a^2 + 2c^2 - 2b^2}{4ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \cos(\beta + 60^\circ) &= \cos \beta \cos 60^\circ - \sin \beta \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cos \beta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ac} \\
 &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4ac} - \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ac}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \overline{HI}^2 &= \overline{BI}^2 + \overline{BH}^2 - 2\overline{BI} \times \overline{BH} \cos(\beta + 60^\circ) \\
 &= \left(\frac{c\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{c\sqrt{3}}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \cos(\beta + 60^\circ) \\
 &= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ac}{3} \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{4ac} - \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ac} \right) \\
 &= \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{6} + \frac{2ac\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4ac} \\
 &= \frac{2c^2}{6} + \frac{2a^2}{6} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} \\
 &= \overline{GI}^2 = \overline{GH}^2
 \end{aligned}$$

Logo, $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Corolário 773 *Consideremos, num plano, um triângulo arbitrário $[ABC]$ de lados a, b, c . Então, a área do triângulo externo de Napoleão é dada por*

$$\begin{aligned}
 f(a, b, c) &= \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6} \right) \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3}}{24} + \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{8}
 \end{aligned}$$

Demonstração

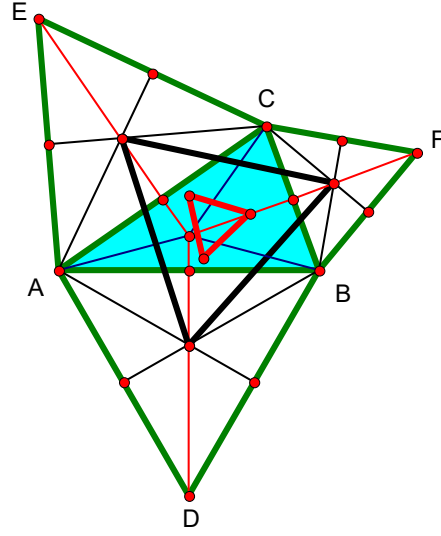
Consequência imediata da demonstração 4 do teorema anterior, uma vez que

$$\overline{HI}^2 = \overline{GI}^2 = \overline{GH}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{6}$$

Recordamos que a área dum triângulo equilátero de lado l é $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Proposição 774 (Teorema de Napoleão) *Consideremos, num plano, um triângulo arbitrário $[ABC]$. Consideremos (no plano) um ponto D , de modo que $[ABD]$ seja um triângulo equilátero e o ponto D pertença ao semi-plano de fronteira AB e que contém o ponto C . De modo análogo, obtemos os pontos E e F . Sejam G, H e I os centros dos triângulos equiláteros construídos (sobre os lados do triângulo inicial). Então, $[GHI]$ é um triângulo equilátero, a menos que o triângulo $[ABC]$ seja equilátero, caso em que os pontos G, H e I coincidem.*

Demonstração 1



Na figura anterior não estão construídos os triângulos equiláteros referidos na hipótese deste teorema, para não sobrecarregar o desenho. O triângulo de lados a vermelho é aquele que se pretende mostrar que é equilátero.

Esta demonstração é análoga à primeira demonstração do teorema anterior, tendo-se

$$\begin{cases} G = \left(\frac{1}{2}, 0\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}(0, -1) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \\ H = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}(-y, x) = \left(\frac{3x}{6}, \frac{3y}{6}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}y, -\frac{\sqrt{3}}{6}x\right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) \\ I = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}(y, 1-x) = \left(\frac{3x+3}{6}, \frac{3y}{6}\right) - \left(\frac{y\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{x\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x+3-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \overrightarrow{GH} = H - G = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{3}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}-3}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) \\ \overrightarrow{GI} = I - G = \left(\frac{3x+3-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{3}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{6}\right) \\ \overrightarrow{HI} = I - H = \left(\frac{3x+3-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y+x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3-2y\sqrt{3}}{6}, \frac{2x\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6}\right) \end{cases}$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{GH}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 3y^2 + 9 + 6xy\sqrt{3} - 18x - 6y\sqrt{3} + 9y^2 + 3x^2 + 3 - 6xy\sqrt{3} - 6y\sqrt{3} + 6x}}{6} \\ \|\vec{GI}\| = \frac{\sqrt{9x^2 + 3y^2 - 6xy\sqrt{3} + 9y^2 + 3x^2 + 12 + 6xy\sqrt{3} - 12y\sqrt{3} - 12x}}{6} \\ \|\vec{HI}\| = \frac{\sqrt{9 + 12y^2 - 12y\sqrt{3} + 12x^2 + 3 - 12x}}{6} \end{array} \right.$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{GH}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x - 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x - 3y\sqrt{3}}}{3} \\ \|\vec{GI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x - 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x - 3y\sqrt{3}}}{3} \\ \|\vec{HI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12 - 12x - 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x - 3y\sqrt{3}}}{3} \end{array} \right.$$

Note-se que a expressão $\frac{\sqrt{3x^2 + 3y^2 + 3 - 3x - 3y\sqrt{3}}}{3}$ está definida para quaisquer valores de x e y , porque

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 - x - y\sqrt{3} &= x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \frac{1}{4} + y^2 - 2 \times y \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Suponhamos, agora, que os pontos G , H e I coincidem. Então, $x^2 + y^2 + 1 - x - y\sqrt{3} = 0$. Mas,

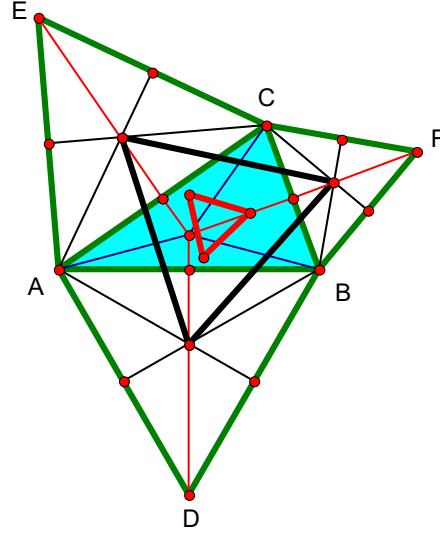
$$x^2 + y^2 + 1 - x - y\sqrt{3} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ora, $C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ define, com os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (1, 0)$, um triângulo equilátero.

Reciprocamente, se $[ABC]$ é um triângulo equilátero, então os pontos G , H e I coincidem (uma vez que os triângulos equiláteros construídos coincidem com o triângulo inicial).

Demonstração 2

Escolhendo convenientemente o referencial, podemos supor que $A = (0, 0)$ e que $B = (c, 0)$, com $c > 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{c}{2}$ e $y > 0$.



Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \left(\frac{c}{2}, 0\right) - \frac{1}{3} \times \frac{c\sqrt{3}}{2} (0, -1) = \left(\frac{c}{2}, 0\right) - \left(0, -\frac{c\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6}\right) \\ H = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} (-y, x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x\right) = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) \\ I = \left(\frac{x+c}{2}, \frac{y}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6} (y, c-x) = \left(\frac{3x+3c}{6}, \frac{3y}{6}\right) - \left(\frac{y\sqrt{3}}{6}, \frac{c\sqrt{3}}{6} - \frac{x\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x+3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6}\right) \end{array} \right.$$

Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{GH} = H - G = \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x-3c+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}-c\sqrt{3}}{6}\right) \\ \overrightarrow{GI} = I - G = \left(\frac{3x+3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3x-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-2c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6}\right) \\ \overrightarrow{HI} = I - H = \left(\frac{3x+3c-y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-c\sqrt{3}+x\sqrt{3}}{6}\right) - \left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y-x\sqrt{3}}{6}\right) = \left(\frac{3c-2y\sqrt{3}}{6}, \frac{2x\sqrt{3}-c\sqrt{3}}{6}\right) \end{array} \right.$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\overrightarrow{GH}\| = \frac{\sqrt{(3x-3c+y\sqrt{3})^2 + (3y-x\sqrt{3}-c\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{GI}\| = \frac{\sqrt{(3x-y\sqrt{3})^2 + (3y-2c\sqrt{3}+x\sqrt{3})^2}}{6} \\ \|\overrightarrow{HI}\| = \frac{\sqrt{(3c-2y\sqrt{3})^2 + (2x\sqrt{3}-c\sqrt{3})^2}}{6} \end{array} \right.$$

Logo,

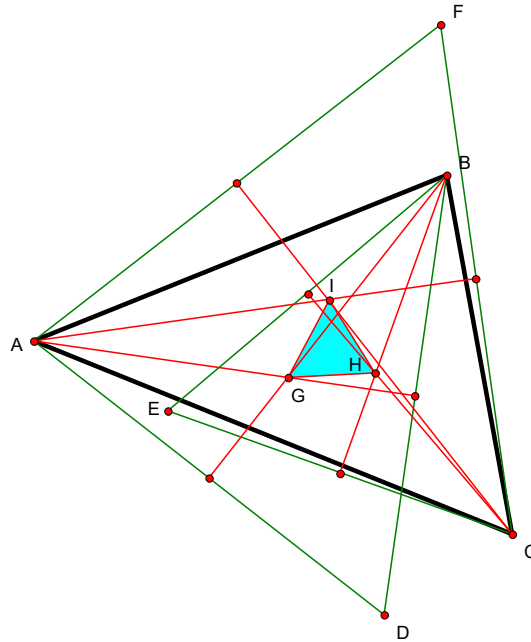
$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{GH}\| = \frac{\sqrt{9x^2 - 18cx + 6xy\sqrt{3} + 9c^2 - 6cy\sqrt{3} + 3y^2 + 9y^2 - 6xy\sqrt{3} - 6cy\sqrt{3} + 3x^2 + 6cx + 3c^2}}{6} \\ \|\vec{GI}\| = \frac{\sqrt{9x^2 - 6xy\sqrt{3} + 3y^2 + 9y^2 - 12cy\sqrt{3} + 6xy\sqrt{3} + 12c^2 - 12cx + 3x^2}}{6} \\ \|\vec{HI}\| = \frac{\sqrt{9c^2 - 12cy\sqrt{3} + 12y^2 + 12x^2 - 12cx + 3c^2}}{6} \end{array} \right.$$

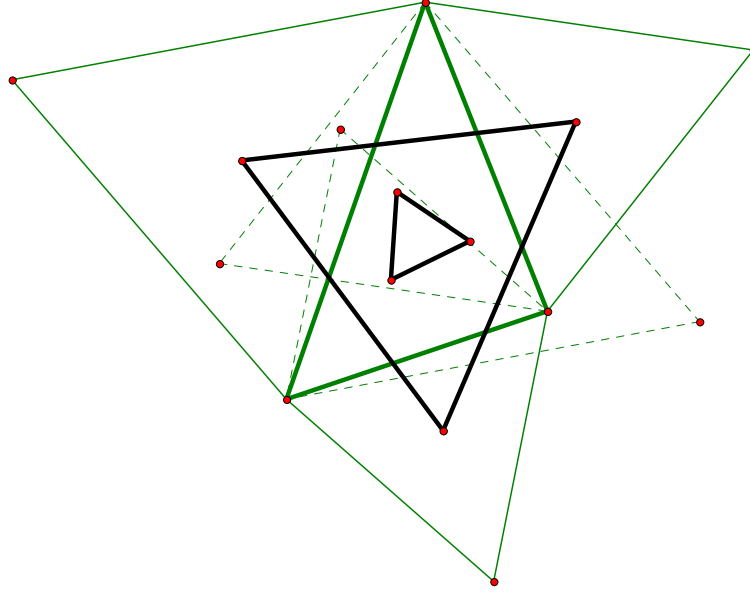
E, por fim,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\vec{GH}\| = \frac{2\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \\ \|\vec{GI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 + 12y^2 + 12c^2 - 12cx - 12y\sqrt{3}}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \\ \|\vec{HI}\| = \frac{\sqrt{12x^2 - 12cx + 12c^2 - 12cy\sqrt{3} + 12y^2}}{6} = \frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \end{array} \right.$$

Logo, $\|\vec{GH}\| = \|\vec{GI}\| = \|\vec{HI}\|$, pelo que $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Demonstração 3





Corolário 775 *Dado um triângulo $[ABC]$, este triângulo, o triângulo externo e o triângulo interno de Napoleão (relativos ao triângulo dado) têm o mesmo baricentro.*

Demonstração

É conhecido o facto de as coordenadas do baricentro dum triângulo serem a média aritmética das coordenadas dos vértices desse triângulo. Suponhamos que $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ e $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{c}{2}$ e $y > 0$.

Então, o baricentro do triângulo $[ABC]$ é $(\frac{c+x}{3}, \frac{y}{3})$.

As coordenadas dos vértices do triângulo externo de Napoleão são dadas por:

$$G_1 = \left(\frac{c}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{6} \right), H_1 = \left(\frac{3x - y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y + x\sqrt{3}}{6} \right) \text{ e } I_1 = \left(\frac{3x + 3c + y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y + c\sqrt{3} - x\sqrt{3}}{6} \right)$$

Então, o baricentro do triângulo $[G_1H_1I_1]$ é

$$\left(\frac{\frac{c}{2} + \frac{3x - y\sqrt{3}}{6} + \frac{3x + 3c + y\sqrt{3}}{6}}{3}, \frac{-\frac{c\sqrt{3}}{6} + \frac{3y + x\sqrt{3}}{6} + \frac{3y + c\sqrt{3} - x\sqrt{3}}{6}}{3} \right) = \left(\frac{c + x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

As coordenadas dos vértices do triângulo interno de Napoleão são dadas por:

$$G_2 = \left(\frac{c}{2}, \frac{c\sqrt{3}}{6} \right), H_2 = \left(\frac{3x + y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y - x\sqrt{3}}{6} \right) \text{ e } I_2 = \left(\frac{3x + 3c - y\sqrt{3}}{6}, \frac{3y - c\sqrt{3} + x\sqrt{3}}{6} \right)$$

Então, o baricentro do triângulo $[G_1H_1I_1]$ é

$$\left(\frac{\frac{c}{2} + \frac{3x + y\sqrt{3}}{6} + \frac{3x + 3c - y\sqrt{3}}{6}}{3}, \frac{\frac{c\sqrt{3}}{6} + \frac{3y - x\sqrt{3}}{6} + \frac{3y - c\sqrt{3} + x\sqrt{3}}{6}}{3} \right) = \left(\frac{c + x}{3}, \frac{y}{3} \right)$$

Está, assim, demonstrado o Corolário.

Corolário 776 *Dado um triângulo $[ABC]$, a diferença entre as áreas do triângulo externo e do triângulo interno de Napoleão é igual à área do triângulo inicial.*

Demonstração

Suponhamos que $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ e $C = (x, y)$, com $x \geq \frac{c}{2}$ e $y > 0$. Então, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{cy}{2}$.

Vimos que o lado do triângulo externo de Napoleão é dado por $\frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3}$, pelo que a sua área é dada por

$$\begin{aligned} A_{\text{ext}} &= \left(\frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3x^2 - 3cx + 3c^2 + 3cy\sqrt{3} + 3y^2}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{(x^2 - cx + c^2 + cy\sqrt{3} + y^2) \sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

O lado do triângulo interno de Napoleão é dado por $\frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3}$, pelo que a sua área é

$$\begin{aligned} A_{\text{int}} &= \left(\frac{\sqrt{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}}{3} \right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3x^2 - 3cx + 3c^2 - 3cy\sqrt{3} + 3y^2}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{(x^2 - cx + c^2 - cy\sqrt{3} + y^2) \sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

Então,

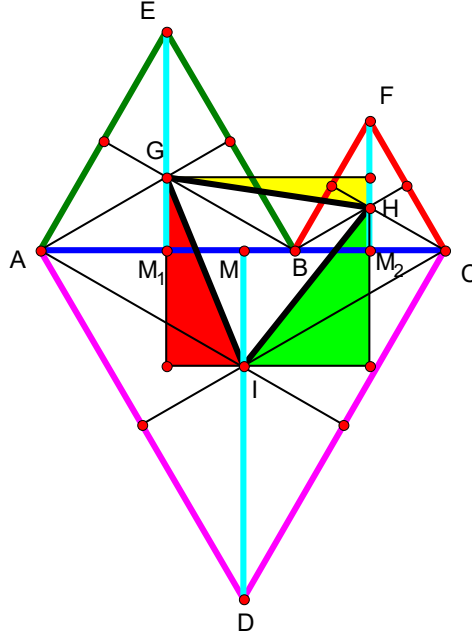
$$\begin{aligned} A_{\text{ext}} - A_{\text{int}} &= \frac{(x^2 - cx + c^2 + cy\sqrt{3} + y^2) \sqrt{3}}{12} - \frac{(x^2 - cx + c^2 - cy\sqrt{3} + y^2) \sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{2cy\sqrt{3}\sqrt{3}}{12} = \frac{cy}{2} \end{aligned}$$

Está, assim, demonstrado o Corolário.

Note-se que o Corolário é válido, no caso do triângulo inicial ser equilátero.

Teorema 777 *Consideremos três pontos colineares (distintos) A , B e C e construa-se três triângulos equiláteros, como na figura seguinte (os dois triângulos menores, acima da recta AC e o*

triângulo maior, abaixo dessa recta):



Sejam G , H e I os centros desses triângulos equiláteros. Então, $[GHI]$ é um novo triângulo equilátero.

Demonstração

Sejam $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Sejam M_1 , M_2 e M os pontos médios de $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respectivamente.

Então, $\overline{GM_1} = \frac{c\sqrt{3}}{6}$, $\overline{HM_2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ e $\overline{IM} = \frac{b\sqrt{3}}{6} = \frac{(a+c)\sqrt{3}}{6}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos vermelho, verde e amarelo, vem

$$\begin{cases} \overline{GI}^2 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{6} + \frac{(a+c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} - \frac{c}{2} \right)^2 = \left(\frac{(a+2c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \\ \overline{HI}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{(a+c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 = \left(\frac{(2a+c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \\ \overline{GH}^2 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{6} - \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 = \left(\frac{(c-a)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \overline{GI}^2 = \left(\frac{(a+2c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2+4ac+4c^2}{12} + \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2+4ac+4c^2}{12} = \frac{a^2+ac+c^2}{3} \\ \overline{HI}^2 = \left(\frac{(2a+c)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 = \frac{4a^2+4ac+c^2}{12} + \frac{c^2}{4} = \frac{4a^2+4ac+4c^2}{12} = \frac{a^2+ac+c^2}{3} \\ \overline{GH}^2 = \left(\frac{(c-a)\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 = \frac{a^2-2ac+c^2}{12} + \frac{a^2+2ac+c^2}{4} = \frac{4a^2+4ac+4c^2}{12} = \frac{a^2+ac+c^2}{3} \end{cases}$$

Então, $\overline{GI} = \overline{HI} = \overline{GH}$ e $[GHI]$ é um triângulo equilátero.

Capítulo 41

Geometria Analítica no Espaço

Exercício 778 Consideremos, num referencial ortonormado, os pontos $A = (3, 1, 5)$, $B = (4, 2, 3)$, $C = (7, 4, 1)$ e $D = (6, 5, 4)$. Determine:

- a) Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , B e C .
- b) Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , B e D .
- c) Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , C e D .
- d) Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos B , C e D .
- e) Uma equação cartesiana da superfície esférica de diâmetro $[AB]$.
- f) O ponto T pertencente ao segmento de recta $[AB]$, de modo que a distância de A a T seja o dobro da distância de B a T . Determine, ainda, uma equação cartesiana de cada uma das superfícies esféricas que passam pelo ponto T e têm centro em A e em B , respectivamente.
- g) Uma equação cartesiana da superfície esférica que contém as duas superfícies anteriores e é tangente a ambas.
- h) A distância entre o ponto D e o plano ABC .
- i) A distância entre o ponto C e a recta AB .

Resolução

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1) - (3, 1, 5) = (4, 3, -4)$

Pretendemos obter um vector $\vec{n} = (a, b, c)$, não nulo e que seja perpendicular aos dois vectores anteriores, o que pode ser feito recorrendo ao produto interno: $(a, b, c) \cdot (4, 3, -4) = 4a + 3b - 4c$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, -2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (4, 3, -4) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ 4a + 3b - 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2c - b \\ 8c - 4b + 3b - 4c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 2c - b \\ b = 4c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = 4c \end{cases} \end{aligned}$$

Fazendo $c = 1$, obtemos $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$. Então, o vector $(-2, 4, 1)$ é perpendicular aos dois vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

Equação cartesiana do plano ABC :

$$-2(x - 4) + 4(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

b) $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (6, 5, 4) - (3, 1, 5) = (3, 4, -1)$$

Pretendemos obter um vector $\vec{n} = (a, b, c)$, não nulo e que seja perpendicular aos dois vectores anteriores, o que pode ser feito recorrendo ao produto interno. No entanto, há um processo de calcular um vector perpendicular a outros dois, o qual não é do programa, mas é bastante rápido, depois de algum treino. Trata-se do produto externo de dois vectores:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} e_3 \\ &= (-1 + 8) e_1 - (-1 + 6) e_2 + (4 - 3) e_3 = 7e_1 - 5e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Observe-se que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é um determinante numa matriz de tipo 2×2 e é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

O cálculo do determinante numa matriz 3×3 ou superior é mais complicado, podendo aplicar-se a seguinte regra:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

O cálculo do determinante numa matriz 3×3 pode ser simplificado:

Começamos por repetir as duas primeiras colunas:

\vec{e}_1	\vec{e}_2	\vec{e}_3	\vec{e}_1	\vec{e}_2
1	1	-2	1	1
3	4	-1	3	4

Depois, calculamos os dois produtos nas diagonais:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 \times 1 \times (-1) + \vec{e}_2 \times (-2) \times 3 + \vec{e}_3 \times 1 \times 4 = -\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \times 1 \times 3 + \vec{e}_1 \times (-2) \times 4 + \vec{e}_2 \times 1 \times (-1) = -8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \end{cases}$$

E, finalmente, temos a diferença entre os dois produtos anteriores:

$$(-\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3) - (-8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = 7\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

Então o vector $(7, -5, 1)$ é perpendicular aos dois vectores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AD} . Uma equação cartesiana do plano ABD :

$$7(x - 4) - 5(y - 2) + 1(z - 3) = 0$$

c) $\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1) - (3, 1, 5) = (4, 3, -4)$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (6, 5, 4) - (3, 1, 5) = (3, 4, -1)$$

Vector perpendicular aos dois anteriores:

$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$
4	3	-4	4	3
3	4	-1	3	4

$$\vec{n} = (-3\overrightarrow{e_1} - 12\overrightarrow{e_2} + 16\overrightarrow{e_3}) - (-16\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} + 9\overrightarrow{e_3}) = 13\overrightarrow{e_1} - 8\overrightarrow{e_2} + 7\overrightarrow{e_3} = (13, -8, 7)$$

Equação cartesiana do plano ACD :

$$13(x - 3) - 8(y - 1) + 7(z - 5) = 0$$

d) $\overrightarrow{BC} = C - B = (7, 4, 1) - (4, 2, 3) = (3, 2, -2)$

$$\overrightarrow{CD} = D - C = (6, 5, 4) - (7, 4, 1) = (-1, 1, 3)$$

Vector perpendicular aos dois anteriores:

$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_2}$
3	2	-2	3	2
-1	1	3	-1	1

$$\vec{n} = (6\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}) - (-2\overrightarrow{e_1} + 9\overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3}) = 8\overrightarrow{e_1} - 7\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3} = (8, -7, 5)$$

Equação cartesiana do plano BCD :

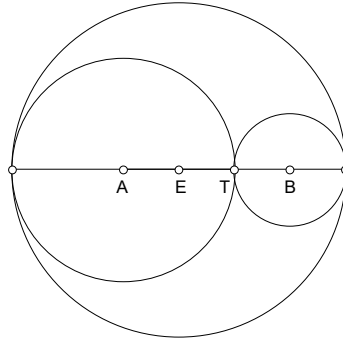
$$8(x - 4) - 7(y - 2) + 5(z - 3) = 0$$

e) O ponto médio do segmento $[AB]$, é dado por $M = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 4)$.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$. Então, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$, pelo que o raio da superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é $\frac{\sqrt{6}}{2}$, pelo que uma equação da superfície esférica referida é:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 4)^2 = \frac{6}{4}$$

f) Seja $T = (x, y, z)$.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} = 2 \times \overrightarrow{TB} &\iff T - A = 2(B - T) \iff (x - 3, y - 1, z - 5) = 2(4 - x, 2 - y, 3 - z) \\ &\iff \begin{cases} x - 3 = 8 - 2x \\ y - 1 = 4 - 2y \\ z - 5 = 6 - 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = \frac{5}{3} \\ z = \frac{11}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}$, temos $\|\overrightarrow{TB}\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ e $\|\overrightarrow{AT}\| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Equação cartesiana da superfície esférica de centro em A e que passa pelo ponto T :

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = \frac{24}{9}$$

Equação cartesiana da superfície esférica de centro em B e que passa pelo ponto T :

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{6}{9}$$

g) A soma dos raios das duas superfícies esféricas é o raio da superfície esférica pretendida. É claro que a soma dos dois raios é $\sqrt{6}$, pelo que, apenas, nos falta obter o centro E . Conforme podemos verificar na figura anterior, E é o ponto médio do segmento $[AT]$, ou seja, $E = (\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{2})$. Equação pretendida:

$$\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = 6$$

h) O plano ABC é definido pela equação $2x - 4y - z + 3 = 0$ e $D = (6, 5, 4)$. Pretendemos determinar o ponto I de intersecção do plano ABC com a recta que passa por D e é perpendicular ao plano. Então, $I = (6, 5, 4) + \alpha(2, -4, -1) = (6 + 2\alpha, 5 - 4\alpha, 4 - \alpha)$.

Para que o ponto I pertença ao plano ABC , devemos ter

$$2(6 + 2\alpha) - 4(5 - 4\alpha) - (4 - \alpha) + 3 = 0$$

Então,

$$12 + 4\alpha - 20 + 16\alpha - 4 + \alpha + 3 = 0 \iff 21\alpha = 9 \iff \alpha = \frac{3}{7}$$

1. Logo, $\overrightarrow{DI} = \frac{3}{7}(2, -4, -1)$, pelo que $\|\overrightarrow{DI}\| = \frac{3}{7}\sqrt{4+16+1} = \frac{3}{7}\sqrt{21}$.

Observe-se que, como pode verificar no exercício seguinte, existe uma fórmula que resolve esta questão. Aplicando essa fórmula, temos:

$$d = \frac{|-2 \times 6 + 4 \times 5 + 4 - 3|}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{9}{\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{21} = \frac{3}{7}\sqrt{21}$$

i) A distância entre o ponto C e a recta AB :

$$C = (7, 4, 1); \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$$

Uma equação do plano que passa por C e é perpendicular a \overrightarrow{AB} é:

$$x - 7 + y - 4 - 2(z - 1) = 0 \iff x + y - 2z = 9$$

O ponto $I = (x, y, z)$, de intersecção da recta AB com o plano anterior, é dado por:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) = (4, 2, 3) + \alpha(1, 1, -2) \\ x + y - 2z = 9 \end{cases} &\implies \begin{cases} (x, y, z) = (4 + \alpha, 2 + \alpha, 3 - 2\alpha) \\ x + y - 2z = 9 \end{cases} \\ &\implies 4 + \alpha + 2 + \alpha - 2(3 - 2\alpha) = 9 \implies 6\alpha = 9 \implies \alpha = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Então, $I = (4 + \alpha, 2 + \alpha, 3 - 2\alpha) = (\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, 0)$, pelo que

$$\overrightarrow{IC} = C - I = (7, 4, 1) - \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(3, 1, 2)$$

A distância do ponto à recta é $d = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+4} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Outro processo

$$A = (3, 1, 5), B = (4, 2, 3), C = (7, 4, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (7, 4, 1) - (3, 1, 5) = (4, 3, -4)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2) \cdot (4, 3, -4) = 4 + 3 + 8 = 15$$

$$\text{Então, a projecção de } \overrightarrow{AC} \text{ sobre } \overrightarrow{AB} \text{ é } \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{15}{1+1+4} (1, 1, -2) = \frac{5}{2} (1, 1, -2).$$

Logo, a distância pretendida é a norma do vector $\overrightarrow{AC} - \frac{5}{2}(1, 1, -2)$.

$$\overrightarrow{AC} - \frac{5}{2}(1, 1, -2) = (4, 3, -4) - \frac{5}{2}(1, 1, -2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}(3, 1, 2).$$

Exercício 779 Determine, num referencial ortonormado, a distância entre o ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e o plano de equação $Ax + By + Cz + D = 0$.

Resolução

Se a equação define um plano, então, pelo menos, um dos números A, B, C é diferente de zero, isto é, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Seja $I = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(A, B, C) = (x_0 + \alpha A, y_0 + \alpha B, z_0 + \alpha C)$.

A equação anterior define uma recta que passa por A e é perpendicular ao plano definido pela equação $Ax + By + Cz + D = 0$.

Para que o ponto pertença à recta e ao plano temos:

$$A(x_0 + \alpha A) + B(y_0 + \alpha B) + C(z_0 + \alpha C) + D = 0 \iff Ax_0 + \alpha A^2 + By_0 + \alpha B^2 + Cz_0 + \alpha C^2 + D = 0$$

Então:

$$\alpha = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Logo, $\overrightarrow{PI} = \alpha(A, B, C)$, pelo que

$$\begin{aligned} d &= \left\| \overrightarrow{PI} \right\| = |\alpha| \times \|(A, B, C)\| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2} \times \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

Exercício 780 Determine, num referencial ortonormado, a distância d , entre o ponto $P = (a, b, c)$ e a recta de equação $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(p, q, r)$.

Resolução

É claro que $p^2 + q^2 + r^2 \neq 0$, pois no caso contrário não temos uma recta.

Pretendemos encontrar o ponto $I = (x, y, z)$, da recta dada, tal que a recta definida pelos pontos I e P seja perpendicular à recta.

$$\overrightarrow{PI} = I - P = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(p, q, r) - (a, b, c) = (x_0 + \alpha p - a, y_0 + \alpha q - b, z_0 + \alpha r - c)$$

$$\text{Então, } (p, q, r) \cdot (x_0 + \alpha p - a, y_0 + \alpha q - b, z_0 + \alpha r - c) = 0$$

$$\text{Logo, } p(a - x_0) + q(b - y_0) + r(c - z_0) = \alpha(p^2 + q^2 + r^2)$$

Logo,

$$\alpha = \frac{p(a - x_0) + q(b - y_0) + r(c - z_0)}{p^2 + q^2 + r^2}$$

Então, $I = (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(p, q, r)$, com α já determinado, pelo que d , a distância pretendida, é a norma do vector $\overrightarrow{PI} = I - P = (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) - \frac{p(x_0 - a) + q(y_0 - b) + r(z_0 - c)}{p^2 + q^2 + r^2} (p, q, r)$.

A fórmula para a distância dum ponto a uma recta, que se obtém através da norma de \overrightarrow{PI} , é muito pouco interessante, pelo que não a escrevemos.

No entanto, aproveitemos este processo para retomar um exercício já resolvido:

Determinar a distância entre o ponto C e a recta AB , com $A = (3, 1, 5)$, $B = (4, 2, 3)$ e $C = (7, 4, 1)$. Então:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, 3) - (3, 1, 5) = (1, 1, -2) = (p, q, r)$$

$$C = (7, 4, 1) = (a, b, c); \quad A = (3, 1, 5) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{Então, } (-4, -3, 4) + \frac{5}{2}(1, 1, -2) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PI} &= (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) - \frac{p(x_0 - a) + q(y_0 - b) + r(z_0 - c)}{p^2 + q^2 + r^2}(p, q, r) \\ &= (3 - 7, 1 - 4, 5 - 1) - \frac{1(3 - 7) + 1(1 - 4) - 2(5 - 1)}{1 + 1 + 4}(1, 1, -2) \\ &= (-4, -3, 4) - \frac{-4 - 3 - 8}{6}(1, 1, -2) = (-4, -3, 4) + \frac{15}{6}(1, 1, -2) \\ &= (-4, -3, 4) + \frac{5}{2}(1, 1, -2) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{1}{2}(3, 1, 2)\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } d = \left\| \overrightarrow{PI} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 1 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

Exercício 781 Consideremos, num referencial ortonormado, os pontos $A = (2, -1, 1)$, $B = (4, 3, 3)$, $C = (6, 1, -1)$ e $D = (3, 2, 1)$. Determine:

- Uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos A , B e C .
- A distância do ponto D ao plano ABC .
- A distância do ponto D à recta AB .

Resolução

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (6, 1, -1) - (4, 3, 3) = (2, -2, -4) \parallel (-1, 1, 2)$$

$$\begin{aligned}\begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (-1, 1, 2) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) \cdot (1, 2, 1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (-1, 1, 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2y - z \\ 2y + z + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y - z \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2z - z \\ y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}\end{aligned}$$

Fazendo $z = 1$, temos $x = 1$ e $y = -1$, pelo que um dos vectores perpendiculares ao plano é $(1, -1, 1)$. Então, uma equação do plano ABC é $(x - 4) - (y - 3) + (z - 3) = 0$, equação esta que é equivalente à equação $x - y + z - 4 = 0$

$$1. \ A = (2, -1, 1), \ B = (4, 3, 3), \ C = (6, 1, -1), \ D = (3, 2, 1)$$

$$\text{b) Aplicando a fórmula da distância dum ponto a um plano, vem } d = \frac{|3 - 2 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Sem aplicar a fórmula, podemos determinar o ponto de intersecção do plano com a recta que passa por D e lhe é perpendicular, tendo-se $I = (3, 2, 1) + \alpha(1, -1, 1) = (3 + \alpha, 2 - \alpha, 1 + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para que o ponto I pertença ao plano, tem de ser

$$3 + \alpha - 2 + \alpha + 1 + \alpha - 4 = 0 \iff 3\alpha = 2 \iff \alpha = \frac{2}{3}$$

Logo, $d = \frac{2}{3} \|(1, -1, 1)\| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

$$c) \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

Uma equação vectorial da recta AB é: $(4, 3, 3) + \alpha(1, 2, 1) = (4 + \alpha, 3 + 2\alpha, 3 + \alpha)$

$$(x, y, z) = (4, 3, 3) + \alpha(1, 2, 1) = (4 + \alpha, 3 + 2\alpha, 3 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Uma equação do plano que passa por D e é perpendicular à recta AB :

$$(x - 3) + 2(y - 2) + (z - 1) = 0 \iff x + 2y + z - 8 = 0$$

Intersecção da recta com o plano:

$$4 + \alpha + 2(3 + 2\alpha) + 3 + \alpha - 8 = 0 \iff 5 + 6\alpha = 0 \iff \alpha = -\frac{5}{6}$$

Logo, $I = (4, 3, 3) - \frac{5}{6}(1, 2, 1) = (\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6})$.

Então, $\overrightarrow{DI} = I - D = (\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}) - (3, 2, 1) = (\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{6}) = \frac{1}{6}(1, -4, 7)$.

Logo, $\|\overrightarrow{DI}\| = \frac{1}{6}\|(1, -4, 7)\| = \frac{1}{6}\sqrt{66}$

A distância do ponto D à recta AB é $\frac{1}{6}\sqrt{66}$.

Outro processo

$$A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), D = (3, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3, 2, 1) - (2, -1, 1) = (1, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2)$$

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB} = \frac{(1, 3, 0) \cdot (2, 4, 2)}{(2, 4, 2) \cdot (2, 4, 2)} (2, 4, 2) = \frac{2 + 12}{4 + 16 + 4} (2, 4, 2) = \frac{7}{12} (2, 4, 2) = \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{AD} - \text{proj}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = (1, 3, 0) - \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right) = -\frac{1}{6}(1, -4, 7)$$

$$\left\| -\frac{1}{6}(1, -4, 7) \right\| = \frac{1}{6} \|(1, -4, 7)\| = \frac{1}{6}\sqrt{66}$$

Observe-se que $\overrightarrow{AD} = (1, 3, 0) = \left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right)$, tendo-se que $\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right)$ tem a direcção de \overrightarrow{AB} e $\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right)$ é perpendicular a \overrightarrow{AB} , conforme podemos verificar: $(2, 4, 2) \cdot \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right) = 0$

Ainda outro processo

$$A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), D = (3, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

Uma equação da recta AB :

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + \alpha(1, 2, 1) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Distância do ponto D a um ponto genérico da recta AB :

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(2 + \alpha - 3)^2 + (-1 + 2\alpha - 2)^2 + (1 + \alpha - 1)^2} = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 3)^2 + \alpha^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 + \alpha^2} = \sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10} \end{aligned}$$

Pretendemos achar a menor distância entre D e os pontos da recta AB , ou seja, pretendemos minimizar a função $f(\alpha) = \sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}$.

Consideremos a função quadrática $g(\alpha) = 6\alpha^2 - 14\alpha + 10$. O binómio discriminante desta função quadrática é $\Delta = 196 - 4 \times 6 \times 10 = -44 < 0$

Então, o domínio de f é \mathbb{R} , pelo que minimizar a função f é equivalente a minimizar a função g . De qualquer modo iremos minimizar as duas funções:

Como $g'(\alpha) = 12\alpha - 14$, temos:

α	$-\infty$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
$12\alpha - 14$	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	\searrow	mín	\nearrow

Mas, $g(\frac{7}{6}) = \frac{11}{6} = \frac{66}{36}$, pelo que $f(\alpha) = \sqrt{\frac{66}{36}} = \frac{\sqrt{66}}{6}$. Este é o valor da distância do ponto D à recta AB .

Se considerarmos a função $f(\alpha) = \sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}$, temos

$$f'(\alpha) = \frac{12\alpha - 14}{2\sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}} = \frac{6\alpha - 7}{\sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}}$$

Estudo do sinal da derivada e monotonia da função:

α	$-\infty$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
$6\alpha - 7$	$-$	0	$+$
$\sqrt{6\alpha^2 - 14\alpha + 10}$	$+$	$+$	$+$
$f'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$f(\alpha)$	\searrow	mín	\nearrow

O mínimo da função $f(\alpha)$ é dado por $f(\frac{7}{6}) = \frac{\sqrt{66}}{6}$.

Ainda mais um processo

$$A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), D = (3, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

Uma equação da recta AB é:

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + \alpha(1, 2, 1) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3, 2, 1) - (2, -1, 1) = (1, 3, 0), \text{ pelo que } \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{10}.$$

Pretendemos obter na recta AB , um ponto I tal que os pontos A , I e D definam um triângulo rectângulo em I . Convém verificar se $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$, pois, no caso disso acontecer, a distância procurada é $\|\overrightarrow{AD}\|$. Neste caso, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = (1, 3, 0) \cdot (1, 2, 1) = 7$, pelo que os dois vectores não são perpendiculares.

Pelo Teorema de Pitágoras, será $\|\vec{AI}\|^2 + \|\vec{DI}\|^2 = \|\vec{AD}\|^2$. Mas:

$$\vec{AI} = I - A = (2, -1, 1) + \alpha(1, 2, 1) - (2, -1, 1) = \alpha(1, 2, 1)$$

$$\vec{DI} = I - D = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) - (3, 2, 1) = (\alpha - 1, 2\alpha - 3, \alpha)$$

$$\text{Então, } \alpha^2(1 + 4 + 1) + \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 + \alpha^2 = 10.$$

Logo:

$$12\alpha^2 - 14\alpha = 0 \iff 2\alpha(6\alpha - 7) = 0 \iff \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{7}{6}$$

A solução que nos interessa é $\alpha = \frac{7}{6}$, pelo que:

$$\vec{DI} = (\alpha - 1, 2\alpha - 3, \alpha) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right) = \frac{1}{6}(1, -4, 7)$$

$$\text{Então, } \|\vec{DI}\| = \frac{1}{6}\sqrt{1 + 16 + 49} = \frac{1}{6}\sqrt{66}.$$

Observemos que, no caso do ponto pertencer à recta, a distância do ponto à recta é zero e o ponto, nas condições anteriores, definir com o ponto escolhido na recta um vector que é perpendicular à recta, então a equação de segundo grau terá uma raiz dupla nula. Confirmemos esta observação, supondo que $A = \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right)$.

$$\vec{AI} = I - A = \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) + \alpha(1, 2, 1) - \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) = \alpha(1, 2, 1)$$

$$\vec{DI} = I - D = \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) + \alpha(1, 2, 1) - (3, 2, 1) = \frac{1}{6}(1 + 6\alpha, -4 + 12\alpha, 7 + 6\alpha)$$

$$\vec{AD} = D - A = (3, 2, 1) - \left(\frac{19}{6}, \frac{4}{3}, \frac{13}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{6}(-1, 4, -7)$$

Então:

$$\alpha^2(1 + 4 + 1) + \frac{1}{6}(36\alpha^2 + 12\alpha + 1 + 144\alpha^2 - 96\alpha + 16 + 36\alpha^2 + 84\alpha + 49) = \frac{1}{6}(1 + 16 + 49)$$

$$\text{Logo, } 6\alpha^2 + \frac{1}{6}(216\alpha^2 + 66) = \frac{1}{6} \times 66, \text{ donde vem } 42\alpha^2 = 0.$$

O último processo

$$A = (2, -1, 1), B = (4, 3, 3), D = (3, 2, 1)$$

$$\vec{AB} = B - A = (4, 3, 3) - (2, -1, 1) = (2, 4, 2) \parallel (1, 2, 1)$$

Uma equação da recta AB é:

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + \alpha(1, 2, 1) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

Consideremos a superfície esférica de centro D e raio $\rho > 0$. Pretendemos determinar ρ , de modo que a recta seja tangente à superfície esférica, isto é, que a recta e a superfície esférica tenham um único ponto de intersecção.

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \rho^2 \\ (x, y, z) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \end{cases} &\iff \begin{cases} (\alpha-1)^2 + (2\alpha-3)^2 + \alpha^2 = \rho^2 \\ (x, y, z) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 + \alpha^2 = \rho^2 \\ (x, y, z) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 6\alpha^2 - 14\alpha + 10 - \rho^2 = 0 \\ (x, y, z) = (2 + \alpha, -1 + 2\alpha, 1 + \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

Uma equação de segundo grau tem uma raiz dupla se e só se o binómio discriminante é zero.

$$\text{Como } \Delta = 196 - 24(10 - \rho^2) = 24\rho^2 - 44, \text{ então } 24\rho^2 - 44 = 0, \text{ donde vem } \rho^2 = \frac{11}{6} = \frac{66}{36}.$$

Então, $\rho = \frac{\sqrt{66}}{6}$ que é a distância pretendida.

Exercício 782 Determine a distância entre as rectas r e s definidas por:

$$\begin{cases} r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \alpha(2, 3, -1), \alpha \in \mathbb{R} \\ s : (x, y, z) = (4, 3, 1) + \beta(2, -3, 2), \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resolução

Pretendemos determinar um ponto R , na recta r e um ponto S , na recta s , de modo que a distância entre os dois pontos seja mínima.

Primeiro processo

Começamos por obter uma equação do plano definido pela recta r e por uma recta paralela a s e que seja concorrente com r . Tal plano pode ser definido pelo ponto $A = (1, 2, 3)$ e pelos vectores $(2, 3, -1)$ e $(2, -3, 2)$.

O próximo passo consiste em encontrar um vector não nulo perpendicular aos dois vectores anteriores:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, -3, 2) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ 2a - 3b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2a + 3b \\ 2a - 3b + 4a + 6b = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = 2a + 3b \\ 6a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -4a \\ b = -2a \end{cases} \end{aligned}$$

Então, o vector $(1, -2, -4)$ é perpendicular ao plano acima referido. Então, uma equação do plano é $(x - 1) - 2(y - 2) - 4(z - 3) = 0$, equação equivalente a $x - 2y - 4z + 15 = 0$

A distância entre as duas rectas é a distância dum ponto qualquer de s ao plano anterior.

Para ser mais rápido, aplicamos a fórmula respectiva, obtendo-se:

$$d = \frac{|4 - 2 \times 3 - 4 \times 1 + 15|}{\sqrt{1 + 4 + 16}} = \frac{3}{7}\sqrt{21}$$

Segundo processo

Começamos por obter um vector perpendicular aos dois vectores directores das rectas r e s , o que se faz da mesma maneira que no processo anterior. Um tal vector é $(1, -2, -4)$.

Consideremos dois pontos R e S , um na recta r e outro na recta s , por exemplo, $R = (1, 2, 3)$ e $S = (4, 3, 1)$. Então, $\overrightarrow{RS} = S - R = (4, 3, 1) - (1, 2, 3) = (3, 1, -2)$.

E, agora, calculamos a projecção do vector \overrightarrow{RS} sobre $(1, -2, -4)$:

$$\text{proj}_{(1, -2, -4)}(3, 1, -2) = \frac{(3, 1, -2) \cdot (1, -2, -4)}{(1, -2, -4) \cdot (1, -2, -4)}(1, -2, -4) = \frac{9}{21}(1, -2, -4) = \frac{3}{7}(1, -2, -4)$$

A distância procurada é a norma de $\frac{3}{7}(1, -2, -4)$, ou seja, $\frac{3}{7}\sqrt{21}$.

Terceiro processo

Consideremos R e S , dois pontos genéricos das rectas r e s , respectivamente:

$$R = (1, 2, 3) + \alpha(2, 3, -1), S = (4, 3, 1) + \beta(2, -3, 2), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Então:

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (3 + 2\beta - 2\alpha, 1 - 3\beta - 3\alpha, -2 + 2\beta + \alpha)$$

Logo,

$$\|\overrightarrow{RS}\|^2 = (3 + 2\beta - 2\alpha)^2 + (1 - 3\beta - 3\alpha)^2 + (-2 + 2\beta + \alpha)^2$$

Pretendemos minimizar a função anterior, o que é complicado, pois temos uma função de duas variáveis. Consideremos, então, a função de duas variáveis

$$f(x, y) = (3 - 2x + 2y)^2 + (1 - 3x - 3y)^2 + (-2 + x + 2y)^2$$

Suponhamos que y é constante, digamos que $y = k$.

Então, $f(x, k) = (3 - 2x + 2k)^2 + (1 - 3x - 3k)^2 + (-2 + x + 2k)^2$.

Logo, para cada valor de k , temos uma função duma só variável $g(x) = f(x, k)$, da qual podemos achar a derivada:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -4(3 - 2x + 2k) - 6(1 - 3x - 3k) + 2(-2 + x + 2k) \\ &= -12 + 8x - 8k - 6 + 18x + 18k - 4 + 2x + 4k = 28x + 14k - 22 \end{aligned}$$

A derivada anula-se, quando $14x + 7k - 11 = 0$.

Suponhamos que x é constante, digamos $x = c$.

Então, $f(c, y) = (3 - 2c + 2y)^2 + (1 - 3c - 3y)^2 + (-2 + c + 2y)^2$.

Seja $h(y) = (3 - 2c + 2y)^2 + (1 - 3c - 3y)^2 + (-2 + c + 2y)^2$. Então:

$$\begin{aligned} h'(y) &= 4(3 - 2c + 2y) - 6(1 - 3c - 3y) + 4(-2 + c + 2y) \\ &= 12 - 8c + 8y - 6 + 18c + 18y - 8 + 4c + 8y = 14c + 34y - 2 \end{aligned}$$

Ao fim e ao cabo, o que pretendemos é que $28x + 14y - 22 = 0 = 14x + 34y - 2$.

$$\begin{cases} 14x + 7y = 11 \\ 14x + 34y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 14x + 7y = 11 \\ 27y = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} 14x = 11 + \frac{7}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{40}{42} = \frac{20}{21} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

E, agora, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{f\left(\frac{20}{21}, -\frac{1}{3}\right)} &= \sqrt{\left(3 - 2 \times \frac{20}{21} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - 3 \times \frac{20}{21} + 1\right)^2 + \left(-2 + \frac{20}{21} - \frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{63 - 40 - 14}{21}\right)^2 + \left(\frac{42 - 60}{21}\right)^2 + \left(\frac{20 - 14 - 42}{21}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{9}{21}\right)^2 + \left(\frac{-18}{21}\right)^2 + \left(\frac{-36}{21}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2 + \left(\frac{-12}{7}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{144}{49}} = \sqrt{\frac{189}{49}} = \frac{3}{7}\sqrt{21} \end{aligned}$$

Quarto processo

Vamos refazer a resolução anterior, utilizando a noção de derivada parcial.

Consideremos R e S , dois pontos genéricos das rectas r e s , respectivamente:

$$R = (1, 2, 3) + \alpha(2, 3, -1), S = (4, 3, 1) + \beta(2, -3, 2), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Então:

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (3 + 2\beta - 2\alpha, 1 - 3\beta - 3\alpha, -2 + 2\beta + \alpha)$$

Logo,

$$\|\overrightarrow{RS}\|^2 = (3 + 2\beta - 2\alpha)^2 + (1 - 3\beta - 3\alpha)^2 + (-2 + 2\beta + \alpha)^2$$

O nosso objectivo é minimizar a função $f(x, y) = (3 - 2x + 2y)^2 + (1 - 3x - 3y)^2 + (-2 + x + 2y)^2$.
Calculemos as derivadas parciais da função:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -4(3 - 2x + 2y) - 6(1 - 3x - 3y) + 2(-2 + x + 2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4(3 - 2x + 2y) - 6(1 - 3x - 3y) + 4(-2 + x + 2y) \end{cases}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -12 + 8x - 8y - 6 + 18x + 18y - 4 + 2x + 4y = 28x + 14y - 22 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 12 - 8x + 8y - 6 + 18x + 18y - 8 + 4x + 8y = 14x + 34y - 2 \end{cases}$$

Uma condição necessária para que a função tenha um mínimo é que as duas derivadas parciais anteriores sejam nulas:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 28x + 14y - 22 = 0 \\ 14x + 34y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 14x + 7y = 11 \\ 14x + 34y = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 27y = -9 \\ 7x + 17y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ 7x = 1 + \frac{17}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = \frac{20}{21} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{20}{21}, -\frac{1}{3}\right) &= \left(3 - \frac{40}{21} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{20}{7} + 1\right)^2 + \left(-2 + \frac{20}{21} - \frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{63 - 40 - 14}{21}\right)^2 + \left(\frac{14 - 20}{7}\right)^2 + \left(\frac{20 - 42 - 14}{21}\right)^2 \\ &= \left(\frac{9}{21}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2 + \left(\frac{-36}{21}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2 \\ &= \frac{9 + 36 + 144}{49} = \frac{189}{49} = \frac{3^2 \times 21}{7^2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sqrt{f\left(\frac{20}{21}, -\frac{1}{3}\right)} = \frac{3\sqrt{21}}{7}.$$

Não vamos abordar a questão geral da existência ou não de extremo, mas é claro que, neste problema, há sempre um mínimo, que é a distância entre as duas rectas.

Exercício 783 Considere, num referencial ortonormado, os pontos $A = (2, 4, 3)$ e $B = (1, 5, 6)$. Identifique o lugar geométrico dos pontos P tais que a distância de P ao ponto A é o dobro da distância de P ao ponto B .

Resolução

Seja $P = (x, y, z)$. Então:

$$\begin{cases} d(P, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 6z + 9} \\ 2d(P, B) = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 12z + 36} \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} d(P, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z + 29} \\ 2d(P, B) = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y - 12z + 62} \end{cases}$$

Elevando ao quadrado, temos

$$4(x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y - 12z + 62) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 6z + 29$$

A equação anterior é equivalente a

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x - 40y - 48z + 248 - x^2 - y^2 - z^2 + 4x + 8y + 6z - 29 = 0$$

Simplificando, obtemos $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4x - 32y - 42z + 219 = 0$.

Multiplicando por 3, ambos os membros da equação anterior, obtemos a equação $9x^2 - 12x + 9y^2 - 96y + 9z^2 - 126z + 657 = 0$

Então:

$$9x^2 - 12x + 4 + 9y^2 - 96y + 256 + 9z^2 - 126z + 441 = 4 + 256 + 441 - 657$$

Logo:

$$(3x - 2)^2 + (3y - 16)^2 + (3z - 21)^2 = 44$$

E, finalmente, obtemos

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{3}\right)^2 + (z - 7)^2 = \frac{44}{9}$$

O lugar geométrico pretendido é a superfície esférica de centro $(\frac{2}{3}, \frac{16}{3}, 7)$ e raio $\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Observe-se que este problema é análogo ao correspondente em \mathbb{R}^2 , cuja solução é uma circunferência.

Exercício 784 Considere os pontos $A = (1, 4, 2)$, $B = (3, 5, 1)$, $C = (2, 3, 0)$ e $D = (7, 3, 1)$, num referencial ortonormado. Determine a distância do ponto D ao plano ABC .

Resolução

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 5, 1) - (1, 4, 2) = (2, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3, 0) - (1, 4, 2) = (1, -1, -2)$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) \cdot (2, 1, -1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (1, -1, -2) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x + y \\ x - y - 4x - 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 2x + y \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases} \end{aligned}$$

Então, o vector $(1, -1, 1)$ é perpendicular ao plano ABC , pelo que uma equação do plano é:

$$x - 2 - y + 3 + z = 0$$

Simplificando, vem $x - y + z + 1 = 0$.

1. Aplicando a fórmula da distância de um ponto a um plano, vem:

$$d = \frac{|7 - 3 + 1 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

2. Se não quisermos aplicar a fórmula anterior, determinamos intersecção do plano com a recta que passa por D e é perpendicular ao plano ABC :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y, z) = (7, 3, 1) + \alpha(1, -1, 1) \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} (x, y, z) = (7 + \alpha, 3 - \alpha, 1 + \alpha) \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) = (7 + \alpha, 3 - \alpha, 1 + \alpha) \\ 7 + \alpha - 3 + \alpha + 1 + \alpha + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) = (7 + \alpha, 3 - \alpha, 1 + \alpha) \\ 3\alpha = -6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x, y, z) = (5, 5, -1) \\ \alpha = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $I = (5, 5, -1)$, pelo que $\overrightarrow{DI} = I - D = (5, 5, -1) - (7, 3, 1) = (-2, 2, -2)$.

Logo, $\|\overrightarrow{DI}\| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$.

3. Superfície esférica de centro D e tangente ao plano ABC :

$$\begin{cases} (x - 7)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = r^2 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x - 7)^2 + (y - 3)^2 + (y - x - 2)^2 = r^2 \\ z = y - x - 1 \end{cases}$$

Substituindo z , vem

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 + y^2 + x^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x - r^2 = 0$$

Logo,

$$2x^2 - 2xy - 10x + 2y^2 - 10y + 62 - r^2 = 0$$

A equação anterior é equivalente a

$$2x^2 - (2y + 10)x + 2y^2 - 10y + 62 - r^2 = 0$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta_x &= (2y + 10)^2 - 8(2y^2 - 10y + 62 - r^2) = 4y^2 + 40y + 100 - 16y^2 + 80y - 496 + 8r^2 \\ &= -12y^2 + 120y + 8r^2 - 396 \end{aligned}$$

Então, $\Delta_x = 0$ é equivalente a $3y^2 - 30y - 2r^2 + 99 = 0$.

Para que haja uma solução única para y , deve ser nulo o discriminante $\Delta_y = 900 - 12(99 - 2r^2)$.

$$900 - 12(99 - 2r^2) = 0 \iff 225 - 297 + 6r^2 = 0 \iff 6r^2 = 72 \iff r^2 = 12 \iff r = \pm\sqrt{12}$$

Logo, a distância do ponto ao plano é $\sqrt{12}$, ou seja, $2\sqrt{3}$.

4. Como vimos no início, o plano ABC é definido pela equação $x - y + z + 1 = 0$. Então, $z = y - x - 1$, pelo que o ponto genérico do plano é $P = (x, y, y - x - 1)$.

Então, $\overrightarrow{DP} = P - D = (x, y, y - x - 1) - (7, 3, 1) = (x - 7, y - 3, y - x - 2)$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{DP}\|^2 &= (x - 7)^2 + (y - 3)^2 + (y - x - 2)^2 \\ &= x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9 + y^2 + x^2 + 4 - 2xy - 4y + 4x \\ &= 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 10x - 10y + 62\end{aligned}$$

O nosso objectivo é minimizar a função anterior. Então, as derivadas parciais devem ser nulas:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 - 2xy + 2y^2 - 10x - 10y + 62) = 4x - 2y - 10 \\ \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 - 2xy + 2y^2 - 10x - 10y + 62) = -2x + 4y - 10 \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + 4y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = y + 5 \\ 3y = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

Logo, $\|\overrightarrow{DP}\|^2 = (5 - 7)^2 + (5 - 3)^2 + (5 - 5 - 2)^2 = 4 + 4 + 4 = 12$.

Então, $\|\overrightarrow{DP}\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

5. O vector $(1, -1, 1)$ é perpendicular ao plano ABC .

Ora, $\overrightarrow{AD} = D - A = (7, 3, 1) - (1, 4, 2) = (6, -1, -1)$. Logo,

$$\text{proj}_{(1, -1, 1)} (6, -1, -1) = \frac{(6, -1, -1) \cdot (1, -1, 1)}{(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1)} (1, -1, 1) = \frac{6 + 1 - 1}{1 + 1 + 1} (1, -1, 1) = 2(1, -1, 1)$$

Então, $d = \|\text{proj}_{(1, -1, 1)} (6, -1, -1)\| = 2\sqrt{1 + 1 + 1} = 2\sqrt{3}$.

6. O ponto genérico do plano ABC é $P = (x, y, y - x - 1)$.

Então, $\overrightarrow{DP} = P - D = (x, y, y - x - 1) - (7, 3, 1) = (x - 7, y - 3, y - x - 2)$.

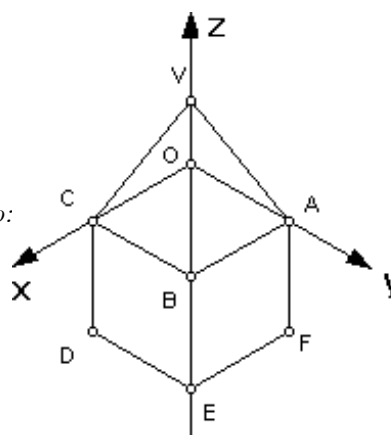
Este vector tem norma mínima se e só se for perpendicular ao plano ABC , ou seja, se for colinear com $(1, -1, 1)$.

Então, $(x - 7, y - 3, y - x - 2) = \alpha(1, -1, 1)$.

$$\begin{cases} x - 7 = \alpha \\ y - 3 = -\alpha \\ y - x - 2 = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 + \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ 3 - \alpha - 7 - \alpha - 2 = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 + \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ -3\alpha = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

Logo, $\overrightarrow{DP} = \alpha(1, -1, 1) = -2(1, -1, 1)$, pelo que $\|\overrightarrow{DP}\| = 2\sqrt{1 + 1 + 1} = 2\sqrt{3}$.

Exercício 785 Observe a figura seguinte, com atenção:



O sólido apresentado resulta da colocação de uma pirâmide quadrangular regular sobre um cubo. A base da pirâmide é uma das faces do cubo e está assente no plano de equação $z = 0$. O volume do cubo é o triplo do volume da pirâmide. Suponha que a aresta do cubo mede 2 cm. Tomando 1 cm para unidade, determine:

- As coordenadas dos vértices do sólido.
- Uma equação cartesiana do plano DVE.
- Uma equação vectorial do plano DVF.
- Uma equação cartesiana do plano AVB.
- A área total do sólido
- Uma equação da maior superfície esférica contida na pirâmide.
- O baricentro do triângulo $[VBC]$.
- O circuncentro do triângulo $[VEF]$.
- O ortocentro do triângulo $[VAB]$.

Resolução

- a) $O = (0, 0, 0)$, $A = (0, 2, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (2, 0, 0)$
 $D = (2, 0, -2)$, $E = (2, 2, -2)$, $F = (0, 0, -2)$, $G = (0, 0, -2)$

Falta-nos determinar as coordenadas do vértice V . Ora, $V = (1, 1, h)$, onde h é a altura da pirâmide. É imediato concluir que $h = 2$, pois o cubo e a pirâmide têm a mesma base e o volume do cubo é triplo do volume da pirâmide. Então, $V = (1, 1, 2)$.

- b) $\overrightarrow{DV} = V - D = (1, 1, 2) - (2, 0, -2) = (-1, 1, 4)$
 $\overrightarrow{DE} = E - D = (2, 2, -2) - (2, 0, -2) = (0, 2, 0)$

Pretendemos encontrar um vector não nulo perpendicular aos dois vectores anteriores:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1, 1, 4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0, 2, 0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b + 4c = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4c \\ b = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c = 1$, temos $a = 4$. Então, $(a, b, c) = (4, 0, 1)$, pelo que uma das equações do plano DVE é $4(x - 1) + z - 2 = 0$.

$$c) \overrightarrow{DV} = V - D = (1, 1, 2) - (2, 0, -2) = (-1, 1, 4)$$

$$\overrightarrow{DF} = F - D = (0, 0, -2) - (2, 0, -2) = (-2, 0, 0) \parallel (1, 0, 0)$$

Uma equação vectorial do plano VDF é $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \alpha(-1, 1, 4) + \beta(1, 0, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$d) \overrightarrow{AV} = V - A = (1, 1, 2) - (0, 2, 0) = (1, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2, 0) - (0, 2, 0) = (2, 0, 0)$$

Pretendemos encontrar um vector não nulo perpendicular aos dois vectores anteriores:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, -1, 2) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 0, 0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 2c \\ a = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c = 1$, temos $b = 2$.

Logo, o vector pretendido pode ser $(0, 2, 1)$ e uma das equações cartesianas do plano VAB é $2(y - 2) + z = 0$.

- e) O sólido é formado por cinco faces quadradas (faces do cubo) e quatro faces triangulares (faces da pirâmide).

A área de cada quadrado é 4 cm^2 .

Seja M , o ponto médio de $[AB]$. Então $M = (1, 2, 0)$, pelo que $\overrightarrow{MV} = V - M = (1, 1, 2) - (1, 2, 0) = (0, -1, 2)$.

Logo, $\|\overrightarrow{MV}\| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$. A área de cada triângulo é $\frac{2 \times \sqrt{5}}{2} \text{ cm}^2 = \sqrt{5} \text{ cm}^2$.

A área total do sólido é $(5 \times 4 + 4\sqrt{5}) \text{ cm}^2 = (20 + 4\sqrt{5}) \text{ cm}^2$.

- f) A maior superfície esférica contida na pirâmide é tangente à base e às quatro faces laterais da pirâmide. O centro da superfície esférica é o ponto $H = (1, 1, k)$, com $k > 0$ e tal que a distância de H às quatro faces laterais da pirâmide seja k .

Já vimos que uma equação do plano VAB é $2y + z - 4 = 0$. Se quisermos encontrar a intersecção do plano anterior com a recta que lhe é perpendicular e que passa por H , temos:

$$I = H + \alpha(0, 2, 1) = (1, 1, k) + \alpha(0, 2, 1) = (1, 1 + 2\alpha, k + \alpha)$$

Então, $2 + 4\alpha + k + \alpha - 4 = 0$, donde vem $k = 2 - 5\alpha$.

$$\|\overrightarrow{HI}\| = \|\alpha(0, 2, 1)\| = |\alpha|\sqrt{5} = k.$$

Então, $|\alpha| \sqrt{5} = 2 - 5\alpha$. Elevando ao quadrado, temos $5\alpha^2 = 4 - 20\alpha + 25\alpha^2$.

$$20\alpha^2 - 20\alpha + 4 = 0 \iff 5\alpha^2 - 5\alpha + 1 = 0 \iff \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{10} \iff \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

Apenas interessa a solução $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$, porque $k = 2 - 5\alpha > 0$. Então, $k = 2 - 5\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pelo que $H = (1, 1, k) = \left(1, 1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

A equação pretendida é:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

g) $V = (1, 1, 2)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (2, 0, 0)$. O ponto médio do lado $[BC]$ é $M = (2, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{MV} = V - M = (1, 1, 2) - (2, 1, 0) = (-1, 0, 2)$$

Seja J , o baricentro do triângulo. Então, $J = M + \frac{1}{3}\overrightarrow{MV} = (2, 1, 0) + \frac{1}{3}(-1, 0, 2) = \left(\frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$.

Uma maneira rápida de encontrar o baricentro dum triângulo é calcular a média aritmética das coordenadas homólogas dos vértices do triângulo:

$$J = \left(\frac{1+2+2}{3}, \frac{1+2+0}{3}, \frac{2+0+0}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)$$

h) $E = (2, 2, -2)$, $F = (0, 2, -2)$, $V = (1, 1, 2)$

O circuncentro dum triângulo é o ponto de intersecção de dois planos medidores dos lados do triângulo com o plano que contém o triângulo. Sejam $M_1 = (1, 2, -2)$ e $M_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ os pontos médios de $[EF]$ e $[VE]$, respectivamente.

$$\overrightarrow{EV} = V - E = (1, 1, 2) - (2, 2, -2) = (-1, -1, 4) \parallel (1, 1, -4).$$

Uma equação do plano mediador de $[VE]$ é:

$$x - \frac{3}{2} + y - \frac{3}{2} - 4z = 0$$

$$\overrightarrow{EF} = F - E = (0, 2, -2) - (2, 2, -2) = (-2, 0, 0) \parallel (1, 0, 0).$$

Uma equação do plano mediador de $[EF]$ é:

$$x - 1 = 0$$

Para encontrar o circuncentro, falta-nos uma equação do plano VEF :

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 1, -4) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - 4c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 4c \end{cases}$$

Então, $(0, 4, 1)$ é um vector perpendicular ao plano VEF .

Logo, uma equação do plano é $4(y-1) + z - 2 = 0$, ou seja, $4y + z = 6$.

$$\begin{cases} x + y - 4z = 3 \\ x = 1 \\ z = 6 - 4y \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + y - 24 + 16y = 3 \\ x = 1 \\ z = 6 - 4y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{26}{17} \\ x = 1 \\ z = 6 - \frac{104}{17} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{26}{17} \\ x = 1 \\ z = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

Logo, o circuncentro de $[VEF]$ é $K = (1, \frac{26}{17}, -\frac{2}{17})$.

Verificação:

$$\overrightarrow{KV} = (1, 1, 2) - (1, \frac{26}{17}, -\frac{2}{17}) = (0, -\frac{9}{17}, \frac{36}{17}) \implies \|\overrightarrow{KV}\| = \frac{9}{17}\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{KE} = (1, \frac{26}{17}, -\frac{2}{17}) - (2, 2, -2) = (-1, -\frac{8}{17}, \frac{32}{17}) \implies \|\overrightarrow{KE}\| = \frac{9}{17}\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{KF} = (1, \frac{26}{17}, -\frac{2}{17}) - (0, 2, -2) = (1, -\frac{8}{17}, \frac{32}{17}) \implies \|\overrightarrow{KF}\| = \frac{9}{17}\sqrt{17}$$

Condição que define a circunferência circunscrita ao triângulo $[VEF]$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y - \frac{26}{17})^2 + (6-4y + \frac{2}{17})^2 = \frac{81}{17} \\ z = 6-4y \end{cases}$$

i) $A = (0, 2, 0), B = (2, 2, 0), V = (1, 1, 2)$.

O ortocentro do triângulo $[VAB]$ é o ponto de intersecção das rectas que contêm as alturas do triângulo.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 2, 0) - (0, 2, 0) = (2, 0, 0) \parallel (1, 0, 0)$$

Plano perpendicular a \overrightarrow{AB} e que passa por V :

$$x = 1$$

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (1, 1, 2) - (0, 2, 0) = (1, -1, 2)$$

Plano perpendicular a \overrightarrow{AV} e que passa por B :

$$x - 2 - (y - 2) + 2z = 0$$

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -1, 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ a - b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 2c \end{cases}$$

Equação do plano $[ABV]$:

$$2(y - 2) + z = 0$$

Resolução do sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2y + z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2z \\ 2 + 4z + z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{9}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Então, o ortocentro do triângulo é o ponto $(1, \frac{9}{5}, \frac{2}{5})$.

Exercício 786 Determine o baricentro do triângulo $[ABC]$, em que $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$.

Resolução

Seja M_1 o ponto médio de $[AB]$. Então, $M_1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Logo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM_1} &= M_1 - C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) - (x_3, y_3, z_3) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{2}, \frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{2}, \frac{z_1 + z_2 - 2z_3}{2} \right)\end{aligned}$$

Seja G , o baricentro do triângulo. Então:

$$\begin{aligned}G &= M_1 - \frac{1}{3}\overrightarrow{CM_1} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) - \left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{6}, \frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{6}, \frac{z_1 + z_2 - 2z_3}{6} \right) \\ &= \left(\frac{3x_1 + 3x_2 - x_1 - x_2 + 2x_3}{6}, \frac{3y_1 + 3y_2 - y_1 - y_2 + 2y_3}{6}, \frac{3z_1 + 3z_2 - z_1 - z_2 + 2z_3}{6} \right) \\ &= \left(\frac{2x_1 + 2x_2 + 2x_3}{6}, \frac{2y_1 + 2y_2 + 2y_3}{6}, \frac{2z_1 + 2z_2 + 2z_3}{6} \right) \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)\end{aligned}$$

Exercício 787 Determine o baricentro do triângulo $[ABC]$, em que $A = (3, 1, 2)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (1, 1, 2)$.

Resolução

Seja M o ponto médio de $[AC]$. Então, $M = (2, 1, 2)$ e $\overrightarrow{MB} = B - M = (4, 3, 0) - (2, 1, 2) = (2, 2, -2)$.

Então, $G = M + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} = (2, 1, 2) + \frac{1}{3}(2, 2, -2) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Mas, é muito mais fácil aplicar a propriedade anterior:

$$G = \left(\frac{3+4+1}{3}, \frac{1+3+1}{3}, \frac{2+0+2}{3} \right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

Exercício 788 Determine a área do triângulo $[ABC]$, no caso em que $A = (3, 4, 2)$, $B = (4, 3, 0)$ e $C = (1, 1, 3)$.

Resolução

1. Calculando a área dum paralelogramo:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 0) - (3, 4, 2) = (1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 1, 3) - (3, 4, 2) = (-2, -3, 1) \end{cases}$$

Cálculo do produto externo:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} &= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-1 - 6)\vec{e}_1 - (1 - 4)\vec{e}_2 + (-3 - 2)\vec{e}_3 = -7\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 = (-7, 3, -5)\end{aligned}$$

A norma do vector anterior é $\sqrt{49 + 9 + 25}$, pelo que a área do triângulo é metade daquele valor, ou seja, $\frac{\sqrt{83}}{2}$ unidades de área.

2. Aplicando a lei dos cosenos:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 3, 0) - (3, 4, 2) = (1, -1, -2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (1, 1, 3) - (3, 4, 2) = (-2, -3, 1) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (1, 1, 3) - (4, 3, 0) = (-3, -2, 3) \end{cases}$$

Então:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}, \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

Pela lei dos cosenos:

$$(\sqrt{22})^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \times \sqrt{14} \times \sqrt{6} \cos A$$

Logo, $2\sqrt{84} \cos A = -2$, donde vem $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{84}}$. Então, $\sin A = \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{84}}$.

E a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{1}{2} \sqrt{14} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{83}}{\sqrt{84}} = \frac{\sqrt{83}}{2}$ unidades de área.

3. Aplicando a fórmula de Heron:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}, \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{14}, \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

Então,

$$\begin{cases} s = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{22}}{2}, s-a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}-\sqrt{22}}{2} \\ s-b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}+\sqrt{22}}{2}, s-c = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{22}}{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} s(s-a) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}+\sqrt{22}}{2} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}-\sqrt{22}}{2} = \frac{6+14+2\sqrt{84}-22}{4} = \frac{\sqrt{84}-1}{2} \\ (s-b)(s-c) = \frac{\sqrt{22}+(\sqrt{6}-\sqrt{14})}{2} \times \frac{\sqrt{22}-(\sqrt{6}-\sqrt{14})}{2} = \frac{22-6-14+2\sqrt{84}}{4} = \frac{\sqrt{84}+1}{2} \\ s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{\sqrt{84}-1}{2} \times \frac{\sqrt{84}+1}{2} = \frac{83}{4} \end{cases}$$

Logo, a área do triângulo é $\frac{\sqrt{83}}{2}$ unidades de área.

Exercício 789 Considere os pontos $A = (4, 2, 4)$, $B = (10, 2, -2)$.

1. Determine os pontos C pertencentes ao plano de equação $x - 5y + z = -2$, de modo que o triângulo $[ABC]$ seja equilátero.
2. Escolha um dos pontos obtidos na alínea anterior e determine um quarto ponto V , que defina com os outros três um tetraedro regular.
3. Determine a área total do tetraedro.
4. Determine o volume do tetraedro.

Resolução

$$1. \overrightarrow{AB} = B - A = (10, 2, -2) - (4, 2, 4) = (6, 0, -6) \parallel (1, 0, -1)$$

O ponto médio de $[AB]$ é $(7, 2, 1)$ e uma equação do plano mediador de $[AB]$ é $x - 7 - (z - 1) = 0$, ou ainda, $x - z = 6$.

Intersecção dos dois planos:

$$\begin{cases} x - 5y + z = -2 \\ x - z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} z + 6 - 5y + z = -2 \\ x = z + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y = 2z + 8 \\ x = z + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2z+8}{5} \\ x = z + 6 \end{cases}$$

Logo, $C = (z + 6, \frac{2z+8}{5}, z)$. Então:

$$\overrightarrow{AC} = \left(z + 6, \frac{2z+8}{5}, z \right) - (4, 2, 4) = \left(z + 2, \frac{2z-2}{5}, z - 4 \right)$$

Mas, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$, pelo que tem se ser $\|\overrightarrow{AC}\| = 6\sqrt{2}$.

Então, $\sqrt{(z+2)^2 + \left(\frac{2z-2}{5}\right)^2 + (z-4)^2} = 6\sqrt{2}$.

Logo, devemos ter

$$\begin{aligned} (z+2)^2 + \left(\frac{2z-2}{5}\right)^2 + (z-4)^2 = 72 &\iff z^2 + 4z + 4 + \frac{4z^2 - 8z + 4}{25} + z^2 - 8z + 16 = 72 \\ &\iff 2z^2 - 4z + \frac{4z^2 - 8z + 4}{25} = 52 \\ &\iff 50z^2 - 100z + 4z^2 - 8z + 4 = 1300 \\ &\iff 54z^2 - 108z - 1296 = 0 \iff z^2 - 2z - 24 = 0 \\ &\iff z = 1 \pm \sqrt{1 + 24} \iff z = -4 \vee z = 6 \end{aligned}$$

Se $z = -4$, temos $C = (z + 6, \frac{2z+8}{5}, z) = (2, 0, -4)$.

Se $z = 6$, temos $C = (z + 6, \frac{2z+8}{5}, z) = (12, 4, 6)$.

Outra resolução:

Começamos por observar que a altura dum triângulo equilátero de lado l é $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Em segundo lugar, refira-se que a altura dum triângulo equilátero (segmento de recta) é perpendicular à base no seu ponto médio. Em terceiro lugar, refira-se que os pontos A, B, C pertencem ao plano de equação $x - 5y + z = -2$, como se pode verificar facilmente. Se tal não acontecesse, podíamos encontrar uma equação do plano ABC , ou encontrar um vector perpendicular a este plano.

Então, a recta que contém a altura relativa ao vértice C é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB} = (6, 0, -6)$ e ao vector $\overrightarrow{u} = (1, -5, 1)$, que é perpendicular a todas as rectas do plano de equação $x - 5y + z = -2$.

Então, vamos procurar um vector $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ que seja perpendicular aos dois vectores \overrightarrow{u} e \overrightarrow{AB} :

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (6, 0, -6) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -5, 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6a - 6c = 0 \\ a - 5b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = a \\ a - 5b + a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{2a}{5} \\ c = 4a \end{cases}$$

Fazendo $a = 5$, temos $b = 2$ e $c = 5$. Logo, $\overrightarrow{v} = (a, b, c) = (5, 2, 5)$.

Ora, $\|\overrightarrow{AB}\| = 6\sqrt{2}$ e $\|\overrightarrow{v}\| = \|(5, 2, 5)\| = 3\sqrt{6}$.

Mas, $\frac{l\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$, o que facilita a resolução.

Seja $M = (7, 2, 1)$, o ponto médio de $[AB]$. Então, $C = M \pm \vec{v}$.

Logo, $C = (7, 2, 1) \pm (5, 2, 5)$, donde vem $C = (12, 4, 6) \vee C = (2, 0, -4)$.

2. Sejam $A = (4, 2, 4)$, $B = (10, 2, -2)$, $C = (2, 0, -4)$. Seja $M = (7, 2, 1)$, o ponto médio de $[AB]$.

G , o baricentro do triângulo $[AB]$, é dado por $G = M + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, mas, pode ser calculado pela média aritmética das coordenadas dos vértices do triângulo:

$$G = \left(\frac{4+10+2}{3}, \frac{2+2+0}{3}, \frac{4-2-4}{3} \right) = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

O quarto vértice do tetraedro pertence à recta que passa por G e é perpendicular ao plano ABC .

Uma maneira interessante de continuar, consiste no cálculo da altura do tetraedro (altura da pirâmide).

A altura do tetraedro, um terço da mediana e a altura do triângulo (face lateral) definem um triângulo rectângulo em que a hipotenusa é a altura do triângulo.

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}(-5, -2, -5), \text{ pelo que } \frac{1}{3}\|\overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{3}\sqrt{25+4+25} = \sqrt{6}$$

Então, $w^2 + 6 = 54$, donde vem $w = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Mas, o plano ABC tem equação $x - 5y + z = -2$, pelo que $\vec{u} = (1, -5, 1)$ é perpendicular ao plano. Ora, $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Então, $\overrightarrow{VG} = \pm \frac{4}{3}\vec{u}$.

Logo, $V = G \pm \frac{4}{3}\vec{u} = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right) \pm \left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{4}{3} \right)$.

Uma das soluções (a mais simples) é:

$$V = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right) - \left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{4}{3} \right) = (4, 8, -2)$$

Façamos a verificação:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AV} &= V - A = (4, 8, -2) - (4, 2, 4) = (0, 6, -6), \|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BV} &= V - B = (4, 8, -2) - (10, 2, -2) = (-6, 6, 0), \|\overrightarrow{BV}\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CV} &= V - C = (4, 8, -2) - (2, 0, -4) = (2, 8, 2), \|\overrightarrow{CV}\| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

A outra solução é $V = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right) + \left(\frac{4}{3}, -\frac{20}{3}, \frac{4}{3} \right) = \left(\frac{20}{3}, -\frac{16}{3}, \frac{2}{3} \right)$.

Outra maneira de encontrar o quarto vértice:

$$G = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right), V = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right) + \alpha(1, -5, 1)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AV} &= \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right) + \alpha(1, -5, 1) - (4, 2, 4) = \left(\frac{4}{3} + \alpha, -\frac{2}{3} - 5\alpha, -\frac{14}{3} + \alpha \right) \\ &= \frac{1}{3}(4 + 3\alpha, -2 - 15\alpha, -14 + 3\alpha) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AV}\| &= \frac{1}{3}\sqrt{(4+3\alpha)^2 + (-2-15\alpha)^2 + (-14+3\alpha)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{16+24\alpha+9\alpha^2+4+60\alpha+225\alpha^2+196-84\alpha+9\alpha^2} = \frac{1}{3}\sqrt{243\alpha^2+216} \end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{3}\sqrt{243\alpha^2 + 216} = 6\sqrt{2}$, ou seja $\sqrt{243\alpha^2 + 216} = 18\sqrt{2}$. Então:

$$\sqrt{243\alpha^2 + 216} = 18\sqrt{2} \iff 243\alpha^2 + 216 = 648 \iff \alpha^2 = \frac{432}{243} \iff \alpha = \pm \frac{4}{3}$$

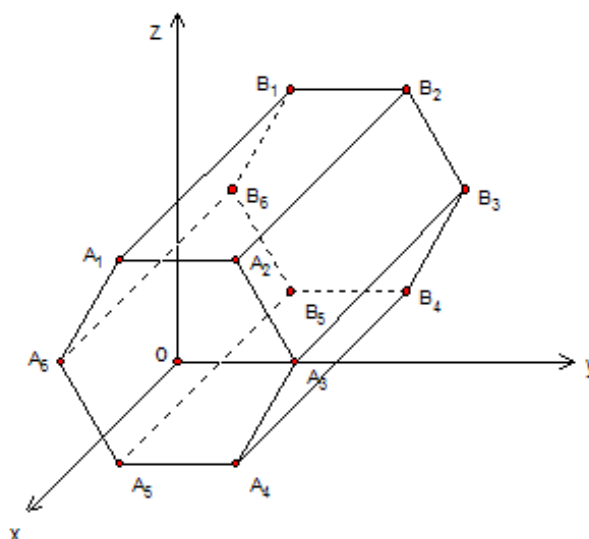
Logo, $V = \left(\frac{16}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \pm \frac{4}{3}(1, -5, 1)$.

3. A área dum triângulo equilátero, de lado l , é $l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, pelo que a área total do tetraedro regular é $4 \times l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = l^2 \sqrt{3}$. Neste caso, temos $l^2 \sqrt{3} = 72\sqrt{3}$.
4. O tetraedro é uma pirâmide, motivo pelo qual o seu volume é um terço do produto da área da base pela altura. Neste caso, temos que o volume é $\frac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 72$.

Registe-se que o volume dum tetraedro regular, de aresta l , é dado por

$$\frac{l^3 \sqrt{2}}{12}$$

Exercício 790 Considere o prisma (recto) representado na figura:



O hexágono regular $[A_1A_2A_3A_4A_5A_6]$ tem centro $(0, 0, 0)$. As coordenadas do ponto A_3 são $(0, 2, 0)$ e a base $[B_1B_2B_3B_4B_5B_6]$ está contida no plano de equação $x = -16$.

1. Mostre que $A_2 = (0, 1, \sqrt{3})$.
2. Indique as coordenadas dos vértices do prisma.
3. Indique uma equação cartesiana do plano mediador de $[A_1B_1]$.
4. Calcule a área total do prisma.
5. Calcule o volume do prisma.

6. Calcule o volume do maior cilindro de revolução contido no prisma.
7. Calcule o volume do maior elipsóide de revolução contido no prisma.

Resolução

1. $[OA_2A_3]$ é um triângulo equilátero de lado 2. Seja h a sua altura. Então, $h^2 + 1^2 = 2^2$, donde vem $h = \sqrt{3}$. Como a base $[A_1A_2A_3A_4A_5A_6]$ está contida no plano $x = 0$, temos que $A_2 = (0, 1, \sqrt{3})$.
2. $A_2 = (0, 1, \sqrt{3})$, $A_3 = (0, 2, 0)$, $A_4 = (0, 1, -\sqrt{3})$, $A_5 = (0, -1, -\sqrt{3})$, $A_6 = (0, -2, 0)$
 $A_1 = (0, -1, \sqrt{3})$, $B_2 = (-16, 1, \sqrt{3})$, $B_3 = (-16, 2, 0)$, $B_4 = (-16, 1, -\sqrt{3})$
 $B_5 = (-16, -1, -\sqrt{3})$, $B_6 = (-16, -2, 0)$, $B_1 = (-16, -1, \sqrt{3})$
3. Uma equação cartesiana do plano mediador de $[A_1B_1]$ é $x = -8$, porque a distância entre os planos que contêm as duas bases é 16 e as arestas laterais são perpendiculares às bases, uma vez que o prisma é recto.

É claro que podemos efectuar outros cálculos, para chegar à mesma conclusão:

Seja $P = (x, y, z)$ um ponto equidistante de A_1 e de B_1 . Então,

$$\begin{aligned} \overline{PA_1} = \overline{PB_1} &\iff \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x+16)^2 + (y+1)^2 + (z-\sqrt{3})^2} \\ &\iff x^2 + (y+1)^2 + (z-\sqrt{3})^2 = (x+16)^2 + (y+1)^2 + (z-\sqrt{3})^2 \\ &\iff x^2 = (x+16)^2 \iff x^2 = x^2 + 32x + 256 \\ &\iff 32x = -256 \iff x = -8 \end{aligned}$$

$$\text{Ou: } \begin{cases} \overrightarrow{A_1B_1} = B_1 - A_1 = (-16, -1, \sqrt{3}) - (0, -1, \sqrt{3}) = (-16, 0, 0) = -16(1, 0, 0) \\ M = \left(\frac{-16+0}{2}, \frac{-1-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} \right) = (-8, -1, \sqrt{3}) \end{cases}$$

Logo, uma equação do plano mediador de $[A_1B_1]$ é $1(x+8) + 0(y+1) + 0(z-\sqrt{3}) = 0$, ou seja, $x = -8$.

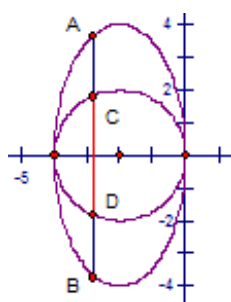
4. A área de cada face lateral é 2×16 (unidades de área). A área de $[OA_2A_3]$ é $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ (unidades de área).
 Logo, a área das bases é $6\sqrt{3}$ (unidades de área). Então, a área total do prisma é $(6 \times 32 + 2 \times 6\sqrt{3})$ (unidades de área), ou seja, $(192 + 12\sqrt{3})$ (unidades de área).
5. O volume do prisma é $6\sqrt{3} \times 16$ (unidades de volume), ou seja, $96\sqrt{3}$ (unidades de volume).
6. O maior cilindro de revolução contido no prisma é o cilindro com a mesma altura e cujas bases são circunferências inscritas nas bases do prisma. Tais circunferências têm raio $\sqrt{3}$. Então, o volume do cilindro é $\pi \times (\sqrt{3})^2 \times 16$ (unidades de volume), ou seja, 48π (unidades de volume).

7. A maior esfera contida no prisma tem raio $\sqrt{3}$, pelo que o seu volume é $\frac{4}{3} \times \pi \times (\sqrt{3})^3$ (unidades de volume), ou seja, $4\pi\sqrt{3}$ (unidades de volume). Se dilatarmos a esfera de centro no plano $x = -8$, ao longo do eixo das abcissas, mantendo fixo o referido plano de equação $x = -8$, vamos obtendo um elipsóide de revolução. Para que o elipsóide seja tangente ao plano $x = 0$, a razão da dilatação deve ser $\frac{8}{\sqrt{3}}$, pelo que o volume do elipsóide vem multiplicado por $\frac{8}{\sqrt{3}}$. Então, o volume do elipsóide é 32π (unidades de volume).

Exercício 791 Determine a área da região plana limitada pela elipse definida pelos gráficos das funções $f(x) = 2\sqrt{4 - (x+2)^2}$ e $g(x) = -2\sqrt{4 - (x+2)^2}$.

Resolução

Consideremos a elipse dada e a circunferência definida por $y = \pm\sqrt{4 - (x+2)^2}$, conforme se vê na figura seguinte.



Consideremos, sobre o gráfico de $f(x)$, um ponto A . Consideremos, ainda, a recta vertical que passa por A . Esta recta intersecta os gráficos das restantes três funções nos pontos B , C e D . Mas, $\overline{AB} = 2 \times \overline{CD}$, qualquer que seja a posição do ponto A (sobre o gráfico de f). Então, pelo princípio de Cavalieri, a área da região plana limitada pela elipse é o dobro da área do círculo. Então, a área da região plana limitada pela elipse é de 8π (unidades de área).

Suponhamos, agora, que a elipse e a circunferência rodem meia volta, em torno do eixo vertical da elipse, definindo um elipsóide de revolução e uma esfera. Consideremos o plano que passa por A e que é perpendicular ao eixo das abcissas (referencial a duas dimensões da figura). Este plano, intersecta o elipsóide segundo uma elipse e a esfera segundo um círculo, tendo-se que a área da região plana limitada pela elipse é o dobro da área do círculo. Então, como o ponto A é arbitrário, concluímos (pelo princípio de Cavalieri) que o volume da região limitada pelo elipsóide é o dobro do volume da esfera. Logo, o volume da região plana limitada pelo elipsóide é de $2 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3$ (unidades de volume), ou seja, $\frac{64}{3}\pi$ (unidades de volume).

Exercício 792 Determine a área da região plana limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Resolução

Suponhamos que $a > 0 \wedge b > 0$. Consideremos uma dilatação (ou contracção) ao longo da direcção do eixo das abcissas de razão $\frac{b}{a}$. Então, obtemos uma circunferência que limita um círculo de raio b . Logo, a área do círculo é πb^2 . Então, a área pretendida é $\pi b^2 \times \frac{a}{b}$ (unidades de área), ou

seja, πab (unidades de área). Se $a = b = r$, a elipse transforma-se numa circunferência que limita um círculo de área πr^2 .

Observemos que a dilatação considerada pode ser interpretada do seguinte modo: Temos um referencial ortonormado desenhado numa faixa plana elástica. Depois, seguramos nas duas extremidades da faixa e afastamo-las uma da outra, ficando o eixo das ordenadas fixo. Fica, assim, definida uma aplicação, à qual se dá o nome de afinidade. Esta aplicação transforma segmentos de recta paralelos em segmentos de recta paralelos.

Exercício 793 *Determine o volume da região limitada pelo elipsóide de equação $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$.*

Resolução

Se tivéssemos $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$, obteríamos uma esfera de volume $\frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$.

Considerando uma dilatação ao longo da direcção do eixo das ordenadas de razão $\frac{3}{2}$, obtemos um elipsóide que limita uma região de volume $\frac{32}{3}\pi \times \frac{3}{2} = 16\pi$. O novo elipsóide tem equação $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$.

Considerando nova dilatação ao longo da direcção do eixo das cotas de razão $\frac{c}{a}$, obtemos um elipsóide que limita uma região de volume $16\pi \times \frac{4}{2} = 32\pi$. O novo elipsóide tem equação $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1$.

Exercício 794 *Determine o volume da região limitada pelo elipsóide de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.*

Resolução

Suponhamos que $a > 0 \wedge b > 0 \wedge c > 0$.

Se tivéssemos $a = b = c$, obteríamos uma esfera de volume $\frac{4}{3}\pi b^3$.

Considerando uma dilatação (ou contracção) ao longo da direcção do eixo das ordenadas de razão $\frac{b}{a}$, obtemos um elipsóide que limita uma região de volume $\frac{4}{3}\pi a^3 \times \frac{b}{a} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$. O novo elipsóide tem equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$.

Considerando nova dilatação (ou contracção) ao longo da direcção do eixo das cotas de razão $\frac{c}{a}$, obtemos um elipsóide que limita uma região de volume $\frac{4}{3}\pi a^2 b \times \frac{c}{a} = \frac{4}{3}\pi abc$. O novo elipsóide tem equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Exercício 795 *Determine o volume dum paralelepípedo definido pela origem e pelos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -1, 1)$ e $C = (3, 2, 4)$, em que a origem e estes três pontos definem três das arestas do paralelepípedo.*

Resolução

O volume dum paralelepípedo é dado pelo produto misto dos três vectores que partem dum mesmo vértice. Não vamos considerar volumes negativos, pelo que o resultado é tomado em valor absoluto.

Recordamos que o produto externo de dois vectores pode ser calculado por um determinante simbólico.

Então,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} e_3 \\
 &= (2+3)e_1 - (1-6)e_2 + (-1-4)e_3 \\
 &= 5e_1 + 5e_2 - 5e_3 = 5(1, 0, 0) + 5(0, 1, 0) - 5(0, 0, 1) \\
 &= (5, 5, -5)
 \end{aligned}$$

Agora, calculamos o produto interno:

$$(5, 5, -5) \cdot (3, 2, 4) = 15 + 10 - 25 = 5$$

Logo, o volume do paralelepípedo é 5 (unidades de volume). É claro que estamos a considerar um referencial ortonormado.

Curiosamente, este valor pode ser encontrado por

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= -4 - 2 - 2(8-3) + 3(4+3) \\
 &= -6 - 10 + 21 = 5
 \end{aligned}$$

Como já dissemos, se o resultado der negativo, temos de considerar o valor absoluto (embora se possa definir um volume negativo).

Note-se que é mais fácil calcular este último determinante do que calcular o produto misto.

Observação

A partir de O , A e B , podemos encontrar um ponto D , de modo que $[OADB]$ seja um paralelogramo. Então, D pode ser obtido pela "regra do paralelogramo", a qual serve para somar vetores.

$$D = O + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (0, 0, 0) + (1, 2, 3) + (2, -1, 1) = (3, 1, 4)$$

A área deste paralelogramo é precisamente a norma do produto externo anteriormente calculado,

$$\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$

Se quisermos saber o valor da área dum triângulo, basta achar metade da área do paralelogramo correspondente. Neste caso, a área de $[OAB]$ é $\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

Tentemos a fórmula de Heron:

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|(2, -1, 1) - (1, 2, 3)\| = \|(1, -3, -2)\| = \sqrt{14}$$

$$s = \sqrt{14} + \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$s - \sqrt{14} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$s - \sqrt{14} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$s - \sqrt{6} = \sqrt{14} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\left(\sqrt{14} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \left(\sqrt{14} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \left(14 - \frac{6}{4}\right) \times \frac{6}{4} = \frac{75}{4}$$

Logo, a área do triângulo é $\sqrt{\frac{75}{4}}$, ou seja, $\frac{5}{2}\sqrt{3}$. O que coincide com o valor obtido acima.

Círculos e Esferas

Resolução

$$\begin{cases} x = 2 + 4\alpha \\ y = -1 - 3\alpha \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 4\alpha \\ y = -1 - 3\alpha \\ (2+4\alpha+1)^2 + (-1-3\alpha-1)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (4\alpha + 3)^2 + (-3\alpha - 2)^2 = 2 &\iff 16\alpha^2 + 24\alpha + 9 + 9\alpha^2 + 12\alpha + 4 = 2 \\ &\iff 25\alpha^2 + 36\alpha + 11 = 0 \iff \alpha = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 275}}{25} \\ &\iff \alpha = \frac{18 \pm \sqrt{49}}{25} \iff \alpha = -1 \vee \alpha = -\frac{11}{25} \end{aligned}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 4 = -2 \\ y = -1 + 3 = 2 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \frac{44}{25} = \frac{6}{25} \\ y = -1 + \frac{33}{25} = \frac{8}{25} \end{array} \right.$$
$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\left(\frac{6}{25} + 2\right)^2 + \left(\frac{8}{25} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{56}{25}\right)^2 + \left(-\frac{42}{25}\right)^2} \\ &= \frac{1}{25} \sqrt{56^2 + 42^2} = \frac{1}{25} \sqrt{4900} = \frac{14}{5}\end{aligned}$$
$$d^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \iff d^2 = 2 - \frac{49}{25} \iff d^2 = \frac{1}{25}$$

Logo, a distância pretendida é $\frac{1}{5}$.

Exercício 797 Determine a intersecção da reta r definida por $(x, y) = (2, -1) + \alpha(4, -3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, com o círculo definido por $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$.

Resolução

A diferença, relativamente ao exercício anterior, é que a intersecção é um segmento de reta em vez de dois pontos, ou seja, a intersecção é o segmento de reta de extremos $A = (-2, 2)$ e $B = (\frac{6}{25}, \frac{8}{25})$.

A resolução pode ser exactamente igual à do exercício anterior, mas pode ter algumas diferenças. Assim, teremos

$$\begin{aligned} (4\alpha + 3)^2 + (-3\alpha - 2)^2 \leq 2 &\iff 16\alpha^2 + 24\alpha + 9 + 9\alpha^2 + 12\alpha + 4 \leq 2 \\ &\iff 25\alpha^2 + 36\alpha + 11 \leq 0 \iff -1 \leq \alpha \leq -\frac{11}{25} \end{aligned}$$

Para $\alpha = -1$, temos $(x, y) = (2, -1) - (4, -3) = (-2, 2) = A$, enquanto que para $\alpha = -\frac{11}{25}$, temos $(x, y) = (2, -1) - \frac{11}{25}(4, -3) = (\frac{6}{25}, \frac{8}{25}) = B$.

E para cada α , tal que $-1 < \alpha < -\frac{11}{25}$, teremos um ponto pertencente a $[AB]$.

Exercício 798 Determine a distância do ponto $A = (3, -2)$ à reta r definida por $(x, y) = (-2, 5) + \alpha(2, -1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Resolução

Seja $B = (-2, 5)$. Então, $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 5) - (3, -2) = (-5, 7)$, pelo que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$.

Consideremos a circunferência de centro A e raio $\sqrt{74}$, de equação $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 74$.

A intersecção da reta r com a circunferência anterior é obtida por

$$\begin{cases} x = -2 + 2\alpha \\ y = 5 - \alpha \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 74 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (-2 + 2\alpha - 3)^2 + (5 - \alpha + 2)^2 &= 74 \iff (2\alpha - 5)^2 + (7 - \alpha)^2 = 74 \\ &\iff 4\alpha^2 - 20\alpha + 25 + 49 - 14\alpha + \alpha^2 = 74 \\ &\iff 5\alpha^2 - 34\alpha = 0 \iff \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{34}{5} \end{aligned}$$

É claro que um dos pontos de intersecção é $B = (-2, 5)$.

O outro ponto de intersecção é $C = (-2, 5) + \frac{34}{5}(2, -1) = (\frac{58}{5}, -\frac{9}{5})$.

$$(\frac{58}{5}, -\frac{9}{5}) - (3, -2) = (\frac{43}{5}, \frac{1}{5})$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{43^2 + 1} = \sqrt{74}$$

O ponto médio de $[BC]$ é $M = (\frac{-2 + \frac{58}{5}}{2}, \frac{5 - \frac{9}{5}}{2}) = (\frac{24}{5}, \frac{8}{5})$.

Então, $\overrightarrow{AM} = M - A = (\frac{24}{5}, \frac{8}{5}) - (3, -2) = (\frac{9}{5}, \frac{18}{5})$.

Logo, $\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{5}\sqrt{81+324} = \frac{1}{5}\sqrt{405} = \frac{9}{5}\sqrt{5}$.

Então, a distância do ponto $A = (3, -2)$ à reta r é $\frac{9}{5}\sqrt{5}$.

Observação

É fácil obter a intersecção duma reta definida por uma equação vectorial (ou por equações paramétricas) e uma circunferência (ou outra reta ou um plano) definida por uma equação cartesiana. No entanto é necessário algum cuidado, quando temos, apenas, equações vectoriais (e/ou paramétricas). Vejamos o seguinte exercício muito simples:

Exercício 799 Determine o ponto de intersecção das retas r e s definidas por $(x, y) = (1, 2) + \alpha(4, -1)$ e por $(x, y) = (3, -2) + \alpha(-2, 3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Resolução

O problema está em usar o parâmetro α em ambas as equações. Aqui, a "asneira" está na forma como foi apresentada a pergunta, mas, muitas vezes, são os alunos que utilizam a mesma letra nas duas equações.

Então, devemos ter

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x, y) = (1, 2) + \alpha(4, -1) \\ (x, y) = (3, -2) + \beta(-2, 3) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ x = 3 - 2\beta \\ y = -2 + 3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4\alpha = 3 - 2\beta \\ 2 - \alpha = -2 + 3\beta \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 2 \\ \alpha + 3\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 - 2\alpha \\ \alpha + 3 - 6\alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{7}{5} \\ \alpha = -\frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \\ y = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5} \end{cases}.$$

Exercício 800 Determine a intersecção da reta definida por $(x, y, z) = (1, 2, -1) + \alpha(2, 3, 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, com a superfície esférica definida por $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 33$.

Resolução

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -1 + 2\alpha \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 33 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -1 + 2\alpha \\ (1+2\alpha+1)^2 + (2+3\alpha-1)^2 + (-1+2\alpha-2)^2 = 33 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = -1 + 2\alpha \\ (2\alpha+2)^2 + (3\alpha+1)^2 + (2\alpha-3)^2 = 33 \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $4\alpha^2 + 8\alpha + 4 + 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 - 33 = 0$.

Logo, $17\alpha^2 + 2\alpha - 19 = 0$, donde vem $\alpha = 1 \vee \alpha = -\frac{19}{17}$.

Então,

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{21}{17} \\ y = -\frac{23}{17} \\ z = -\frac{55}{17} \\ \alpha = -\frac{19}{17} \end{cases}$$

Logo, a reta intersecta a superfície esférica em dois pontos: $I_1 = (3, 5, 1)$ e $I_2 = (-\frac{21}{17}, -\frac{23}{17}, -\frac{55}{17})$.

Observação

A intersecção da esfera definida por $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 \leq 33$ com a reta de equação $(x, y, z) = (1, 2, -1) + \alpha(2, 3, 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é o segmento de reta de extremos $I_1 = (3, 5, 1)$ e $I_2 = (-\frac{21}{17}, -\frac{23}{17}, -\frac{55}{17})$.

A intersecção da esfera aberta definida por $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 < 33$ com a reta de equação $(x, y, z) = (1, 2, -1) + \alpha(2, 3, 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é o segmento de reta de extremos $I_1 = (3, 5, 1)$ e $I_2 = (-\frac{21}{17}, -\frac{23}{17}, -\frac{55}{17})$ privado dos extremos (segmento aberto).

Exercício 801 Determine a intersecção do plano definido por $2x + 3y - z = 5$, com a superfície esférica definida por $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 3$.

Resolução

Resolvendo a equação do plano em ordem a z , obtemos $z = 2x + 3y - 5$.

Então, $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (2x+3y-3)^2 = 3$.

Logo, $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + 4x^2 + 9y^2 + 9 + 12xy - 12x - 18y - 3 = 0$.

Logo, $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 16x - 16y + 11 = 0$.

Resolvendo a equação anterior em ordem a y , obtemos $y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}x \pm \frac{1}{10}\sqrt{-14x^2 + 64x - 46}$.

Então, devemos ter $-14x^2 + 64x - 46 \geq 0$, ou seja, $\frac{16}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{95} \leq x \leq \frac{16}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{95}$.

Resolvendo a equação em ordem a x , obtemos $x = -\frac{6}{5}y + \frac{8}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{-14y^2 - 16y + 9}$.

Então, devemos ter $-14y^2 - 16y + 9 \geq 0$, ou seja, $-\frac{4}{7} - \frac{1}{14}\sqrt{190} \leq y \leq -\frac{4}{7} + \frac{1}{14}\sqrt{190}$.

É claro que não apresentámos os cálculos que permitem chegar às expressões anteriores.

Este exercício mostra que é bastante difícil obter a intersecção dum plano com uma superfície esférica, embora essa intersecção seja o conjunto vazio, um ponto ou uma circunferência. É claro que há casos fáceis, por exemplo, quando o plano é perpendicular a um dos eixos coordenados.

Exercício 802 Determine a intersecção da reta definida por $2x + 3y = 5$ com a circunferência de equação $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 8$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = \frac{5-2x}{3} \\ (x-3)^2 + (\frac{5-2x}{3} + 1)^2 = 8 \end{cases} \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + \left(\frac{8-2x}{3}\right)^2 = 8 \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + \frac{64 - 32x + 4x^2}{9} = 8 \\ &\Rightarrow 9x^2 - 54x + 81 + 64 - 32x + 4x^2 = 72 \\ &\Rightarrow 13x^2 - 86x + 73 = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \vee x = \frac{73}{13} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{73}{13} \\ y = \frac{5 - \frac{146}{13}}{3} = -\frac{27}{13} \end{cases}$$

Logo, a reta intersecta a circunferência nos pontos $I_1 = (1, 1)$ e $I_2 = (\frac{73}{13}, -\frac{27}{13})$.

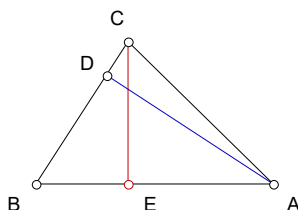
Capítulo 43

Um simples triângulo, mas muito para aprender

Exemplo 803 *Determine os senos dos ângulos internos dum triângulo cujos lados medem 5 cm , 6 cm e 7 cm.*

Se conhecermos a lei dos cosenos e a lei dos senos:

Consideremos a figura seguinte:



Façamos $a = 5, b = 6, c = 7$. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} = \frac{7}{\sin C} = 2R$$

Pela lei dos cosenos:

$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \cos C \iff 60 \cos C = 36 + 25 - 49 \iff \cos C = \frac{12}{60} \iff \cos C = \frac{1}{5}$$

Então, $\sin C = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$. E agora, temos:

$$\begin{cases} \sin B = \frac{6}{7} \sin C = \frac{6}{7} \times \frac{2}{5}\sqrt{6} = \frac{12}{35}\sqrt{6} \\ \sin A = \frac{5}{7} \sin C = \frac{5}{7} \times \frac{2}{5}\sqrt{6} = \frac{2}{7}\sqrt{6} \\ 2R = \frac{7}{\sin C} = 7 \times \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{35}{2\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{12} \end{cases}$$

Na última igualdade indicada, $2R$ é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Se conhecermos a lei dos cosenos, mas não conhecermos a lei dos senos:

Sejam $a = 5, b = 6, c = 7$. Pela lei dos cossenos, temos:

$$7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \cos C \iff 60 \cos C = 36 + 25 - 49 \iff \cos C = \frac{12}{60} \iff \cos C = \frac{1}{5}$$

Então, $\sin C = \frac{2}{5}\sqrt{6}$.

Aplicando outra vez a lei dos cossenos:

$$6^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \times 7 \times 5 \cos B \iff 70 \cos B = 49 + 25 - 36 \iff \cos B = \frac{38}{70} \iff \cos C = \frac{19}{35}$$

Então, $\sin B = \sqrt{1 - \frac{361}{1225}} = \sqrt{\frac{864}{1225}} = \frac{12}{35}\sqrt{6}$.

E, finalmente, temos:

$$5^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \times 7 \times 6 \cos A \iff 84 \cos A = 49 + 36 - 25 \iff \cos B = \frac{60}{84} \iff \cos C = \frac{5}{7}$$

Então, $\sin A = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$.

Se conhecermos a lei dos senos e algumas fórmulas trigonométricas, mas não a lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{\sin A} = \frac{6}{\sin B} \\ \frac{5}{\sin A} = \frac{7}{\sin C} \end{array} \right. &\implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \sin(A + B) = 7 \sin A \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \sin A \cos B + 5 \sin B \cos A = 7 \sin A \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \sin A \cos B + 6 \sin A \cos A = 7 \sin A \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \cos B + 6 \cos A = 7 \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} 5 \sin B = 6 \sin A \\ 5 \cos B = 7 - 6 \cos A \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} 25 \sin^2 B = 36 \sin^2 A \\ 25 \cos^2 B = 49 - 84 \cos A + 36 \cos^2 A \end{array} \right. \\ &\implies 25 = 36 + 49 - 84 \cos A \\ &\implies \cos A = \frac{60}{84} \\ &\implies \cos A = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

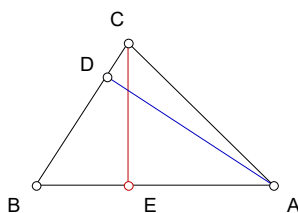
E, agora, temos $\sin A = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$.

Então, $\sin B = \frac{6 \sin A}{5} = \frac{12}{35}\sqrt{6}$, $\sin C = \frac{7 \sin A}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$

Se não conhecermos a lei dos cossenos, nem a lei dos senos:

Vamos resolver o problema anterior, usando coordenadas cartesianas:

Sejam $B = (0, 0)$, $A = (7, 0)$ e $C = (x, y)$.



Pretendemos determinar C , de modo que as distâncias de C aos pontos A e B sejam iguais a 6 e a 5, respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \\ \sqrt{(x-7)^2 + y^2} = 6 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - 14x + 49 + y^2 = 36 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 14x + 49 = 36 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ 25 - 14x + 49 = 36 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ 14x = 38 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} y^2 = 25 - \frac{361}{49} \\ x = \frac{19}{7} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y^2 = \frac{864}{49} \\ x = \frac{19}{7} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = \pm \frac{12\sqrt{6}}{7} \\ x = \frac{19}{7} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Então, podemos fazer $C = \left(\frac{19}{7}, \frac{12\sqrt{6}}{7}\right)$.

Logo, $\sin B = \frac{\frac{12\sqrt{6}}{7}}{5} = \frac{12}{35}\sqrt{6}$ e $\sin A = \frac{\frac{12\sqrt{6}}{7}}{6} = \frac{2}{7}\sqrt{6}$.

O cálculo de $\sin C$ é ligeiramente mais complicado:

A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{1}{2} \times 7 \times \frac{12\sqrt{6}}{7} = 6\sqrt{6}$.

Então, considerando que a base do triângulo é 5, temos $\frac{1}{2} \times 5h = 6\sqrt{6}$, donde se conclui que $h = \frac{12}{5}\sqrt{6}$, pelo que $\sin C = \frac{\frac{12}{5}\sqrt{6}}{6} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$.

Exemplo 804 Determine os comprimentos das medianas do triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm.

Resolução

Sejam M_1 o ponto médio de $[AB]$, M_2 o ponto médio de $[AC]$ e M_3 o ponto médio de $[BC]$. Consideremos o triângulo $[ACM_1]$. Ora, $\overline{AC} = 6$, $\overline{AM_1} = \frac{7}{2}$, pelo que, aplicando o Teorema de Carnot, obtemos:

$$1. \overline{CM_1}^2 = 6^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \times 6 \times \frac{7}{2} \cos A = 36 + \frac{49}{4} - 42 \times \frac{5}{7} = 36 + \frac{49}{4} - 30 = \frac{73}{4}$$

$$\text{Logo, } \overline{CM_1} = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

$$2. \overline{BM_2}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \cos C = 25 + 9 - 30 \times \frac{1}{5} = 28. \text{ Logo, } \overline{CM_2} = 2\sqrt{7}.$$

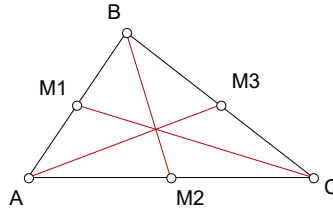
$$3. \overline{AM_3}^2 = 7^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times 7 \times \frac{5}{2} \cos B = 49 + \frac{25}{4} - 35 \times \frac{19}{35} = \frac{145}{4}. \text{ Logo, } \overline{CM_3} = \frac{\sqrt{145}}{2}.$$

Exemplo 805 Consideremos um triângulo $[ABC]$ de lados a, b, c . Sejam M_1 o ponto médio de $[AB]$, M_2 o ponto médio de $[AC]$ e M_3 o ponto médio de $[BC]$. Então:

$$\begin{cases} \overline{CM_1}^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \\ \overline{BM_2}^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \\ \overline{AM_3}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \end{cases}$$

Resolução

Consideremos o seguinte triângulo:



Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos $[BCM_1]$ e $[ABC]$, obtemos:

$$\begin{cases} \overline{CM_1}^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{ac}{2} \cos B = a^2 + \frac{c^2}{4} - ac \cos B \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \end{cases}$$

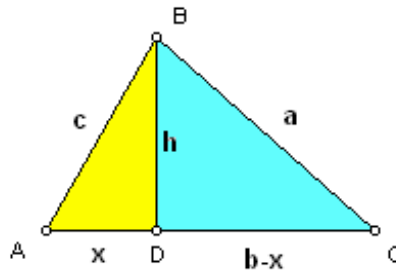
$$\text{Logo, } \overline{CM_1}^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2} = \frac{4a^2 + c^2 + 2b^2 - 2a^2 - 2c^2}{4} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Analogamente, se mostram as duas outras igualdades.

Exemplo 806 Deduza a lei dos senos, a partir da área do triângulo de lados a, b, c .

Resolução

Consideremos o seguinte triângulo:



Na figura anterior, vemos que $h = c \sin A$, pelo que a área do triângulo é $\frac{bh}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$.

Analogamente se mostrava que a área do triângulo pode ser dada por $\frac{ab \sin C}{2}$ e por $\frac{ac \sin B}{2}$.

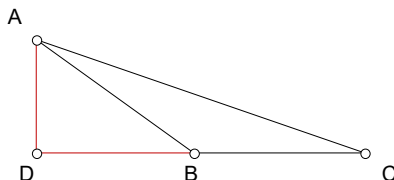
Logo, $ab \sin C = ac \sin B = bc \sin A$.

Dividindo por abc , obtemos $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, ou seja, a lei dos senos.

Está, assim, demonstrada a lei dos senos (versão curta). É claro que as fracções anteriores podem ser invertidas:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Observe-se que as fórmulas acima, que dão a área do triângulo, são válidas mesmo que o triângulo não seja acutângulo, devido ao facto de ângulos suplementares terem o mesmo seno:



Sejam $h = \overline{AD}$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$. Então, $h = c \sin \widehat{ABD} = c \sin \widehat{ABC} = c \sin B$.

Então, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\frac{ah}{2} = \frac{ac}{2} \sin B$.

E analogamente para os restantes casos.

Então, $\frac{ah}{2} = \frac{ac}{2} \sin B = \frac{ab}{2} \sin C = \frac{bc}{2} \sin A$

Logo, $ac \sin B = ab \sin C = bc \sin A$, donde vem

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Exemplo 807 Deduza a lei dos cosenos, partindo da lei dos senos.

Resolução

Consideremos, num triângulo $[ABC]$ de lados a, b, c , a lei dos senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Então, $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$. Ora, $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$. Então:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin A \cos B + \sin B \cos A} = \frac{c}{\sin A \cos B + \frac{b \sin A}{a} \cos A}$$

Da igualdade anterior vem:

$$a = \frac{c}{\cos B + \frac{b}{a} \cos A}$$

Logo, $c = a \cos B + b \cos A$.

Esta última igualdade tem uma interpretação geométrica óbvia: No caso dum triângulo acutângulo, a altura relativa ao vértice C divide a base em dois segmentos de comprimentos $a \cos B$ e $b \cos A$.

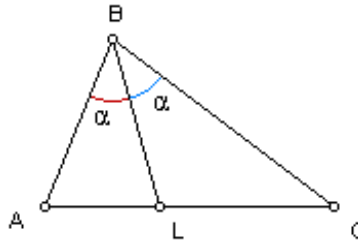
Então:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a \sin B = b \sin A \\ a \cos B = c - b \cos A \end{cases} &\implies \begin{cases} a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A \\ a^2 \cos^2 B = c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \end{cases} \\ &\implies a^2 \sin^2 B + a^2 \cos^2 B = b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ &\implies a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) = b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &\implies a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

Exemplo 808 Considere um triângulo $[ABC]$, com $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm e $\overline{BC} = 5$ cm. Seja L o ponto de intersecção da bissetriz do ângulo B com o lado $[AC]$. Determine \overline{AL} , \overline{LC} , $\cos B$, $\sin \frac{B}{2}$, $\sin L$ e \overline{BL} .

Resolução

Consideremos o seguinte triângulo:



Seja $\alpha = \frac{B}{2}$.

Aplicando a lei dos senos, aos triângulos $[ABL]$ e $[BCL]$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin L} = \frac{\overline{BL}}{\sin A} \\ \frac{\overline{LC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\sin L} = \frac{\overline{BL}}{\sin C} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \alpha}{\sin L} \\ \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \alpha}{\sin L} \end{cases} \implies \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}}$$

Então, fazendo $\overline{AL} = x$, temos:

$$\frac{x}{7} = \frac{6-x}{5} \iff 5x = 42 - 7x \iff 12x = 42 \iff x = \frac{7}{2}. \text{ Logo, } 6 - x = \frac{7}{2}.$$

Então, $\overline{AL} = \frac{7}{2}$ cm e $\overline{LC} = \frac{5}{2}$ cm.

Apliquemos a lei dos cosenos, ao triângulo $[ABC]$:

$$6^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos B \iff \cos B = \frac{25 + 49 - 36}{70} \iff \cos B = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}$$

Logo, $\cos(2\alpha) = \frac{19}{35}$.

$$\text{Então, } \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{19}{35}}{2}} = \sqrt{\frac{54}{70}} = \sqrt{\frac{27}{35}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$$

Aplicando a lei dos senos, ao triângulo $[ABC]$, temos:

$$\frac{5}{\sin A} = \frac{6}{\sin(2\alpha)} \iff \frac{5}{\sin A} = \frac{6}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \iff \sin A = \frac{5}{3} \sin \alpha \cos \alpha$$

Substituindo em $\frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BL}}{\sin A}$, obtemos:

$$\frac{\frac{7}{2}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BL}}{\frac{5}{3} \sin \alpha \cos \alpha} \iff \frac{7}{2} = \frac{\overline{BL}}{\frac{5}{3} \cos \alpha}$$

$$\text{Logo, } \overline{BL} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{3} \cos \alpha = \frac{35}{6} \times \frac{3\sqrt{105}}{35} = \frac{\sqrt{105}}{2}.$$

Calculemos $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{19}{35}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{70}} = \frac{4}{\sqrt{70}} = \frac{2\sqrt{70}}{35}$$

De $\frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin L}$, vem

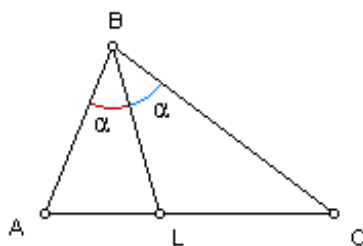
$$\sin L = \frac{7 \sin \alpha}{\overline{AL}} = \frac{7 \times \frac{2\sqrt{70}}{35}}{\frac{7}{2}} = 7 \times \frac{2}{7} \times \frac{2\sqrt{70}}{35} = \frac{4\sqrt{70}}{35}$$

Exemplo 809 Consideremos um triângulo $[ABC]$ de lados a, b, c . Seja L o ponto de intersecção da bissetriz do ângulo B com o lado $[AC]$. Então:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}} \wedge \overline{AL} = \frac{bc}{a+c}, \overline{LC} = \frac{ab}{a+c} \wedge \overline{BL} = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)}}{a+c}$$

Resolução

Consideremos o seguinte triângulo:



Aplicando a lei dos senos, aos triângulos $[ABL]$ e $[BCL]$, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin L} = \frac{\overline{BL}}{\sin A} \\ \frac{\overline{LC}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\sin L} = \frac{\overline{BL}}{\sin C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \alpha}{\sin L} \\ \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \alpha}{\sin L} \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}}$$

Então, fazendo $\overline{AL} = x$, temos:

$$\frac{x}{c} = \frac{b-x}{a} \iff ax = bc - cx \iff (a+c)x = bc \iff x = \frac{bc}{a+c}$$

Logo:

$$x = \frac{bc}{a+c} \wedge b-x = b - \frac{bc}{a+c} = \frac{ab}{a+c}$$

Aplicamos a lei dos cosenos, ao triângulo $[ABC]$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \iff \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Logo, $\cos(2\alpha) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Então:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{2}} = \sqrt{\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{4ac}} = \sqrt{\frac{(a+c)^2 - b^2}{4ac}}$$

Aplicando a lei dos senos ao triângulo $[ABC]$, temos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin(2\alpha)} \iff \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \iff \sin A = \frac{2a}{b} \sin \alpha \cos \alpha$$

Substituindo em $\frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BL}}{\sin A}$, obtemos:

$$\frac{\frac{bc}{a+c}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{BL}}{\frac{2a}{b} \sin \alpha \cos \alpha} \iff \frac{bc}{a+c} = \frac{\overline{BL}}{\frac{2a}{b} \cos \alpha}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \overline{BL} &= \frac{2a}{b} \times \frac{bc}{a+c} \cos \alpha = \frac{2ac}{a+c} \sqrt{\frac{(a+c)^2 - b^2}{4ac}} = \frac{2}{2(a+c)} \sqrt{\frac{a^2 c^2 (a+c+b)(a+c-b)}{ac}} \\ &= \frac{\sqrt{ac(a+c+b)(a-b+c)}}{a+c} \end{aligned}$$

Se quisermos, podemos calcular $\sin \alpha$ e $\sin L$:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{2}} = \sqrt{\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{4ac}} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b + a - c)(b - a + c)}{4ac}}\end{aligned}$$

De $\frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin L}$, vem:

$$\sin L = \frac{c \sin \alpha}{bc} = \frac{(a + c) \sin \alpha}{b} = \frac{a + c}{2b} \sqrt{\frac{(b + a - c)(b - a + c)}{4ac}}$$

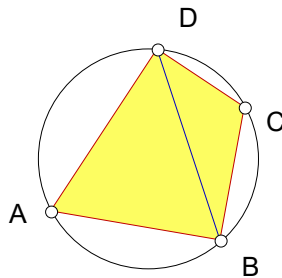
Proposição 810 *Teorema de Brahmagupta*

Consideremos, numa circunferência, quatro pontos A, B, C, D , por esta ordem. Sejam $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Então, a área de $[ABCD]$ é $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

Demonstração

Consideremos a seguinte figura, onde estão representados os quatro pontos A, B, C, D , pertencentes a uma circunferência:



Sejam $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$, $d = \overline{DA}$, $s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{P}{2}$.

Os ângulos A e C são suplementares.

Então, $\sin A = \sin C$, $\cos A = -\cos C$.

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $[BCD]$, temos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CD} \cos C = b^2 + c^2 - 2bc \cos C = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $[ABD]$, temos:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{DA} \cos A = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$

Logo, $b^2 + c^2 + 2bc \cos A = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$, donde se conclui que:

$$2(bc + ad) \cos A = a^2 + d^2 - b^2 - c^2$$

Seja K , a área do quadrilátero $[ABCD]$. Então, K é a soma das áreas dos dois triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, ou seja,

$$K = \frac{ad \sin A}{2} + \frac{bc \sin C}{2} = \frac{ad \sin A + bc \sin A}{2} = \frac{(ad + bc) \sin A}{2}$$

Então, $4K = 2(ad + bc) \sin A$.

Logo,

$$\begin{cases} 4(ad + bc)^2 \cos^2 A = (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ 4(ad + bc)^2 \sin^2 A = 16K^2 \end{cases}$$

Somando, membro a membro, as duas igualdades anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} 16K^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= 4(ad + bc)^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= 4(ad + bc)^2 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} 16K^2 &= 4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) \\ &= [(a + d)^2 - (b - c)^2] [(b + c)^2 - (a - d)^2] \\ &= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d) \\ &= (a + b + c + d - 2a)(a + b + c + d - 2b)(a + b + c + d - 2c)(a + b + c + d - 2d) \\ &= (P - 2a)(P - 2b)(P - 2c)(P - 2d) \end{aligned}$$

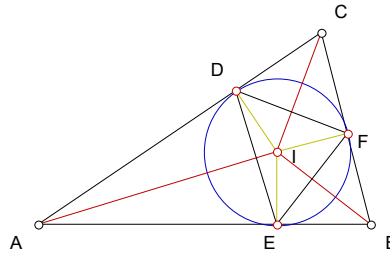
Logo,

$$K^2 = \left(\frac{P - 2a}{2}\right) \left(\frac{P - 2b}{2}\right) \left(\frac{P - 2c}{2}\right) \left(\frac{P - 2d}{2}\right) = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

Logo,

$$K = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

Exemplo 811 *O raio da circunferência inscrita num triângulo*



Sejam $P = a + b + c$ e $s = \frac{P}{2}$. Seja I o incentro do triângulo $[ABC]$.

A área do triângulo $[ABC]$ é a soma das áreas dos triângulos $[ACI]$, $[BCI]$ e $[ABI]$, os quais têm a mesma altura r , que é o raio da circunferência inscrita no triângulo.

Logo, K , a área do triângulo $[ABC]$, é dada por $K = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)r = sr$.

Mas, pela fórmula de Heron, a área do triângulo é $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Logo, r , o raio da circunferência inscrita num triângulo de lados a, b, c , é

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Proposição 812 *A fórmula de Heron, ela mesma...*

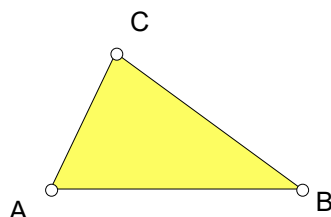
Consideremos um triângulo $[ABC]$, com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$. Seja $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Então, a área do triângulo é $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Demonstração

Para obtermos a fórmula de Heron, basta-nos partir do teorema de Brahmagupta e fazer $d = 0$, obtendo-se para a área dum triângulo de lados a, b, c , o valor $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Outra demonstração



Aplicando a lei dos cosenos, ao triângulo $[ABC]$, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \text{ donde se conclui que } 2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2.$$

A área do triângulo $[ABC]$ é $K = \frac{ab}{2} \sin C = \frac{bc}{2} \sin A$. Então:

$$\begin{cases} 4b^2c^2 \sin^2 A = 16K^2 \\ 4b^2c^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2 \end{cases} \implies 4b^2c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 + 16K^2$$

Então:

$$\begin{aligned} 16K^2 &= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\ &= (b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(a-b+c) \\ &= (a+b+c)(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c) \\ &= P(P-2a)(P-2b)(P-2c)(P-2d) \end{aligned}$$

com $P = a + b + c$.

Então, fazendo $s = \frac{P}{2}$, temos:

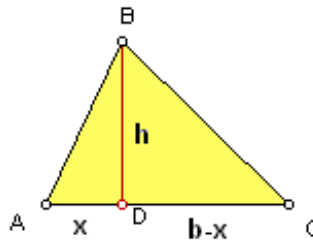
$$K^2 = \frac{P(P-2a)(P-2b)(P-2c)(P-2d)}{16} = \frac{P}{2} \times \frac{P-2a}{2} \times \frac{P-2b}{2} \times \frac{P-2c}{2} = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

E, finalmente, vem:

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Mais uma demonstração da fórmula de Heron

Recordamos a demonstração apresentada no quinto capítulo:



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = (b-x)^2 + h^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} c^2 = x^2 + h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c^2 - x^2 = h^2 \\ a^2 = b^2 - 2bx + c^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} h = \pm \sqrt{(c+x)(c-x)} \\ x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $h > 0$, temos $h = \sqrt{(c+x)(c-x)}$, com $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

Logo,

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(c+x)(c-x)} = \sqrt{\left(c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right) \left(c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 2bc - a^2}{2b} \times \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2b}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{2b} \times \frac{a^2 - (b-c)^2}{2b}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b}} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2b} \end{aligned}$$

Então, a área do triângulo é

$$\begin{aligned}
 \frac{bh}{2} &= \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{4} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}
 \end{aligned}$$

Se representarmos o semiperímetro por s , então a área do triângulo de lados a, b, c é dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Capítulo 44

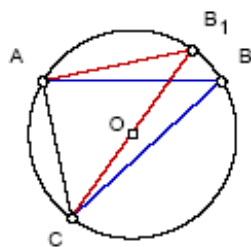
Geometria no Plano

Proposição 813 (*Lei dos senos*)

Num triângulo $[ABC]$ verifica-se $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Demonstração

Consideremos a circunferência circunscrita a $[ABC]$, de raio R , e diâmetro $[CB_1]$.



Como o triângulo $[AB_1C]$ é rectângulo em A , temos

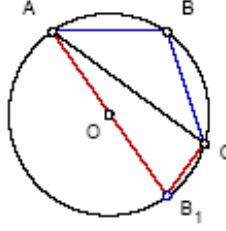
$$\sin B = \sin B_1 = \frac{\overline{AC}}{2R} = \frac{b}{2R}$$

Analogamente, $\sin A = \frac{a}{2R}$ e $\sin C = \frac{c}{2R}$. Então,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Neste exemplo, considerámos que o centro da circunferência circunscrita ao triângulo não pertencia a nenhum dos lados $[AB]$ e $[BC]$. Se tal acontecesse, não era necessário considerar o ponto B_1 , para calcular $\sin B$.

O caso é diferente, se o ângulo B for obtuso; em tal caso, considera-se o ângulo suplementar AB_1C , o qual tem o mesmo seno que o ângulo ABC :



Então, também neste caso, temos $\sin B = \sin B_1 = \frac{\overline{AC}}{2R} = \frac{b}{2R}$.

Definição 814 *Ceviana é qualquer segmento de recta definido por um vértice dum triângulo e por um ponto do lado oposto (distinto dos extremos).*

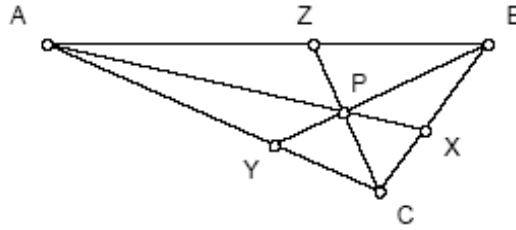
Proposição 815 (Teorema de Ceva)

Num triângulo as cevianas $[AX]$, $[BY]$, $[CZ]$ são concorrentes se e só se $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1$.

Demonstração

Começemos por observar que $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}$ representa o único número real λ , tal que $\overrightarrow{BX} = \lambda \overrightarrow{XC}$, pelo que λ pode representar um número positivo ou negativo (ou seja, para cada direcção, podemos definir um sentido, de modo a considerarmos "distâncias" positivas ou negativas).

Suponhamos que as três cevianas são concorrentes num ponto P .



Então, $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} = \frac{\text{ar}[ABX]}{\text{ar}[ACX]} = \frac{\text{ar}[PBX]}{\text{ar}[PCX]} = \frac{\text{ar}[ABX] - \text{ar}[PBX]}{\text{ar}[ACX] - \text{ar}[PCX]} = \frac{\text{ar}[APB]}{\text{ar}[APC]}$.

Analogamente, temos $\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = \frac{\text{ar}[CPB]}{\text{ar}[APB]}$ e $\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\text{ar}[CPA]}{\text{ar}[CPB]}$.

Então:

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\text{ar}[APB]}{\text{ar}[APC]} \times \frac{\text{ar}[CPB]}{\text{ar}[APB]} \times \frac{\text{ar}[CPA]}{\text{ar}[CPB]} = 1$$

Reciprocamente, suponhamos que $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1$. Seja P , o ponto de intersecção das cevianas $[AX]$ e $[BY]$. Seja $[CZ']$, a terceira ceviana que passa por P .

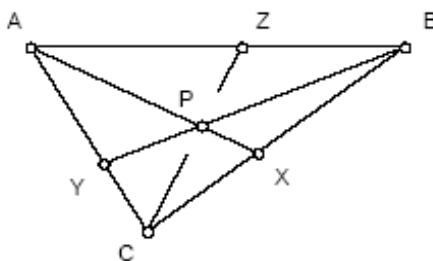
$$\text{Então, } \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ'}}{\overrightarrow{Z'B}} = 1.$$

Logo, $\frac{\overrightarrow{AZ'}}{\overrightarrow{Z'B}} = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}$, donde se conclui que $Z' = Z$ e que as três cevianas $[AX]$, $[BY]$ e $[CZ]$ são concorrentes em P .

Proposição 816 *As medianas dum triângulo dividem-no em seis triângulos com áreas iguais.*

Demonstração

Sejam X, Y, Z os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$, da figura seguinte:



Então, $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{ZB}$, $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{YC}$, $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{XB}$. Logo, $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1 \times 1 \times 1 = 1$, pelo que as três medianas se intersectam num ponto P .

Os triângulos $[APY]$ e $[CPY]$ têm a mesma área, porque têm a mesma altura e bases iguais ($\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{YC}$). Analogamente para os triângulos $[CPX]$ e $[BPX]$ e para $[APZ]$ e $[BPZ]$. E o mesmo acontece com os triângulos $[ABY]$ e $[BCY]$, com $[ABX]$ e $[ACX]$ e, ainda, com $[ACZ]$ e $[BCZ]$.

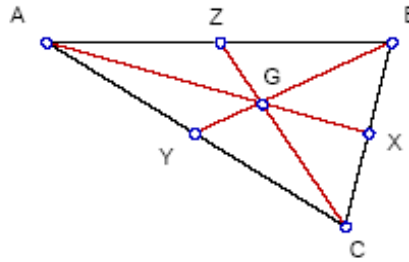
Sejam r , a área comum dos triângulos $[APY]$ e $[CPY]$, s , a área comum de $[CPX]$ e $[BPX]$ e t , a área comum de $[APZ]$ e $[BPZ]$.

Então, $t + 2r = t + 2s$, pelo que $r = s$. Analogamente, $s = t$, pelo que a demonstração está terminada.

Proposição 817 *As medianas dum triângulo trissectam-se.*

Demonstração

Consideremos as medianas $[AX]$, $[BY]$ e $[CZ]$ dum triângulo $[ABC]$.

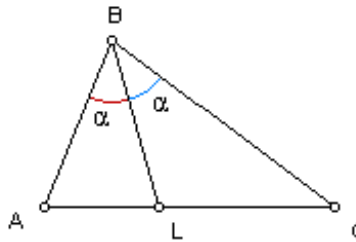


Seja G , o ponto de intersecção das três medianas e consideremos os triângulos $[CGY]$ e $[CGB]$. Estes triângulos têm a mesma altura (referente ao vértice C) e, pela proposição anterior, a área do segundo triângulo é o dobro da área do primeiro. Então, $\overline{GB} = 2 \times \overline{GY}$, acontecendo o mesmo com as duas outras medianas, como se pretendia demonstrar.

Proposição 818 *A bissetriz dum ângulo interno dum triângulo divide o lado oposto em dois segmentos directamente proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração

Consideremos, num triângulo $[ABC]$, a bissetriz do ângulo B .



Aplicando a lei dos senos aos triângulos $[ABL]$ e $[BCL]$ da figura anterior, obtemos:

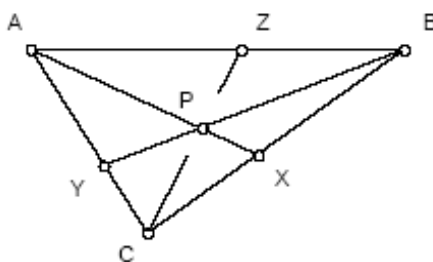
$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{ALB}} = \frac{\overline{AL}}{\sin \alpha} \wedge \frac{\overline{BC}}{\sin \widehat{BLC}} = \frac{\overline{LC}}{\sin \alpha}$$

Como $\sin \widehat{ALB} = \sin \widehat{BLC}$, então $\frac{\sin \alpha}{\sin \widehat{ALB}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{BC}}$, como se pretendia.

Proposição 819 *As bissetrizes dos ângulos internos dum triângulo intersectam-se num ponto.*

Demonstração

Consideremos as bissetrizes do triângulo $[ABC]$, da figura seguinte.



Seja P , o ponto de intersecção das bissectrizes AX e BY .

Pretendemos mostrar que a bissectriz CZ passa por P .

Como as bissectrizes são cevianas, basta-nos provar que $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = 1$.

Pela proposição anterior, temos $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YC}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} \\ \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \\ \frac{\overrightarrow{ZB}}{\overrightarrow{BX}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AB}} \\ \frac{\overrightarrow{CX}}{\overrightarrow{XA}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} \end{array} \right.$. Então:

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} \times \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AB}} \times \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = 1.$$

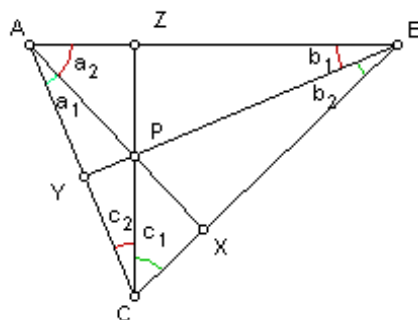
Logo, as bissectrizes intersectam-se num ponto (P).

Uma demonstração mais fácil consiste na interpretação geométrica da bissectriz dum ângulo: conjunto de pontos do plano que estão equidistantes dos lados do ângulo.

Proposição 820 *As rectas que contêm as três alturas dum triângulo intersectam-se num ponto (ortocentro).*

Demonstração

Consideremos o seguinte triângulo acutângulo $[ABC]$:



Então:

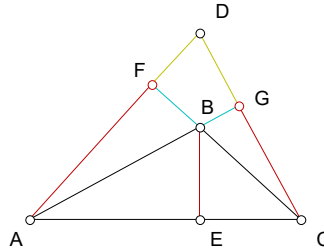
$$\begin{cases} a_1 + c_2 + c_1 = \frac{\pi}{2} \\ c_2 + c_1 + b_2 = \frac{\pi}{2} \\ a_1 + a_2 + b_1 = \frac{\pi}{2} \\ a_1 + a_2 + c_2 = \frac{\pi}{2} \\ b_1 + b_2 + c_1 = \frac{\pi}{2} \\ a_2 + b_1 + b_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_2 \\ b_1 = c_2 \\ a_2 = c_1 \end{cases} ; \begin{cases} \sin a_1 = \frac{\overline{CX}}{\overline{AC}} \\ \sin a_2 = \frac{\overline{BX}}{\overline{AB}} \\ \sin b_1 = \frac{\overline{AY}}{\overline{AB}} \\ \sin b_2 = \frac{\overline{YC}}{\overline{BC}} \\ \sin c_1 = \frac{\overline{BZ}}{\overline{BC}} \\ \sin c_2 = \frac{\overline{AZ}}{\overline{AC}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{CX} = \overline{AC} \sin a_1 \\ \overline{BX} = \overline{AB} \sin a_2 \\ \overline{AY} = \overline{AB} \sin b_1 \\ \overline{YC} = \overline{BC} \sin b_2 \\ \overline{BZ} = \overline{BC} \sin c_1 \\ \overline{AZ} = \overline{AC} \sin c_2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} &= \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \times \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \times \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AB} \sin a_2}{\overline{AC} \sin a_1} \times \frac{\overline{BC} \sin b_2}{\overline{AB} \sin b_1} \times \frac{\overline{AC} \sin c_2}{\overline{BC} \sin c_1} \\ &= \frac{\sin a_2}{\sin a_1} \times \frac{\sin b_2}{\sin b_1} \times \frac{\sin c_2}{\sin c_1} = \frac{\sin a_2}{\sin b_2} \times \frac{\sin b_2}{\sin c_2} \times \frac{\sin c_2}{\sin a_2} = 1 \end{aligned}$$

Logo, as três alturas intersectam-se num ponto (chamado ortocentro).

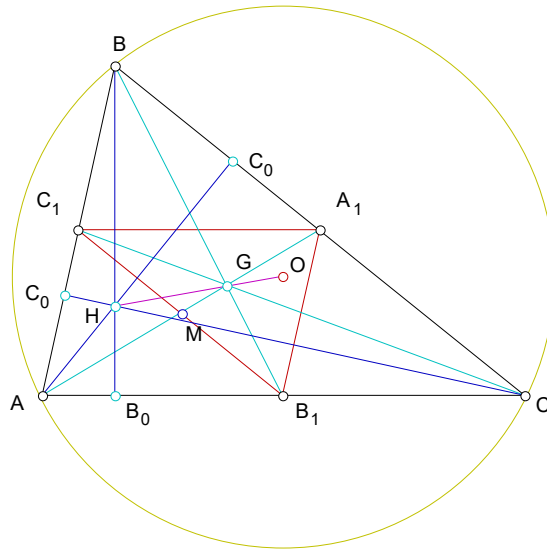
No caso do triângulo ser rectângulo, as três alturas intersectam-se no vértice do ângulo recto. Se o triângulo for obtusângulo, as rectas que contêm as alturas intersectam-se num ponto, sendo a demonstração imediata, uma vez que se considera um triângulo com todos os ângulos agudos e cujas alturas contêm as alturas do primeiro triângulo (observe a figura seguinte, com atenção).



Proposição 821 *O baricentro, o ortocentro e o circuncentro dum triângulo são pontos colineares.*

Demonstração

Consideremos a figura seguinte:



Sejam A_1, B_1, C_1 , os pontos médios de $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$.

Sejam H, G, O , o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de $[ABC]$.

Note-se que O também é o ortocentro de $[A_1B_1C_1]$.

Comecemos por observar que o quadrilátero $[AC_1A_1B_1]$ é um paralelogramo, pelo que as suas diagonais se bissectam. Seja M o seu ponto de intersecção.

Então, $\overline{AM} = \overline{MA_1}$, $\overline{C_1M} = \overline{MB_1}$ e a recta AA_1 contém $[AA_1]$ e $[MA_1]$ que são medianas dos triângulos $[ABC]$ e $[A_1B_1C_1]$.

Analogamente, para as rectas BB_1 e CC_1 . Logo, G é o baricentro dos triângulos $[ABC]$ e $[A_1B_1C_1]$.

Consideremos os triângulos $[AHG]$ e $[A_1OG]$. As rectas AH e OA_1 são perpendiculares a BC , pelo que são paralelas.

Logo $\angle HAG = \angle OA_1G$, porque são ângulos alternos internos.

$\overline{AG} = 2 \times \overline{GA_1}$, porque as medianas se trissectam.

$\overline{AH} = 2 \times \overline{OA_1}$, porque os dois triângulos $[ABC]$ e $[A_1B_1C_1]$ são semelhantes, sendo 2 a razão de semelhança.

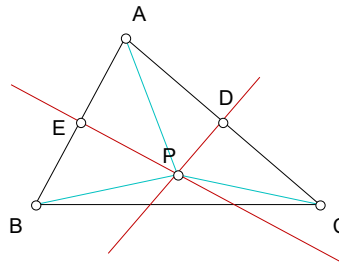
Então, os triângulos $[AHG]$ e $[A_1OG]$ são semelhantes, pelo que $\angle AGH = \angle A_1GO$ e os pontos H, G, O são colineares.

A recta que contém os pontos H, G, O é conhecida por recta de Euler.

Proposição 822 *As mediatrizes dos lados dum triângulo intersectam-se num ponto.*

Demonstração

Consideremos o triângulo $[ABC]$ da figura seguinte:



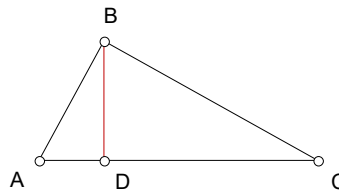
Seja P , o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados $[AB]$ e $[AC]$.

Então, $\overline{AP} = \overline{PB}$ e $\overline{AP} = \overline{PC}$, donde vem $\overline{PB} = \overline{PC}$, pelo que o ponto P pertence à mediatriz do lado $[AC]$. Então, as três mediatrizes intersectam-se num ponto (o ponto P).

Lema 823 *Num triângulo rectângulo, a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional, entre os segmentos que determina (na hipotenusa).*

Demonstração

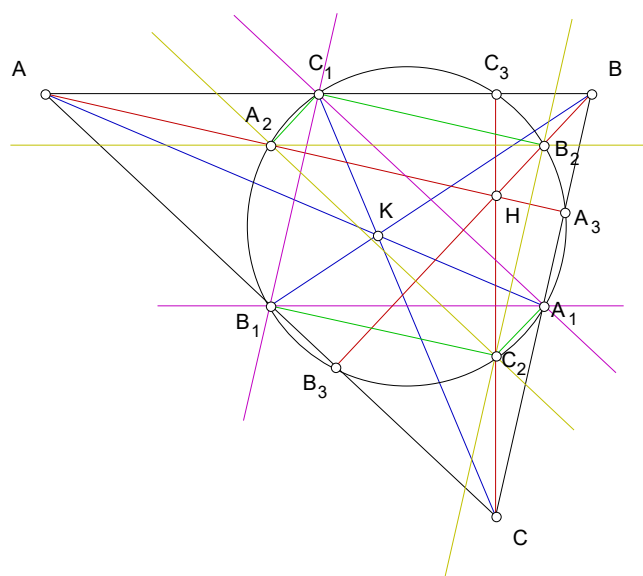
Consideremos o triângulo $[ABC]$, rectângulo em B e de altura $[BD]$:



Então, $\tan A = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, $\tan D\hat{B}C = \frac{\overline{DC}}{\overline{BD}}$. Mas, $\tan A = \tan D\hat{B}C$.

Logo, $\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$, isto é, $\overline{DC} \times \overline{AD} = \overline{BD}^2$, como se pretendia.

A circunferência dos 9 pontos



Condições da figura anterior:

A_1, B_1, C_1 são os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$.

A_2, B_2, C_2 são os pés das alturas do triângulo $[ABC]$.

H é o ortocentro do triângulo $[ABC]$.

A_3 é o ponto médio de $[AH]$, B_3 é o ponto médio de $[BH]$ e C_3 é o ponto médio de $[CH]$.

Proposição 824 Nas condições da figura anterior, há uma circunferência que passa pelos nove pontos $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$.

Demonstração

1. A recta B_1C_1 é paralela à recta BC (Thales).
2. A recta B_2C_2 é paralela à recta BC (Thales). Logo, as rectas B_1C_1 e B_2C_2 são paralelas.
3. A recta B_2C_1 é paralela à recta AH (Thales).
4. A recta B_1C_2 é paralela à recta AH (Thales). Logo, as rectas B_2C_1 e B_1C_2 são paralelas.
5. Das condições anteriores vem que $[B_1C_1B_2C_2]$ é um paralelogramo.
6. Analogamente, se conclui que $[A_2C_1A_1C_2]$ é um paralelogramo.
7. $BC \perp AA_3$ (altura, base).
8. $B_2C_2 \perp AA_3$, porque as rectas B_2C_2 e BC são paralelas.
9. Como B_2 é o ponto médio de $[BH]$ e C_1 é o ponto médio de $[AB]$, então $AH \parallel C_1B_2$. Mas, AH e AA_3 são a mesma recta. Logo, $AA_3 \parallel C_1B_2$.
10. Então, o paralelogramo $[B_1C_1B_2C_2]$ é um rectângulo, o qual pode ser inscrito na circunferência de diâmetro $[C_1C_2]$.

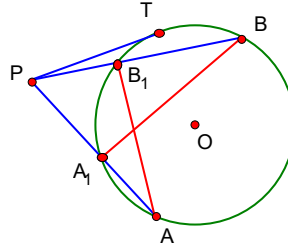
11. E o paralelogramo $[A_2C_1A_1C_2]$ é um rectângulo que pode ser inscrito na circunferência de diâmetro $[C_1C_2]$.
12. Então os seis pontos $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ pertencem a uma mesma circunferência. Falta ver que os pontos A_3, B_3, C_3 também pertencem a essa circunferência.
13. Como $[A_2A_1]$ também é um diâmetro da circunferência anterior e o ângulo $A_2A_3A_1$ é recto, temos que A_3 pertence à circunferência anterior. E o mesmo acontece com os pontos A_2 e A_1 , pelo que está terminada a demonstração.

Observação:

A circunferência dos nove pontos é a circunferência circunscrita ao triângulo $[A_1B_1C_1]$, cujos lados são metade dos lados do triângulo $[ABC]$. Então, o raio da circunferência dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.

Proposição 825 Nas condições da figura seguinte, temos que se verificam as seguintes igualdades:

$$\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PB} \times \overline{PB_1} = \overline{PT}^2$$



Estamos a supor que a recta PT é tangente à circunferência em T .

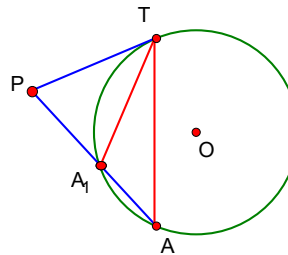
Demonstração

$\angle PAB_1 = \angle PBA_1$, porque são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência.

$\angle BPA_1$ é comum aos dois triângulos $[A_1BP]$ e $[AB_1P]$.

Logo, os dois triângulos $[A_1BP]$ e $[AB_1P]$ são semelhantes.

Então, $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ e daqui se conclui que $\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PB} \times \overline{PB_1}$.



No caso da tangente em T , temos que $\angle PAT = \angle A_1TP$ e que $\angle P$ é comum aos dois triângulos $[ATP]$ e $[A_1TP]$, que, por isso, são triângulos semelhantes.

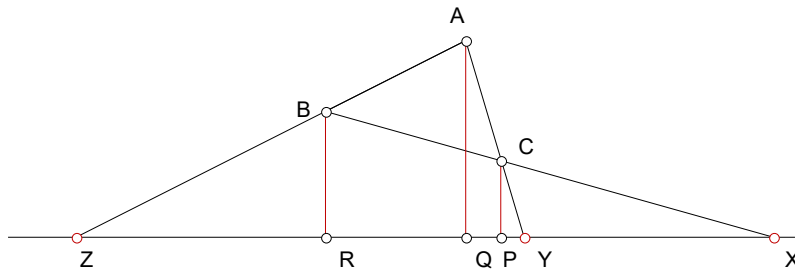
Então, $\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PA}}$ e daqui se conclui que $\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PT}^2$.

Proposição 826 (Teorema de Menelau)

Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam X, Y, Z três pontos pertencentes às rectas BC, CA e AB , respectivamente. Os pontos X, Y, Z são colineares se e só se tivermos $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -1$.

Demonstração

Consideremos a figura seguinte:



Suponhamos que X, Y, Z são pontos colineares. Sejam h_1, h_2, h_3 os comprimentos das perpendiculares à recta XZ , passando pelos pontos A, B e C , respectivamente (distâncias dos pontos A, B e C à recta XZ). Então:

$$\left| \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \right| = \frac{h_2}{h_3}, \text{ porque os triângulos } [CPX] \text{ e } [BRX] \text{ são semelhantes.}$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \right| = \frac{h_3}{h_1}, \text{ porque os triângulos } [CPX] \text{ e } [AQX] \text{ são semelhantes.}$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} \right| = \frac{h_1}{h_2}, \text{ porque os triângulos } [BRX] \text{ e } [AQX] \text{ são semelhantes.}$$

Então,

$$\left| \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \right| \times \left| \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \right| \times \left| \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} \right| = \frac{h_2}{h_3} \times \frac{h_3}{h_1} \times \frac{h_1}{h_2} = 1$$

Como $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} < 0, \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} > 0, \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} > 0$, vem $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} < 0$

Logo, $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \times \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \times \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -1$

O recíproco demonstra-se do mesmo modo que o recíproco do Teorema de Ceva.

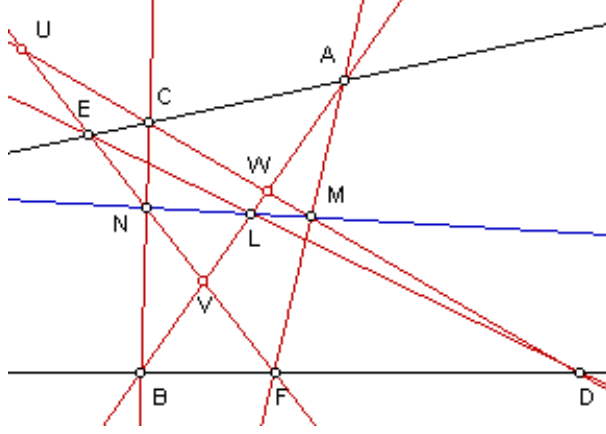
Proposição 827 (Teorema de Pappus)

Sejam A, B, C, D, E, F seis pontos tais que A, C, E pertencem a uma recta l e B, D, F pertencem a uma outra recta m . Sejam L, M, N tais que $\{L\} = AB \cap DE, \{M\} = CD \cap AF, \{N\} = EF \cap BC$. Então, L, M, N são colineares.

Demonstração

Sejam $\{U\} = EF \cap CD$, $\{V\} = AB \cap EF$, $\{W\} = AB \cap CD$.

Consideremos a figura seguinte:



Consideremos o triângulo $[UVW]$ e os triplos de pontos colineares (L, D, E) , (A, M, F) , (B, C, N) , (A, C, E) , (B, D, F) .

1. Apliquemos o Teorema de Menelau ao triângulo $[UVW]$ e aos pontos colineares L, D, E , com $L \in VW$, $D \in WU$, $E \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} = -1$$

2. Apliquemos o Teorema de Menelau ao triângulo $[UVW]$ e aos pontos colineares A, M, F , com $A \in VW$, $M \in WU$, $F \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} = -1$$

3. Apliquemos o Teorema de Menelau ao triângulo $[UVW]$ e aos pontos colineares B, C, N , com $B \in VW$, $C \in WU$, $N \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = -1$$

4. Aplicando o Teorema de Menelau ao triângulo e aos pontos colineares A, C, E , com $A \in VW$, $C \in WU$, $E \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} = -1$$

5. Aplicando o Teorema de Menelau ao triângulo $[UVW]$ e aos pontos colineares, B, D, F , com $B \in VW, D \in WU, F \in UV$:

$$\frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} = -1$$

:

Multiplicando, membro a membro, as primeiras três igualdades, vem:

$$\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} \times \frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} \times \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = -1$$

Multiplicando, membro a membro, as duas últimas igualdades, vem:

$$\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} \times \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} = 1$$

Dividindo, membro a membro, as duas igualdades anteriores, vem:

$$\frac{\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} \times \frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}} \times \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}}}{\frac{\overrightarrow{VA}}{\overrightarrow{AW}} \times \frac{\overrightarrow{WC}}{\overrightarrow{CU}} \times \frac{\overrightarrow{UE}}{\overrightarrow{EV}} \times \frac{\overrightarrow{VB}}{\overrightarrow{BW}} \times \frac{\overrightarrow{WD}}{\overrightarrow{DU}} \times \frac{\overrightarrow{UF}}{\overrightarrow{FV}}} = -1$$

Simplificando a expressão anterior, obtemos $\frac{\overrightarrow{VL}}{\overrightarrow{LW}} \times \frac{\overrightarrow{WM}}{\overrightarrow{MU}} \times \frac{\overrightarrow{UN}}{\overrightarrow{NV}} = -1$.

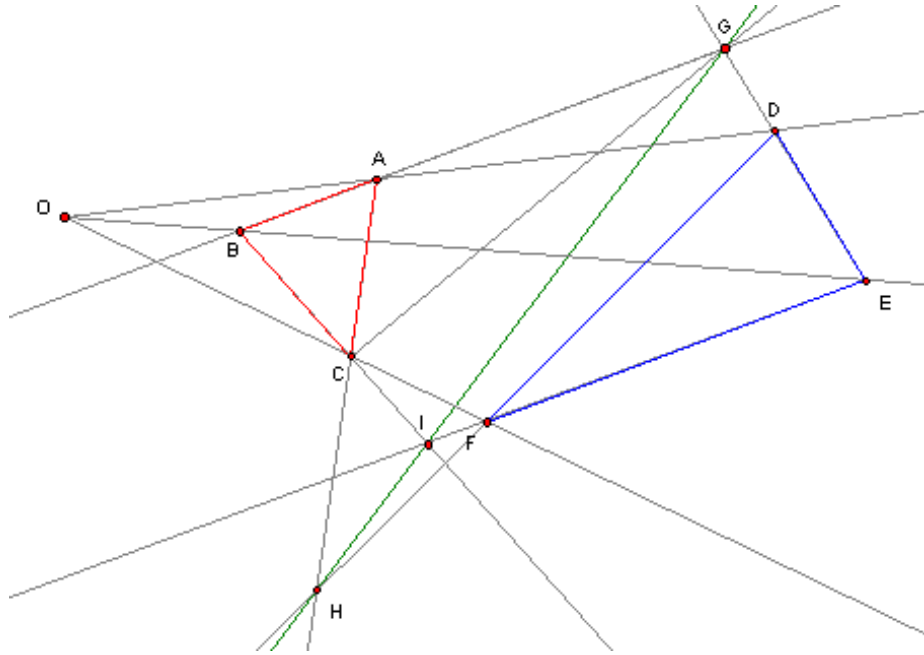
Então, pelo Teorema de Menelau, os pontos L, M, N são colineares.

Proposição 828 (*Teorema de Desargues*)

Dois triângulos são perspectivos a respeito dum ponto se e só se são perspectivos a respeito duma recta.

Demonstração

Consideremos a figura seguinte:



Suponhamos que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são perspectivos a respeito do ponto O , isto é, as rectas AD , BE e CF intersectam-se no ponto O . Sejam G , H , I , os pontos de intersecção dos três pares de rectas AB e DE , AC e DF , BC e EF , isto é, $\{G\} = AB \cap DE$, $\{H\} = AC \cap DF$, $\{I\} = BC \cap EF$.

Pretendemos mostrar que os pontos G , H , I são colineares, ou seja, que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são perspectivos a respeito da recta GH .

1. Consideremos o triângulo $[BCO]$ e os pontos colineares E , F , I . Ora, $E \in OB$, $F \in OC$, $I \in BC$.

Então, pelo Teorema de Menelau, temos

$$\frac{\overrightarrow{BI}}{\overrightarrow{IC}} \times \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FO}} \times \frac{\overrightarrow{OE}}{\overrightarrow{EB}} = -1$$

2. Consideremos o triângulo $[ACO]$ e os pontos colineares D , F , H . Então, pelo Teorema de Menelau, temos

$$\frac{\overrightarrow{CH}}{\overrightarrow{HA}} \times \frac{\overrightarrow{OF}}{\overrightarrow{FC}} \times \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DO}} = -1$$

3. Consideremos o triângulo $[ABO]$ e os pontos colineares D , E , G . Então, pelo Teorema de Menelau, temos

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} \times \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EO}} \times \frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{DA}} = -1$$

4. Multiplicando, membro a membro, as três igualdades anteriores, obtemos

$$\frac{\overrightarrow{BI}}{\overrightarrow{IC}} \times \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FO}} \times \frac{\overrightarrow{OE}}{\overrightarrow{EB}} \times \frac{\overrightarrow{CH}}{\overrightarrow{HA}} \times \frac{\overrightarrow{OF}}{\overrightarrow{FC}} \times \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DO}} \times \frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} \times \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EO}} \times \frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{DA}} = -1$$

5. Simplificando, obtemos

$$\frac{\overrightarrow{BI}}{\overrightarrow{IC}} \times \frac{\overrightarrow{CH}}{\overrightarrow{HA}} \times \frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} = -1$$

Da igualdade anterior e, como $I \in BC$, $H \in CA$ e $G \in AB$, concluímos (pelo Teorema de Menelau) que os pontos G , H , I são colineares.

Reciprocamente, suponhamos que os pontos são colineares. Pretendemos mostrar que as rectas são concorrentes. Seja O tal que $\{O\} = AD \cap CF$. Basta-nos provar que o ponto O pertence à recta BE .

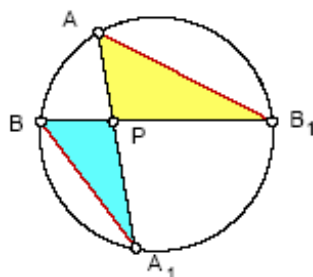
Consideremos os triângulos $[ADG]$ e $[CFI]$. Estes dois triângulos são perspectivos a respeito do ponto H . Logo, pela parte já demonstrada deste Teorema, temos que os triângulos $[ADG]$ e $[CFI]$ são perspectivos a respeito duma recta. Como C corresponde a A , I corresponde a G e F corresponde a D , temos que a recta CI corresponde a AG , a recta CF corresponde a AD e a recta IF corresponde a GD .

Mas, $\{B\} = CI \cap AG$, $\{O\} = CF \cap AD$, $\{E\} = FI \cap GD$.

Logo, os triângulos $[ADG]$ e $[CFI]$ são perspectivos a respeito da recta que contém os pontos B , O , E , pelo que o ponto O pertence à recta BE .

Em rigor, não está terminada a demonstração do Teorema de Desargues, pois pode acontecer que alguns pares de rectas consideradas sejam estritamente paralelas ou coincidentes.

Proposição 829 *Sejam $[AA_1]$ e $[BB_1]$ duas cordas duma circunferência, que se intersectam num ponto P . Então, $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PA_1} = \overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{PB_1}$.*



Demonstração

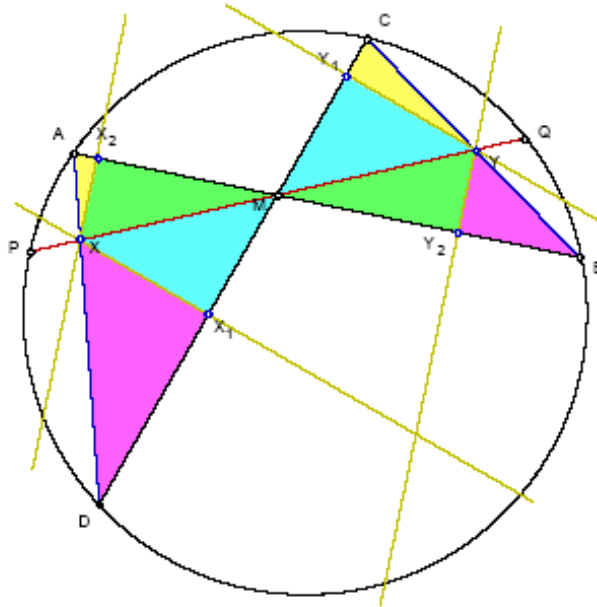
1. Os ângulos A_1 e B_1 são iguais, porque estão inscritos no mesmo arco de circunferência.
2. Os ângulos BPA_1 e APB_1 são iguais, porque são verticalmente opostos.

3. Logo, os triângulos $[BPA_1]$ e $[APA_2]$ são semelhantes. Logo, $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PA_1}}{\overline{PB_1}}$. Logo, $\overline{PA} \times \overline{PA_1} = \overline{PB} \times \overline{PB_1}$.

Proposição 830 (*O Teorema da Borboleta*) *Consideremos, numa circunferência, uma corda $[PQ]$, cujo ponto médio é M . Sejam $[AB]$ e $[CD]$ duas cordas concorrentes em M . Então, se as cordas $[AD]$ e $[BC]$ intersectarem a corda inicial $[PQ]$, nos pontos X e Y , tais pontos são equidistantes de M .*

Demonstração

Consideremos a figura seguinte, onde, por X , se traçaram duas rectas perpendiculares às cordas $[AB]$ e $[CD]$; por Y , também se traçaram duas rectas perpendiculares às cordas $[AB]$ e $[CD]$. Os pontos X_1, X_2, Y_1, Y_2 resultam da intersecção das quatro rectas anteriores com as cordas $[AB]$ e $[CD]$. Nesta figura, temos que os triângulos da mesma cor são semelhantes:



1. Consideremos os triângulos $[AX_2X]$ e $[CY_1Y]$.
 - (a) $\angle DAB = \angle DCB$, porque estão inscritos no mesmo arco de circunferência.
 - (b) $\angle ADC = \angle ABC$, porque estão inscritos no mesmo arco de circunferência.
 - (c) Então, os dois triângulos $[AX_2X]$ e $[CY_1Y]$ são semelhantes.
 - (d) Logo, $\frac{\overline{AX}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{X_2X}}{\overline{Y_1Y}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{CY}}$.

2. Consideremos os triângulos $[MX_1X]$ e $[MY_1Y]$.

- (a) Os dois triângulos são rectângulos, por construção.
- (b) $\angle XMX_1 = \angle YMY_1$, porque são verticalmente opostos.
- (c) Então, os dois triângulos $[MX_1X]$ e $[MY_1Y]$ são semelhantes.
- (d) Logo, $\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} = \frac{\overline{X_1X}}{\overline{Y_1Y}} = \frac{\overline{X_1M}}{\overline{MY_1}}$.

3. Consideremos os triângulos $[XMX_2]$ e $[YMY_2]$.

- (a) Os dois triângulos são rectângulos, por construção.
- (b) $\angle XMX_2 = \angle Y_2MY$, porque são verticalmente opostos.
- (c) Então, os dois triângulos $[XMX_2]$ e $[YMY_2]$ são semelhantes.
- (d) Logo, $\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}} = \frac{\overline{X_2X}}{\overline{Y_2Y}} = \frac{\overline{X_2M}}{\overline{MY_2}}$.

4. Consideremos os triângulos $[XDX_1]$ e $[YBY_2]$.

- (a) Os dois triângulos são rectângulos, por construção.
- (b) $\angle D = \angle B$, porque estão inscritos no mesmo arco de circunferência.
- (c) Então, os dois triângulos $[XDX_1]$ e $[YBY_2]$ são semelhantes.
- (d) Logo, $\frac{\overline{DX}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{X_1X}}{\overline{Y_2Y}} = \frac{\overline{DX_1}}{\overline{BY_2}}$.

$$5. \text{ Então, } \left(\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}}\right)^2 = \frac{\overline{X_1X}}{\overline{Y_1Y}} \times \frac{\overline{X_2X}}{\overline{Y_2Y}} = \frac{\overline{X_2X}}{\overline{Y_1Y}} \times \frac{\overline{X_1X}}{\overline{Y_2Y}} = \frac{\overline{AX} \times \overline{XD}}{\overline{CY} \times \overline{YB}} = \frac{\overline{PX} \times \overline{XQ}}{\overline{PY} \times \overline{YQ}}$$

6. Faça-se $\overline{PM} = \overline{MQ} = a$, $\overline{XM} = x$, $\overline{MY} = y$. Então:

$$\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{\overline{XM}}{\overline{MY}}\right)^2 = \frac{\overline{PX} \times \overline{XQ}}{\overline{PY} \times \overline{YQ}} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}$$

$$7. \text{ Então, } \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + a^2 - x^2}{y^2 + a^2 - y^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

8. Logo, $x = y$, como pretendido.

Observação:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \implies ad = bc \implies ad + ab = bc + ab \implies a(b+d) = b(a+c) \implies \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

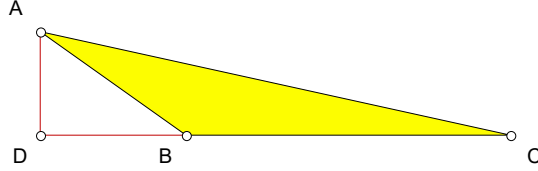
É claro que estamos a supor que os denominadores envolvidos são diferentes de zero. Isso acontece se, por exemplo, os números reais a, b, c, d são positivos.

Proposição 831 *Teorema de Carnot (ou lei dos cosenos)*

Num triângulo $[ABC]$, verifica-se que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$, com $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $\beta = \widehat{ABC}$.

Demonstração

Caso do ângulo obtuso:



Consideremos a figura anterior, onde o ponto D é a intersecção da recta BC com recta que lhe é perpendicular e que passa por A :

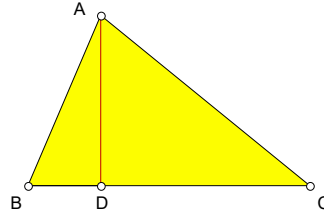
Então:

$$\begin{cases} \sin \beta = \sin (\pi - \beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \\ \cos \beta = -\cos (\pi - \beta) = -\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \sin \beta = c \sin \beta \\ \overline{BD} = -\overline{AB} \cos \beta = -c \cos \beta \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} b^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + (\overline{DB} + \overline{BC})^2 \\ &= c^2 \sin^2 \beta + (a - c \cos \beta)^2 = c^2 \sin^2 \beta + a^2 - 2ac \cos \beta + c^2 \cos^2 \beta \\ &= c^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + a^2 - 2ac \cos \beta = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta \end{aligned}$$

Caso do ângulo agudo:



Suponhamos que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\widehat{ABC} = \beta$ e que $[AD]$ é uma altura do triângulo $[ABC]$. Então:

$$\begin{cases} \sin \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \\ \cos \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \end{cases} \implies \begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \sin \beta = c \sin \beta \\ \overline{BD} = \overline{AB} \cos \beta = c \cos \beta \end{cases}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + (\overline{BC} - \overline{BD})^2 \\ &= c^2 \sin^2 \beta + (a - c \cos \beta)^2 = c^2 \sin^2 \beta + a^2 - 2ac \cos \beta + c^2 \cos^2 \beta \\ &= c^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + a^2 - 2ac \cos \beta = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta \end{aligned}$$

Logo, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta$

Outra demonstração

Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, temos:

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\pi - \hat{B}) = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta\end{aligned}$$

Logo, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta$

Outra demonstração

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$. Então:

$$\begin{aligned}b^2 &= \overline{AC}^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \overline{BC}^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overline{AB}^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta\end{aligned}$$

Ainda outra demonstração

Consideremos, num triângulo $[ABC]$ de lados a, b, c , a lei dos senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Então, $a \sin B = b \sin A$, ou seja, $\sin A = \frac{a}{b} \sin B$.

Ora, $\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

Logo, $\sin C = \frac{a}{b} \sin B \cos B + \sin B \cos A$

De $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, vem:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\frac{a}{b} \sin B \cos B + \sin B \cos A}$$

Logo,

$$b = \frac{c}{\frac{a}{b} \cos B + \cos A}$$

E daqui se conclui que $c = a \cos B + b \cos A$, ou seja, que $b \cos A = c - a \cos B$. Então:

$$\begin{aligned}\begin{cases} b \sin A = a \sin B \\ b \cos A = c - a \cos B \end{cases} &\implies \begin{cases} b^2 \sin^2 A = a^2 \sin^2 B \\ b^2 \cos^2 A = c^2 - 2ac \cos B + a^2 \cos^2 B \end{cases} \\ &\implies b^2 \sin^2 A + b^2 \cos^2 A = a^2 \sin^2 B + c^2 - 2ac \cos B + a^2 \cos^2 B \\ &\implies b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) = a^2 (\sin^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2ac \cos B \\ &\implies b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B\end{aligned}$$

Exercício 832 Determine os cosenos dos ângulos internos dum triângulo $[ABC]$, em que $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{BC} = 9$ cm e $\overline{AC} = 10$ cm.

Resolução

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} &\implies \begin{cases} 9^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 10 \cos A \\ 10^2 = 9^2 + 8^2 - 2 \times 9 \times 8 \cos B \\ 8^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \times 10 \times 9 \cos C \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 160 \cos A = 164 - 81 \\ 144 \cos B = 81 + 64 - 100 \\ 180 \cos C = 181 - 64 \end{cases} \implies \begin{cases} \cos A = \frac{83}{160} \\ \cos B = \frac{45}{144} = \frac{5}{16} \\ \cos C = \frac{117}{180} = \frac{13}{20} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 833 Determine os cossenos dos ângulos internos dum triângulo $[ABC]$, em que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

Resolução

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases} &\implies \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \\ \text{Então, se fizermos } a = 9, b = 10, c = 8, \text{ obtemos} &\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{83}{160} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{117}{180} = \frac{13}{20} \end{cases}, \text{ como no} \end{aligned}$$

exercício anterior.

Exercício 834 Determine as tangentes dos ângulos internos dum triângulo $[ABC]$, não rectângulo, em que temos $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

Resolução

$$\text{Já vimos que } \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}.$$

Da primeira igualdade, vem

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} = \sqrt{\frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}}{2bc} = \frac{\sqrt{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}}{2bc} \\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \end{aligned}$$

Também sabemos, pela lei dos senos, que $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Então,

$$\begin{aligned}\sin B &= \frac{b}{a} \sin A = \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ac} \\ \sin C &= \frac{c}{a} \sin A = \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ab}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\tan A &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc} \times \frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} \\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{b^2+c^2-a^2}\end{aligned}$$

Analogamente, vem

$$\begin{aligned}\tan B &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ac} \times \frac{2ac}{a^2+c^2-b^2} \\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{a^2+c^2-b^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\tan C &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2ab} \times \frac{2ac}{a^2+b^2-c^2} \\ &= \frac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{a^2+b^2-c^2}\end{aligned}$$

Exercício 835 Determine a soma e o produto das tangentes dos ângulos internos dum triângulo $[ABC]$, não rectângulo, em que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$.

Resolução

Sejam $P = \tan A \tan B \tan C$ e $Q = \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}$.

Do exercício anterior, vem

$$\begin{aligned}P &= \frac{\left[\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \right]^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \\ &= \frac{\left[\sqrt{(b^2+2bc+c^2-a^2)(a^2-b^2-c^2+2bc)} \right]^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \\ &= \frac{\left[\sqrt{(4b^2c^2-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2)} \right]^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \\ &= \frac{(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4) \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}\end{aligned}$$

E, também

$$\begin{aligned}
 Q &= \left(\frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) \\
 &= \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \\
 &= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \tan A + \tan B + \tan C &= Q \sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} \\
 &= \tan A \tan B \tan C
 \end{aligned}$$

Então, num triângulo não rectângulo, a soma das tangentes dos ângulos internos é igual ao produto das mesmas tangentes.

Assim, num triângulo equilátero, temos

$$\begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Proposição 836 *Num triângulo não rectângulo, a soma das tangentes dos ângulos internos é igual ao seu produto.*

(Outra) Demonstração

Como, $A + B + C = \pi$, temos

$$\begin{aligned}
 \tan A + \tan B + \tan C &= \tan A + \tan B + \tan(\pi - A - B) = \tan A + \tan B - \tan(A + B) \\
 &= \tan A + \tan B - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\
 &= \frac{\tan A - \tan^2 A \tan B + \tan B - \tan A \tan^2 B - \tan A - \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\
 &= \frac{-\tan^2 A \tan B - \tan A \tan^2 B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan A \tan B \times \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\
 &= -\tan A \tan B \times \tan(A + B) = \tan A \tan B \tan(\pi - A - B) \\
 &= \tan A \tan B \tan C
 \end{aligned}$$

Se convencionarmos que $\tan \frac{\pi}{2} = \infty$ e que, para $x \neq 0$, $x \times \infty = \infty$, então a propriedade anterior é válida em qualquer triângulo.

Oberve-se que $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$, pelo que existe um triângulo (na realidade, há infinitos triângulos, todos semelhantes entre si) tal que as tangentes dos ângulos internos são 1, 2 e 3.

Haverá outro triângulo cujos ângulos internos tenham tangentes que sejam números naturais?

Sejam $a, b, x \in \mathbb{N}$. De $a + b + x = abx$, vem $x = \frac{a+b}{ab-1}$, desde que $ab \neq 1$. Suponhamos que $1 < a \leq b$. Então, $a + b \leq 2b$, donde se conclui que $x = \frac{a+b}{ab-1} \leq \frac{2b}{ab-1} \leq \frac{2b}{ab-b} \leq \frac{2}{a-1}$.

Para que $x \in \mathbb{N}$, devemos ter $a = 2$ ou $a = 3$.

Se $a = 2$, então $x = \frac{b+2}{2b-1}$, pelo que $0 < 2b - 1 \leq b + 2$. Logo, $b \leq 3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{3}{1} = 3; \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{4}{3}; \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{5}{5} = 1$$

Se $a = 3$, então $x = \frac{b+3}{3b-1}$, pelo que $0 < 3b - 1 \leq b + 3$. Logo, $b \leq 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2; \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{5}{5} = 1$$

Se $a = 1$, temos $x = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1}$. Então, $1 \leq b - 1 \leq 2$. Logo, $2 \leq b \leq 3$.

Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 3$. Se $a = 1$ e $b = 3$, então $x = 2$.

Logo, 1, 2 e 3 são os únicos três números naturais cuja soma é igual ao seu produto.

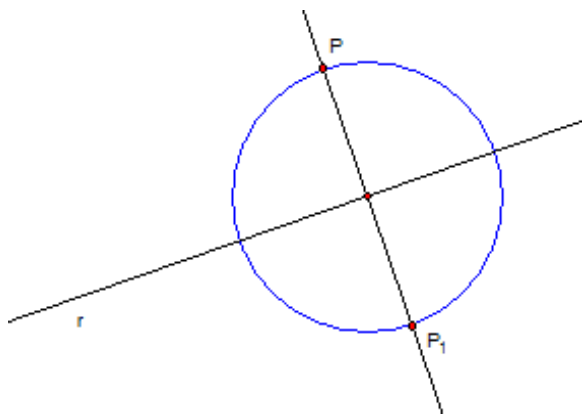
Capítulo 45

Isometrias no Plano

Comecemos por referir que isometria, num plano, é uma aplicação, do plano para o plano, que preserva as distâncias, isto é, dados dois pontos do plano, a distância entre as suas imagens é igual à distância entre os dois objectos iniciais.

45.1 Simetria axial

Consideremos, num plano π , uma reta r e um ponto P . O simétrico de P , relativamente à reta r , é o ponto P_1 pertencente a π , tal que a reta r é a mediatriz de $[PP_1]$.



Definição 837 Consideremos uma reta r que passa por A e que é perpendicular ao vector unitário \vec{n} . Então, o simétrico dum ponto P , relativamente à reta r , é o ponto $P_1 = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n}$.

Observação

Na definição anterior, há dois problemas: a reta tem infinitos pontos, pelo que em vez de A , podemos ter qualquer outro ponto da reta e há dois vectores unitários perpendiculares à reta (\vec{n} e $-\vec{n}$).

Se tivermos $-\vec{n}$, em vez de \vec{n} , vem

$$P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot (-\vec{n}) \right) (-\vec{n}) = P + 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) (-\vec{n}) = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P_1$$

Então, obtemos o mesmo ponto quer utilizemos \vec{n} quer utilizemos $-\vec{n}$.

Suponhamos, agora, que temos um ponto B pertencente à reta r . Então, $B = A + \alpha \vec{u}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e \vec{u} perpendicular a \vec{n} .

Então,

$$\begin{aligned} P - 2 \left(\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} &= P - 2 \left(\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \right) \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P - 2 \left(\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \\ &= P - 2 \left(0 + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P_1 \end{aligned}$$

Logo, o ponto obtido não depende do ponto escolhido sobre a reta r .

Logo, a aplicação está bem definida. A simetria em relação à reta r é denotada por σ_r .

Exemplo 838 Considere, num referencial ortonormado, a reta r de equação $y = 2x + 3$. Determine o simétrico do ponto $P = (a, b)$, relativamente à reta r .

Resolução

Sejam $A = (0, 3)$ e $\vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. Então,

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, b) &= (a, b) - 2 \left[\left((a, b) - (0, 3) \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right] \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= (a, b) - 2 \left((a, b - 3) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= (a, b) - 2 \left(\frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{b-3}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= (a, b) - 2(2a - b + 3) \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right) \\ &= (a, b) - (4a - 2b + 6) \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right) \\ &= (a, b) - \frac{1}{5}(8a - 4b + 12, -4a + 2b - 6) \\ &= \left(a - \frac{1}{5}(8a - 4b + 12), b - \frac{1}{5}(-4a + 2b - 6) \right) \\ &= \frac{1}{5}(5a - 8a + 4b - 12, 5b + 4a - 2b + 6) \\ &= \left(\frac{-3a + 4b - 12}{5}, \frac{4a + 3b + 6}{5} \right) \end{aligned}$$

Proposição 839 A simetria axial é uma involução (aplicação inversa de si própria).

Demonstração

A demonstração (a qual envolve o conhecimento de algumas propriedades do produto interno) é um pouco maçadora. Mas apresentamos uma demonstração mais adiante, envolvendo matrizes.

Corolário 840 A simetria axial é uma aplicação injectiva.

Demonstração

Suponhamos que $\sigma_r(X_1) = \sigma_r X_2$, com X_1, X_2 pertencentes ao plano.

Então, $\sigma_r(X_1) = \sigma_r X_2$, pelo que $\sigma_r(\sigma_r(X_1)) = \sigma_r(\sigma_r X_2)$.

Logo, $(\sigma_r \circ \sigma_r)(X_1) = (\sigma_r \circ \sigma_r)(X_2)$. Então, pela proposição anterior, $X_1 = X_2$, donde se conclui que σ_r é injectiva.

Exemplo 841 Considere, num referencial ortonormado, a reta r de equação $y = 2x$. Determine o simétrico do ponto $P = (x, y)$, relativamente à reta r .

Resolução

Sejam $O = (0, 0)$ e $\vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Então,

$$\begin{aligned}\sigma_r((x, y)) &= (x, y) - 2 \left[((x, y) - (0, 0)) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right] \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= (x, y) - \left[2(x, y) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right] \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= (x, y) - \left(\frac{4x}{5} - \frac{2y}{5}\right) (2, -1) = (x, y) - \left(\frac{8}{5}x - \frac{4}{5}y, -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y\right) \\ &= \left(x - \frac{8}{5}x + \frac{4}{5}y, y + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y\right) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)\end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\sigma_r(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Calculando $(\sigma \circ \sigma)(x, y)$, obtemos

$$\begin{aligned}(\sigma_r \circ \sigma_r)(x, y) &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 + 16 & -12 + 12 \\ -12 + 12 & 16 + 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Exemplo 842 Considere, num referencial ortonormado, a reta r de equação $y = mx$. Determine o simétrico do ponto $P = (x, y)$, relativamente à reta r .

Resolução

Sejam $O = (0, 0)$ e $\vec{n} = \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)$. Então,

$$\begin{aligned}
 P' &= (x, y) - 2 \left[(x, y) \cdot \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \right) \right] \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \right) \\
 &= (x, y) - \left(\frac{2mx}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{2y}{\sqrt{m^2+1}} \right) \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \right) \\
 &= (x, y) + \left(\frac{2y}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{2mx}{\sqrt{m^2+1}} \right) \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, -\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \right) \\
 &= (x, y) + \frac{2y - 2mx}{m^2 + 1} (m, -1) = \frac{1}{m^2 + 1} ((m^2x + x, m^2y + y) + (2my - 2m^2x, -2y + 2mx)) \\
 &= \frac{1}{m^2 + 1} (m^2x + x + 2my - 2m^2x, m^2y + y - 2y + 2mx) \\
 &= \frac{1}{m^2 + 1} ((1 - m^2)x + 2my, (m^2 - 1)y + 2mx) \\
 &= \left(\frac{(1 - m^2)x + 2my}{m^2 + 1}, \frac{(m^2 - 1)y + 2mx}{m^2 + 1} \right)
 \end{aligned}$$

Matricialmente, vem:

$$\sigma_r(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1} \\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Fazendo $m = 2$, obtemos a matriz do exemplo anterior:

$$\sigma_r(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo 843 Considere, num referencial ortonormado, a reta r de equação $y = mx + b$. Determine o simétrico do ponto $P = (x, y)$, relativamente à reta r .

Resolução

Sejam $O = (0, 0)$ e $\vec{n} = (m, -1)$. Então, $\|\vec{n}\| = m^2 + 1$ e

$$((x, y) - (0, b)) \cdot \vec{n} = (x, y - b) \cdot (m, -1) = mx - y + b$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(x, y) &= (x, y) - \frac{2(mx - y + b)}{m^2 + 1} (m, -1) \\
 &= (x, y) + \frac{2y - 2mx - 2b}{m^2 + 1} (m, -1) \\
 &= \frac{1}{m^2 + 1} (m^2x + x, m^2y + y) + \frac{1}{m^2 + 1} (2my - 2m^2x - 2bm, 2mx - 2y + 2b) \\
 &= \frac{1}{m^2 + 1} (x - m^2x - 2mb + 2my, m^2y + 2mx + 2b - y) \\
 &= \frac{1}{m^2 + 1} (x - m^2x + 2my, m^2y + 2mx - y) - \frac{2b}{m^2 + 1} (m, -1)
 \end{aligned}$$

Matricialmente, temos

$$\sigma_r(x, y) = \frac{1}{m^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{2b}{m^2 + 1} \begin{bmatrix} m \\ -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo $b = 0$, obtemos o caso do exemplo anterior:

$$\sigma_r(x, y) = \frac{1}{m^2 + 1} (x - m^2x + 2my, m^2y + 2mx - y)$$

E, fazendo $m = 2$ e $b = 3$, obtemos um exemplo já resolvido:

$$\begin{aligned} \sigma_r(x, y) &= \frac{1}{2^2 + 1} (x - 2^2x + 2 \times 2y, 2^2y + 2 \times 2x - y) - \frac{6}{2^2 + 1} (2, -1) \\ &= \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \right) \end{aligned}$$

Proposição 844 *A simetria axial é uma involução (aplicação inversa de si própria).*

Demonstração

Já vimos que a imagem do ponto (x, y) , por meio da reflexão em relação à recta $y = mx + b$ é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_r(x, y) &= \frac{1}{m^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{2b}{m^2 + 1} \begin{bmatrix} m \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{x}{m^2 + 1} - 2b\frac{m}{m^2 + 1} + 2m\frac{y}{m^2 + 1} - m^2\frac{x}{m^2 + 1} \\ 2\frac{b}{m^2 + 1} - \frac{y}{m^2 + 1} + 2m\frac{x}{m^2 + 1} + m^2\frac{y}{m^2 + 1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (\sigma_r \circ \sigma_r)(x, y) &= \frac{1}{m^2 + 1} \begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x}{m^2 + 1} - 2b\frac{m}{m^2 + 1} + 2m\frac{y}{m^2 + 1} - m^2\frac{x}{m^2 + 1} \\ 2\frac{b}{m^2 + 1} - \frac{y}{m^2 + 1} + 2m\frac{x}{m^2 + 1} + m^2\frac{y}{m^2 + 1} \end{bmatrix} - \frac{2b}{m^2 + 1} \begin{bmatrix} m \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(m^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2bm + 2my - m^2x \\ 2b - y + 2mx + m^2y \end{bmatrix} - \frac{2b(m^2 + 1)}{(m^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} m \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(m^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2bm + 2my - m^2x \\ 2b - y + 2mx + m^2y \end{bmatrix} + \frac{1}{(m^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} -2bm(m^2 + 1) \\ 2b(m^2 + 1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Seja

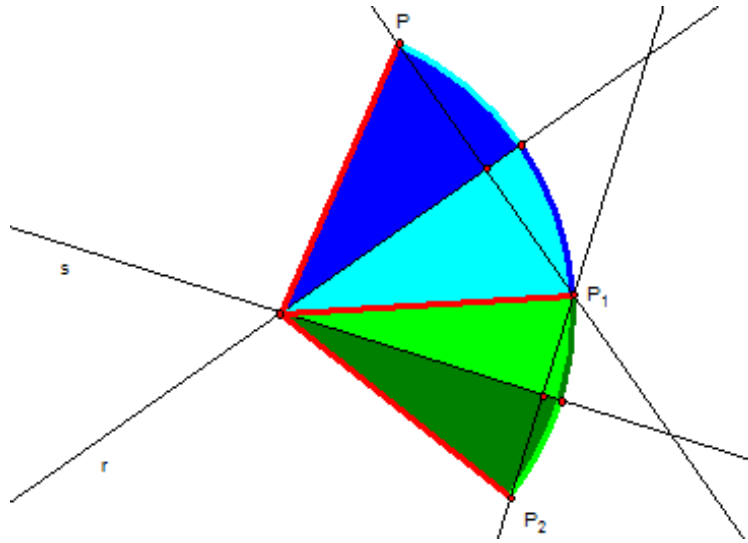
$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2bm + 2my - m^2x \\ 2b - y + 2mx + m^2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2bm(m^2 + 1) \\ 2b(m^2 + 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xm^4 + 2xm^2 + x \\ ym^4 + 2ym^2 + y \end{bmatrix} = (m^4 + 2m^2 + 1) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} (\sigma_r \circ \sigma_r)(x, y) &= \frac{1}{(m^2 + 1)^2} C = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{(m^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{m^4 + 2m^2 + 1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

45.2 Rotação

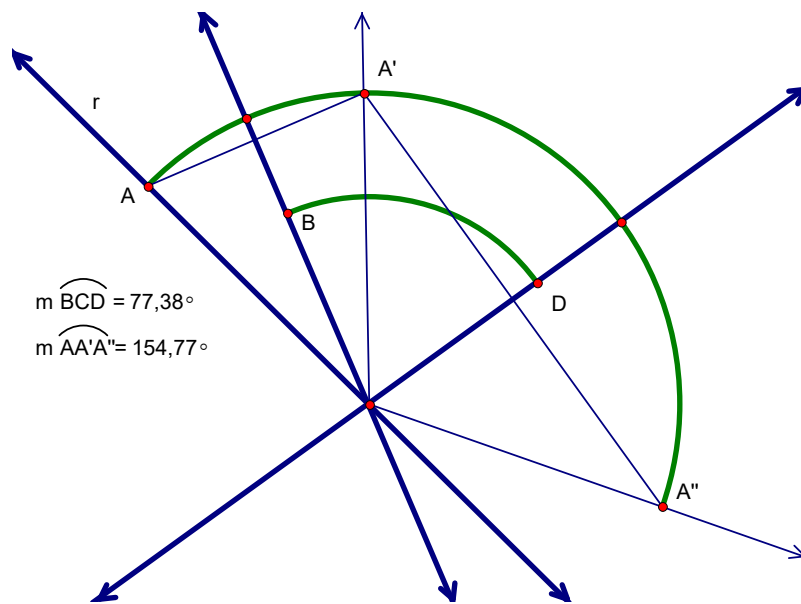
Exemplo 845 *Sejam r e s duas retas concorrentes que se intersectam no ponto I . Então, $\sigma_s \circ \sigma_r$ é uma rotação em torno do ponto I . O ângulo de rotação é o dobro do ângulo formado pelas duas retas, no sentido de r para s .*



Note-se que $\sigma_r \circ \sigma_s$ é uma rotação em torno de I , mas descrita em sentido contrário à rotação definida por $\sigma_s \circ \sigma_r$, isto é, $\sigma_r \circ \sigma_s$ é a aplicação inversa de $\sigma_s \circ \sigma_r$. Como podemos verificar, temos

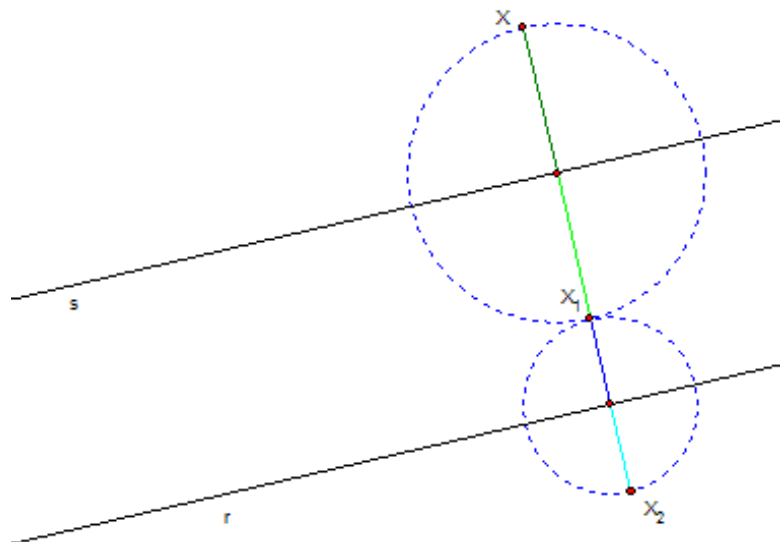
$$\begin{aligned} (\sigma_s \circ \sigma_r) \circ (\sigma_r \circ \sigma_s)(X) &= \sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_r \circ \sigma_s(X) = \sigma_s \circ \text{Id} \circ \sigma_s(X) \\ &= \sigma_s \circ \sigma_s(X) = \text{Id}(X) = X \end{aligned}$$

Eis outro exemplo de rotação em torno de um ponto:



45.3 Translação

Exemplo 846 Sejam r e s duas retas paralelas. Então, $\sigma_s \circ \sigma_r$ é a translação associada ao vector \vec{u} perpendicular às duas retas r e s , cuja norma é o dobro da distância entre as retas r e s e que tem o sentido da reta s para a reta r .



Se tivermos um vector $u = (u_1, u_2)$, a translação associada ao vector u é a aplicação τ_u , de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , tal que $\tau_u(x, y) = (x, y) + (u_1, u_2)$.

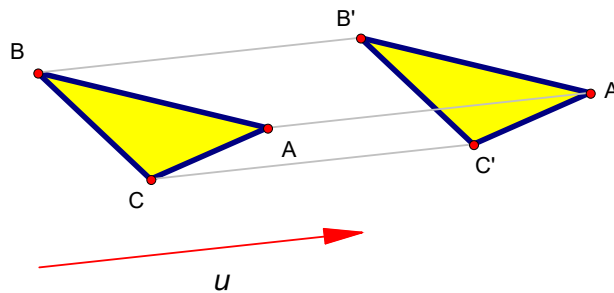
Usando matrizes, temos que $\tau_u(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + u_1 \\ y + u_2 \end{bmatrix}$.

É fácil ver que a translação só tem pontos fixos se u for o vector nulo.

$$\tau_u(x, y) = (x, y) \iff (x + u_1, y + u_2) = (x, y) \iff \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

Se $u_1 \neq 0 \vee u_2 \neq 0$, a translação não tem pontos fixos. Se $u = (0, 0)$, qualquer ponto do plano é transformado em si próprio (a translação associada ao vector nulo é a aplicação Identidade).

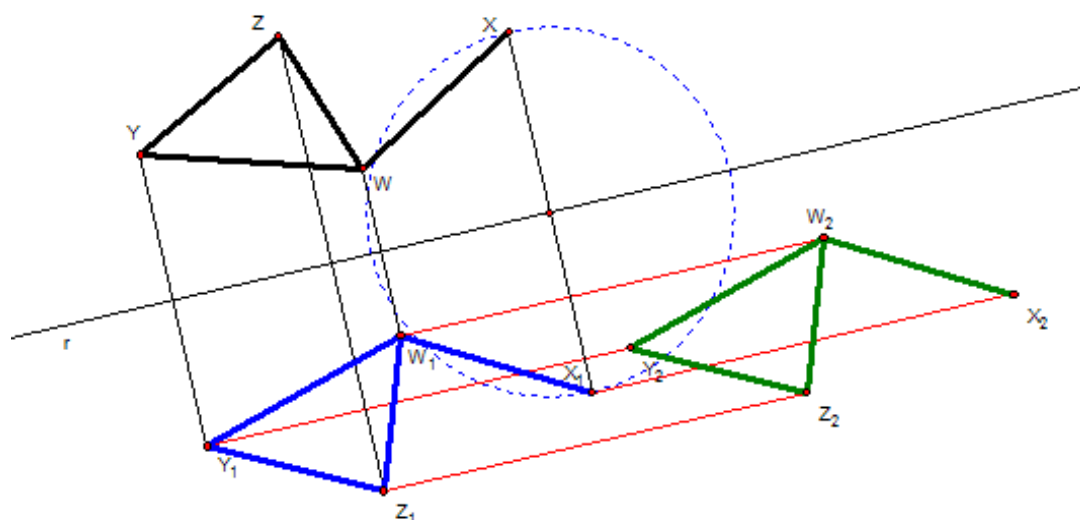
Vejamos um exemplo geométrico de Translação:



A aplicação inversa de τ_u é a translação τ_{-u} .

45.4 Reflexão Deslizante

Exemplo 847 Consideremos a composição duma simetria axial com um vector não nulo paralelo ao eixo de simetria, conforme a figura seguinte.



Observações

1. A isometria considerada na figura anterior (reflexão deslizante) não é uma simetria axial, nem uma rotação, nem uma translação.
2. Não há mais isometrias do plano, para além das quatro já consideradas.
3. Toda a isometria pode decompor-se como aplicação composta dum número de simetrias axiais que é menor ou igual a 3. Mais, embora essa decomposição não seja única, para cada isometria, o número de simetrias axiais tem paridade fixa.
4. A simetria axial e a reflexão deslizante são isometrias negativas, enquanto que a rotação e a translação são isometrias positivas.

Capítulo 46

Semelhanças

Um caso particular de Semelhança é uma Homotetia. Uma Homotetia é definida pelo Centro da Homotetia e pela Razão da Homotetia. O Centro é um ponto qualquer do plano (estamos a tratar da Geometria Plana) e a razão é um número real diferente de zero.

Consideremos a aplicação T , do plano em si mesmo, definida por $T(x, y) = (2x, 2y)$.

Se tivermos $T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2)$, então teremos $(2x_1, 2y_1) = (2x_2, 2y_2)$, pelo que virá $\begin{cases} 2x_1 = 2x_2 \\ 2y_1 = 2y_2 \end{cases}$.

Então, temos $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$, pelo que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ e a aplicação T é injectiva.

Por outro lado, dado um ponto do plano $P' = (x, y)$, vem $(x, y) = (2 \times \frac{x}{2}, 2 \times \frac{y}{2}) = T(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, pelo que T é sobrejectiva. Logo, T é bijectiva.

Pontos fixos:

$$T(x, y) = (x, y) \iff (2x, 2y) = (x, y) \iff \begin{cases} 2x = x \\ 2y = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

A aplicação tem um único ponto fixo que recebe o nome de Centro da Homotetia. Neste caso, o centro da homotetia é a origem do referencial, mas pode ser qualquer outro ponto do plano.

No caso anterior, a homotetia pode ser definida por $T(x, y) = (2x, 2y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Se o centro da homotetia não for a origem, como proceder, para encontrar a imagem dum ponto genérico $P = (x, y)$?

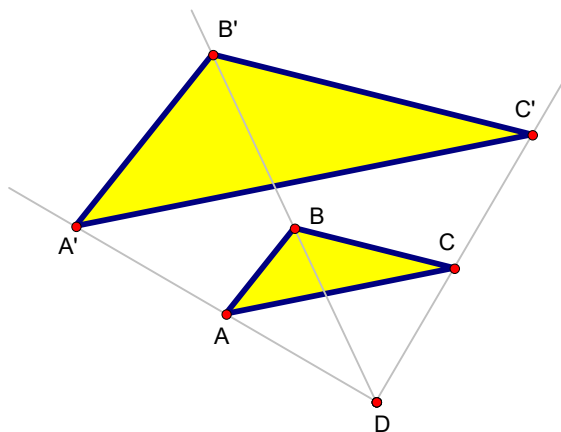
Suponhamos que temos uma homotetia de razão $\frac{3}{2}$ e centro no ponto $A = (2, 3)$:

1. $\overrightarrow{AP} = P - A = (x, y) - (2, 3) = (x - 2, y - 3)$
2. $\frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}(x - 2, y - 3) = (\frac{3}{2}x - 3, \frac{3}{2}y - \frac{9}{2})$
3. $P' = A + \frac{3}{2}\overrightarrow{AP} = (2, 3) + (\frac{3}{2}x - 3, \frac{3}{2}y - \frac{9}{2}) = (\frac{3}{2}x - 1, \frac{3}{2}y - \frac{3}{2})$

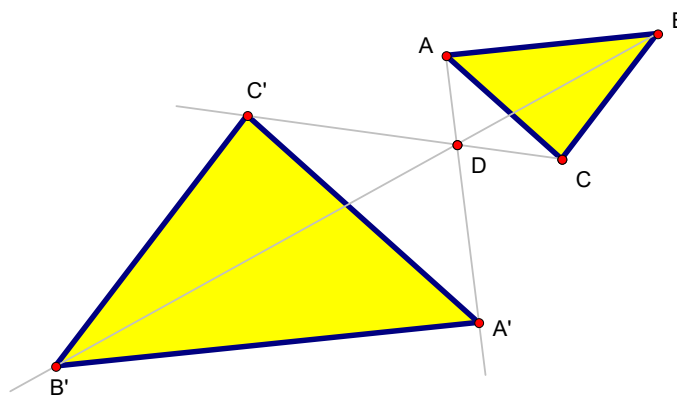
Ao fim e ao cabo, pretendemos que $\overrightarrow{AP'}$ seja $\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$.

Vejamos dois exemplos geométricos de homotetias.

Homotetia de centro D e razão 2 (A' , B' e C' são as imagens de A , B e C):



Homotetia de centro D e razão -2 :



Terminamos com a definição de semelhança:

Definição 848 *Semelhança é uma aplicação composta dum número finito de isometrias e homotetias.*

Proposição 849 *Toda a semelhança é uma aplicação composta duma homotetia após uma isometria.*

Capítulo 47

Outras Transformações Afins

Definição 850 *Transformação afim é uma aplicação do plano em si próprio tal que a imagem dum segmento de reta é um segmento de reta.*

Proposição 851 *Seja \mathcal{A} uma transformação afim. Então, se P , Q e R são pontos colineares, as imagens $\mathcal{A}(P)$, $\mathcal{A}(Q)$ e $\mathcal{A}(R)$ também o são.*

Demonstração

A imagem de $[PR]$ é o segmento de reta $[\mathcal{A}(P)\mathcal{A}(R)]$. Se Q pertence a $[PR]$, então $\mathcal{A}(Q)$ pertence a $[\mathcal{A}(P)\mathcal{A}(R)]$. Logo, $\mathcal{A}(P)$, $\mathcal{A}(Q)$ e $\mathcal{A}(R)$ são colineares.

Proposição 852 *Seja \mathcal{A} uma transformação afim. Então, \mathcal{A} é uma aplicação injectiva.*

Demonstração

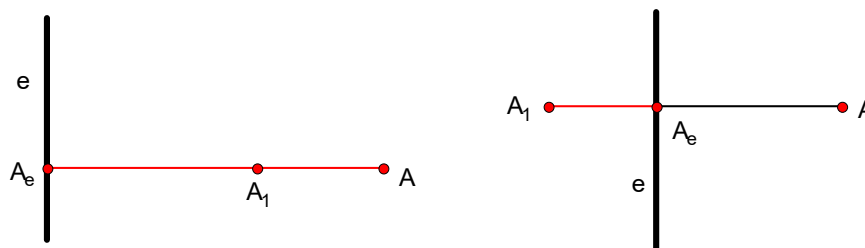
Se tivéssemos $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q)$, para dois pontos distintos P e Q , então a imagem de $[PQ]$ seria um único ponto. Então, se P e Q são distintos, $\mathcal{A}(P) \neq \mathcal{A}(Q)$, pelo que \mathcal{A} é uma aplicação injectiva.

47.1 Afinidade com eixo (Strain)

Uma afinidade (com eixo) é uma aplicação dum plano nele próprio que possui uma reta de pontos fixos (eixo da afinidade) e que transforma segmentos de reta paralelos em segmentos de reta paralelos. Uma afinidade pode ser vista como uma faixa elástica que é esticada segundo uma direcção, deformando as figuras.

Definição 853 *Afinidade de eixo e e razão r (com $r \neq 0$) é a aplicação dum plano nele mesmo tal que transforma um dado ponto A num ponto A_1 , de modo que $\overrightarrow{A_e A_1} = r \times \overrightarrow{A_e A}$, onde A_e é a projecção ortogonal do ponto A sobre a reta e .*

Na figura seguinte temos um exemplo de afinidade de razão positiva e outro de razão negativa.

**Observação 1**

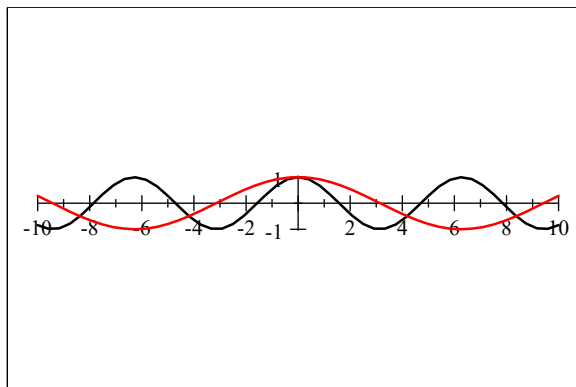
Se $r = 1$, então a afinidade é a aplicação identidade.

Se $r = -1$, então a afinidade é a simetria em relação ao eixo da afinidade.

Observação 2

Há uma situação muito comum em Matemática que pode ser encarada como uma afinidade:

Consideremos as funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos \frac{x}{2}$, de domínio \mathbb{R} , que são representadas graficamente do seguinte modo:



O gráfico de $g(x)$ obtém-se do gráfico de $f(x)$, por meio duma afinidade de razão 2 e cujo eixo é o eixo das ordenadas.

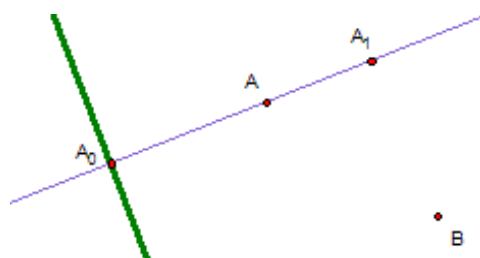
Observação 3

Na definição apresentada, considerámos que um ponto não pertencente ao eixo e a respectiva imagem definem uma reta perpendicular ao eixo, mas podíamos apresentar uma definição em que essa reta não fosse perpendicular ao eixo.

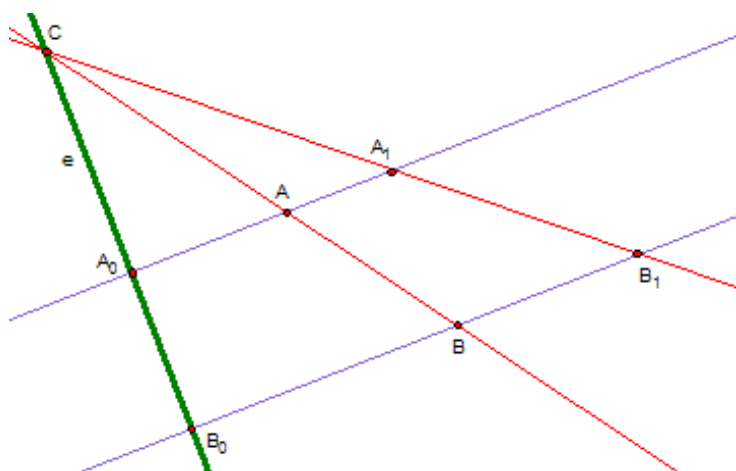
Observação 4

Há quem considere que afinidade é o mesmo que transformação afim.

Exemplo 854 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (ver figura seguinte).

**Resolução**

É claro que estamos a considerar que os pontos A e A_1 não pertencem ao eixo da afinidade, o mesmo se passando com os exemplos seguintes. A razão é que há infinitas afinidades (distintas) que transformam um ponto do eixo nele próprio e não há nenhuma afinidade que transforme um ponto do eixo noutra que não pertença ao eixo.

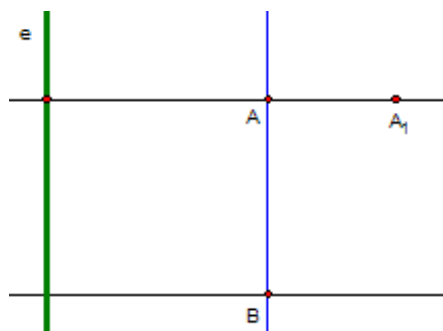
**Justificação**

Para quem conheça o Teorema de Thales, a justificação é muito fácil:

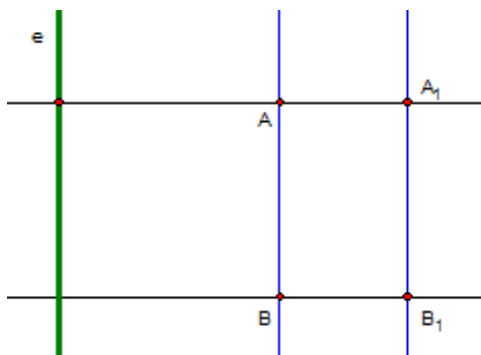
$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{B_0B_1}} = \frac{\overline{A_0A}}{\overline{B_0B}} \implies \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{B_0B_1}}{\overline{B_0B}}$$

Para quem não conheça o Teorema de Thales, tem de usar semelhanças (ou homotetias), chegando ao mesmo resultado.

Exemplo 855 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (ver figura seguinte), supondo que a reta AB é paralela ao eixo da afinidade.

**Resolução**

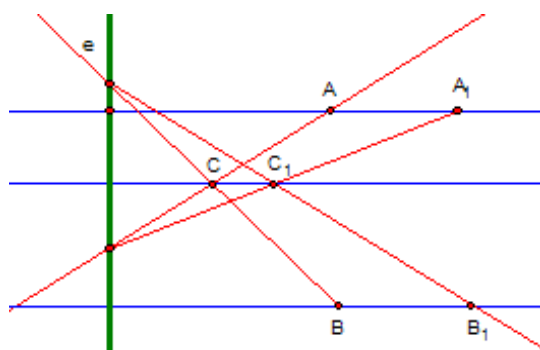
Basta traçar por A_1 uma paralela ao eixo da afinidade e por B uma perpendicular a esse eixo, obtendo-se o ponto B_1 .



Exemplo 856 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (ver figura seguinte).

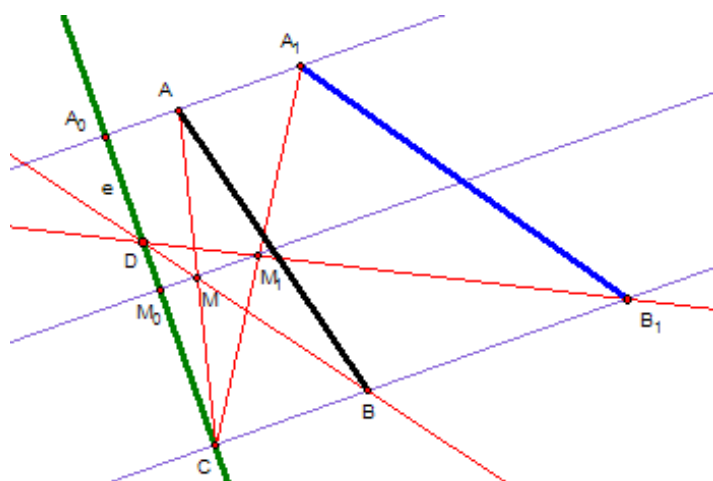
Resolução

Neste caso, não sabemos se a reta AB é (ou não) paralela ao eixo da afinidade, pelo que consideramos um ponto auxiliar C , de modo que a reta AC intersecte o eixo da afinidade nos limites do desenho. Depois, começamos por encontrar a imagem de C e, por fim, determinamos a imagem de B .



Exemplo 857 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (ver figura seguinte).

Resolução



O ponto M é o ponto médio de $[AC]$, enquanto que M_0 é o ponto médio de $[A_0C]$. A construção é perfeitamente inteligível, pelo que não a vamos descrever.

Esta construção tem vantagens em relação à construção do exemplo anterior, no caso da Geometria Dinâmica, pois, no exemplo anterior, a reta BC pode ser paralela ao eixo.

Justificação

Os triângulos $[CM_0M]$ e $[CA_0A]$ são semelhantes, o mesmo acontecendo com $[CM_0M_1]$ e $[CA_0A_1]$. Então,

$$\frac{\overline{CM_0}}{\overline{CA_0}} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} \wedge \frac{\overline{CM_0}}{\overline{CA_0}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{A_0A_1}} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{CA_1}}$$

Logo,

$$\frac{\overline{CM_0}}{\overline{CA_0}} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{A_0A_1}} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{CA_1}}$$

Analogamente, os triângulos $[DM_0M]$ e $[DCB]$ são semelhantes, o mesmo acontecendo com $[DM_0M_1]$ e $[DCB_1]$. Então,

$$\frac{\overline{DM_0}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DB}} \wedge \frac{\overline{DM_0}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{DM_1}}{\overline{DB_1}}$$

Logo,

$$\frac{\overline{DM_0}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{DM_1}}{\overline{DB_1}}$$

Então,

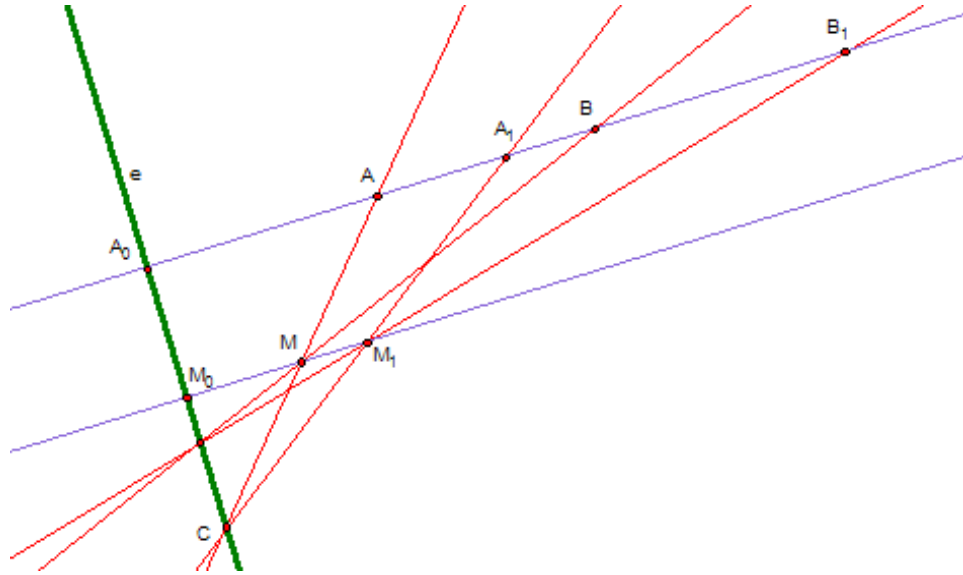
$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{M_0M}} \wedge \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{M_0M}}$$

Logo,

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CB}}$$

Exemplo 858 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (pertencente à reta AA_1).

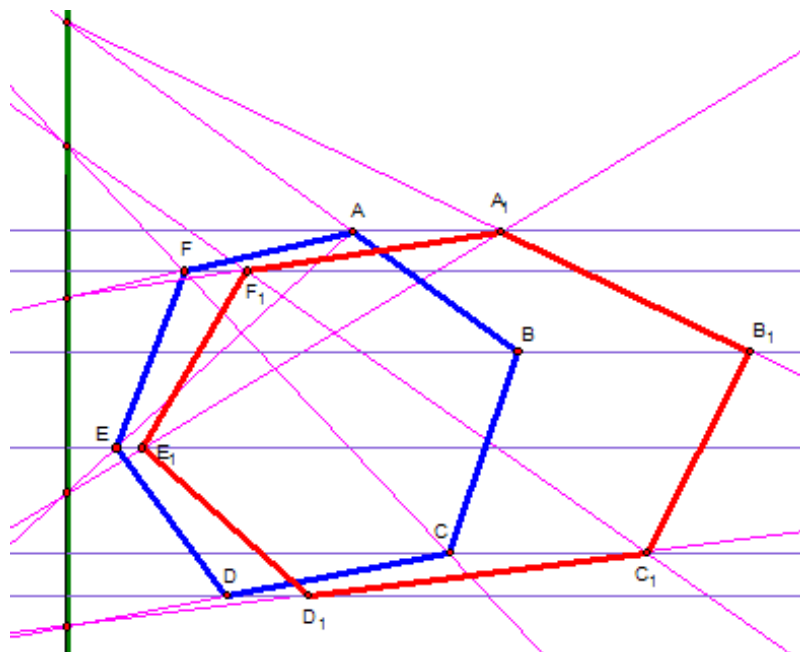
Resolução



Consideramos, sobre o eixo e , um ponto C não pertencente à reta AB . Depois, determinamos M , o ponto médio de $[AC]$.

A seguir, determinamos a imagem de M e, por fim, a imagem de B .

Exemplo 859 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do hexágono $[ABCDEF]$ (ver figura seguinte).



Exercício 860 Mostre que a aplicação composta de duas afinidades pode não ser uma afinidade.

Resolução

Consideremos a afinidade φ de razão 2 e cujo eixo é o eixo das abcissas e a afinidade ψ de razão 2 e cujo eixo é o eixo das ordenadas. Então, $\varphi(x, y) = (x, 2y)$ e $\psi(x, y) = (2x, y)$.

Logo, $(\varphi \circ \psi)(x, y) = \varphi(\psi(x, y)) = \varphi(2x, y) = (2x, 2y)$.

Então, a aplicação $\varphi \circ \psi$ não é uma afinidade, pois possui um único ponto fixo (que é a origem).

Na realidade, $(\varphi \circ \psi)(x, y) = (2x, 2y) = 2(x, y)$ é a homotetia de centro $(0, 0)$ e razão 2.

Exercício 861 Considere a afinidade de razão 3, cujo eixo é a reta s de equação $2x + 3y = 7$. Determine:

1. A imagem do ponto $A = (3, 4)$.
2. A imagem do ponto $P = (x, y)$.

Resolução

1. O ponto $B = (2, 1)$ pertence à reta s . Ora, $\overrightarrow{BA} = A - B = (3, 4) - (2, 1) = (1, 3)$.

Por outro lado, o vector $\vec{u} = (2, 3)$ é perpendicular à reta s , tendo-se que

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{BA} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{(1, 3) \cdot (2, 3)}{(2, 3) \cdot (2, 3)} (2, 3) = \frac{2+9}{4+9} (2, 3) = \left(\frac{22}{13}, \frac{33}{13} \right)$$

Sejam A_1 a imagem de A e A_0 a intersecção do eixo da afinidade com a reta que lhe é perpendicular e passa por A .

$$\text{Então, } A_0 = A - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{BA} = (3, 4) - \left(\frac{22}{13}, \frac{33}{13} \right) = \left(\frac{17}{13}, \frac{19}{13} \right).$$

$$\text{E, por fim, } A_1 = A_0 + 3 \text{proj}_{\vec{u}} \vec{BA} = \left(\frac{17}{13}, \frac{19}{13} \right) + 3 \left(\frac{22}{13}, \frac{33}{13} \right) = \left(\frac{83}{13}, \frac{118}{13} \right)$$

2. O ponto $B = (2, 1)$ pertence à reta s . Ora, $\vec{BP} = P - B = (x, y) - (2, 1) = (x - 2, y - 1)$.

Por outro lado, o vector $\vec{u} = (2, 3)$ é perpendicular à reta s , tendo-se que

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{u}} \vec{BP} &= \frac{\vec{BP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{(x-2, y-1) \cdot (2, 3)}{(2, 3) \cdot (2, 3)} (2, 3) = \left(\frac{2}{13}x + \frac{3}{13}y - \frac{7}{13} \right) (2, 3) \\ &= \left(\frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{14}{13}, \frac{6}{13}x + \frac{9}{13}y - \frac{21}{13} \right) \end{aligned}$$

Sejam P_1 a imagem de P e P_0 a intersecção do eixo da afinidade com a reta que lhe é perpendicular e passa por P .

Então,

$$\begin{aligned} P_0 &= P - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{BP} = (x, y) - \left(\frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{14}{13}, \frac{6}{13}x + \frac{9}{13}y - \frac{21}{13} \right) \\ &= \left(\frac{9}{13}x - \frac{6}{13}y + \frac{14}{13}, -\frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y + \frac{21}{13} \right) \end{aligned}$$

E, por fim,

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + 3 \text{proj}_{\vec{u}} \vec{BP} \\ &= \left(\frac{9}{13}x - \frac{6}{13}y + \frac{14}{13}, -\frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y + \frac{21}{13} \right) + 3 \left(\frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{14}{13}, \frac{6}{13}x + \frac{9}{13}y - \frac{21}{13} \right) \\ &= (x, y) + 2 \left(\frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{14}{13}, \frac{6}{13}x + \frac{9}{13}y - \frac{21}{13} \right) \\ &= \left(\frac{21}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{28}{13}, \frac{12}{13}x + \frac{31}{13}y - \frac{42}{13} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{21}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{31}{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{28}{13} \\ -\frac{42}{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se substituirmos x por 3 e y por 4, vem

$$P_1 = \left(\frac{21}{13} \times 3 + \frac{12}{13} \times 4 - \frac{28}{13}, \frac{12}{13} \times 3 + \frac{31}{13} \times 4 - \frac{42}{13} \right) = \left(\frac{83}{13}, \frac{118}{13} \right) = A_1$$

Observação

Como veremos, no exercício seguinte, o resultado obtido não depende da escolha do ponto do eixo nem do vector perpendicular.

Exercício 862 Considere a afinidade de razão $\lambda \neq 0$, cujo eixo é a reta s de equação $ax+by+c=0$, com $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Determine a imagem do ponto $P = (x, y)$, por meio da afinidade considerada.

Resolução

Seja $A = (\alpha, \beta)$ um ponto pertencente à reta s . Então, $a\alpha + b\beta + c = 0$. O vector $\vec{n} = (a, b)$ é perpendicular à reta s .

Seja $P = (X, Y)$ um ponto qualquer do plano. Então, $\vec{AP} = P - A = (X - \alpha, Y - \beta)$.

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{(X - \alpha, Y - \beta) \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)} (a, b) \\ &= \frac{aX - a\alpha + bY - b\beta}{a^2 + b^2} (a, b) \\ &= \frac{aX + bY + c}{a^2 + b^2} (a, b) \end{aligned}$$

Sejam P_1 a imagem de P e P_0 a intersecção do eixo da afinidade com a reta que lhe é perpendicular e passa por P .

Então,

$$P_0 = P - \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} = (X, Y) - \frac{aX + bY + c}{a^2 + b^2} (a, b)$$

E, por fim,

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \lambda \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} = P - \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} + \lambda \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} \\ &= P + (\lambda - 1) \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} = (X, Y) + (\lambda - 1) \frac{aX + bY + c}{a^2 + b^2} (a, b) \end{aligned}$$

Note-se que $A = (\alpha, \beta)$ e que o resultado não depende nem de α nem de β . Logo, o resultado obtido não depende do ponto que se escolha sobre o eixo da afinidade.

Suponhamos que $\vec{n} = (\mu a, \mu b)$, com $\mu \neq 0$.

Então,

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{(X - \alpha, Y - \beta) \cdot (\mu a, \mu b)}{(\mu a, \mu b) \cdot (\mu a, \mu b)} (\mu a, \mu b) \\ &= \frac{\mu (X - \alpha, Y - \beta) \cdot (a, b)}{\mu (a, b) \cdot \mu (a, b)} \mu (a, b) = \frac{\mu^2 (X - \alpha, Y - \beta) \cdot (a, b)}{\mu^2 (a, b) \cdot (a, b)} (a, b) \\ &= \frac{(X - \alpha, Y - \beta) \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)} (a, b) \end{aligned}$$

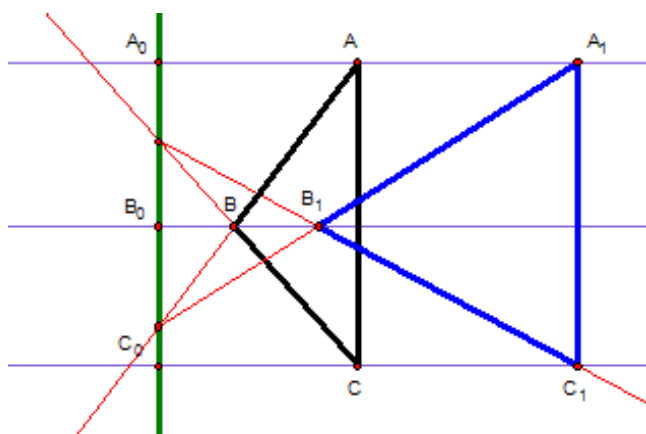
Logo, o resultado não depende de μ .

Muitas vezes escolhe-se um vector unitário, perpendicular ao eixo, ou seja, $\vec{N} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$.

A escolha anterior pode ter vantagens, a nível teórico, mas tem algumas desvantagens nos casos práticos.

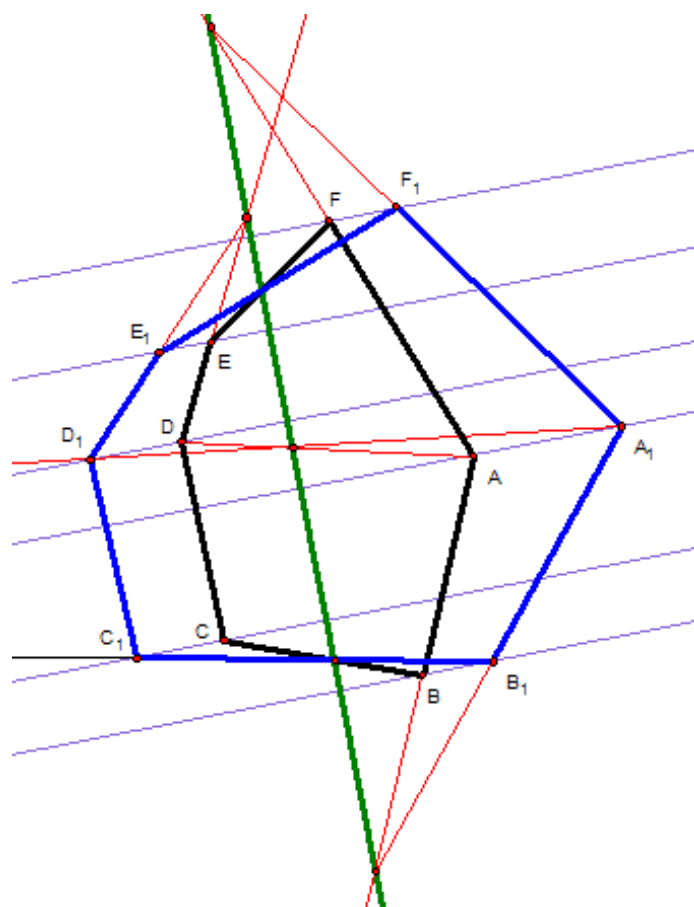
Exemplo 863 Determine a imagem do triângulo $[ABC]$ por meio da afinidade de eixo A_0B_0 que transforma A em A_1 .

Resolução



Exemplo 864 Determine a imagem do hexágono $[ABCDEF]$ por meio da afinidade cujo eixo é a reta a verde e que transforma A em A_1 .

Resolução



A reta AB intersecta o eixo da afinidade num ponto que coincide com a sua imagem. Unindo esse ponto com A_1 , obtemos uma reta que é a imagem da reta AB . Traçando, por B , uma reta perpendicular ao eixo, obtemos o ponto B_1 . Repetindo o processo, obtemos as imagens dos restantes vértices do hexágono.

47.1.1 Cisalhamento (shearing)

A palavra "cisalhamento" tem a ver com Geologia e Engenharia, por exemplo, correspondendo à existência de forças que se aplicam de maneira diferente. Imaginemos uma porta, em que a parede, na parte superior está sujeita a uma tensão da esquerda para a direita e, na parte inferior, a uma tensão da direita para a esquerda. Mais tarde ou mais cedo, a porta vai deixar de funcionar bem. O facto descrito também pode acontecer em placas geológicas.

Cisalhamento Horizontal

Se considerarmos o plano, podemos imaginar uma transformação geométrica em que cada ponto sofre uma translação, só que essa translação não é a mesma para todos os pontos.

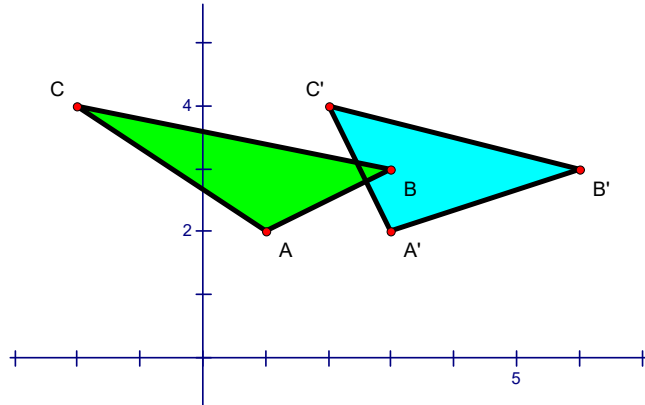
Passemos a descrever a transformação:

Se um ponto está no eixo das abscissas, então a sua imagem é o próprio ponto. Se um ponto está acima do eixo das abscissas, sofre uma translação para a direita, mantendo a ordenada e somando à abscissa o valor da ordenada. Isto significa que, ao longo da recta $y = 2$, os pontos se deslocam duas unidades para a direita. Mas, ao longo da recta $y = 4$, já se deslocam quatro unidades para a direita. É claro que abaixo do eixo das abscissas, o deslocamento vai fazer-se para a esquerda. No caso geral, em vez de somarmos a ordenada, somamos um valor proporcional à ordenada (digamos λy). É claro que, se $\lambda = 0$, obtemos a aplicação identidade. E se $\lambda < 0$, então os pontos deslocam-se em sentido contrário ao caso em que $\lambda > 0$.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 865 Consideremos a transformação Linear definida por $T(x, y) = (x, y) + (y, 0) = (x + y, y)$ e determinemos a imagem do triângulo $[ABC]$, em que $A = (1, 2)$, $B = (3, 3)$ e $C = (-2, 4)$.

Resolução geométrica



Resolução algébrica

Seja $T(x, y) = (x, y) + (y, 0) = (x + y, y)$. Então,
$$\begin{cases} T(1, 2) = (3, 2) \\ T(3, 3) = (6, 3) \\ T(-2, 1) = (2, 4) \end{cases}$$

Relativamente à aplicação linear dada, podemos querer saber quais os seus pontos fixos, isto é, quais os pontos que ficam inalterados pela aplicação.

Então, temos de resolver a equação (ou o sistema de equações) $T(x, y) = (x, y)$.

Então, devemos ter $(x, y) + (y, 0) = (x, y)$, pelo que $y = 0$ e x pode assumir qualquer valor. Então, qualquer ponto do eixo das abscissas é um ponto fixo, não havendo mais pontos fixos.

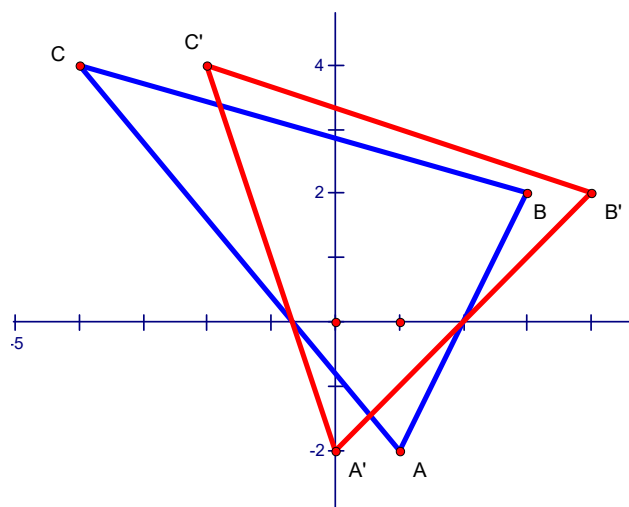
No entanto, há outras rectas que também não são "alteradas", pois a imagem de cada uma dessas rectas é a própria recta, embora a imagem de cada ponto da recta seja diferente do próprio ponto. Por exemplo, ao longo da recta de equação $y = 4$, todos os pontos se deslocam 4 unidades para a direita, permanecendo sobre essa recta.

Logo a Transformação linear dada fixa todas as rectas horizontais globalmente e fixa o eixo das abcissas ponto a ponto (pontualmente).

Exemplo 866 Consideremos a transformação Linear definida por $T(x, y) = (x, y) + (\frac{y}{2}, 0) = (x + \frac{y}{2}, y)$ e determinemos a imagem do triângulo $[ABC]$, em que $A = (1, -2)$, $B = (3, 2)$ e $C = (-4, 4)$.

Resolução

$$\text{Então, } \begin{cases} T(1, -2) = (0, -2) \\ T(3, 2) = (4, 2) \\ T(-4, 4) = (-2, 4) \end{cases}$$



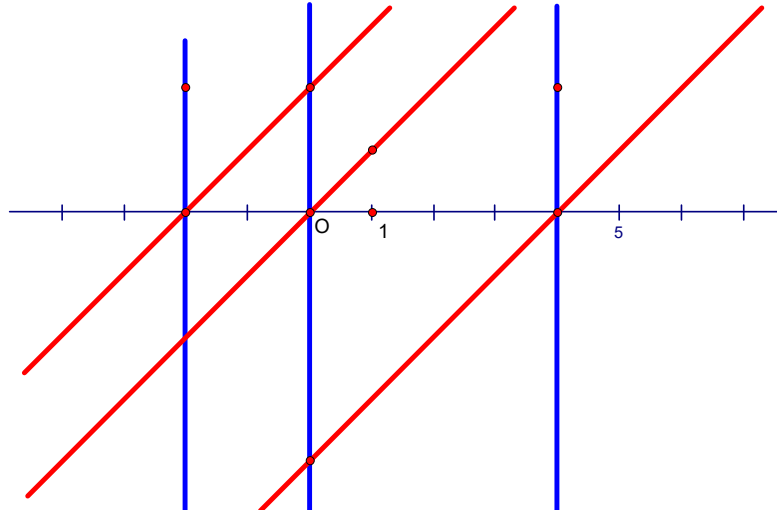
Exemplo 867 Consideremos a transformação Linear definida por $T(x, y) = (x, y) + (y, 0) = (x + y, y)$ e determinemos a imagem das rectas $x = -2$, $x = 0$ e $x = 4$.

Resolução

Como $T(-2, y) = (y - 2, y)$, temos que podemos dizer que $x = y - 2$, donde vem a equação habitual $y = x + 2$.

Analogamente, temos $\begin{cases} T(0, y) = (y, y) \\ T(4, y) = (y + 4, y) \end{cases}$, donde obtemos as rectas $x = y$ e $x = y + 4$.

Então, as equações reduzidas das três rectas são: $y = x + 2$, $y = x$, $y = x - 4$, tendo-se que as três rectas são paralelas (todas têm declive 1).



E quais serão as imagens das rectas definidas por $y = 2x$ e por $y = 2x + 4$?

Comecemos pela recta $y = 2x$. Ora, $T(x, 2x) = (3x, 2x)$. Fazendo $3x = X$ e $2x = Y$, obtemos $x = \frac{X}{3}$ e $Y = \frac{2}{3}X$. Então, obtivemos uma recta de declive $\frac{2}{3}$.

Por outro lado, temos $T(x, 2x + 4) = (3x + 4, 2x + 4)$, pelo que fazendo $3x + 4 = X$ e $2x + 4 = Y$, obtemos $x = \frac{X-4}{3}$ e $Y = 2\left(\frac{X-4}{3}\right) + 4 = \frac{2}{3}X + \frac{4}{3}$.

Logo, a imagem da recta de equação $y = 2x + 4$ é a recta de equação $Y = \frac{2}{3}X + \frac{4}{3}$, ou se preferirmos, a recta de equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$. E obtivemos uma segunda recta de declive $\frac{2}{3}$ (paralela à anterior).

Observação

Em rigor, o que fizemos foi provar que a imagem duma recta estava contida noutra recta. Desse modo, ainda falta mostrar que qualquer ponto da segunda recta é imagem de um ponto da primeira recta. Isso pode ser feito de muitas maneiras, mas uma delas consiste em provar aquilo que foi afirmado.

Seja (X_0, Y_0) um ponto da recta de equação $Y = \frac{2}{3}X + \frac{4}{3}$. Então, $Y_0 = \frac{2}{3}X_0 + \frac{4}{3}$. Mas, $T(x, y) = (x + y, y)$, pelo que pretendemos encontrar (x, y) , tal que $T(x, y) = (X_0, Y_0) = (X_0, \frac{2}{3}X_0 + \frac{4}{3})$.

Então, $(X_0, \frac{2}{3}X_0 + \frac{4}{3}) = (x + y, y)$, pelo que $\begin{cases} y = \frac{2}{3}X_0 + \frac{4}{3} \\ x + y = X_0 \end{cases}$.

Logo, $\begin{cases} y = \frac{2}{3}X_0 + \frac{4}{3} \\ x = X_0 - \frac{2}{3}X_0 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}X_0 - \frac{4}{3} \end{cases}$.

Apenas falta mostrar que este ponto pertence à recta inicial (de equação $y = 2x + 4$).

Ora, $2x + 4 = 2\left(\frac{1}{3}X_0 - \frac{4}{3}\right) + 4 = \frac{2}{3}X_0 + \frac{4}{3} = y$. Logo, $(X_0, \frac{2}{3}X_0 + \frac{4}{3}) = T\left(\frac{1}{3}X_0 - \frac{4}{3}, \frac{2}{3}X_0 + \frac{4}{3}\right)$.

Exemplo 868 Consideremos a transformação Linear definida por $T(x, y) = (x, y) + (y, 0) = (x + y, y)$ e determinemos a imagem da recta $y = mx + b$.

Resolução

Então, $T(x, y) = T(x, mx + b) = (x + mx + b, mx + b)$. Se $m = 0$, temos $T(x, b) = (x + b, b)$, pelo que a imagem dum ponto da recta $y = b$ é um ponto da mesma recta. Por isso, a imagem da

recta $y = b$ é a própria recta, embora nenhum ponto seja transformado em si próprio, se tivermos $b \neq 0$.

Se $m = -1$, obtemos $T(x, -x + b) = (b, b - x)$ que é ponto da recta $x = b$.

Se $m \neq -1$, então fazemos $(x + mx + b, mx + b) = (X, Y)$, donde vem $\begin{cases} (m+1)x + b = X \\ mx + b = Y \end{cases}$.

Logo, $\begin{cases} x = \frac{X-b}{m+1} \\ m\left(\frac{X-b}{m+1}\right) + b = Y \end{cases}$, ou seja, $Y = \frac{m}{m+1}X + \frac{b}{m+1}$.

Logo, rectas paralelas são transformadas em rectas paralelas (entre si e não às rectas iniciais).

Há rectas oblíquas que são transformadas em rectas verticais (as rectas de declive -1).

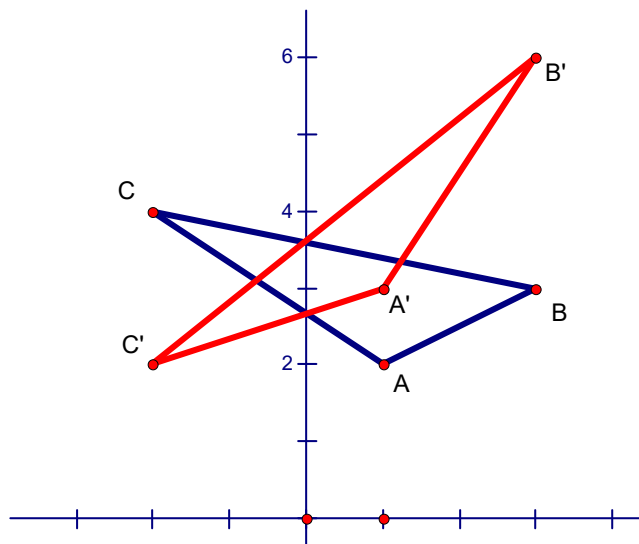
Note-se que, no exemplo anterior, vimos que a imagem da recta de equação $y = 2x + 4$ era a recta de equação $Y = \frac{2}{3}X + \frac{4}{3}$.

Então, basta fazer, em $Y = \frac{m}{m+1}X + \frac{b}{m+1}$, $m = 2$ e $b = 4$, obtendo-se $Y = \frac{2}{2+1}X + \frac{4}{2+1} = \frac{2}{3}X + \frac{4}{3}$.

Cisalhamento Vertical

Exemplo 869 Consideremos a transformação Linear definida por $T(x, y) = (x, y) + (0, x) = (x, x + y)$ e determinemos a imagem do triângulo $[ABC]$, em que $A = (1, 2)$, $B = (3, 3)$ e $C = (-2, 4)$.

Então, $T(1, 2) = (1, 3)$, $T(3, 3) = (3, 6)$ e $T(-2, 4) = (-2, 2)$.



Neste caso, os pontos com abcissa negativa "descem" e os pontos com abcissa positiva "sobem". Os pontos de abcissa nula ficam fixos.

Vejam os pontos fixos da aplicação:

$$T(x, y) = (x, y) \iff (x, x + y) = (x, y) \iff \begin{cases} x = x \\ x + y = y \end{cases} \iff x = 0$$

Então, a imagem de um ponto do eixo das ordenadas é o próprio ponto, não havendo nenhum outro ponto fixo.

Como T mantém a abscissa, a imagem duma recta vertical é a própria recta, embora (em geral) a imagem de cada ponto da recta não seja o próprio ponto. Ou seja, T fixa globalmente as rectas verticais (sendo que T fixa pontualmente o eixo das ordenadas, como já vimos).

De $T(k, y) = (k, k + y)$, temos que a imagem da recta $x = k$ é a própria recta, só havendo pontos fixos (na recta $x = k$), se $k = 0$.

Qual é a imagem da recta $y = 2x + 3$?

Ora, $T(x, 2x + 3) = (x, 3x + 3)$, ou seja, a imagem pedida é a recta $y = 3x + 3$.

E qual é a imagem da recta $y = x + 2$?

Como $T(x, x + 2) = (x, 2x + 2)$, temos a recta $y = 2x + 3$.

Qual é a imagem da recta $y = -x + 2$?

Como $T(x, -x + 2) = (x, 2)$, temos a recta $y = 2$.

Qual é a imagem da recta $y = b$?

Como $T(x, b) = (x, x + b)$, temos a recta $y = x + b$.

Qual é a imagem da recta $y = x$?

Como $T(x, x) = (x, 2x)$, temos a recta $y = 2x$.

Qual é a imagem da recta $y = x + 1$?

Como $T(x, x + 1) = (x, 2x + 1)$, temos a recta $y = 2x + 1$.

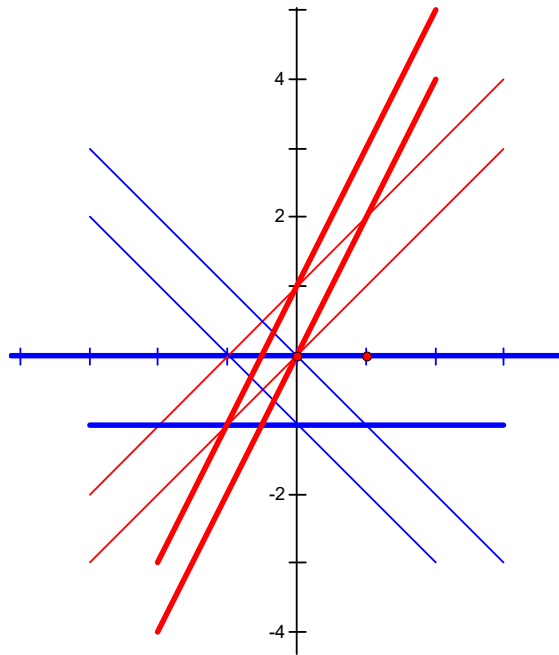
Qual é a imagem da recta $y = -x$?

Como $T(x, x) = (x, 0)$, temos a recta $y = 0$.

Qual é a imagem da recta $y = -x - 1$?

Como $T(x, -x - 1) = (x, -1)$, temos a recta $y = -1$.

Eis uma figura com a imagem das últimas quatro rectas que acabámos de referir:



Observação

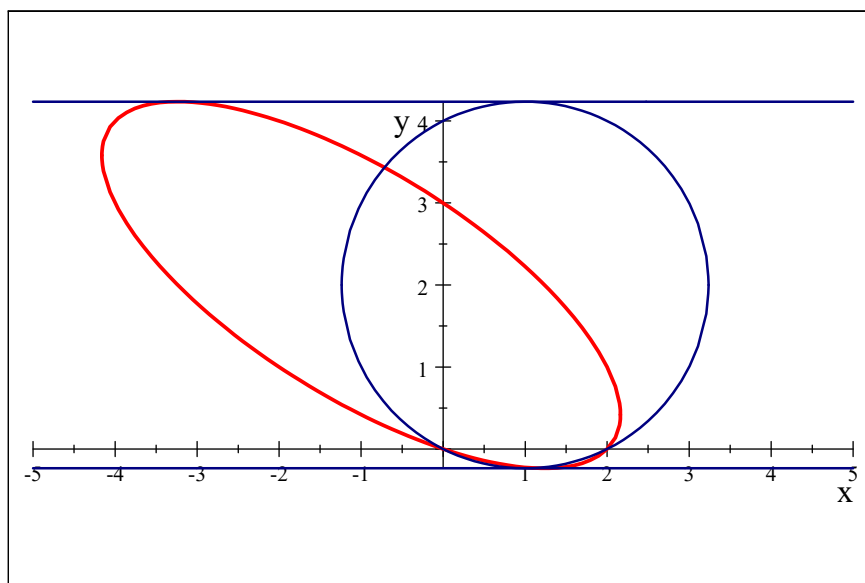
É claro que podemos considerar cisalhamentos do género de $T(x, y) = (x - y, y)$ e cisalhamentos em que os pontos fixos estejam numa recta oblíqua. Este último caso pode ser resolvido directamente, mas torna-se mais fácil usar rotações.

Consideremos a aplicação $T(x, y) = (x - y, y)$ e a circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Qual é a imagem (por T) desta circunferência?

Ora, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \iff y = 2 \pm \sqrt{4 + 2x - x^2}$, pelo que desenhemos o gráfico de duas funções (para obtermos a circunferência). Fazendo a mudança de variáveis $\begin{cases} x - y = X \\ y = Y \end{cases}$, vem $(X + Y - 1)^2 + (Y - 2)^2 = 5$. Mas,

$$\begin{aligned} (X + Y - 1)^2 + (Y - 2)^2 = 5 &\iff X^2 + 2XY - 2X + Y^2 - 2Y + 1 + Y^2 - 4Y + 4 = 5 \\ &\iff 2Y^2 - 6Y + 2XY + X^2 - 2X = 0 \\ &\iff 2Y^2 + (2X - 6)Y + X^2 - 2X = 0 \\ &\iff Y = \frac{-X + 3 \pm \sqrt{X^2 - 6X + 9 - 2X^2 + 4X}}{2} \\ &\iff Y = \frac{-X + 3 \pm \sqrt{-X^2 - 2X + 9}}{2} \end{aligned}$$

E, por fim, consideramos as duas funções definidas por $y = \frac{-x+3 \pm \sqrt{-x^2-2x+9}}{2}$, cujos gráficos estão desenhados, na figura seguinte (além dos gráficos das duas funções que definem a circunferência):



Na figura anterior, podemos ver um deslocamento para a esquerda (acima do eixo das abcissas) e um deslocamento para a direita (abaixo do eixo das abcissas).

Podemos definir a aplicação $T(x, y) = (x - y, y)$, usando matrizes. Assim, teremos

$$T(x, y) = (x - y, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

No caso da aplicação $T(x, y) = (x + \frac{y}{2}, y)$, que já vimos num exemplo anterior, temos

$$T(x, y) = (x + \frac{y}{2}, y) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

No exemplo de cisalhamento vertical apresentado, temos

$$T(x, y) = (x, x + y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Repare-se que, no caso do cisalhamento horizontal, temos uma matriz diagonal superior, com as entradas da diagonal principal iguais a 1. No caso do cisalhamento vertical, temos uma matriz diagonal inferior, com as entradas da diagonal principal iguais a 1.

Logo, o cisalhamento horizontal corresponde às matrizes do tipo $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $\lambda \neq 0$ e o cisalhamento vertical corresponde às matrizes do tipo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$, com $\lambda \neq 0$.

É claro que podemos combinar cada um dos dois tipos de cisalhamento apresentados com uma rotação, obtendo-se novos tipos de cisalhamento.

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos que a aplicação composta de dois cisalhamentos verticais é um cisalhamento vertical e a aplicação composta de dois cisalhamentos horizontais é um cisalhamento horizontal (desde que $a + b \neq 0$), ou seja, se as duas matrizes não forem inversas uma da outra.

Já a aplicação composta dum cisalhamento vertical com um cisalhamento horizontal não é um cisalhamento:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + y \end{bmatrix}$$

Pontos fixos:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{2}x + y = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Existe um único ponto fixo.

E o mesmo acontece se trocarmos a ordem das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}y \end{bmatrix}, \text{ sendo que esta aplicação só tem um ponto fixo.}$$

47.1.2 Afinidade

No capítulo anterior, já vimos as afinidades com eixo. Agora, vamos dar alguns exemplos, utilizando transformações lineares.

Exemplo 870 Consideremos a transformação linear T definida por $T(x, y) = (2x, y)$ e determinemos as imagens de alguns pontos e de algumas rectas.

Resolução

Em primeiro lugar, temos que $T(0, y) = (0, y)$, pelo que T fixa os pontos do eixo das ordenadas. Além disso, temos que $T(x, 0) = (2x, 0)$, pelo que a imagem dum ponto situado no eixo das abcissas fica nesse mesmo eixo. No entanto, a origem do referencial é o único ponto desse eixo que fica fixo. E acontece algo de semelhante com as rectas horizontais. Assim, $T(x, k) = (2x, k)$, pelo que a imagem dum ponto da recta $y = k$ pertence à mesma recta $y = k$. No entanto, o ponto $(0, k)$ é o único ponto da recta $y = k$ que fica fixo.

Para encontrarmos os pontos fixos, basta resolver a condição $T(x, y) = (x, y)$.

Como $T(x, y) = (2x, y)$, temos $(2x, y) = (x, y)$. Então, $2x = x$, donde vem $x = 0$, podendo y ser qualquer.

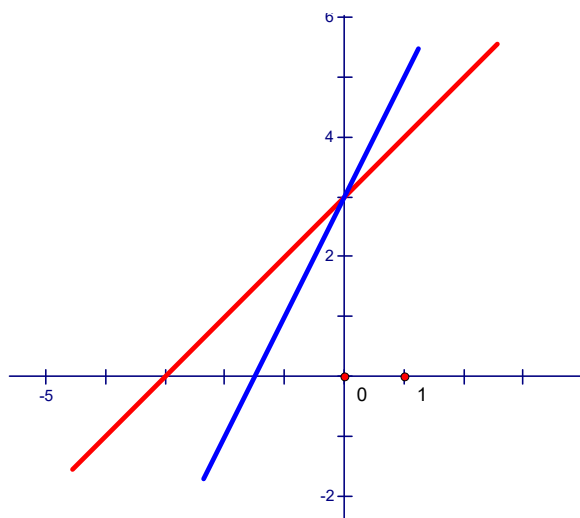
Imagens de alguns pontos:

$$\begin{cases} T(0, 2) = (0, 2) \\ T(1, 2) = (2, 2) \\ T(2, 2) = (0, 2) \\ T(-1, 2) = (-2, 2) \\ T(-1, 2) = (-4, 2) \end{cases}$$

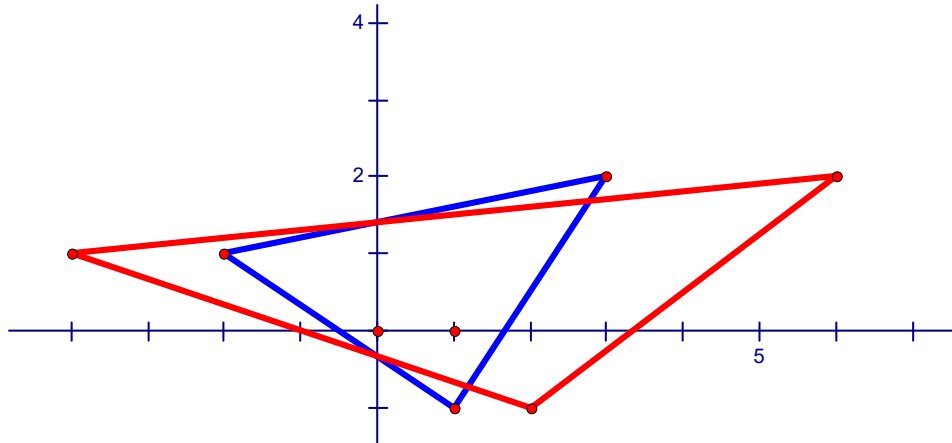
Como já vimos, a imagem duma recta horizontal é uma recta horizontal (em bom rigor, ainda falta mostrar alguma coisa).

Como $T(k, y) = (2k, y)$, a imagem dum ponto da recta $x = k$ pertence à recta $x = 2k$ (o recíproco é manifestamente verdadeiro: qualquer ponto da recta $x = 2k$ é imagem de algum ponto da recta $x = k$. Por exemplo, $(2k, \pi) = T(k, \frac{\pi}{2})$. Mais geralmente, $(2k, y) = T(k, \frac{y}{2})$.

Como calcular a imagem da recta $y = 2x + 3$? Um ponto genérico da recta é $(x, 2x + 3)$, pelo que $T(x, 2x + 3) = (2x, 2x + 3)$. Fazendo $2x = X$ e $2x + 3 = Y$, temos $Y = X + 3$.



Se tivermos o triângulo $[ABC]$, com $A = (-2, 1)$, $B = (1, -1)$ e $C = (3, 2)$, temos $T(-2, 1) = (-4, 1)$, $T(1, -1) = (2, -1)$, $T(3, 2) = (6, 2)$:



Afinidade de eixo vertical ($x = 0$): $T_v(x, y) = (\lambda x, y)$, com $\lambda \neq -1, \lambda \neq 0, \lambda \neq 1$.

Afinidade de eixo horizontal ($y = 0$): $T_h(x, y) = (\lambda x, y)$, com $\lambda \neq -1, \lambda \neq 0, \lambda \neq 1$.

Usando matrizes, temos $T_v(x, y) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ y \end{bmatrix} = (\lambda x, y)$ e $T_h(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \lambda y \end{bmatrix} = (x, \lambda y)$.

Observação

Há várias possibilidades na definição de afinidade (com eixo). Se quisermos, podemos restringir a noção de afinidade, considerando que $\lambda > 0 \wedge \lambda \neq 1$. Este caso corresponde a ter uma banda elástica e puxar as duas extremidades em sentidos contrários. Repare-se que o caso $\lambda < 0 \wedge \lambda \neq -1$ corresponde a puxar as extremidades e dar meia volta.

Há outra questão que tem a ver com a aplicação Identidade. Devemos considerá-la uma afinidade? Ou um cisalhamento? Se quisermos ter um Grupo (estrutura algébrica), então devemos considerar que a Identidade é uma afinidade e um cisalhamento. Mas temos de ter em consideração que a identidade define uma isometria, pelo que não provoca deformações.

A definição mais coerente é considerarmos a Identidade uma afinidade (e um cisalhamento), pelo que na definição anterior, só deveria estar $\begin{cases} T_v(x, y) = (\lambda x, y) \\ T_h(x, y) = (\lambda x, y) \end{cases}$, com $\lambda \neq 0$.

Repare-se que só há deformação, se $\lambda \neq -1 \wedge \lambda \neq 1$. O caso $\lambda = 0$ será tratado independentemente, pois não é uma aplicação bijetiva.

Note-se que $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pelo que T_v e T_h comutam.

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, então $(T_v \circ T_h)(x, y) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e temos uma Homotetia de centro na Origem e razão λ . Se $\lambda = 1$, temos a aplicação identidade. Se $\lambda = -1$, temos a Simetria em relação à origem (ou meia volta, em relação à origem).

47.1.3 Homotetia

Homotetia de centro na Origem e razão λ (com $\lambda \neq 0$) é a aplicação definida por $T(x, y) = (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x, y)$.

Pontos fixos:

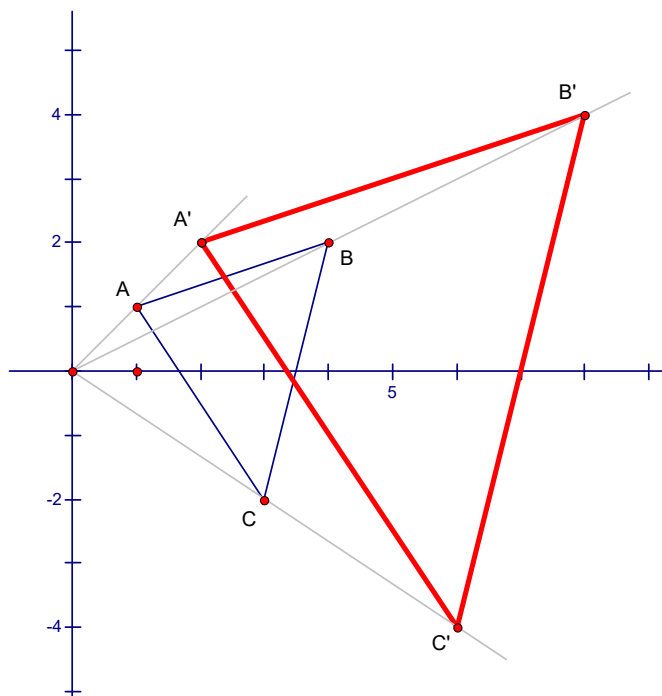
$$\begin{aligned} T(x, y) = (x, y) &\iff (\lambda x, \lambda y) = (x, y) \iff \begin{cases} \lambda x = x \\ \lambda y = y \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x - x = 0 \\ \lambda y - y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\lambda - 1)x = 0 \\ (\lambda - 1)y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Se $\lambda = 1$, então todos os pontos do plano são pontos fixos (trata-se da aplicação identidade). Se $\lambda \neq 1$, então há um único ponto fixo (a origem do referencial).

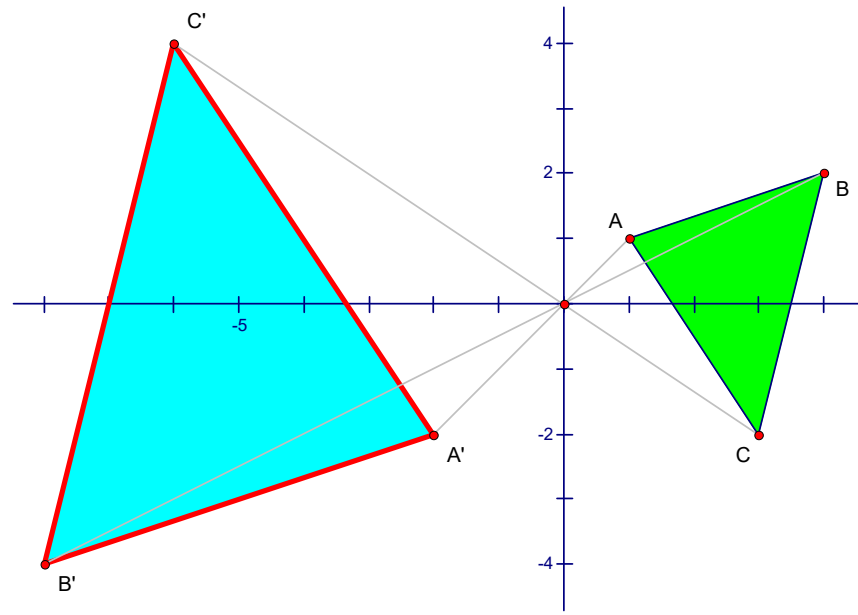
Se $|\lambda| > 1$, a homotetia é uma ampliação. Se $|\lambda| = 1$, a homotetia é uma isometria. Se $0 < |\lambda| < 1$, a homotetia é uma redução.

Note-se que se $\lambda = -1$, a homotetia é a simetria em relação à origem do referencial.

Na figura seguinte, temos a imagem dum triângulo por meio duma homotetia de centro $(0, 0)$ e razão 2.



Os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ dizem-se semelhantes. As Homotetias mantêm os ângulos e a "forma". Na figura anterior, os lados de $[A'B'C']$ são directamente paralelos aos lados de $[ABC]$. Tal não acontece, quando a razão é negativa (exemplo seguinte).



No caso da figura anterior, temos uma homotetia de centro $(0,0)$ e razão -2 . Neste caso, os lados são inversamente paralelos.

Como se define uma homotetia de centro $(1,2)$ e razão 2 ?

A questão anterior pode ser colocada noutras situações, como (por exemplo) a rotação de 90° , em torno do ponto $(1,2)$.

Como o centro da homotetia tem de ficar fixo e sabemos definir a imagem de qualquer ponto se o centro da homotetia for a origem do referencial, procedemos da seguinte maneira: Fazemos uma translação que leve o ponto $(1,2)$ para a origem, fazemos a homotetia e desfazemos a translação.

Se representarmos a translação por τ e a homotetia por \mathcal{H} , podemos escrever:

$$\begin{cases} \tau_{(-1,-2)}(x,y) = (x,y) + (-1,-2) = (x-1,y-2) \\ \mathcal{H}_{((0,0),2)}(x-1,y-2) = 2(x-1,y-2) = (2x-2,2y-4) \\ \tau_{(1,2)}(2x-2,2y-4) = (2x-2,2y-4) + (1,2) = (2x-1,2y-2) \end{cases}$$

Também podemos escrever da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{((1,2),2)}(x,y) &= (\tau_{(1,2)} \circ \mathcal{H}_{((0,0),2)} \circ \tau_{(-1,-2)})(x,y) = (\tau_{(1,2)} \circ \mathcal{H}_{((0,0),2)})(\tau_{(-1,-2)}(x,y)) \\ &= (\tau_{(1,2)} \circ \mathcal{H}_{((0,0),2)})(x-1,y-2) = \tau_{(1,2)}(\mathcal{H}_{((0,0),2)}(x-1,y-2)) \\ &= \tau_{(1,2)}(2x-2,2y-4) = (2x-2,2y-4) + (1,2) = (2x-1,2y-2) \end{aligned}$$

Para a rotação acima referida, começamos por referir que

$$\mathcal{R}_{((0,0),90^\circ)}(x,y) = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Então, teremos:

$$\mathcal{R}_{((0,0),90^\circ)}(x-1,y-2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \tau_{(-1,-2)}(x,y) = (x,y) + (-1,-2) = (x-1,y-2) \\ \mathcal{R}_{((0,0),2)}(x-1,y-2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-y \\ x-1 \end{bmatrix} \\ \tau_{(1,2)}(2-y,x-1) = (2-y,x-1) + (1,2) = (3-y,x+1) \end{cases}$$

De maneira mais simples:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-y \\ x+1 \end{bmatrix}$$

Passo a passo:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} \\ 2. \quad & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-y \\ x-1 \end{bmatrix} \\ 3. \quad & \begin{bmatrix} 2-y \\ x-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-y \\ x+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Caso geral: Rotação do ponto (x,y) , de α rad e em torno do ponto $A = (x_A, y_A)$

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{bmatrix} \\ 2. \quad & \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha - x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha - y_A \cos \alpha - x_A \sin \alpha \end{bmatrix} \\ 3. \quad & \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha - x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha - y_A \cos \alpha - x_A \sin \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A + x \cos \alpha - y \sin \alpha - x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha \\ y_A + y \cos \alpha + x \sin \alpha - y_A \cos \alpha - x_A \sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $A = (1, 2)$, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 + x \cos \frac{\pi}{2} - y \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} \\ 2 + y \cos \frac{\pi}{2} + x \sin \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-y \\ x+1 \end{bmatrix}, \text{ como anteriormente.}$$

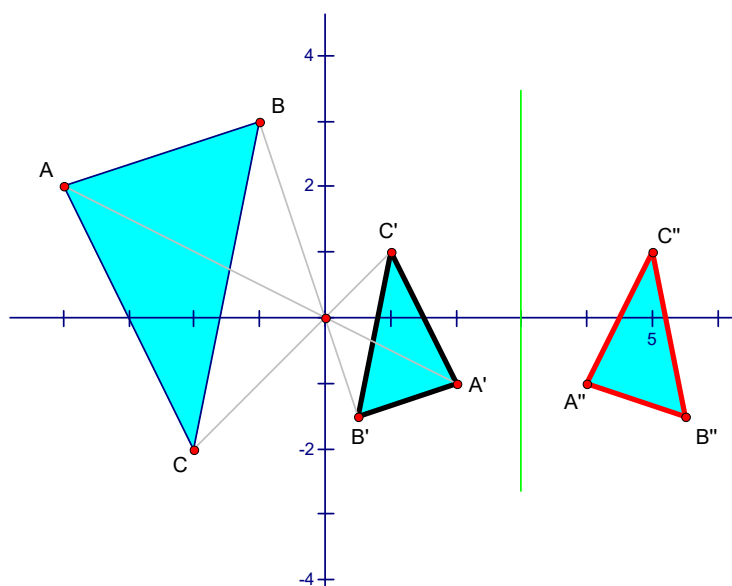
47.1.4 Semelhança

Semelhança é uma aplicação composta duma homotetia com uma isometria. Note-se que qualquer homotetia é uma semelhança positiva (mantém os ângulos orientados, mas é mais fácil de perceber se dissermos que transforma a mão esquerda na mão esquerda).

Uma semelhança negativa é uma semelhança que resulta da aplicação composta duma homotetia com uma isometria negativa. Então, uma semelhança negativa transforma a mão esquerda na mão direita e inverte a orientação dos ângulos.

Relembre-se que há dois tipos de isometrias negativas: a simetria em relação a uma recta (reflexão) e a reflexão deslizante.

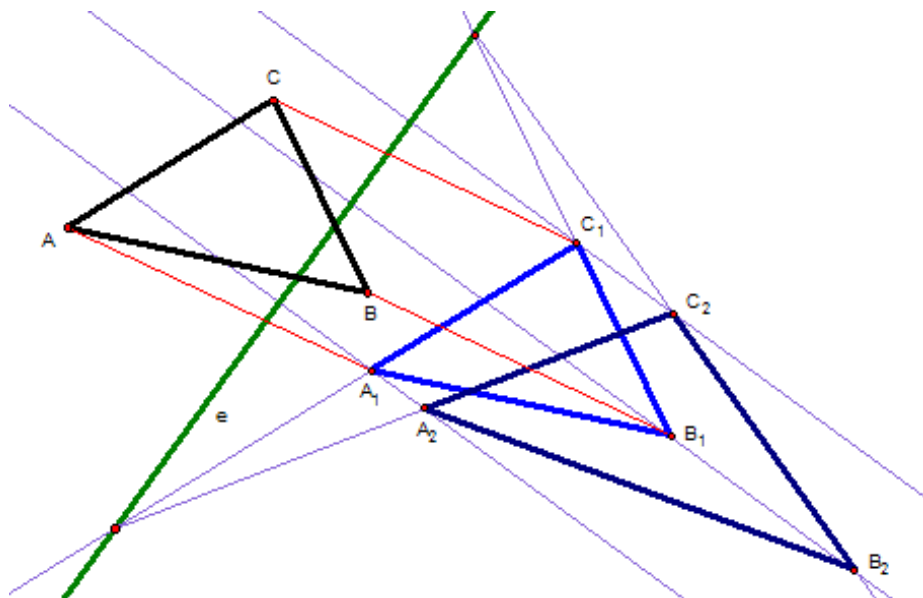
Um exemplo de semelhança negativa:



47.2 Transformações Afins (Bijectivas)

Definição 871 *Transformação afim é uma aplicação composta dum translação após uma aplicação linear (bijetiva).*

Observação



A aplicação que transforma $[ABC]$ em $[A_2B_2C_2]$ não é uma afinidade, porque as retas AA_2 , BB_2 e CC_2 não são paralelas, nem é uma semelhança.

Exemplo 872 Suponhamos que $g(x, y) = (x, 2y)$ e $f(x, y) = (x + 2, y + 3)$.

Então,

$$(g \circ f)(x, y) = g(x + 2, y + 3) = (x + 2, 2y + 6)$$

Pontos fixos: Não há, porque $(x + 2, 2y + 6) = (x, y)$ é uma equação impossível.

Consideremos os pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$. Então, $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = 1$ e $\overline{BC} = \sqrt{2}$.

Por outro lado, $(g \circ f)(0, 0) = (2, 6)$, $(g \circ f)(1, 0) = (3, 6)$ e $(g \circ f)(0, 1) = (2, 8)$.

Logo, a distância entre $(g \circ f)(0, 0)$ e $(g \circ f)(1, 0)$ é 1 e a distância entre $(g \circ f)(0, 0)$ e $(g \circ f)(0, 1)$ é 2.

Representemos a distância entre dois pontos X e Y por $d(X, Y)$.

Então, $d(A, B) = d((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)) = 1$ e $1 = d(A, C) \neq d((g \circ f)(A), (g \circ f)(C)) = 2$, pelo que a aplicação g não é uma semelhança.

47.3 Transformações Lineares Não Bijectivas

Uma das Transformações lineares não bijectivas é a aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , definida por $T(x, y) = (0, 0)$, para qualquer par de elementos de \mathbb{R}^2 .

Podemos usar matrizes, tendo-se que $T(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (0, 0)$.

Para quem sabe alguma coisa sobre matrizes e espaços vectoriais, podemos afirmar que o contradomínio é um subespaço (de \mathbb{R}^2) de dimensão zero, valor este que é a característica da matriz nula.

Esta é uma aplicação tão simples que nem adianta estar a tecer mais considerações sobre a mesma.

Exemplo 873 Consideremos a aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , definida por $T(x, y) = (x, 0)$, para qualquer par de elementos de \mathbb{R}^2 .

Como $T(x, 0) = (x, 0)$, a imagem de qual ponto do eixo das abcissas é o próprio ponto, pelo que temos uma recta de pontos fixos. E não há outros pontos fixos.

Além disso, temos que $T(0, y) = (0, 0)$, pelo que a imagem do eixo das ordenadas é um único ponto. Deste facto, já podemos concluir que a aplicação não é injectiva (nem bijectiva). E como não existe um ponto cuja imagem seja $(0, 1)$, por exemplo, podemos concluir que a aplicação não é sobrejectiva.

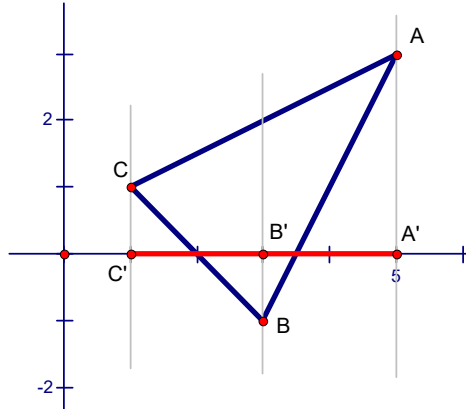
E como $T(k, y) = (0, 0)$, temos que a imagem duma recta vertical é um só ponto (o ponto de intersecção da recta com o eixo das abcissas).

A esta aplicação, é costume dar-se o nome de " projecção no eixo das abcissas".

Usando matrizes, temos que $T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = (x, 0)$. Neste caso, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica 1, e o contradomínio da aplicação também um subespaço de dimensão 1.

Por fim, como $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, não existe matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pelo que a aplicação T não é bijectiva.

Segue-se a imagem dum triângulo:

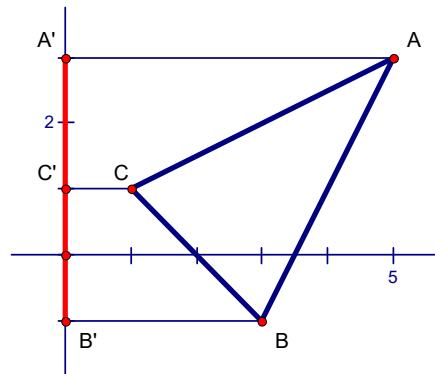


Exemplo 874 Consideremos a aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , definida por $T(x, y) = (0, y)$, para qualquer par de elementos de \mathbb{R}^2 .

Esta função é muito semelhante à anterior, mas a Projectão faz-se sobre o eixo das ordenadas. Neste caso, a imagem duma recta horizontal é um só ponto: $T(x, k) = (0, k)$.

Matricialmente, temos que $T(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = (0, y)$.

Imagem dum triângulo:



Além dos dois exemplos acabados de apresentar, há outros em que o contradomínio não é nenhum dos eixos das coordenadas. Note-se que, para obtermos exemplos, basta considerarmos matrizes de determinante nulo.

Exemplo 875 Consideremos a aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , definida por $T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 6y \end{bmatrix} = (x + 2y, 3x + 6y)$, para qualquer par de elementos de \mathbb{R}^2 .

Como $3x + 6y = 3(x + 2y)$, temos que a imagem de qualquer ponto do plano é um ponto da recta de equação $y = 3x$.

Assim, $T(1, 4) = \begin{bmatrix} 9 \\ 27 \end{bmatrix} = (9, 27)$, ponto este que pertence à recta $y = 3x$. Reciprocamente, dado um ponto da recta $y = 3x$, vai existir um ponto do plano cuja imagem é o ponto dado. Seja $P = (k, 3k)$. Então, queremos que $(x + 2y, 3x + 6y) = (k, 3k)$. Logo:

$$\begin{cases} x + 2y = k \\ 3x + 6y = 3k \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = k \\ x + 2y = k \end{cases} \iff x = k - 2y$$

Logo, $P = (k - 2y, y)$, pelo que existem infinitos pontos cuja imagem é $(k, 3k)$.

Verificação:

$$T(k - 2y, y) = (k - 2y + 2y, 3(k - 2y) + 6y) = (k, 3k - 6y + 6y) = (k, 3k)$$

Será que podemos descobrir mais alguma coisa de interessante sobre a aplicação dada?

Já vimos que o conjunto das imagens dos pontos do plano é a recta de equação $y = 3x$. E já vimos que $T(1, 4) = (9, 27)$. Agora, podemos querer saber quais os pontos cuja imagem é $(9, 27)$, ou seja, queremos definir o seguinte conjunto: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (9, 27)\}$. É claro que esta questão já foi resolvida, mas vamos ignorar esse facto.

Então, obtemos

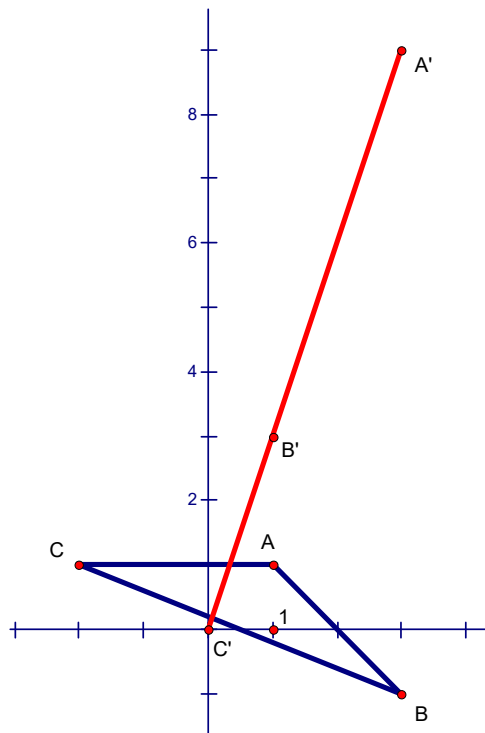
$$(x + 2y, 3x + 6y) = (9, 27) \iff \begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x + 6y = 27 \end{cases} \iff x + 2y = 9$$

Logo, temos duas particularidades interessantes: a imagem dum ponto qualquer está na recta de equação $y = 3x$ e todos os pontos da recta de equação $x + 2y = 9$ têm a mesma imagem. Então, podemos ter uma representação geométrica interessante. Para não termos que marcar o ponto $(9, 27)$, vamos considerar outra imagem.

De $T(3, -1) = (3 - 2, 9 - 6) = (1, 3)$, vem $\{(x, y) : T(x, y) = (1, 3)\} = \{(x, y) : x + 2y = 1\}$.

Passemos à visualização geométrica, desenhando a imagem do triângulo $[ABC]$, com $A = (1, 1)$, $B = (3, -1)$ e $C = (-2, 1)$.

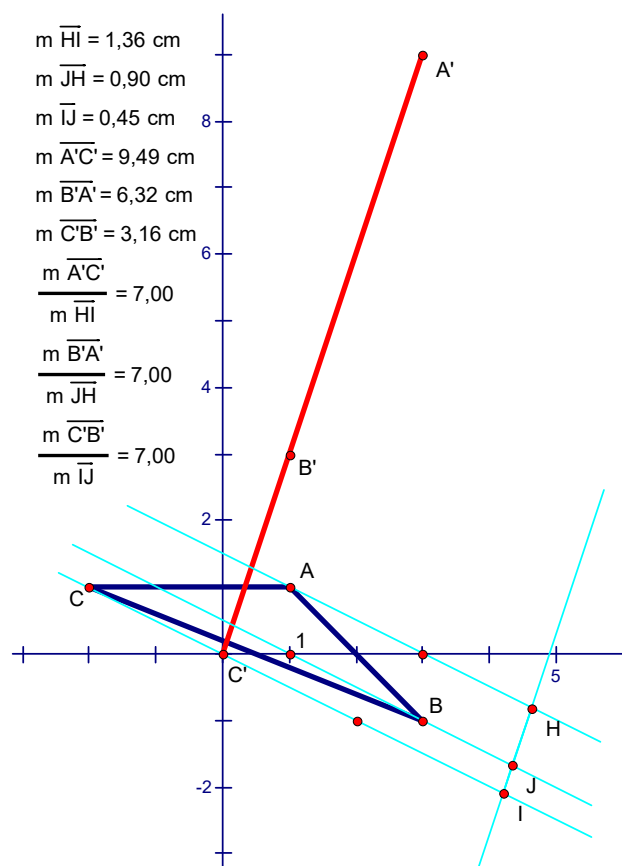
Como $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 6y)$, temos que $T(1, 1) = (3, 9)$, $T(3, -1) = (1, 3)$ e $T(-2, 1) = (0, 0)$.



E se quisermos encontrar a "imagem inversa" de $\{A', B', C'\}$? Ora, $A' = (3, 9)$, $B' = (1, 3)$ e $C' = (0, 0)$. Então,

$$\begin{cases} T(x, y) = (3, 9) \\ T(x, y) = (1, 3) \\ T(x, y) = (0, 0) \end{cases} \iff \begin{cases} (x + 2y, 3x + 6y) = (3, 9) \\ (x + 2y, 3x + 6y) = (1, 3) \\ (x + 2y, 3x + 6y) = (0, 0) \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

A imagem inversa de cada um dos pontos é uma recta, sendo que as três rectas são paralelas. É claro que podemos considerar pontos nos lados do triângulo, havendo uma infinidade de rectas (paralelas). Desenhemos as três rectas (que passam pelos vértices do triângulo):



Com umas "habilidades", conseguimos descobrir algo de interessante! De onde vem aquele valor 7?

Começamos por referir que os pontos H , I e J poderiam ter sido marcados sobre a recta de equação $y = 3x$ (a recta que contém A' , B' e C'), mas não o fizemos para não sobrecarregar a figura. O que descobrimos foi que existe uma proporcionalidade entre as projecções dos lados do triângulo $[ABC]$ numa recta paralela à recta imagem e segundo a direcção das rectas cuja imagem é um só ponto. Só que ainda não sabemos como apareceu o valor 7!

Comecemos por encontrar $T(-2, 1)$. Ora, $T(-2, 1) = (0, 0)$ e a imagem inversa de $(0, 0)$ é:

$$\begin{aligned}
 T^{-1} \{(0, 0)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2y, 3x + 6y) = (0, 0)\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2y\}
 \end{aligned}$$

No conjunto anterior, vamos escolher o ponto que pertence à recta de equação $y = 3x$. Neste caso, é o próprio ponto $(0, 0)$.

Agora, calculamos $T(3, -1)$. Ora, $T(3, -1) = (1, 3)$ e

$$\begin{aligned} T^{-1}\{(1, 3)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (1, 3)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2y, 3x + 6y) = (1, 3)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 - 2y\} \\ &= \{(1 - 2y, y) : y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Agora, fazemos $y = 3(1 - 2y)$. Resolvendo a equação, obtemos $y = \frac{3}{7}$. Logo, $x = \frac{1}{7}$. Então, está quase explicado o mistério do valor 7: $T(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}) = (1, 3) = 7(\frac{1}{7}, \frac{3}{7})$.

Para o ponto A , temos $T(1, 1) = (3, 9)$ e

$$\begin{aligned} T^{-1}\{(3, 9)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (3, 9)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2y, 3x + 6y) = (3, 9)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 3\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3 - 2y\} \\ &= \{(3 - 2y, y) : y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Agora, fazemos $y = 3(3 - 2y)$. Resolvendo a equação, obtemos $y = \frac{9}{7}$. Logo, $x = \frac{3}{7}$. Então, $T(\frac{3}{7}, \frac{9}{7}) = (3, 9) = 7(\frac{3}{7}, \frac{9}{7})$.

Neste exemplo, a imagem de um dos vértices do triângulo é $(0, 0)$, situação que pode não ocorrer. No caso geral, bastará considerar um quarto ponto tal que a sua imagem seja $(0, 0)$. Também pode acontecer que dois dos vértices do triângulo tenham a mesma imagem, mas isso não faz diferença nenhuma (a não ser que temos menos trabalho).

Exemplo 876 Consideremos a aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , definida por $T(x, y) = (ax + by, amx + bmy)$, com $ab \neq 0$.

É claro que a imagem de qualquer ponto de \mathbb{R}^2 pertence à recta de equação $y = mx$ e de $T(0, 0) = (0, 0)$, vem que o ponto $(0, 0)$ já pertence a essa recta $y = mx$.

De qualquer modo, podemos achar a imagem inversa de $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} T^{-1}\{(0, 0)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (ax + by, amx + bmy) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{a}{b}x\right\} \\ &= \left\{\left(x, -\frac{a}{b}x\right) : x \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Note-se que a equação $ax + by = 0$ significa que, nas condições usuais, $(a, b) \perp (x, y)$, pelo que $(b, -a)$ é um vector director da recta de equação $ax + by = 0$. Por isso, o declive da recta é $-\frac{a}{b}$.

Consideremos, agora, o ponto $A = (x_A, y_A)$. É claro que $A' = T(x_A, y_A) = (ax_A + by_A, amx_A + bmy_A)$ e a imagem inversa de A' é uma recta paralela à recta de equação $ax + by = 0$:

$$\begin{aligned}
T^{-1}\{(ax_A + by_A, amx_A + bmy_A)\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (ax_A + by_A, amx_A + bmy_A)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (ax + by, amx + bmy) = (ax_A + by_A, amx_A + bmy_A)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = ax_A + by_A\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}x_A + y_A\right\} \\
&= \left\{\left(x, -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}x_A + y_A\right) : x \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Agora, vamos escolher o único ponto do conjunto anterior que pertence à recta $y = mx$.

Então, vamos ter $mx = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}x_A + y_A$. Ora,

$$\begin{aligned}
mx = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}x_A + y_A &\iff mbx = -ax + ax_A + by_A \iff mbx + ax = ax_A + by_A \\
&\iff (mb + a)x = ax_A + by_A \iff x = \frac{ax_A + by_A}{a + mb}
\end{aligned}$$

Então, obtemos o ponto $A_0 = \left(\frac{ax_A + by_A}{a + mb}, \frac{amx_A + bmy_A}{a + mb}\right)$. Então, $\overrightarrow{OA_0} = A_0 - O = \left(\frac{ax_A + by_A}{a + mb}, \frac{amx_A + bmy_A}{a + mb}\right)$ e $\overrightarrow{OA'} = (ax_A + by_A, amx_A + bmy_A)$.

Então, $\overrightarrow{OA_0} = \frac{1}{a + mb} \overrightarrow{OA'}$, ou seja, $\overrightarrow{OA'} = (a + mb) \overrightarrow{OA_0}$.

Recordamos que, no exemplo anterior, tínhamos $a = 1$, $b = 2$ e $m = 3$, pelo que $a + mb = 1 + 3 \times 2 = 7$.

Vejamos um caso particular:

Desenhou-se a recta $y = 2x$ (recta imagem). Por A , B e C traçámos rectas paralelas ao vector $(1, -2)$, porque $a = 2$ e $b = 1$. As três paralelas intersectam a recta $y = 2x$ nos pontos A_0 , B_0 e C_0 . E, como $a + mb = 2 + 2 \times 1 = 4$, obtivemos os pontos A' , B' e C' , de modo que $\overrightarrow{OA'} = 4\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{OB'} = 4\overrightarrow{OB_0}$ e $\overrightarrow{OC'} = 4\overrightarrow{OC_0}$. No caso da figura anterior, foram desenhados quatro segmentos iguais (três, considerando que um já estava desenhado).

Exemplo 877 *E se quisermos obter a projecção ortogonal dum ponto sobre uma recta oblíqua que passe pela origem?*

Se tivermos a recta de equação $y = 2x$, como obtemos a projecção ortogonal do ponto $(2, 6)$ sobre a recta?

Basta considerarmos a recta perpendicular que passa por $(2, 6)$ e determinar o ponto de intersecção das duas rectas.

Um vector director da recta $y = 2x$ é $(1, 2)$, pelo que $(2, -1)$ é um vector perpendicular a essa recta. Logo, uma equação da recta perpendicular é $y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 2)$.

Logo, uma equação é $y = -\frac{1}{2}x + 7$. Então resolvemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2x = -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 4x = -x + 14 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{28}{5} \\ x = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Logo, o ponto pretendido é $\left(\frac{14}{5}, \frac{28}{5}\right)$.

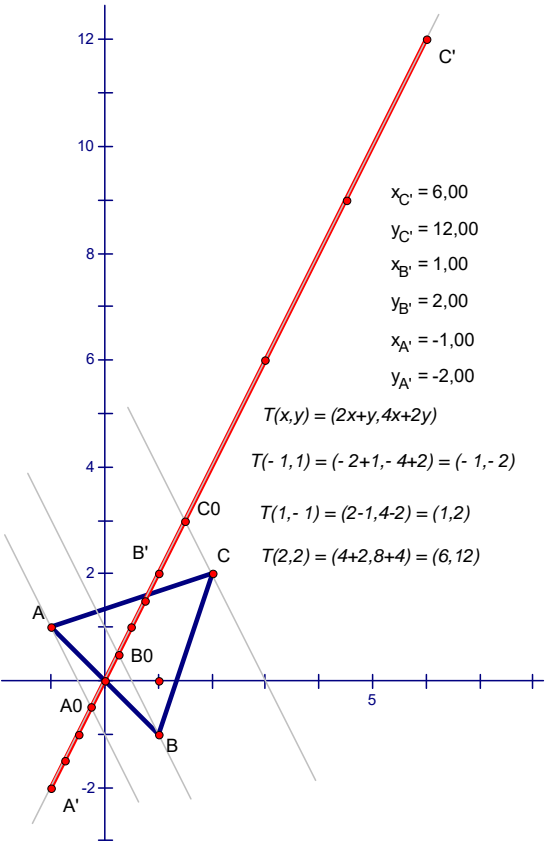


Figura 47.1:

E se tivermos o ponto (x_0, y_0) ? Neste caso, temos $y - y_0 = -\frac{1}{2}(x - x_0)$. E o sistema é

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_0 + y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_0 + y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 4x = -x + x_0 + 2y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2x_0+4y_0}{5} \\ x = \frac{x_0+2y_0}{5} \end{cases}$$

Logo, o ponto pretendido é $(\frac{x_0+2y_0}{5}, \frac{2x_0+4y_0}{5})$. Então, a aplicação que procuramos é dada por

$$T(x, y) = \left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5} \right) = \left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y, \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \right)$$

Usando matrizes, vem

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{bmatrix}$$

Calculemos a imagem de $(2, 6)$:

$$T(2, 6) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2+12 \\ 4+24 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{28}{5} \end{bmatrix}$$

Suponhamos, agora, que pretendemos achar a projecção ortogonal do ponto (x_0, y_0) sobre a recta de equação $y = mx$.

A maneira de resolver é análoga:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = mx \\ y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0) \end{cases} &\iff \begin{cases} y = mx \\ y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}x_0 + y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ mx = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}x_0 + y_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = mx \\ m^2x = -x + x_0 + my_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ (m^2+1)x = x_0 + my_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{mx_0+m^2y_0}{m^2+1} \\ x = \frac{x_0+my_0}{m^2+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, a imagem do ponto (x_0, y_0) é o ponto $(\frac{x_0+my_0}{m^2+1}, \frac{mx_0+m^2y_0}{m^2+1})$.

Logo, a imagem do ponto (x, y) é $(\frac{x+my}{m^2+1}, \frac{mx+m^2y}{m^2+1})$, ou seja, $(\frac{1}{m^2+1}x + \frac{m}{m^2+1}y, \frac{m}{m^2+1}x + \frac{m^2}{m^2+1}y)$.

Então, $T(x, y) = \frac{1}{m^2+1} \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Resolvemos o caso em que $m = 2$. Então, substituindo m por 2, obtemos

$$T(x, y) = \frac{1}{2^2+1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo, $T(2, 6) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2+12 \\ 4+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{28}{5} \end{bmatrix}$, como obtido anteriormente.

Transformação afim é a aplicação composta por uma transformação linear e uma translação. Logo, é uma aplicação definida por

$$T(x, y) = AX + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Note-se que uma aplicação do tipo $T(x, y) = A(X + B)$ pode ser transformada, obtendo-se $T(x, y) = A(X + B) = AX + AB$ que é uma matriz do mesmo tipo de $AX + B$.

Observação

Terminamos com uma Observação importante. Na Geometria Analítica trabalhamos com "pontos" representados por coordenadas. No plano, temos duas coordenadas associadas a um referencial. A maneira mais conhecida é a utilização dum referencial cartesiano, mas podemos usar coordenadas polares, por exemplo.

Mas, além de pontos, usamos "vectores" que, curiosamente se representam da mesma maneira. Assim, podemos falar no ponto $A = (1, 2)$ e no vector $u = (1, 2)$.

Mas, há coisa que podemos fazer com vectores e que não podemos fazer com pontos. Por exemplo, dados os pontos $A = (1, 2)$ e $B = (2, 2)$, não faz sentido escrever $A + B = (1, 2) + (2, 2) = (3, 4)$. Mas, se $u = (1, 2)$ e $v = (1, 2)$, faz sentido escrever $u + v = (1, 2) + (2, 2) = (3, 4)$.

Dado o ponto $A = (1, 2)$ e o vector $v = (2, 2)$, definiu-se que $A + v = (1, 2) + (2, 2) = (3, 4)$. Só que "este" $(3, 4)$ é "diferente" do $(3, 4)$ "anterior", pois se trata dum ponto, enquanto que o anterior é um vector.

Logo, $(1, 2) + (2, 2)$ pode não ter sentido, ou podemos ter $(1, 2) + (2, 2) = (3, 4)$ (vector) ou podemos ter $(1, 2) + (2, 2) = (3, 4)$ (ponto).

Quando escrevemos $A + u = B$, fomos habituados a escrever $u = B - A = \overrightarrow{AB}$, mas trata-se duma convenção, pois não faz sentido subtrair pontos, uma vez que não faz sentido somá-los. O que está subjacente é uma convenção em que somamos e subtraímos pontos duma maneira "meramente formal": não tem sentido nem conteúdo matemático, mas é útil e vantajoso. Só não entendo, por que razão se aceitou "subtrair" pontos e não costuma aceitar-se "somar" pontos.

A propósito, podemos referir que, além do habitual \mathbb{R}^2 , temos \mathbb{A}^2 e \mathbb{E}^2 , sendo \mathbb{A}^2 um espaço afim e \mathbb{E}^2 um espaço euclídeo. \mathbb{A}^2 é o conjunto dos pontos do plano, com coordenadas cartesianas e \mathbb{E}^2 é \mathbb{R}^2 , no qual se definiu o produto interno usual: $(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1v_1 + u_2v_2$.

Deste produto interno (positivo definido), resulta a norma euclídea:

$$\|(u_1, u_2)\| = \sqrt{(u_1, u_2) \cdot (u_1, u_2)} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Ainda há uma variante: o espaço afim associado a um espaço vectorial, pode ser o próprio espaço vectorial. Neste caso, os "pontos" são vectores! Ou seja, a mesma "entidade" pode ser considerada "ponto" ou pode ser considerada "vector". Neste caso, a interpretação de recta já é outra: são os vectores que vão da origem à "nossa recta habitual".

Um exemplo prático: Dados dois pontos A e B , o ponto médio (M) é dado por $M = \frac{A + B}{2} = \frac{1}{2}(A + B)$, desde que se aceite a "adição formal" de pontos (e o produto por um escalar).

Capítulo 48

Transformações Geométricas em \mathbb{R}^3

Vamos começar pelas transformações bijectivas (aquelas que costumam ter mais interesse). Vamos começar pelas Isometrias e, dentro destas, pela simetria em relação a um plano.

48.1 Isometrias

Começemos pela reflexão num plano (espelho).

Exemplo 878 Consideremos a transformação $T(x, y, z) = (x, y, -z)$, de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 .

Pontos fixos: $T(x, y, z) = (x, y, z) \iff (x, y, -z) = (x, y, z) \iff z = 0$.

Logo, $T(x, y, 0) = (x, y, 0)$, para quaisquer x e y . Qualquer ponto do "espelho" fica invariante (fixo), quando se aplica a transformação.

É fácil de mostrar que se trata duma isometria:

$$\begin{aligned} d(T(x, y, z), (0, 0, 0)) &= d((x, y, -z), (0, 0, 0)) = \|(x, y, -z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (-z)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d((x, y, z), (0, 0, 0)) \end{aligned}$$

Para quem conheça as propriedades das transformações lineares, a demonstração apresentada é suficiente. Mas vamos fazer a demonstração completa. Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$. Então,

$$\begin{aligned} d(T(x_A, y_A, z_A), T(x_B, y_B, z_B)) &= d((x_A, y_A, -z_A), (x_B, y_B, -z_B)) \\ &= \|(x_B, y_B, -z_B) - (x_A, y_A, -z_A)\| \\ &= \|(x_B - x_A, y_B - y_A, -z_B + z_A)\| \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (-z_B + z_A)^2} \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ &= d((x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B)) \end{aligned}$$

Logo, T é uma isometria.

48.1.1 Simetria em relação a um plano

A definição é semelhante à simetria em relação a uma recta, em \mathbb{R}^2 . Aliás, a definição é a mesma em \mathbb{R}^2 , ou em \mathbb{R}^3 , ou em \mathbb{R}^4 , ou em \mathbb{R}^n , com n um número natural qualquer. A diferença está no número de coordenadas. A semelhança está no facto de se fazer a simetria em relação a um hiperplano (plano de dimensão $n-1$, em \mathbb{R}^n). Em \mathbb{R}^2 , um hiperplano é uma recta vulgar e, em \mathbb{R}^3 , um hiperplano é um plano vulgar. Em \mathbb{R}^4 , um hiperplano é um plano de dimensão 3: translação dum subespaço de \mathbb{R}^4 , com dimensão 3).

Definição 879 Consideremos um plano Π que passa por A e que é perpendicular ao vector unitário \vec{n} . Então, o simétrico dum ponto P , relativamente ao plano Π , é o ponto $P_1 = P - 2(\vec{AP} \cdot \vec{n})\vec{n}$.

Observação

Note-se que a expressão $P_1 = P - 2(\vec{AP} \cdot \vec{n})\vec{n}$ é rigorosamente a mesma que aparecia em na definição de simetria em relação a uma recta de \mathbb{R}^2 .

Da mesma maneira que em \mathbb{R}^2 , o ponto P_1 não depende do ponto A escolhido no plano, nem depende de usarmos \vec{n} ou $-\vec{n}$. E continuamos a ter uma involução.

Vamos representar a simetria em relação ao plano Π , por σ_Π .

Exemplo 880 Determine o simétrico do ponto $P = (1, 3, -2)$, em relação ao plano Π definido por $x + 2y - 4z = 5$.

Resolução

Seja $\vec{N} = (1, 2, -4)$, cuja norma é $\sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$, um vector perpendicular ao plano Π e seja $A = (5, 0, 0)$.

Então, $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = \left(\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}, -\frac{4\sqrt{21}}{21}\right)$.

Logo,

$$\begin{aligned} P_1 &= \sigma_\Pi(1, 3, -2) = (1, 3, -2) - 2(((1, 3, -2) - (5, 0, 0)) \cdot \vec{n})\vec{n} \\ &= (1, 3, -2) - 2\left((-4, 3, -2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}\right)\right)\vec{n} \\ &= (1, 3, -2) - 2 \times \frac{10}{21}\sqrt{21} \left(\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}, -\frac{4\sqrt{21}}{21}\right) \\ &= (1, 3, -2) - \left(\frac{20}{21}, \frac{40}{21}, -\frac{80}{21}\right) = \left(\frac{1}{21}, \frac{23}{21}, \frac{38}{21}\right) \end{aligned}$$

Ponto médio de $[\overline{PP_1}]$:

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{21}}{2}, \frac{3 + \frac{23}{21}}{2}, \frac{-2 + \frac{38}{21}}{2}\right) = \left(\frac{11}{21}, \frac{43}{21}, -\frac{2}{21}\right)$$

O ponto anterior deve pertencer a Π : $\frac{11}{21} + \frac{86}{21} + \frac{8}{21} = \frac{105}{21} = 5$. Logo o ponto médio pertence a Π .

Por outro lado, o segmento definido por P e por P_1 deve ser perpendicular ao plano Π . Logo, deve ser colinear com $\vec{N} = (1, 2, -4)$.

Ora,

$$\begin{aligned} P_1 - P &= \sigma_{\Pi}(P) - P = \left(\frac{1}{21}, \frac{23}{21}, \frac{38}{21} \right) - (1, 3, -2) \\ &= \left(-\frac{20}{21}, -\frac{40}{21}, \frac{80}{21} \right) = -\frac{20}{21} (1, 2, -4) = -\frac{20}{21} \vec{N} \end{aligned}$$

Então, a imagem de P está bem calculada.

Capítulo 49

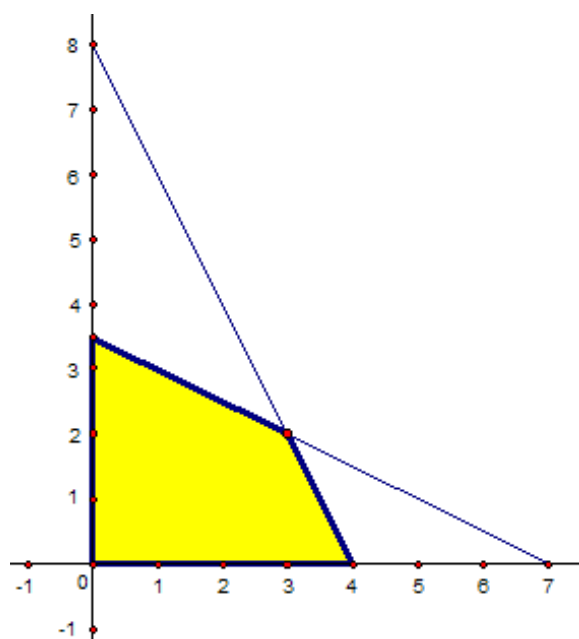
Programação Linear

49.1 O método gráfico

Exemplo 881 Determine o valor máximo da função $f(x, y) = 2x + 3y$, com as variáveis x e y sujeitas às seguintes restrições:

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 8, x + 2y \leq 7.$$

Resolução



Começamos por referir que todas as funções envolvidas nesta questão são funções polinomiais de grau (menor ou igual a) 1.

As restrições dadas definem um polígono convexo contido no primeiro quadrante, quando se considera o plano \mathbb{R}^2 . O interessante é que o valor máximo da função $f(x, y) = 2x + 3y$ é atingido

num dos vértices do polígono. Note-se ainda que as restrições, neste caso, são da forma $a_i x + b_i y \leq c_i$, com $a_i \geq 0, b_i \geq 0, c_i \geq 0$, o que faz com que todas rectas tenham declive negativo e que seja definido um polígono contido no primeiro quadrante.

Note-se que é costume utilizar as variáveis x_1, x_2 em vez de x, y e os coeficientes $a_{i,j}$ e b_j , em vez de a_i e b_i .

Pode acontecer que as restrições não definam um polígono, por não darem origem a uma região limitada. Nesse caso, falaremos em pontos extremos em vez de vértices. É claro que os vértices dos polígonos também são pontos extremos.

Consideremos as rectas definidas por $x = 0, y = 0, 2x + y = 8$ e $x + 2y = 7$:

Determinemos o ponto de intersecção das duas rectas anteriores:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ x + 16 - 4x = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 8 - 2x \\ -3x = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

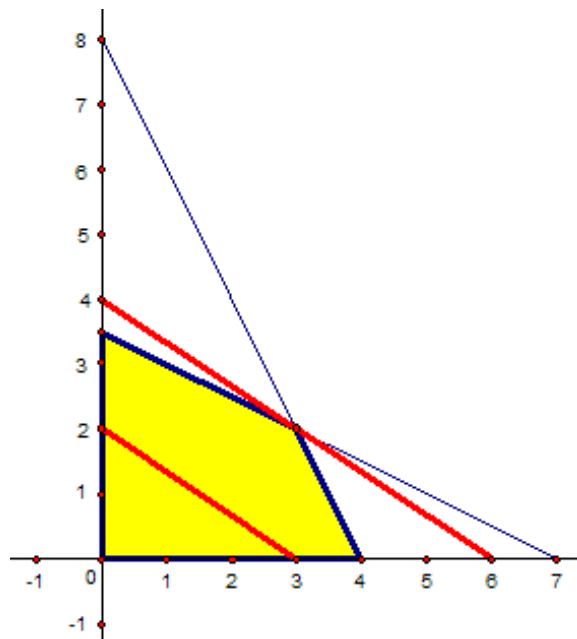
Os pontos $(0, 0), (0, \frac{7}{2}), (3, 2)$ e $(4, 0)$ definem um quadrilátero convexo. Calculando o valor de f em cada um desses pontos obtemos:

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 + 0 = 5 \\ f(0, \frac{7}{2}) = 0 + \frac{21}{2} = 10,5 \\ f(4, 0) = 8 \\ f(3, 2) = 6 + 6 = 12 \end{cases}$$

Então, o valor máximo da função objectivo é 12, valor este que é atingido no vértice $(3, 2)$.

Se não pretendermos calcular o valor da função em todos os vértices, podemos proceder do seguinte modo:

Traçamos a recta de equação $2x + 3y = 6$. Seguidamente, deslocamos a recta de modo a manter-se paralela à recta anterior, a intersectar o quadrilátero e a ficar o mais para cima possível. É fácil de verificar que tal recta tem de passar pelo vértice $(3, 2)$.



E, agora, basta-nos encontrar $f(3, 2)$.

Observe-se que pode acontecer que a recta a deslocar seja paralela a um dos lados do polígono, pelo que o máximo pode ser atingido em dois vértices. Nesse caso, embora o valor do máximo seja único, ele pode ser atingido em qualquer ponto do lado definido pelos dois vértices em questão.

Se em vez de duas variáveis tivermos três, a situação é análoga e, caso a região admissível seja limitada, teremos um poliedro contido no primeiro octante, tendo-se que o máximo da função objectivo (desde que seja uma função polinomial de grau 1) é atingido num dos vértices do poliedro. Mas, agora, é mais complicada uma resolução gráfica, bem como a obtenção dos vértices do polígono.

Se tivermos mais de 3 variáveis, já não conseguimos visualizar a região admissível (ou conjunto de oportunidades).

Observação

Num problema de Programação Linear, temos

1. Uma função objectivo do tipo $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, com $n \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, função esta que pretendemos maximizar ou minimizar.
2. As variáveis independentes verificam as restrições:

$$(a) \quad x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

$$(b) \quad a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \Delta_k b_k, b_k > 0, (k = 1, \dots, m, m \in \mathbb{N}), a_{kj} \in \mathbb{R}.$$

Na expressão anterior, Δ_k é um dos sinais \leq ou \geq . É claro que o problema só tem sentido se as restrições impostas não forem uma condição impossível.

Exemplo 882 *Determine o valor máximo da função $z = 8x_1 + 9x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:*

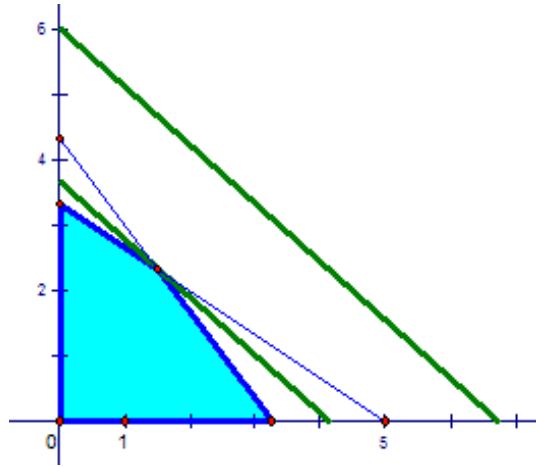
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + 3x_2 \leq 13.$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = 3 \\ 6 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vértices do quadrilátero: $(0, 0)$, $(0, \frac{10}{3})$, $(\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$ e $(\frac{13}{4}, 0)$.

Consideremos a recta de equação $8x_1 + 9x_2 = 72$ e a recta paralela à anterior que passa por $(\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$:



Então, $z_{\max} = 8 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{7}{3} = 12 + 21 = 33$.

Observação

No problema anterior, pretende-se maximizar a função $z = 8x_1 + 9x_2$, com $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + 3x_2 \leq 13$, podendo-se utilizar matrizes:

$$z = [8 \quad 9] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \wedge X \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na expressão anterior, $X \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ significa $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja, $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0$.

O problema dual do problema dado consiste em minimizar a função

$$z = [10 \quad 13] \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Logo, $z = 10w_1 + 13w_2$, com $2w_1 + 4w_2 \geq 8 \wedge 3w_1 + 3w_2 \geq 9$.

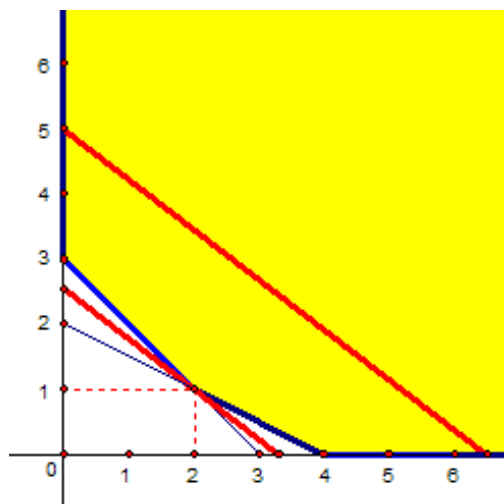
Neste exemplo, o problema dual continua a ter, como função objectivo, uma função de duas variáveis, pelo que pode ser resolvido graficamente.

Exemplo 883 *Resolva, graficamente, o problema dual do exemplo anterior.*

Resolução

Pretendemos minimizar a função $z = 10w_1 + 13w_2$, com $w_1 \geq 0 \wedge w_2 \geq 0 \wedge 2w_1 + 4w_2 \geq 8 \wedge 3w_1 + 3w_2 \geq 9$.

Logo, $w_1 + 2w_2 \geq 4 \wedge w_1 + w_2 \geq 3$.



O ponto de intersecção da recta $w_1 + 2w_2 = 4$ com a recta $w_1 + w_2 = 3$ é $(2, 1)$.

Os pontos extremos são $(2, 1)$, $(0, 3)$ e $(4, 0)$. Ora, $z(2, 1) = 33$, $z(0, 3) = 39$ e $z(4, 0) = 40$, pelo que o valor mínimo de z é 33, tendo-se obtido o mesmo resultado que no problema inicial (o qual é conhecido por problema primal).

Note-se que o conjunto de oportunidades (ou região admissível) não é limitado.

Exemplo 884 Determine o valor máximo da função $z = 8x_1 + 15x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

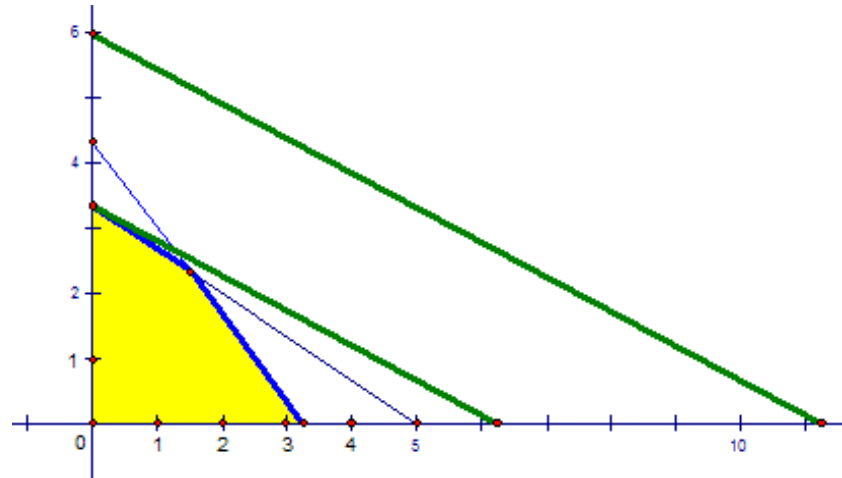
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + 3x_2 \leq 13.$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = 3 \\ 6 + 3x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vértices do quadrilátero: $(0, 0)$, $(0, \frac{10}{3})$, $(\frac{3}{2}, \frac{7}{3})$ e $(\frac{13}{4}, 0)$.

Consideremos a recta de equação $8x_1 + 15x_2 = 120$.



Neste caso, a paralela é traçada pelo ponto $(0, \frac{10}{3})$. Então, $z_{\max} = 8 \times 0 + 15 \times \frac{10}{3} = 50$. Note-se que $8 \times \frac{3}{2} + 15 \times \frac{7}{3} = 47 < 50$ e $8 \times 0 + 15 \times \frac{13}{4} = \frac{195}{4} < 50$.

Exemplo 885 Resolva o problema dual do exemplo anterior.

Resolução

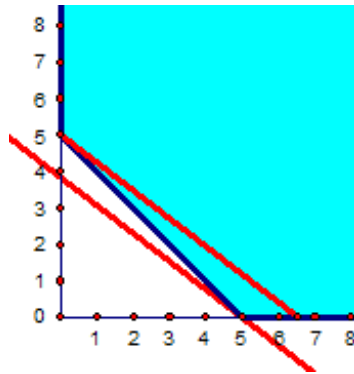
No problema primal, pretendíamos maximizar a função

$$z = [8 \quad 15] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, no problema dual, pretendemos minimizar a função

$$z = [10 \quad 13] \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $z = 10w_1 + 13w_2$, com $w_1 \geq 0 \wedge w_2 \geq 0 \wedge 2w_1 + 4w_2 \geq 8 \wedge 3w_1 + 3w_2 \geq 15$. Logo, $w_1 + 2w_2 \geq 4 \wedge w_1 + w_2 \geq 5$. Então, $w_1 + w_2 \geq 5$.



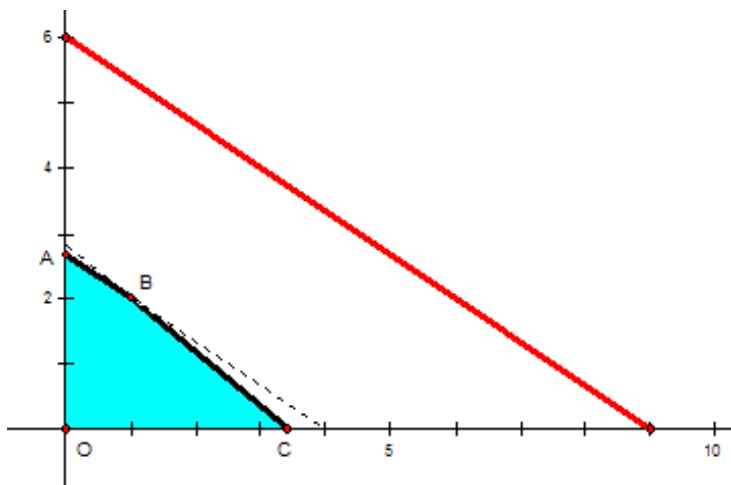
Logo, $z_{\min} = z(5, 0) = 10 \times 5 = 50$. Note-se que os pontos extremos são $(5, 0)$ e $(0, 5)$ e que $z(0, 5) = 13 \times 5 = 65$.

Exemplo 886 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 15x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 8, 4x_1 + 5x_2 \leq 13.$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x_1 + 15x_2 = 40 \\ -10x_1 - 8x_2 = -26 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Vértices do quadrilátero: $(0, 0)$, $(0, \frac{8}{3})$, $(1, 2)$ e $(\frac{13}{5}, 0)$.

Neste caso, temos que um dos lados do polígono é paralelo à recta de equação $10x_1 + 15x_2 = 90$. Calculando o valor da função nos vários vértices, temos:

$$\begin{cases} z(0, 0) = 0 \\ z(0, \frac{8}{3}) = 40 \\ z(1, 2) = 10 + 30 = 40 \\ z(\frac{13}{5}, 0) = 26 \end{cases}$$

A função atinge o valor máximo nos vértices $(0, \frac{8}{3})$ e $(1, 2)$, pelo que acontecerá o mesmo em qualquer ponto do lado definido por esses dois vértices. Por exemplo, se considerarmos o ponto médio $M = (\frac{1}{2}, \frac{7}{3})$, temos $z(\frac{1}{2}, \frac{7}{3}) = 10 \times \frac{1}{2} + 15 \times \frac{7}{3} = 40$. Tal não é de espantar, porque $10x_1 + 15x_2 = 40$ é uma equação da recta definida por $(0, \frac{8}{3})$ e $(1, 2)$.

Exemplo 887 Resolva o problema dual do exemplo anterior.

Resolução

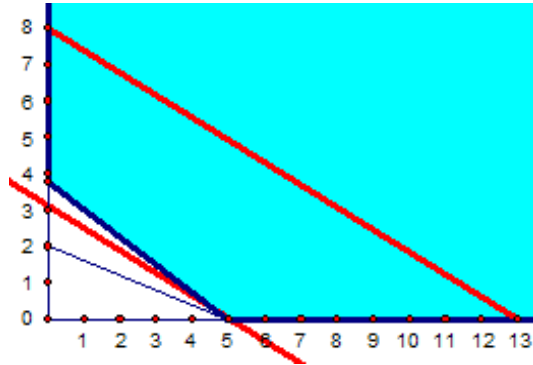
No problema primal, pretendíamos maximizar a função seguinte:

$$z = [10 \quad 15] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

No problema dual, pretendemos minimizar a função

$$z = [8 \quad 13] \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $z = 8w_1 + 13w_2$, com $w_1 \geq 0 \wedge w_2 \geq 0 \wedge 2w_1 + 5w_2 \geq 10 \wedge 3w_1 + 4w_2 \geq 15$.



$$z(5, 0) = 8 \times 5 = 40; \quad z\left(0, \frac{15}{4}\right) = 13 \times \frac{15}{4}$$

Então, $z_{\min} = z(5, 0) = 40$.

Exemplo 888 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 15x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \leq 8, 2x_1 + x_2 \leq 7, 5x_1 + 5x_2 \leq 22.$$

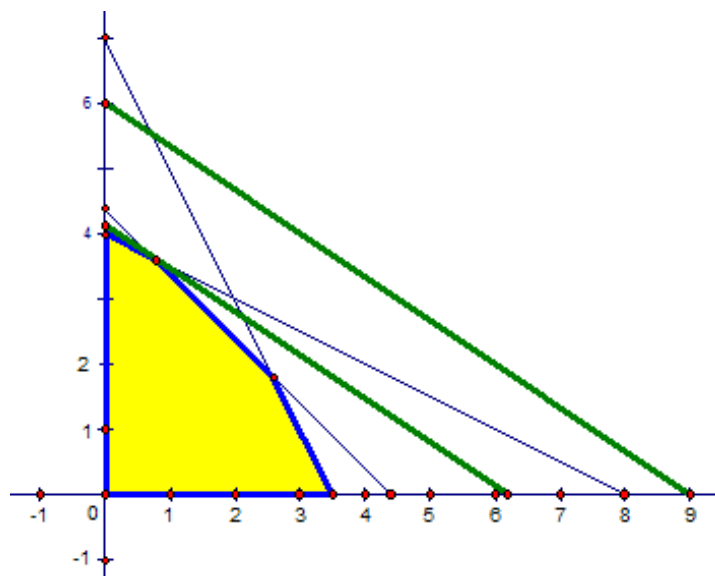
Resolução

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ -2x_1 - x_2 = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ 5x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} -10x_1 - 5x_2 = -35 \\ 5x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{13}{5} \\ x_2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 5x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x_1 - 10x_2 = -40 \\ 5x_1 + 5x_2 = 22 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \frac{18}{5} \\ x_1 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

A representação gráfica é a seguinte:



$$z(0, 4) = 60, \quad z\left(\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right) = 53, \quad z\left(\frac{4}{5}, \frac{18}{5}\right) = 62, \quad z\left(\frac{7}{2}, 0\right) = 35$$

Então, o valor máximo da função é 62.

Repare-se que, neste caso, a região admissível é um pentágono em vez dum quadrilátero.

Exemplo 889 Determine os valores máximo e mínimo da função $z = 10x_1 + 12x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 8, 2x_1 + x_2 \leq 12, 3x_1 + 4x_2 \leq 42.$$

Resolução

Consideremos as rectas r, s, t definidas por
$$\begin{cases} r : x_1 + x_2 = 8 \\ s : 2x_1 + x_2 = 12 \\ t : 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases}$$
 e determinemos os pontos de

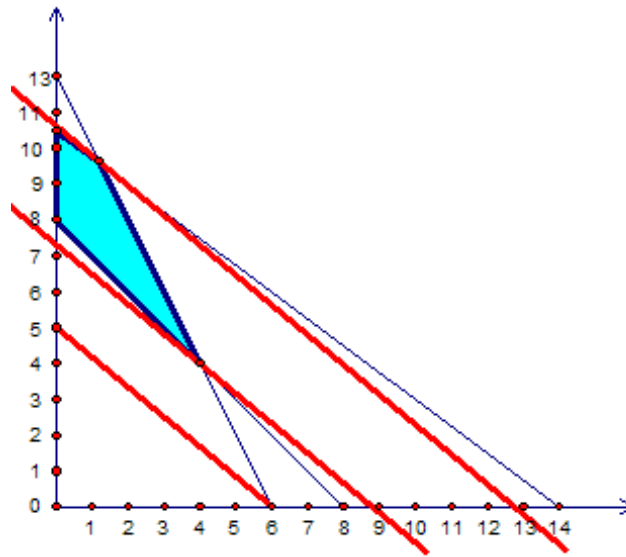
intersecção das rectas duas a duas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 = -24 \\ 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases} \iff \begin{cases} -8x_1 - 42x_2 = -48 \\ 3x_1 + 4x_2 = 42 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x_1 = -6 \\ 2x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{6}{5} \\ x_2 = \frac{48}{5} \end{cases}$$

A região definida pelas restrições dadas é a seguinte:



Os vértices do quadrilátero são $(0, 8)$, $(4, 4)$, $(\frac{6}{5}, \frac{48}{5})$ e $(0, \frac{21}{2})$.

A função objectivo é $z(x_1, x_2) = 10x_1 + 12x_2$.

Calculemos o valor de z , em cada um dos vértices do quadrilátero anterior:

$$z(0, 8) = 96; \quad z(4, 4) = 88; \quad z\left(\frac{6}{5}, \frac{48}{5}\right) = \frac{636}{5} = 127,2; \quad z\left(0, \frac{21}{2}\right) = 126$$

Então, $z_{\max} = \frac{636}{5}$ e $z_{\min} = 88$.

Exemplo 890 Determine o mínimo e o máximo da função $z = z(x, y) = 10x + 15y$, com $x, y \geq 0$, $x + 2y \leq 10$, $4x + 3y \leq 24$ e $3 \leq x \leq 5$.

Resolução

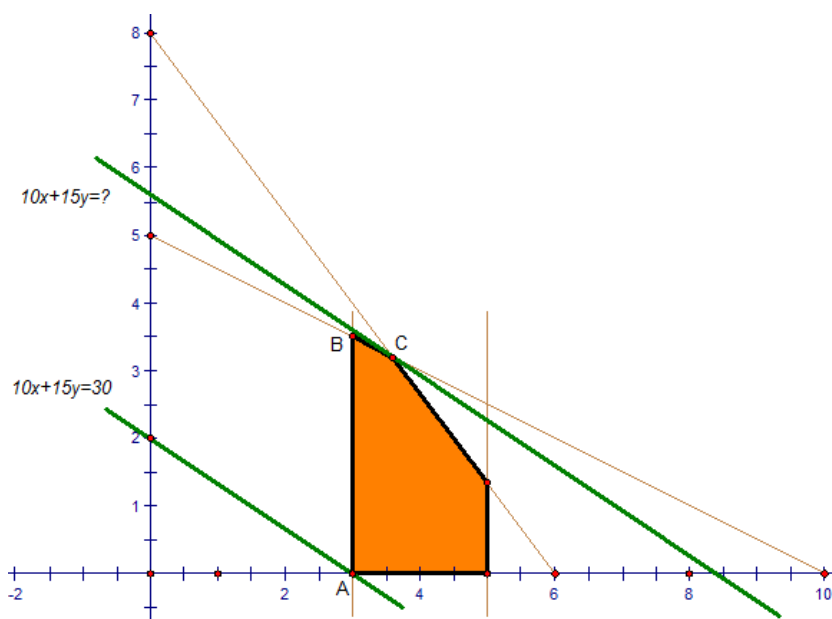
Consideremos as rectas definidas por $x + 2y = 10$, $4x + 3y = 24$, $x = 3$ e $x = 5$, representadas na figura seguinte. As condições do problema correspondem ao polígono cor de laranja (um pentágono). Desenhando a recta de equação $10x + 15y = 30$ (a verde) verificamos que a mesma passa por um dos vértices do pentágono.

Depois, traçamos uma recta paralela à recta anterior, passando pelo ponto C .

Determinemos as coordenadas de C :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x + 3y = 24 \\ x + 2y = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(10 - 2y) + 3y = 24 \\ x = 10 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 - 8y + 3y = 24 \\ x = 10 - 2y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -16 \\ x = 10 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{16}{5} \\ x = 10 - \frac{32}{5} = \frac{18}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $C = (\frac{18}{5}, \frac{16}{5})$, donde vem que $10 \times \frac{18}{5} + 15 \times \frac{16}{5} = 36 + 48 = 84$.



Logo, o máximo da função é 84, enquanto o mínimo é 30.

Exemplo 891 Determine o mínimo e o máximo da função $z = z(x, y) = 100x + 120y$, com $x, y \geq 0$, $x - 2y \leq 4$ e $5x + 6y \geq 30$.

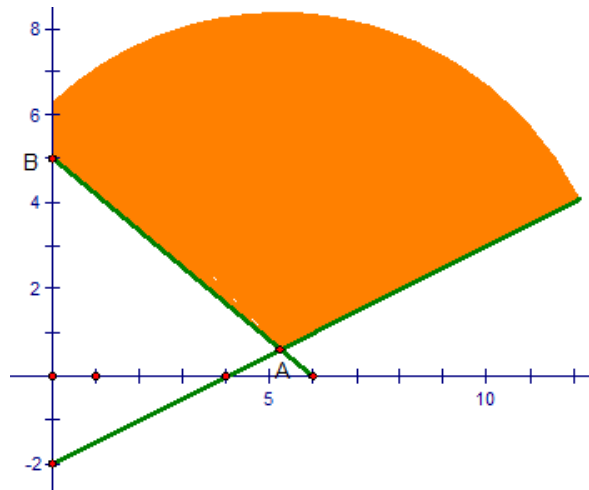
Resolução

Começemos por desenhar as rectas definidas por $x - 2y = 4$ e por $5x + 6y = 30$.

Depois, temos que

$$\begin{cases} x - 2y \leq 4 \\ 5x + 6y \geq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 + 2y \\ y \geq -\frac{5}{6}x + 5 \end{cases}$$

Logo, a região admissível fica à esquerda da recta de equação $x - 2y = 4$ e acima da recta de equação $5x + 6y = 30$.



Ora, $z(x, y) = 100x + 120y$, pelo que atribuindo valores a z , temos sucessivas rectas paralelas à recta de equação $5x + 6y = 30$, porque $\frac{100}{5} = \frac{120}{6} = 20$.

Então, a recta definida por $100x + 120y = 20 \times 30 = 600$ é a mesma recta que é definida por $5x + 6y = 30$. Tal significa que o valor mínimo de z é 600, sendo que esse valor é obtido quer no ponto A quer no ponto $B = (0, 5)$. Ora,

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 5x + 6y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2y \\ 20 + 10y + 6y = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{4} \\ y = \frac{5}{8} \end{cases}$$

Então, $A = (\frac{21}{4}, \frac{5}{8})$. Logo, $z(\frac{21}{4}, \frac{5}{8}) = 100 \times \frac{21}{4} + 120 \times \frac{5}{8} = 600 = z(0, 5)$.

Logo, há dois pontos (vértices) onde a função assume o valor mínimo (note-se que, para $z = 0$, temos uma recta que passa pela origem, o que nos permite saber qual o sentido do crescimento de z). Como a região admissível é ilimitada, a função z não tem máximo.

Ao longo da recta de equação $5x + 6y = 30$, temos $z = 100x + 120y = 20(5x + 6y) = 20 \times 30 = 600$, pelo que qualquer ponto do segmento de recta de extremos A e B é solução para o mínimo de z . Ou seja, há infinitas soluções admissíveis para a minimização de z , mas todas elas são finitas. Ou, se pretendermos dizer de outro modo, o conjunto das soluções admissíveis é limitado.

Observação

É muito fácil arranjar exemplos de regiões admissíveis infinitas em que haja máximo e mínimo (finitos):

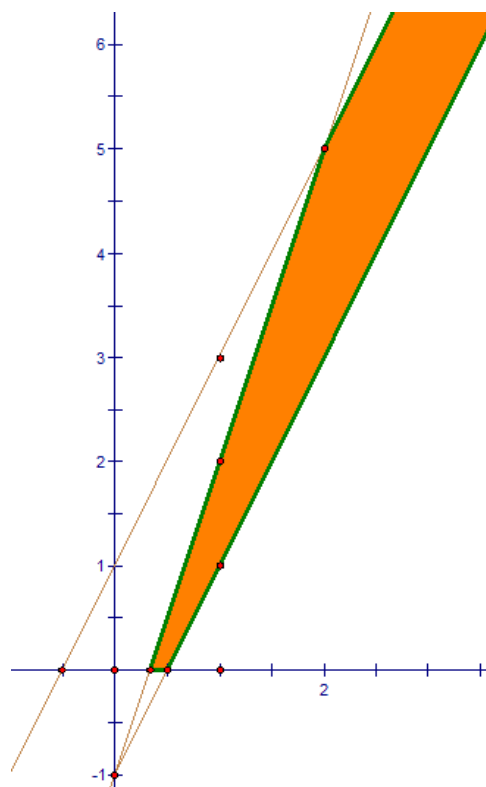
Exemplo 892 Determine o mínimo e o máximo da função $z = z(x, y) = 20x - 10y$, com $x, y \geq 0$, $2x - y \leq 1$, $3x - y \geq 1$, $2x - y \geq -1$.

Resolução

Então, temos

$$\begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ 3x - y \geq 1 \\ 2x - y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \leq y \\ 3x - 1 \geq y \\ 2x + 1 \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x - 1 \\ y \leq 3x - 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases}$$

Graficamente, temos



A região admissível é infinita, no entanto, $20x - 10y = 10(2x - y)$, pelo que $-1 \leq 2x - y \leq 1$ implica $-10 \leq 10(2x - y) \leq 10$.

Então, $z_{\min} = -10$ e $z_{\max} = 10$. Falta um pequeno pormenor: se fixarmos x e aumentarmos y , a função z diminui. Por essa razão, os minimizantes são pontos pertencentes à recta de equação $y = 2x + 1$, enquanto os maximizantes são pontos pertencentes à recta de equação $y = 2x - 1$. É claro que só interessam os pontos pertencentes à região admissível (região a laranja, fronteira verde incluída).

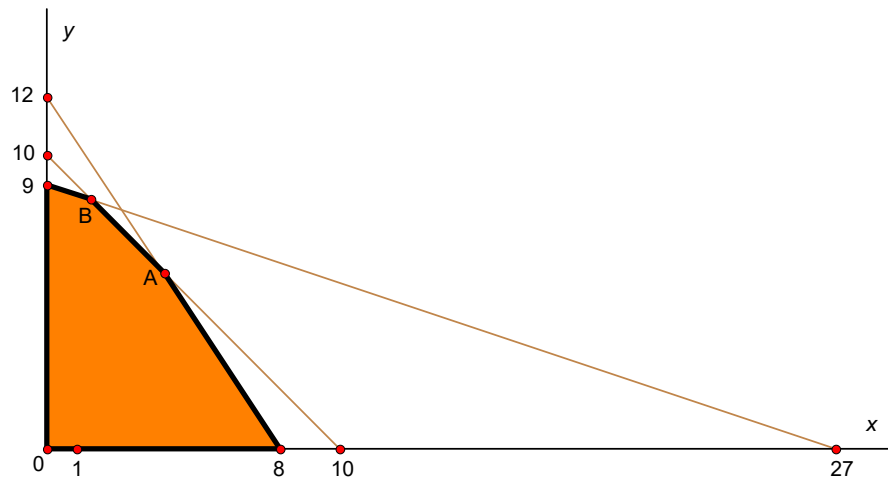
É claro que existem casos ainda mais fáceis: duas rectas horizontais e uma recta oblíqua, com as inequações definidas de forma conveniente.

Exemplo 893 Determine o mínimo e o máximo da função $z = z(x, y) = 32x + 20y$, com $x, y \geq 0$, $x + y \leq 10$, $3x + 2y \leq 24$ e $x + 3y \leq 27$.

Resolução

É óbvio que $32x + 20y \geq 0$, que $z(0, 0) = 0$ e que $x = y = 0$ satisfazem as condições $x, y \geq 0$, $x + y \leq 10$, $3x + 2y \leq 24$ e $x + 3y \leq 27$. Então, o mínimo de z é 0.

O máximo pode ser encontrado geometricamente, uma vez que só temos duas variáveis.



Neste caso, obtivemos um pentágono contido no primeiro quadrante. A região colorida é a "região admissível", ou seja, o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem as condições impostas no enunciado. Os vértices do pentágono são os pontos extremos da região admissível. Esses cinco pontos são os "candidatos" a maximizantes da função z , pelo que basta calcular as imagens dos cinco vértices (podemos dispensar a origem, ficando quatro pontos).

Então, precisamos de encontrar os pontos A e B .

$$\text{Ora, } \begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 2y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{17}{2} \end{cases}, \text{ pelo que } A = \left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right).$$

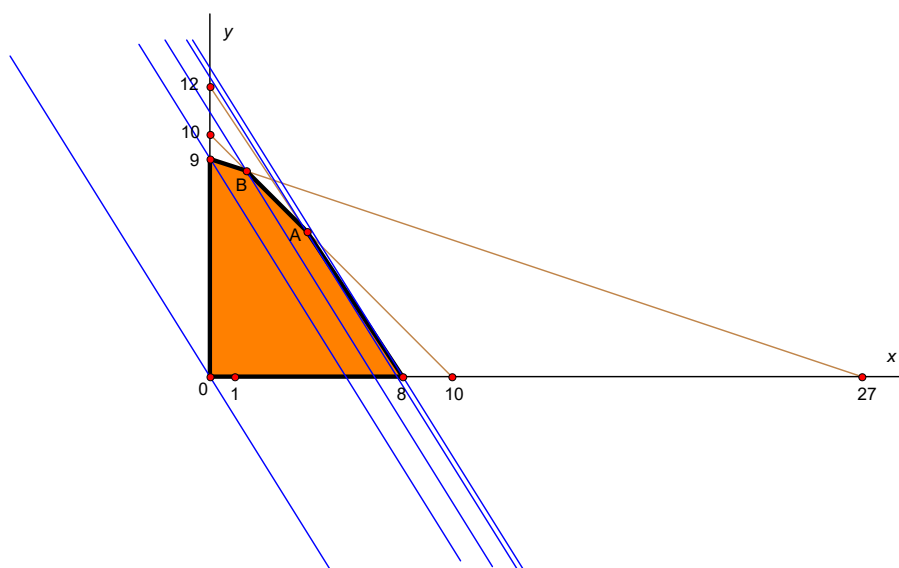
$$\text{E } \begin{cases} x + y = 10 \\ 3x + 2y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x = 24 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ pelo que } B = (4, 6).$$

$$\text{Então, } \begin{cases} z(8, 0) = 32 \times 8 + 20 \times 0 = 256 \\ z(0, 9) = 32 \times 0 + 20 \times 9 = 180 \\ z\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right) = 32 \times \frac{3}{2} + 20 \times \frac{17}{2} = 48 + 170 = 218 \\ z(4, 6) = 32 \times 4 + 20 \times 6 = 128 + 120 = 148 \end{cases}, \text{ pelo } z_{\max} = 256.$$

Podemos resolver o problema de forma totalmente geométrica (ou quase), traçando as chamadas rectas de nível.

Se fizermos $z(x, y) = 32x + 20y = 0$, temos $8x + 5y = 0$, pelo que, se $x = 5$, então $y = -8$. Então, temos uma recta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(5, -8)$.

Agora, pelos vértices do pentágono, traçamos paralelas à recta anterior. Uma dessas rectas vai corresponder ao máximo e outra ao mínimo.



49.2 O método do Simplex

Outra Resolução

Vamos resolver a questão anterior, pelo chamado método do Simplex.

De $x + y \leq 10$, $3x + 2y \leq 24$ e $x + 3y \leq 27$, vem que existem números reais não negativos u, v, w tais que $x + y + u = 10$, $3x + 2y + v = 24$ e $x + 3y + w = 27$.

Ao fim e ao cabo, introduzimos três novas variáveis (uma por cada inequação distinta da não negatividade das variáveis), obtendo-se só equações.

A solução de partida corresponde a fazermos $x = y = 0$, obtendo-se $z = 0$.

Esta solução inicial não tem que ser a solução pretendida. Digamos que é uma primeira "aproximação" da solução "ideal".

Como já vimos, esta solução inicial é a solução do problema, se pretendermos minimizar a função z .

Se pretendermos maximizar a função z , procedemos da seguinte maneira:

	x	y	u	v	w	
u	1	1	1	0	0	10
v	3	2	0	1	0	24
w	1	3	0	0	1	27
z	-32	-20	0	0	0	0

Note-se que, em vez de $z = 32x + 20y$, estamos a considerar $z - 32x - 20y$, sendo que o valor inicial de z é zero.

É claro que se tivermos $x = 5, y = 0$, por exemplo, o valor de z passa de zero para 160, sendo que esta solução é "melhor" que a solução inicial.

Olhando para a expressão $z = 32x + 20y$, podemos concluir que mais vale aumentar x do que aumentar y , pois o valor de x é multiplicado por 32, enquanto o valor de y é multiplicado por 20. No entanto, pode acontecer que isso não seja bem assim, se y puder tomar valores que contrabalançam o facto de se estar a multiplicar por 20 e não por 32. Deixemos essa questão para outra oportunidade e façamos $x = 10$ e $y = 0$. A primeira coisa a ver, é se estes valores satisfazem as condições do problema (isto é, se o ponto $(10, 0)$ pertence à região admissível).

Ora, $3 \times 10 + 2 \times 0 \leq 24$ é falso, pelo que não podemos ter $x = 10$. Como ver qual o maior valor que podemos atribuir a x ?

Relembremos as condições: $x + y \leq 10$, $3x + 2y \leq 24$ e $x + 3y \leq 27$, com $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Então, $x \leq 10$, $3x \leq 24$ e $x \leq 27$. Logo, devemos ter $x \leq 10$, $x \leq 8$ e $x \leq 27$. Logo, o maior valor que podemos atribuir a x é 8. Note-se que estes valores acabados de referir podem ser vistos na tabela anterior, dividindo os números da última coluna (10, 24, e 27) pelos números que estão na coluna de x : 1, 3 e 1. E o menor dos quocientes positivos é 8. Logo, não podemos atribuir a x , um valor superior a $8 = \min \left\{ \frac{10}{1}, \frac{24}{3}, \frac{27}{1} \right\} = \min \{10, 8, 27\}$.

Nesta altura, podemos responder à questão: E se quisermos atribuir um valor a y , qual é o maior valor admissível?

A resposta é simples: dividimos 10, 24 e 27 por 1, 2 e 3, e achamos o menor dos quocientes positivos.

Então, $\min \left\{ \frac{10}{1}, \frac{24}{2}, \frac{27}{3} \right\} = \min \{10, 12, 9\} = 9$. Então, além de termos de multiplicar por 20, ainda tivemos um valor menor (do que 10).

A questão que se coloca é a seguinte: já atingimos o valor máximo para z ? A resposta é sim, porque já resolvemos o problema por outro processo. Então, se não tivermos resolvido o problema de outra maneira, como saber se já atingimos o máximo ou não?

A tabela anterior, não nos dá a resposta, mas convém olhar para ela:

	x	y	u	v	w	
u	1	1	1	0	0	10
v	3	2	0	1	0	24
w	1	3	0	0	1	27
z	-32	-20	0	0	0	0

Relativamente às variáveis iniciais (x e y), estamos a considerar que $x = 8$ e $y = 0$.

Recapitulemos:

No primeiro passo, fizemos $x = 0$, $y = 0$, $u = 10$, $v = 24$, $w = 27$. O valor obtido para z foi de 0.

No segundo passo, fizemos $x = 8$, $y = 0$, sendo que o valor obtido para z é de 256. Vamos fazer umas alterações na tabela anterior, de modo a termos toda a informação na tabela.

Ora, se $x = 8$ e $y = 0$, temos $8 + 0 + u = 10$, $24 + 0 + v = 24$ e $8 + 0 + w = 27$. Então, $u = 2$, $v = 0$ e $w = 19$.

Olhando com mais atenção para a tabela anterior, podemos ver que, com a introdução das variáveis u , v e w , a tabela mostra-nos a base canónica $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, a matriz Identidade,

pelo que a solução de partida corresponde a
$$\begin{cases} u = 10 \\ v = 24 \\ w = 27 \\ x = y = 0 \end{cases}.$$

Agora, vamos proceder de maneira semelhante: só que as variáveis que são nulas não são as mesmas, pois uma continua a ser nula, mas há uma troca, pois x deixa de ser nula, enquanto v passa a ser nula. Então, vamos ficar com a base canónica noutra posição. Em primeiro lugar, dividimos a linha correspondente ao v por 3, e escrevemos x , onde estava escrito v (na terceira linha da tabela).

	x	y	u	v	w	
u	1	1	1	0	0	10
x	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	8
w	1	3	0	0	1	27
z	-32	-20	0	0	0	0

Para obtermos a matriz identidade, temos de eliminar os números que estão na segunda coluna (menos o correspondente a x). Então, obtemos

	x	y	u	v	w	
u	$1 - 1$	$1 - \frac{2}{3}$	$1 - 0$	$0 - \frac{1}{3}$	$0 - 0$	$10 - 8$
x	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	8
w	$1 - 1$	$3 - \frac{2}{3}$	$0 - 0$	$0 - \frac{1}{3}$	$1 - 0$	$27 - 8$
z	-32	-20	0	0	0	0

Continuando, vem

	x	y	u	v	w	
u	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	2
x	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	8
w	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	19
z	-32	-20	0	0	0	0

E já temos a matriz identidade.

Ainda falta um pormenor: calcular o valor de z e ficar a saber se o valor encontrado é o máximo.

Então, multiplicamos a linha de x por 32 e somamos com a linha de z :

	x	y	u	v	w	
u	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	2
x	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	8
w	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	19
z	$-32 + 32 = 0$	$-20 + \frac{64}{3} = \frac{4}{3}$	0	$\frac{32}{3} - \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$	0	256

Na tabela anterior, temos toda a informação que nos permite tirar as seguintes conclusões:

$$\begin{cases} u = 2, x = 8, w = 19 \\ y = 0, v = 0 \\ z = 256 \end{cases}$$

E, como na linha de z , só temos coeficientes positivos ou nulos, atingimos o valor máximo.

Note-se que a conclusão de que $y = 0, v = 0$ resulta de serem essas as variáveis que não aparecem na primeira coluna.

Este é um exemplo simples, tendo sido resolvido com amplos pormenores. Na prática, é tudo mais rápido. A resolução duma boa quantidade de exercícios dá uma ajuda na aprendizagem do método do Simplex.

Uma última nota: as variáveis introduzidas (neste caso, foram u, v, w) são chamadas de "variáveis de folga". No final, tivemos $u = 2, v = 0, w = 19$.

Exemplo 894 *Determine o valor máximo da função $z = 8x_1 + 15x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + 3x_2 \leq 13.$$

Resolução

A função objectivo (aquela que pretendemos maximizar) assume o valor zero para $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$. O método do Simplex consiste em procurar outro vértice onde a função assuma um valor superior e verificar se esse valor já é o máximo da função. Se não for, o processo continua.

Começamos por substituir $z = 8x_1 + 15x_2$ por $z - 8x_1 - 15x_2 = 0$. Começamos por notar que um aumento de uma unidade na variável x_1 provoca um aumento de oito unidades na função objectivo, enquanto que um aumento de uma unidade na variável x_2 provoca um aumento de quinze unidades na mesma função. À primeira vista, parece preferível aumentar x_2 o mais possível, mas tal pode não acontecer. Tudo depende dos aumentos que as variáveis podem sofrer.

Vejamos como se resolve a questão colocada:

Começamos por introduzir as chamadas variáveis de folga, fazendo $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10$ e $4x_1 + 3x_2 + x_4 = 13$, com todas as variáveis maiores ou iguais a zero, ou seja, $x_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Depois construímos um quadro (matriz) como se segue:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	3	1	0	10
x_4	4	3	0	1	13
z	-8	-15	0	0	0

Na situação inicial, temos $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 10$ e $x_4 = 13$.

Note-se a existência, no quadro, da matriz identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Depois, dividimos 10 por 3 e 13 por 3, se quisermos aumentar a variável x_2 , escolhendo o menor dos quocientes (positivos). Neste caso, o menor dos quocientes é $\frac{10}{3}$ que é obtido na linha onde está x_3 . Então, nessa linha, escrevemos x_2 (na primeira coluna):

	x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	3	1	0	10		x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
x_4	4	3	0	1	13		x_4	2	0	-1	1
z	-8	-15	0	0	0		z	2	0	5	0

Como se passa duma matriz para outra? E quando terminamos?

1. Na linha de x_2 , dividimos todos os elementos por 3 (coeficiente de x_2).
2. Nas restantes linhas, eliminamos x_2 .

3. Como todos os coeficientes na linha de z são positivos, já encontramos o valor máximo de z (40). Este valor corresponde a $x_2 = \frac{10}{3}$, $x_4 = 3$ e $x_1 = x_3 = 0$.

E se tivéssemos começado por aumentar a variável x_1 ? Nesse caso, teríamos:

	x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	3	1	0	10		x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
x_4	4	3	0	1	13		x_1	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
z	-8	-15	0	0	0		z	0	-9	0	2

Neste caso, ainda não atingimos o máximo de z , devido à existência do valor negativo -9 , na linha de z . Então o processo continua:

$\frac{7}{2} \div \frac{3}{2} = \frac{7}{3}$, $\frac{13}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{13}{3}$, tendo-se que o menor dos dois valores é $\frac{7}{3}$.

	x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$		x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{4}$		x_1	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
z	0	-9	0	2	26		z	0	-9	0	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
z	0	0	6	-1	47

E temos de continuar, tendo em atenção que escolhemos o menor dos quocientes positivos (neste caso apenas há um):

	x_1	x_2	x_3	x_4			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$		x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$		x_4	2	0	-1	1
z	0	0	6	-1	47		z	2	0	5	0

Comparando esta resolução com a resolução gráfica, vemos que, no primeiro processo, passámos do vértice $(0, 0)$ para o vértice $(0, \frac{10}{3})$, enquanto que, no segundo processo, passámos por todos os vértices. Este exemplo mostra que, antes de escolhermos um vértice, devemos analisar a situação com cuidado, se quisermos resolver o problema com o menor número de passos. E, na função objectivo, não basta escolher o coeficiente de maior valor absoluto!

Exemplo 895 Determine o máximo da função $z = 20x_1 + 30x_2 + 12x_3 + 25x_4$, com $x_i \geq 0$ (para $i = 1, 2, 3, 4$), $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20$, $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 24$ e $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 60$.

Resolução

O primeiro passo consiste em transformar as inequações em equações, introduzindo uma variável em cada inequação (chamada variável de folga).

Então, teremos

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_7 = 60 \end{cases}$$

É claro que $x_i \geq 0$ (para $i = 5, 6, 7$), ou seja, todas as variáveis são não negativas (as primeiras quatro e as três que foram introduzidas).

Depois, construímos a tabela seguinte:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	2	1	1	0	0	20
x_6	2	1	1	1	0	1	0	24
x_7	1	2	1	3	0	0	1	60
z	-20	-30	-12	-25	0	0	0	0

Estamos na situação inicial, tendo-se $x_5 = 20$, $x_6 = 24$, $x_7 = 60$, o que corresponde a termos $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, pelo que $z = 0$.

Note-se que, neste primeiro passo, as "variáveis básicas" são as que foram introduzidas: x_5 , x_6 e x_7 . Atente-se nas colunas dessas variáveis básicas: temos a base canónica.

Se pretendêssemos minimizar z , o problema estava resolvido. Só que pretendemos maximizar z .

Agora, temos de ver os coeficientes das variáveis na linha de z . O coeficiente -30 é o que tem maior valor absoluto e é esse que provoca o maior crescimento de z , quando as variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 aumentam uma unidade. Como -30 está na coluna de x_2 , temos de dividir os termos independentes pelos vários coeficientes (da coluna de x_2).

Então, temos $\frac{20}{1} = 20$, $\frac{24}{1} = 24$ e $\frac{60}{2} = 30$, sendo que o menor destes três valores é 20 (obtido na linha de x_5). Então, vamos retirar x_5 da base e substituí-la por x_2 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	2	1	1	0	0	20
x_6	2	1	1	1	0	1	0	24
x_7	1	2	1	3	0	0	1	60
z	-20	-30	-12	-25	0	0	0	0

Só que a base canónica tem de passar a ficar nas colunas de x_2 , x_6 e x_7 (as novas variáveis básicas). Como o coeficiente na linha e coluna de x_2 , já é 1, basta eliminarmos os restantes da mesma coluna:

Para x_6 , basta-nos fazer a diferença; para x_7 , fazemos $L_3 - 2L_2$; e, por fim, para z , fazemos $L_4 + 30L_2$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	2	1	1	0	0	20
x_6	$2 - 1$	$1 - 1$	$1 - 2$	$1 - 1$	$0 - 1$	$1 - 0$	$0 - 0$	$24 - 20$
x_7	$1 - 2$	$2 - 2$	$1 - 4$	$3 - 2$	$0 - 2$	$0 - 0$	$1 - 0$	$60 - 40$
z	$30 - 20$	$30 - 30$	$60 - 12$	$30 - 25$	$30 + 0$	$0 + 0$	$0 + 0$	$600 + 0$

Fazendo os cálculos, vem

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	2	1	1	0	0	20
x_6	1	0	-1	0	-1	1	0	4
x_7	-1	0	-3	1	-2	0	1	20
z	10	0	48	5	30	0	0	600

Como, na linha de z , todos os coeficientes são positivos, já temos o valor máximo encontrado: 600

Este valor máximo corresponde a $x_2 = 20$, $x_6 = 4$ e $x_7 = 20$. Logo, neste caso, só uma das variáveis de folga é nula, enquanto que, das variáveis iniciais, só uma é não nula: precisamente x_2 .

É claro que este exemplo foi escolhido para que só tivesse um passo. Mas, nos casos em que temos mais do que um passo, tudo decorre da mesma maneira.

Vejam os um exemplo muito semelhante ao anterior:

Exemplo 896 Determine o máximo da função $z = 35x_1 + 30x_2 + 12x_3 + 25x_4$, com $x_i \geq 0$ (para $i = 1, 2, 3, 4$), $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20$, $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 24$ e $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 60$.

Resolução

Começamos por construir a tabela:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	2	1	1	0	0	20
x_6	2	1	1	1	0	1	0	24
x_7	1	2	1	3	0	0	1	60
z	-35	-30	-12	-25	0	0	0	0

Começamos por observar o seguinte: 35 é maior do que 30, mas isso não garante que seja preferível começar por aumentar x_1 em vez de x_2 .

Porquê? Porque $\frac{24}{2} = 12$ (é o menor dos quocientes) e $12 \times 35 = 420$, sendo que este valor fica um pouco longe de 600.

Então, o primeiro passo é igual ao exemplo anterior:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	2	1	1	0	0	20
x_6	$2 - 1$	$1 - 1$	$1 - 2$	$1 - 1$	$0 - 1$	$1 - 0$	$0 - 0$	$24 - 20$
x_7	$1 - 2$	$2 - 2$	$1 - 4$	$3 - 2$	$0 - 2$	$0 - 0$	$1 - 0$	$60 - 40$
z	$30 - 35$	$30 - 30$	$60 - 12$	$30 - 25$	$30 + 0$	$0 + 0$	$0 + 0$	$600 + 0$

Existe uma única diferença:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	2	1	1	0	0	20
x_6	1	0	-1	0	-1	1	0	4
x_7	-1	0	-3	1	-2	0	1	20
z	-5	0	48	5	30	0	0	600

Na linha de z , ainda existe um coeficiente negativo (-5). Logo, temos de continuar:

Dividindo os termos independentes pelos coeficientes da coluna de x_1 , temos $\frac{20}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{20}{-1}$.

Os valores negativos não nos interessam, pelo que escolhemos o menor valor positivo: neste caso,

4.

Então, x_6 vai sair da base e dar lugar a x_1 . Neste caso, o coeficiente correspondente a x_1 já é 1, pelo que fica mais fácil:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	$1 - 1$	$1 - 0$	$2 + 1$	$1 - 0$	$1 + 1$	$0 - 1$	$0 - 0$	$20 - 4$
x_1	1	0	-1	0	-1	1	0	4
x_7	$-1 + 1$	$0 + 0$	$-3 - 1$	$1 + 0$	$-2 - 1$	$0 + 1$	$1 + 0$	$20 + 4$
z	$-5 + 5$	$0 + 0$	$48 - 5$	$5 + 0$	$30 - 5$	$0 + 5$	$0 + 0$	$600 + 20$

Agora, fazendo os cálculos, temos

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	3	1	2	-1	0	16
x_1	1	0	-1	0	-1	1	0	4
x_7	0	0	-4	1	-3	1	1	24
z	0	0	43	5	25	5	0	620

Então, o valor máximo de z é 620, correspondente a termos $x_1 = 4$, $x_2 = 16$ e $x_3 = x_4 = 0$. Note-se que só uma das variáveis de folga é diferente de zero.

Exemplo 897 Determine o máximo da função $z = 35x_1 + 30x_2 + 12x_3 + 25x_4$, com $x_i \geq 0$ (para $i = 1, 2, 3, 4$), $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 30$, $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6$ e $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 13$.

Resolução

Este exemplo tem duas alterações importantes, relativamente aos dois exemplos anteriores:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \text{ e } x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 13$$

Duas das inequações têm o sinal \geq . Este pormenor é muito importante. Então, introduzindo variáveis de folga, temos.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_7 = 13 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	2	1	1	0	0	30
	2	1	1	1	0	-1	0	6
	1	2	1	3	0	0	-1	13

Na tabela anterior, temos um problema sério: não existe a matriz identidade (e não adianta multiplicar linhas por -1). Então, vamos ter que utilizar outras duas colunas (que não as colunas de x_6 e x_7). Na coluna de x_1 , vamos ter os quocientes $\frac{30}{2} = 15$, $\frac{6}{1} = 6$ e $\frac{13}{1} = 13$, sendo que o menor valor positivo é 6. Então, obtemos

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	2	1	1	0	0	30
x_3	2	1	1	1	0	-1	0	6
	1	2	1	3	0	0	-1	13

A única diferença é que já sabemos que a segunda variável básica é x_3 .

Agora, temos que eliminar os coeficientes de x_3 , nas outras linhas (da coluna de x_3). Para isso, multiplicamos a linha de x_3 por -2 e somamos com a linha de x_5 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	-3	-1	0	-1	1	2	0	18
x_3	2	1	1	1	0	-1	0	6
	-1	1	0	2	0	1	-1	7

Já temos duas colunas da matriz identidade.

Agora, considerando a coluna de x_6 , temos $\frac{18}{2} = 9$, $\frac{6}{-1} = -6$ e $\frac{7}{1} = 7$, sendo este último valor o menor dos valores positivos. Então, vamos ter x_6 como terceira variável básica.

Na coluna de x_6 , vamos ter que anular os dois coeficientes (2 e -1):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	-1	-3	0	-5	1	0	2	4
x_3	1	2	1	3	0	0	-1	13
x_6	-1	1	0	2	0	1	-1	7
z	-35	-30	-12	-25	0	0	0	0

Só nesta posição é que adianta colocar os coeficientes relativos à função z . E temos de anular o coeficiente -12 , pois corresponde à variável básica x_3 . Relativamente às outras duas variáveis básicas os coeficientes já são zero. Então, multiplicamos a linha de x_3 por 12 e somamos com a linha de z :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	-23	-6	0	11	0	0	-12	156

Agora, estamos na situação inicial do método do Simplex: temos três variáveis básicas e quatro variáveis não básicas, tendo-se que z está escrita em função das variáveis não básicas. Nesta posição, os valores das variáveis são: $\begin{cases} x_5 = 4, x_3 = 13, x_6 = 7 \\ x_1 = x_2 = x_4 = x_7 = 0 \end{cases}$.

Vamos ter que retirar uma variável básica e substituí-la por outra: uma das possibilidades é retirar x_3 e colocar x_1 , pois só há um quociente positivo (relativamente à coluna de x_1). E basta somar as linhas convenientes, para obtermos

Para a linha de z , a linha de x_1 foi multiplicada por 23 (e somada à anterior linha de z).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	-1	1	-2	1	0	1	17
x_1	1	2	1	3	0	0	-1	13
x_6	0	3	1	5	0	1	-2	20
z	-23	-6	0	11	0	0	-12	156
z	0	40	23	80	0	0	-35	455

Como ainda temos um coeficiente negativo, na linha de z , ainda não obtivemos o valor máximo de z , pelo que o processo tem de continuar.

De novo, temos dois quocientes negativos: $\frac{17}{1} = 17$, $\frac{13}{-1} = -13$, $\frac{20}{-2} = -10$, pelo que só nos interessa o valor 17. Então, x_5 deixa de ser variável básica e dá o lugar a x_7 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	-1	1	-2	1	0	1	17
x_1	1	1	2	1	1	0	0	30
x_6	0	2	3	1	2	1	0	54
z	0	40	23	80	0	0	-35	455
z	0	5	58	10	35	0	0	1050

Note-se que, no final, temos $x_1 = 30, x_5 = 17, x_6 = 54, x_2 = x_3 = x_4 = x_7 = 0$, pelo que $z = 35 \times 30 + 30 \times 0 + 12 \times 0 + 25 \times 0 = 1050$.

Este mesmo exemplo vai ser resolvido pelo processo do "Grande M ", ou do "Big M ", como costuma ser conhecido (do inglês). A ideia da resolução é simples: nas inequações onde aparece o sinal \geq , introduzimos duas variáveis, como se segue:

49.3 O Grande M

Exemplo 898 Determine o máximo da função $z = 35x_1 + 30x_2 + 12x_3 + 25x_4$, com $x_i \geq 0$ (para $i = 1, 2, 3, 4$), $x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 30$, $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6$ e $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 13$.

Resolução

Este é o exemplo anterior. Vamos considerar as variáveis x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 , tendo-se que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - x_7 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_8 - x_9 = 13 \end{cases}$$

Para que não haja alteração das condições impostas no enunciado, temos de garantir que $x_5 \geq 0$, $x_7 \geq 0$ e $x_9 \geq 0$, de modo especial, $x_6 = 0$ e $x_8 = 0$.

Podem parecer estranho introduzir duas variáveis nulas, mas não tem nada de estranho. No final, essas duas variáveis têm de ser nulas, mas, pelo "caminho", dá-nos jeito que elas não sejam nulas. A razão é simples: podemos usá-las com variáveis básicas, no ponto de partida.

Então, fazendo $z = 35x_1 + 30x_2 + 12x_3 + 25x_4 - Mx_6 - Mx_8$, temos

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - x_7 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_8 - x_9 = 13 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_5	1	1	2	1	1	0	0	0	0	30
x_6	2	1	1	1	0	1	-1	0	0	6
x_8	1	2	1	3	0	0	0	1	-1	13
z	-35	-30	-12	-25	0	M	0	M	0	0

Note-se que, se $x_6 > 0$ ou $x_8 > 0$, o valor de z torna-se negativo com valor absoluto tão grande quanto M o permita. É por isso que se fala em "Big M ". Para os humanos, não há problema em deixar M , mas para os computadores, é necessário atribuir a M um valor específico (suficientemente grande para o problema em causa).

O próximo passo consiste em tirar uma variável da base e introduzir outra. Parece ser conveniente retirar x_6 ou x_8 .

Uma observação sobre o valor inicial de z :

$$z = 35 \times 0 + 30 \times 0 + 12 \times 0 + 25 \times 0 - M \times 6 - M \times 13 = -19M$$

Se $M = 1000000$, temos $z = -19000000$. Se fizermos $x_1 = 13, x_2 = x_3 = x_4 = 0$, temos uma solução "admissível" com $z = 35 \times 13 = 455$. Logo, não corremos o risco do máximo ser -19000000 .

Aliás, neste caso, o "Grande M " até pode ser bastante pequeno. Na resolução concreta de exercícios não precisamos de concretizar o valor de M .

Continuemos: $\frac{30}{1} = 30$, $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{13}{2}$, tendo-se que o menor destes valores é 6. Então, vamos retirar x_6 da base e vamos colocar x_2 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_5	-1	0	1	0	1	-1	1	0	0	24
x_2	2	1	1	1	0	1	-1	0	0	6
x_8	-3	0	-1	1	0	-2	2	1	-1	1
z	25	0	18	5	0	$M + 30$	-30	M	0	180

A presença de -30, na linha de z , mostra que não atingimos o máximo, pelo que temos de continuar.

Analisando a tabela, vemos que temos de substituir x_8 por x_7 (na base).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_5	-1	0	1	0	1	-1	1	0	0	24
x_2	2	1	1	1	0	1	-1	0	0	6
x_7	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	25	0	18	5	0	$M + 30$	-30	M	0	180

A linha de x_7 já está resolvida.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{47}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
x_7	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z	-20	0	3	20	0	M	0	$M + 15$	-15	195

A situação pode parecer bizarra: tínhamos dois coeficientes negativos (na última linha) e obtivemos dois!

Analisando a situação, vemos que é preferível aumentar x_9 , pois isso origina um maior aumento em z . Só que isso não significa que cheguemos mais depressa ao fim.

E ainda não atingimos o fim:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_9	1	0	3	-1	2	0	0	-1	1	47
x_2	1	1	2	1	1	0	0	0	0	30
x_7	-1	0	1	0	1	-1	1	0	0	24
z	-5	0	48	15	30	M	0	M	0	900

Agora, substituímos x_2 por x_1 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_9	0	-1	1	-2	1	0	0	-1	1	13
x_1	1	1	2	1	1	0	0	0	0	30
x_7	0	1	3	0	2	-1	1	0	0	54
z	0	5	58	25	40	M	0	M	0	1050

Finalmente, obtivemos o valor máximo de z : 1050. Este valor corresponde a termos $x_1 = 30$, $x_7 = 54$ e $x_9 = 13$, tendo-se que todas as outras variáveis são nulas, incluindo as "variáveis artificiais" x_6 e x_8 .

Exemplo 899 Determine o valor máximo da função $z = 8x_1 + 10x_2 + 15x_3$, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6, 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \text{ e } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8.$$

Resolução

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 8 \\ z - 8x_1 - 10x_2 - 15x_3 = 0 \end{cases}, \text{ com } x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	2	3	1	1	0	0	6
x_5	4	1	2	0	1	0	10
$x_3 \leftarrow x_6$	1	2	3	0	0	1	8
z	-8	-10	-15	0	0	0	0

$$\min\left(\frac{6}{1}, \frac{10}{2}, \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

$$z = \frac{8}{3} \times 15 = 40$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
$x_1 \leftarrow x_5$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
z	-3	0	0	0	0	5	40

$$\min\left(2, \frac{7}{5}, 8\right) = \frac{7}{5}$$

$$z = 40 + 3 \times \frac{7}{5} = \frac{221}{5}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$x_2 \leftarrow x_4$	0	$\frac{5}{2}$	0	1	0	0	1
x_1	1	$-\frac{1}{10}$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_3	0	$\frac{7}{10}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$
z	0	$-\frac{3}{10}$	0	0	3	$\frac{22}{5}$	$\frac{221}{5}$

$$\min\left(2, \frac{7}{5}, 8\right) = \frac{7}{5}$$

$$z = 40 + 3 \times \frac{7}{5} = \frac{221}{5}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	0	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{25}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{36}{25}$
x_3	0	0	1	$-\frac{7}{25}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{48}{25}$
z	0	0	0	$\frac{3}{25}$	3	$\frac{22}{5}$	$\frac{1108}{25}$

$$\min\left(\frac{2}{5}, \frac{22}{7}\right) = \frac{2}{5}$$

$$z = \frac{221}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{1108}{25}$$

Então, o valor máximo de z é $\frac{1108}{25}$, correspondente a $x_1 = \frac{36}{25}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{48}{25}$.

Se calcularmos $z\left(\frac{36}{25}, \frac{2}{5}, \frac{48}{25}\right)$, obtemos $8 \times \frac{36}{25} + 10 \times \frac{2}{5} + 15 \times \frac{48}{25} = \frac{1108}{25}$.

Exemplo 900 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 12x_2 + 20x_3$, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 16, 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \text{ e } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 21.$$

Resolução

Neste exemplo, temos a desigualdade $4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$, que tem o sinal \geq , em vez de \leq .

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 21 \\ z - 10x_1 - 12x_2 - 20x_3 = 0 \end{cases}, \text{ com } x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	3	5	1	1	0	0	16
	4	2	1	0	-1	0	10
	1	2	3	0	0	1	21
z	-10	-12	-20	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{17}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$
$x_3 \leftarrow x_6$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{37}{2}$
z	0	-7	$-\frac{35}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	25

$$\begin{aligned} \frac{17}{2} \div \frac{1}{4} &= 34 \\ \frac{5}{2} \div \frac{1}{4} &= 10 \\ \frac{37}{2} \div \frac{11}{4} &= \frac{74}{11} \approx 6,7273 \end{aligned}$$

E conseguimos chegar a uma situação familiar!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$x_5 \leftarrow x_4$	0	$\frac{37}{11}$	0	1	$\frac{8}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{75}{11}$
x_1	1	$\frac{4}{11}$	0	0	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$
x_3	0	$\frac{6}{11}$	1	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{74}{11}$
z	0	$\frac{28}{11}$	0	0	$-\frac{10}{11}$	$\frac{70}{11}$	$\frac{1570}{11}$

$$\frac{75}{11} \div \frac{8}{11} = \frac{75}{8}$$

$$\frac{74}{11} \div \frac{1}{11} = 74$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	$\frac{37}{8}$	0	$\frac{11}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{75}{8}$
x_1	1	$\frac{13}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{27}{8}$
x_3	0	$\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{47}{8}$
z	0	$\frac{27}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{25}{4}$	$\frac{605}{4}$

$$\begin{aligned} x_5 &= \frac{75}{8} \\ x_1 &= \frac{27}{8} \\ x_3 &= \frac{47}{8} \\ z_{\max} &= \frac{605}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 901 Determine o valor máximo da função $z = 10x_1 + 12x_2 + 20x_3$, com as variáveis x_1 , x_2 e x_3 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, 3x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 1408, 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 880 \text{ e } x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1848.$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1408 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 880 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 = 1848 \\ z - 10x_1 - 12x_2 - 20x_3 = 0 \end{cases}, \text{ com } x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0.$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
	3	5	1	1	0	0	1408	$1408 \div 3 \approx 469.33$
	4	2	1	0	-1	0	880	$880 \div 4 = 220$
	1	2	3	0	0	1	1848	$1848 \div 1 = 1848$
z	-10	-12	-20	0	0	0	0	$\min\left(\frac{1408}{3}, 220, 1848\right) = 220$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	748	$748 \div \frac{1}{4} = 2992$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	220	$220 \div \frac{1}{4} = 880$
$x_3 \leftarrow x_6$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	1628	$1628 \div \frac{11}{4} = 592$
z	0	-7	$-\frac{35}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	2200	$\min(2992, 880, 592) = 592$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
$x_5 \leftarrow x_4$	0	$\frac{37}{11}$	0	1	$\frac{8}{11}$	$-\frac{1}{11}$	600	$600 \div \frac{8}{11} = 825$
x_1	1	$\frac{4}{11}$	0	0	$-\frac{3}{11}$	$-\frac{1}{11}$	72	$592 \div \frac{1}{11} = 6512$
x_3	0	$\frac{6}{11}$	1	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	592	$\min(825, 6512) = 825$
z	0	$\frac{28}{11}$	0	0	$-\frac{10}{11}$	$\frac{70}{11}$	12 560	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_5	0	$\frac{37}{8}$	0	$\frac{11}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	825	$x_5 = 825$
x_1	1	$\frac{13}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	297	$x_1 = 297$
x_3	0	$\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	517	$x_3 = 517$
z	0	$\frac{27}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{25}{4}$	13 310	$z_{\max} = 13310$

Exemplo 902 Determine o valor máximo da função $z = 6x_1 + 5x_2$, com as variáveis x_1 e x_2 sujeitas às seguintes restrições:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 3x_2 \leq 10, 4x_1 + x_2 \geq 9.$$

Resolução

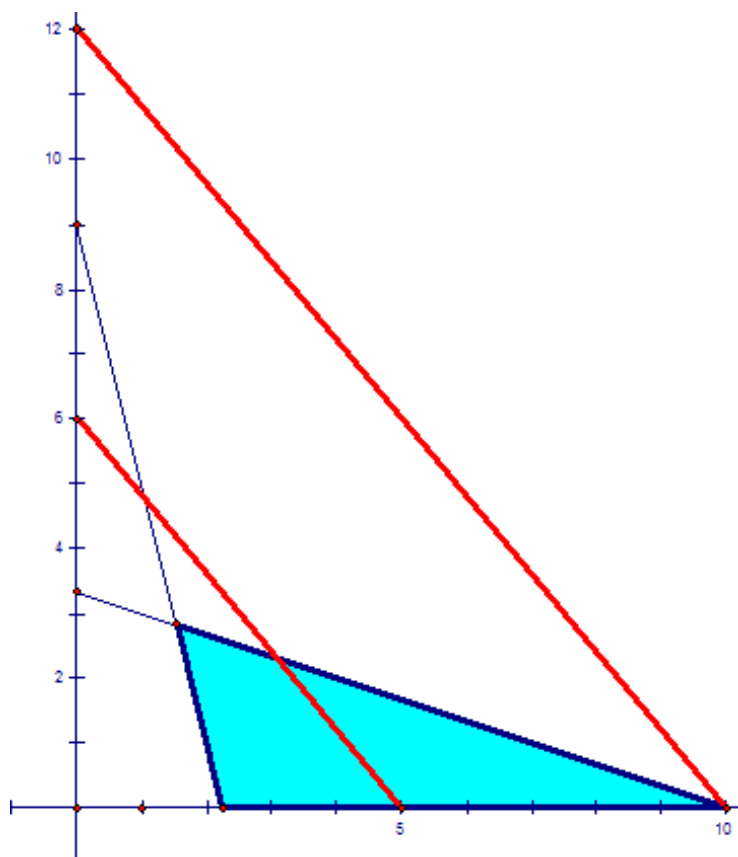
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 10 \\ 4x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 27 - 12x_1 = 10 \\ x_2 = 9 - 4x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{17}{11} \\ x_2 = \frac{31}{11} \end{cases}$$

As restrições dadas definem um triângulo de vértices $(10, 0)$, $(\frac{17}{11}, \frac{31}{11})$ e $(\frac{9}{4}, 0)$.

Ora, $z(10, 0) = 60$, $z(\frac{17}{11}, \frac{31}{11}) = 6 \times \frac{17}{11} + 5 \times \frac{31}{11} = \frac{257}{11}$ e $z(\frac{9}{4}, 0) = 6 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{2}$.

Logo, $z_{\max} = 60$.

Resolução gráfica

**Exercício 903** (*Teste nacional intermédio, 11º ano, Janeiro de 2008*)**Resolução**

Começamos por referir que, do enunciado, não podemos concluir que todo o sumo é vendido, mas, apenas, que se vende toda a quantidade de bebida X e de bebida Y que sejam obtidas, misturando convenientemente os sumos de laranja e de manga.

Capítulo 50

Problemas Choque Mate

O jornal escolar de Matemática Choque Mate publicou-se, pela primeira vez, em Março de 1988, na escola Secundária Jaime Moniz, embora fosse vendido em muitas outras Escolas da Região Autónoma da Madeira. Em quase todos os números publicados, havia um concurso com um problema destinado a ser resolvido pelos alunos.

Neste Capítulo, vamos revisitar esses problemas.

50.1 Maria e a apanha das maçãs

Problema 904 *Durante 8 dias, a Maria apanha maçãs numa macieira existente junto à sua casa, obedecendo, sempre, à mesma regra: em cada dia apanha metade das maçãs existentes na macieira e, ainda, mais meia maçã. Quantas maçãs havia na macieira, sabendo que, ao fim desses 8 dias, se esgotaram as maçãs.*

Resolução

Evidentemente, vamos considerar que mais ninguém apanhou maçãs, que não nascem maçãs entretanto, que não cai nenhuma maçã ao chão...

Este problema está resolvido noutro Capítulo. De qualquer modo, vamos resolvê-lo:

1. Números bons e números maus

Suponhamos que, num dado dia, há quatro maçãs na macieira. Então, a Maria tem de apanhar duas maçãs e meia, ficando uma maçã e meia na macieira. Esta hipótese mostra-nos que os números pares são "maus", não servindo para solução do problema.

Quanto aos números ímpares, serão todos "bons"?

Os números 1 e 3 são "bons", mas 5 é "mau", porque se houver 5 maçãs, a Maria tem de apanhar 3 maçãs, deixando 2 maçãs e já sabemos que 2 é "mau".

Qual será a sequência dos números "bons"?

Como, em cada dia, Maria apanha pouco mais de metade das maçãs, no dia anterior deve haver pouco mais do dobro das maçãs (será o dobro mais uma?).

Sequência dos números "bons": 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, ...

Resposta: 255 maçãs

2. Se hoje há y maçãs, quantas maçãs havia ontem?

Suponhamos que hoje há y maçãs e que ontem havia x . Então, $x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = y$, equação esta que é equivalente a $x = 2y + 1$.

Dia	8	7	6	5	4	3	2	1
y	0	1	3	7	15	31	63	127
x	1	3	7	15	31	63	127	255

3. Quantas maçãs apanhou a Maria em cada dia?

Sejam x , y , z , o número de maçãs existentes no início de três dias consecutivos. Então, $x = 2y + 1$ e $y = 2z + 1$, pelo que $x = 4z + 3$. Então, no primeiro desses três dias havia $4z + 3$ maçãs, enquanto que ficaram para o dia seguinte $2z + 1$ maçãs. Logo, a Maria apanhou $2z + 2$ maçãs nesse dia. E no dia seguinte apanhou $z + 1$ maçãs. Logo, em cada dia, a Maria apanha o dobro das maçãs que apanhará no dia seguinte.

Como no último dia, a Maria apanha uma maçã, temos que o número total de maçãs apanhadas é

$$S_8 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$$

$$\text{Então, } 2S_8 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256.$$

$$\text{Subtraindo membro a membro as duas igualdades, obtemos } S_8 = 256 - 1 = 255.$$

4. Bem no cimo da macieira, havia uma maçã escondida...

Suponhamos que a Maria, ao contar as maçãs não se apercebeu duma maçã escondida. Então, para nós que sabemos que há uma maçã a mais, a Maria apanha, em cada dia, metade das maçãs e, no fim, ainda há uma maçã. Então, partindo do fim, temos que o número de maçãs existente na macieira, no início de cada dia, é 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Logo, inicialmente, tínhamos 255 maçãs, porque não havia maçã escondida...

5. As maçãs e as sucessões

Seja n , o dia a contar do fim, isto é, 1 representa o último dia, 2 o penúltimo,...

Seja x_n o número de maçãs existentes no dia n , antes da apanha, e y_n o número de maçãs que ficam na macieira, depois da apanha. Então, $x_n = 2y_n + 1$.

Então, $x_{n+1} = 2y_{n+1} + 1$ e $y_{n+1} = x_n$. Repare-se que o número de maçãs que ficam num dia, depois da apanha, é o número de maçãs que a Maria encontra no dia seguinte.

Então, $x_{n+1} = 2x_n + 1$, partindo-se do valor inicial $x_1 = 1$.

$$\text{Logo, } x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 15, x_5 = 31, x_6 = 63, x_7 = 127, x_8 = 255$$

6. Sucessões que "ainda" não são progressões geométricas

Vamos considerar uma sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = ax_n + b, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

É claro, que a equação anterior só nos interessa, quando $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

Vejamus que podemos obter uma progressão geométrica de razão a , somando a x_n uma constante apropriada (β):

Seja $z_n = \beta + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Então,

$$z_{n+1} = \beta + x_{n+1} = \beta + ax_n + b$$

De $z_n = \beta + x_n$, vem $az_n = a\beta + ax_n$, pelo que, para obtermos uma progressão geométrica de razão a , devemos ter $z_{n+1} = az_n$.

Então, $\beta + ax_n + b = a\beta + ax_n$, donde se conclui que $\beta + b = a\beta$.

Então, $\beta(a-1) = b$, pelo que $\beta = \frac{b}{a-1}$. Então, $z_1 = \beta + x_1 = \frac{b}{a-1} + c$. Logo,

$$z_n = z_1 \times a^{n-1} = \left(\frac{b}{a-1} + c \right) a^{n-1}$$

Então,

$$x_n = z_n - \beta = \left(\frac{b}{a-1} + c \right) a^{n-1} - \frac{b}{a-1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

No exemplo das maçãs, tínhamos $a = 2, b = 1, c = 1$.

Então,

$$x_n = \left(\frac{1}{2-1} + 1 \right) 2^{n-1} - \frac{1}{2-1} = 2 \times 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $x_8 = 2^8 - 1 = 255$.

7. As maçãs e a calculadora

Comecemos por digitar, numa calculadora gráfica o número 1, carregando-se a seguir na tecla ENTER (ou EXE).

Depois, escrevemos $2 \times \text{Ans} + 1$. Carregando sucessivamente na Tecla ENTER, obtemos:

1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047, 4095, ...

F1 Tools	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 Pr3mID	F6 Clean Up	
■ 0						1.
■ 2·1. + 1						3.
■ 2·3. + 1						7.
■ 2·7. + 1						15.
■ 2·15. + 1						31.
■ 2·31. + 1						63.
2ans(1)+1						
MAIN	BAD APPROX	FUNC				6/7

F1 Tools	F2 Setup	F3 Header	F4 Header	F5 Header	F6 Header	F7 Header	F8 Header
x	u1						
16.	65535.						
17.	1.31e5						
18.	2.62e5						
19.	5.24e5						
20.	1.05e6						
u1(x)=1048575.							
MAIN RAD APPROX FUNC							

F1 Tools	F2 Setup	F3 Header	F4 Header	F5 Header	F6 Header	F7 Header	F8 Header
x	u1						
21.	2.1e6						
22.	4.19e6						
23.	8.39e6						
24.	1.68e7						
25.	3.36e7						
u1(x)=33554431.							
MAIN RAD APPROX FUNC							

F1 Tools	F2 Setup	F3 Header	F4 Header	F5 Header	F6 Header	F7 Header	F8 Header
x	u1						
26.	6.71e7						
27.	1.34e8						
28.	2.68e8						
29.	5.37e8						
30.	1.07e9						
u1(x)=1073741823.							
MAIN RAD APPROX FUNC							

Repare-se no número de maçãs, se em vez de 8 dias, tivéssemos 30 dias.

8. As maçãs e a base dois

Esta resolução destina-se, apenas, a quem conhece a base 2 (que é a base em que, internamente, trabalham os Computadores e as Calculadoras):

Consideremos a sucessão $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2x_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Então, $x_1 = 1, x_2 = 11_{(2)}, x_3 = 111_{(2)}, \dots$

Logo, $\begin{cases} x_1 = 10_{(2)} - 1 = 2 - 1 \\ x_2 = 100_{(2)} - 1 = 2^2 - 1 \\ x_3 = 1000_{(2)} - 1 = 2^3 - 1 \end{cases}$

Então, $x_n = 2^n - 1$, pelo que $x_8 = 2^8 - 1 = 255$.

50.2 A mosca e o pelotão

No momento em que um pelotão começa a entrar pelo portão da caserna, uma mosca levanta voo da ponta da espingarda dum soldado da última fila, em direcção à espingarda do soldado com o mesmo alinhamento e na fila da frente. Mal posou sobre esta, voltou a partis em sentido oposto, pousando na espingarda, de onde partira inicialmente, no momento em que a última fila do pelotão passava o portão da caserna.

O comprimento do pelotão mantém-se constante e é igual a 50 metros. As velocidades com que se deslocam, quer a mosca quer o pelotão, são constantes.

Qual a distância que a mosca percorreu?

Resolução

1. Uma resposta errada

A mosca percorreu 100 metros: 50 para a frente e 50 para trás.

Esta resposta está errada, pois a mosca voa para a frente uma distância superior à que voa para trás. De qualquer modo, até poderia acontecer que uma má resolução originasse uma resposta "certa". Para que a mosca percorresse 100 metros, teria de percorrer 50 metros até ao portão, depois 25 metros para a frente e, finalmente, 25 metros para trás (até ao portão).

Tal significaria que a mosca percorria 75 metros (para a frente), enquanto o pelotão percorria 25 metros; no regresso, a mosca percorria 25 metros, enquanto o pelotão percorria os restantes 25 metros. Ora, tal não pode acontecer, porque os movimentos são uniformes.

2. As respostas habituais

Seja x a distância, em metros, percorrida pelo soldado da frente, desde o portão até ao ponto em que se encontrava, no momento em que a mosca pousou na sua espingarda. Nesse momento, a mosca percorrerá $50+x$ metros. No regresso, a mosca percorre x metros, enquanto o pelotão percorre $50-x$ metros. Então,

$$\frac{50+x}{x} = \frac{x}{50-x} = \frac{50+2x}{x}$$

Para determinar x , basta escolher uma das 3 igualdades anteriores. Escolhendo a igualdade $\frac{50+x}{x} = \frac{x}{50-x}$, temos $x^2 = 2500 - x^2$. Logo, $x^2 = 1250$, donde se conclui que $x = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$, uma vez que $x > 0$.

Logo, a mosca percorreu $50 + 50\sqrt{2}$ metros. Note-se que $50 + 50\sqrt{2} \approx 120,71$.

3. Uma resposta inesperada

O aluno Eugénio Dias (ESJM) enviou uma resolução inesperada que a seguir se apresenta (com algumas adaptações):

Consideremos o instante em que metade do pelotão já ultrapassou o portão e a outra metade ainda não o fez, ou seja, o momento em que o pelotão percorreu 50 metros. Nesse instante, onde está a mosca? Afirmamos que a mosca já ultrapassou o portão, porque se a mosca, em metade do tempo, não atingisse o meio do pelotão, então, quando a última fila do pelotão atingisse o portão, a mosca não teria chegado à primeira fila. Além disso, ainda não chegou à frente do pelotão, pois a mosca demora mais tempo a atingir o soldado da frente do que no percurso inverso.

Então, nesse instante, a mosca está x metros à frente do portão, tendo percorrido $50+x$ metros, enquanto o pelotão percorreu 25 metros. A mosca tem, ainda, de percorrer $50+x$ metros, sendo 25 metros para a frente e $25+x$ metros, para trás.

No momento em que a mosca pousa na espingarda do soldado da frente, já percorreu $75+x$ metros, enquanto que o pelotão percorreu $25+x$ metros. Então,

$$\begin{aligned} \frac{50+x}{25} = \frac{75+x}{25+x} &\iff (50+x)(25+x) = 25(75+x) \\ &\iff 1250 + 50x + 25x + x^2 = 1875 + 25x \\ &\iff x^2 + 50x - 625 = 0 \iff x = -25 \pm \sqrt{625 + 625} \\ &\iff x = -25 + 25\sqrt{2} \vee x = -25 - 25\sqrt{2} \end{aligned}$$

Logo, a distância total percorrida pela mosca foi de $100 + 2x$ metros, com $x = -25 + 25\sqrt{2}$.

Ora, $100 + 2x = 100 + 2(-25 + 25\sqrt{2}) = 50 + 50\sqrt{2}$, pelo que a distância percorrida pela mosca é de $50 + 50\sqrt{2}$ metros.

50.3 O meu filho mais velho toca piano

O Silva e o Sousa, dois colegas de escola, que há muito não se viam, encontram-se e, depois de trocarem cartões de visita, travam o seguinte diálogo:

- Já tens três filhos? E que idades têm eles? – pergunta a certa altura o Sousa.
 - O produto das suas idades é 36 – responde o Silva.
 - Mas essa informação não é suficiente...
 - De facto... Olha a soma das suas idades é igual ao número da porta da minha casa.
- O Sousa pensou durante algum tempo, até que acabou por excluir:
- Esses dados ainda não me chegam.
 - Também cheguei a essa conclusão. Mas, sabes, o meu filho mais velho toca piano.
- Então, o Sousa disse correctamente as idades dos filhos do Silva. Quais são essas idades?

Resolução

Este problema é curioso, podendo parecer que não tem nada a ver com Matemática. Puro engano!

Convém referir que nós não conhecemos o número da porta da casa do Silva, mas os dois amigos sabem, pois tocaram cartões de visita!

Vejamos as possibilidades do produto de três números dar 36:

x	36	18	12	9	9	6	6
y	1	2	3	4	2	6	3
z	1	1	1	1	2	1	2
$x + y + z$	38	21	16	14	13	13	11

Então, se a porta tivesse o número 21, o Sousa já saberia as idades dos filhos do Silva.

Logo, o número da porta é 13, o que não permite saber as idades dos filhos.

E a pista "o meu filho mais velho toca piano" permite descobrir que as idades são 9, 2, 2 anos e não 6, 6, 1.

Então, os dois filhos mais novos são gémeos (embora tal não possa ser garantido a 100 por cento!).

50.4 O passeio do senhor Anacleto

O senhor Anacleto todos os dias sai do trabalho à mesma hora, apanha o mesmo comboio e chega à estação, onde a mulher acaba de chegar de automóvel para levá-lo a casa.

Um dia, como o escritório fechou uma hora mais cedo, o senhor Anacleto resolveu apanhar o comboio uma hora mais cedo. Chegou à estação e principiou a andar a pé, em direcção a casa.

A mulher, que partira de casa para ir buscá-lo à estação, encontrou-o a determinada altura do percurso, fez inversão de marcha e seguiram juntos para casa. Nesse dia, chegaram a casa 20 minutos mais cedo.

Quanto tempo andou a pé o senhor Anacleto?

Resolução

Este problema é bastante fácil, bastando ter alguma atenção para o resolver.

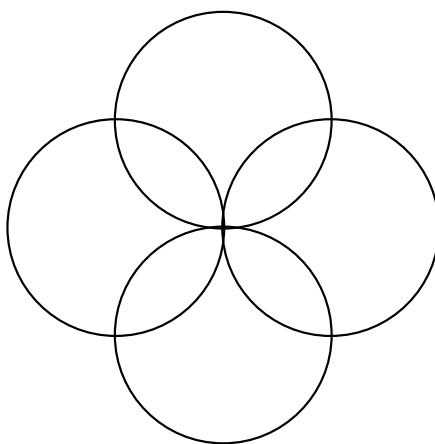
Como chegaram a casa 20 minutos mais cedo, tal significa que a mulher do senhor Anacleto andou menos 20 minutos que o habitual. Então, o senhor Anacleto e a mulher encontraram-se 10 minutos antes da hora habitual de chegada à estação. Logo, o senhor Anacleto andou a pé 50 minutos (pois chegou à estação uma hora mais cedo que o habitual).

É claro que estamos a supor que a mulher do senhor Anacleto demora o mesmo tempo do ponto de encontro à estação e desta ao ponto de encontro.

50.5 Os quatro ciclistas

Quatro ciclistas começaram o seu treino ao meio dia, cada um no seu circuito. Todos partiram do centro (da figura) e combinaram parar quando se encontrassem pela quarta vez. Um dos ciclistas roda a 6 km por hora, outro a 9 km por hora, o terceiro a 12 km por hora e o quarto a 15 km por hora. O perímetro de cada circuito é de um terço de quilómetro.

A que horas acabam o treino?



Resolução

A que horas os quatro ciclistas se encontram pela primeira vez? Ao fim de uma hora, quantas voltas ao circuito dá cada ciclista?

O primeiro ciclista percorre 6 km, o que corresponde a 18 voltas ao circuito.

O segundo ciclista percorre 9 km, o que corresponde a 27 voltas ao circuito.

O terceiro ciclista percorre 12 km, o que corresponde a 36 voltas ao circuito.

O primeiro ciclista percorre 15 km, o que corresponde a 45 voltas ao circuito.

Ora, $\text{mdc}(18, 27, 36, 45) = 9$. Então, o primeiro ciclista dá duas voltas ao circuito, enquanto o segundo dá três voltas, o terceiro quatro e o quarto cinco voltas. Nesse momento, os ciclistas encontram-se pela primeira vez (depois do início do treino).

Quando se encontram pela quarta vez, o primeiro ciclista deu 8 voltas ao circuito pelo que percorreu oito terços de quilómetro.

Ora, $\frac{8}{6} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$. Este resultado está em horas. Em minutos, temos $\frac{4}{9} \times 60 = \frac{80}{3} = 26 + \frac{2}{3}$. Como dois terços de um minuto correspondem a 40 segundos, temos que os quatro ciclistas se encontram pela quarta vez às doze horas, vinte e seis minutos e quarenta segundos.

Observação

Outra maneira de resolver o problema consiste em verificar que o número de voltas percorridas pelos ciclistas (num dado tempo) é directamente proporcional às respectivas velocidades. Então, enquanto o primeiro ciclista dá 6 voltas ao circuito, o segundo dá 9 voltas, o terceiro 12 voltas e o

quarto dá 15 voltas. Dividindo por 3, temos que o primeiro ciclista dá 2 voltas ao circuito, enquanto que os outros dão 3, 4 e 5 voltas. O resto da resolução é igual à anterior.

50.6 A travessia do deserto

Um viajante propõe-se atravessar, sozinho e sem qualquer ajuda, uma região inteiramente desprovida de recursos. No entanto, ao fim de cada 20 quilómetros de estrada, existe um refúgio. O comprimento da estrada é de 100 quilómetros.

O viajante pode percorrer durante um dia 20 quilómetros e a sua bagagem não lhe permite levar mais alimentos (e água) do que os correspondentes a três dias de viagem.

Os refúgios, à partida, estão desprovidos de alimentos e são os únicos locais onde poderá armazenar os alimentos que taz consigo.

Qual o número mínimo de dias necessários para o viajante atravessar o deserto?

Resolução

Se o viajante pudesse transportar mantimentos para toda a viagem, então iria demorar cinco dias. Mas, como só pode transportar mantimentos para três dias, então tem de voltar ao ponto de partida para conseguir mais mantimentos. Como efectuar a travessia?

O viajante avança 20 km, até ao primeiro abrigo, onde guarda mantimentos para um dia e volta ao ponto de partida (gastando dois dias). No terceiro dia, volta a partir para o primeiro abrigo e, quando lá chega, tem mantimentos para três dias o que, apenas, lhe permite chegar ao quarto abrigo. De qualquer modo, chegámos a uma conclusão importantíssima: em seis dias atravessamos um deserto com 80 km. Este resultado vai permitir-nos resolver o problema.

Então, o objectivo do viajante é colocar, no primeiro abrigo, mantimentos para seis dias. Para isso tem de efectuar cinco viagens do ponto de partida até ao primeiro abrigo (em cada viagem coloca mantimentos para um dia, excepto na última viagem em que coloca mantimentos para dois dias, já que não volta para trás). Então, o número mínimo de dias para efectuar a travessia do deserto é 15 ($5 \times 3 = 15$).

Outra maneira de obter o resultado: $4 \times 2 + 1 + 6 = 15$.

O deserto e as sucessões

Seja n o número de dias que se gastava para atravessar o deserto se houvesse mantimentos em todos os abrigos. Seja u_n o número mínimo de dias necessário para atravessar o deserto, com as restrições impostas pelo enunciado do problema.

É claro que $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ e já vimos que $u_4 = 6$ e $u_5 = 15$. Quais os valores de u_6 , de u_7 ,...?

Para $n \geq 3$ é válido o seguinte raciocínio:

Para atravessar um deserto de "comprimento" $20n$ km, são necessários u_n dias. Então, para atravessar um deserto de "comprimento" $20(n+1)$ km, o viajante tem de colocar no primeiro abrigo mantimentos para u_n dias. Logo, tem de efectuar $u_n - 1$ viagens entre o ponto de partida e o primeiro abrigo. Logo, $u_{n+1} = 3(u_n - 1) = 3u_n - 3$.

Obtivemos, assim, uma sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n - 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Note-se que u_n pode ser definido por $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3^{n+1} + 3}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, tendo-se que o primeiro termo não é dado pela fórmula $u_{n+1} = \frac{3^{n+1} + 3}{2}$.

Sobre este assunto veja a resolução do problema "Maria e a apanha das maçãs".

50.7 Viagem de ida e volta

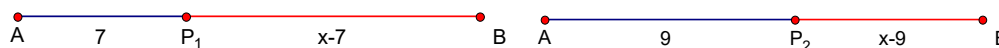
Dois barcos vão e vêm ao longo de um rio entre duas cidades. Andam às mesmas velocidades constantes: igualmente rápidos no sentido da corrente, igualmente lentos no sentido contrário.

A determinada hora, partem simultaneamente das duas cidades. Cruzam-se a primeira vez a 7 km de uma das cidades, para cada um quatro minutos nos seus destinos, recomeçam a viagem e cruzam-se, pela segunda vez, a 7 km da mesma cidade.

Qual a distância entre as duas cidades?

Resolução

Consideremos as cidades A e B , que distam entre si x km. Para efeitos do desenho, suponhamos que o rio é rectilíneo, pois a forma do rio é irrelevante. Sejam v_1 a velocidade dos barcos quando se deslocam de A para B e v_2 a velocidade dos barcos quando se deslocam de B para A . Sejam P_1 o ponto onde se cruzam pela primeira vez e P_2 o ponto onde se cruzam pela segunda vez.



Na primeira situação, temos que os barcos partem de A e de B , ao mesmo tempo, tendo-se que o barco que parte de A percorre 7 km à velocidade v_1 , enquanto o barco que parte de B percorre $(x - 7)$ km à velocidade v_2 .

$$\text{Logo, } \frac{7}{v_1} = \frac{x - 7}{v_2}.$$

Na segunda situação os dois barcos estão a realizar os percursos contrários, pelo que as distâncias a que os barcos estão do fim da viagem serão percorridas no mesmo tempo. Logo, $\frac{9}{v_2} = \frac{x - 9}{v_1}$.

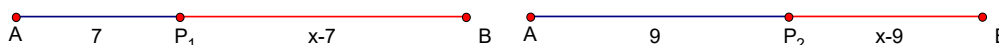
Observe-se que, no trajecto inverso, os barcos não partem das duas cidades ao mesmo tempo.

Então, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{7}{x - 7} = \frac{x - 9}{9}$. Logo, $x^2 - 9x - 7x + 63 = 63$, donde se conclui que $x^2 - 16x = 0$ e, finalmente, que $x = 0 \vee x = 16$. Como $x > 9$, vem $x = 16$. Logo, a distância entre as cidades A e B é de 16 km.

Note-se, ainda, que na altura em que os dois barcos se cruzam pela segunda vez, o barco que partiu de A percorreu x km (de A até B) à velocidade v_1 e $(x - 9)$ km à velocidade v_2 . Enquanto isso, o barco que partiu de B percorreu x km (de B até A) à velocidade v_2 e 9 km à velocidade v_1 .

Então, $\frac{x}{v_1} + \frac{x - 9}{v_2} = \frac{x}{v_2} + \frac{9}{v_1}$, donde vem $\frac{x - 9}{v_1} = \frac{9}{v_2}$, obtendo-se uma das equações acima obtidas.

Outra resolução



O barco que parte de A percorre 7 km, enquanto o barco que parte de B percorre $(x - 7)$ km.

Criemos, agora, um barco virtual que está x km atrás do barco que vai para A . O barco (que vai de P_2 para B) chega a B ao mesmo tempo que o barco virtual. Então, repete-se a situação anterior: o barco virtual percorreu $(x - 7)$ km, enquanto outro barco percorreu 7 km.

Logo, $x - 9 = 7$, pelo que $x = 16$. Logo, a distância entre as duas cidades é de 16 km.

É claro que não precisamos de nenhum barco virtual.

50.8 Os três marinheiros

O comandante de um navio, querendo recompensar três corajosos marinheiros, deu-lhes uma certa quantidade de moedas de ouro (superior a 200 e inferior a 300). As moedas foram guardadas numa caixa, para serem distribuídas no dia seguinte.

Durante a noite, cada um dos marinheiros, às escondidas dos outros, foi à caixa e retirou um terço das moedas existentes. Como o número de moedas não era divisível por 3, cada marinheiro deitou uma moeda ao mar, para evitar disputas na altura da distribuição das moedas.

No entanto, todos se calaram pelo que, no dia seguinte, o imediato dividiu as restantes moedas pelos marinheiros e, mais uma vez, sobrou uma moeda que ficou na posse do imediato. Desta forma, todos os três marinheiros ficaram satisfeitos, pensando que tinham mais moedas que os outros dois.

Com quantas moedas ficou cada marinheiro?

Resolução

Podemos resolver este problema do fim para o princípio ou do princípio para o fim.

1º Processo

O imediato do navio encontrou $(3n + 1)$ moedas.

O terceiro marinheiro deixou $(3n + 1)$ moedas, tendo ficado com metade dessas moedas e deitado uma ao mar.

Logo, o segundo marinheiro deixou $(3n + 1 + \frac{3n+1}{2} + 1)$ moedas, ou seja, $\frac{9n+5}{2}$ moedas.

Então, o segundo marinheiro retirou $\frac{9n+5}{4}$ moedas para si e deitou uma ao mar. Então, o primeiro marinheiro deixou $(\frac{9n+5}{4} + \frac{9n+5}{2} + 1)$ moedas, ou seja, $\frac{27n+19}{4}$ moedas. Então, o primeiro marinheiro encontrou $(\frac{27n+19}{8} + \frac{27n+19}{4} + 1)$ moedas, ou seja, $\frac{81n+65}{8}$ moedas.

Mas, $\frac{81n+65}{8} = 10n + 8 + \frac{n+1}{8}$, pelo que $n + 1$ tem de ser múltiplo de 8. Logo, $n = 8m - 1$, com $m \in \mathbb{N}$.

Logo, $\frac{81n+65}{8} = 10n + 8 + \frac{n+1}{8} = 80m - 10 + 8 + m = 81m - 2$.

Então, $200 < 81m - 2 < 300$, donde se conclui que $\frac{202}{81} < m < \frac{302}{81}$. Ora, $\frac{202}{81} \approx 2,49$ e $\frac{302}{81} = 3,73$, pelo que $m = 3$.

Então, $81m - 2 = 81 \times 3 - 2 = 241$, pelo que, inicialmente, havia 241 moedas.

O primeiro marinheiro retirou 80 moedas, deixando 160.

O segundo marinheiro retirou 53 moedas, deixando 106.

O terceiro marinheiro retirou 35 moedas, deixando 70.

O imediato ficou com uma moeda e deu 23 moedas a cada marinheiro.

Então, o primeiro marinheiro ficou com 103 moedas (23 a mais), o segundo marinheiro ficou com 76 (4 a menos) e o terceiro marinheiro ficou com 58 (22 a menos). Note-se que 3 moedas foram parar ao fundo do mar e que os três marinheiros ficaram contentes pois cada um deles tinha enganado os outros dois.

2º Processo

O primeiro marinheiro encontrou $(3n + 1)$ moedas, deitou uma ao mar, guardou n moedas e deixou $2n$ moedas.

O segundo marinheiro, encontrou $2n$ moedas, deitou uma ao mar, retirou $\frac{2n-1}{3}$ moedas e deixou ficar $\frac{4n-2}{3}$.

O terceiro marinheiro encontrou $\frac{4n-2}{3}$ moedas, deitou uma ao mar, retirou $\frac{4n-5}{9}$ moedas e deixou ficar $\frac{8n-10}{9}$.

O imediato encontrou $\frac{8n-10}{9}$ moedas, retirou uma e entregou $\frac{8n-19}{27}$ a cada marinheiro.

Então, $\frac{8n-19}{27}$ tem de ser um número natural (o mesmo acontecendo com as outras fracções).

Então, $\frac{8n-19}{27} = m$, donde vem $8n - 19 = 27m$. Logo, $n = \frac{27m+19}{8} = 3m + 2 + \frac{3m+3}{8}$.

Então, $3m + 3 = 8u$, donde vem que $u = 3v$.

Logo, $3m + 3 = 8u = 24v$, donde vem $m + 1 = 8v$.

Então, $n = \frac{27m+19}{8} = \frac{27(8v-1)+19}{8} = 27v - 1$, pelo que $3n + 1 = 81v - 3 + 1 = 81v - 2$.

Então, $200 < 81v - 2 < 300$, obtendo-se a mesma equação que anteriormente (embora com outra variável).

O resto da resolução é a mesma.

É claro que estivemos a supor que todas as variáveis envolvidas representam números naturais.

50.9 Brincando com a calculadora

Um professor de Matemática reformado, brincando com a calculadora que a sua bisneta adolescente lhe deu, descobriu que a diferença entre os cubos dos dois algarismos da sua idade era igual ao quadrado da idade da sua bisneta. Que idade tinham eles?

Resolução

O problema resolve-se com a equação $x^3 - y^3 = (10 + a)^2$, onde x, y, a são números inteiros positivos inferiores a 10, sendo a idade do bisavô $10x + y$. Note-se que a idade da bisneta é um número entre 10 e 20 e que x é um dos números 6, 7, 8 ou 9. Estamos a supor que a diferença entre os cubos dos dois algarismos da idade do bisavô é a diferença entre o cubo do algarismo das dezenas e o cubo do algarismo das unidades, para que o problema não tenha duas soluções.

Este é um problema que pode ser resolvido facilmente no EXCEL ou noutra folha de cálculo.

Nas tabelas seguintes estão indicados os valores (não negativos) de $x^3 - y^3$ e respectivas raízes quadradas (arredondadas):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	216	215	208	189	152	91	0			
7	343	342	335	316	279	218	127	0		
8	512	511	504	485	448	387	296	169	0	
9	729	728	721	702	665	604	513	386	217	0

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	14,7	14,7	14,4	13,7	12,3	9,5	0			
7	18,5	18,5	18,3	17,8	16,7	14,8	11,3	0		
8	22,6	22,6	22,4	22,02	21,2	19,7	17,2	13	0	
9	27	26,99	26,9	26,5	25,8	24,6	22,6	19,6	14,7	0

Só há dois casos em que a raiz quadrada é um número inteiro: 27 e 13.

Como a bisneta é adolescente, concluímos que a sua idade é de treze anos enquanto que a idade do bisavô é de 87 anos.

É claro que, na primeira tabela, podíamos eliminar os números maiores que 400 e os menores que 100, o que daria menos trabalho a preencher a segunda tabela. Note-se que a idade da neta é um número entre 10 e 20.

A primeira tabela seria substituída pela seguinte:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	216	215	208	189	152					
7	343	342	335	316	279	218	127			
8						387	296	169		
9								386	217	

50.10 Filhos, netos e perucas

Numa festa, uma rapariga elegante que estava de preto voltou-se para a senhora que ostentava um lindo vestido azul claro e perguntou risonha:

– Mas, afinal, quantas perucas a senhora tem?

A interrogada, em tom gaiato, respondeu:

– O número de perucas que eu tenho, minha filha, nada tem de exagero. É igual ao dobro do número dos meus netos menos um!

– Menos um, como? – indagou a rapariga.

– Veja bem. Do número total dos meus netos tire um e multiplique o resultado por dois. Terá, exactamente, o número das minhas perucas. Entendeu?

– E a senhora tem muitos netos?

– Ora, os meus filhos já estão todos casados e cada um deles já me deu dois netos. Há dias, constatei que somando o número das minhas perucas com o número dos meus filhos e com o número dos meus netos se obtém 19. Ora, 19, nove fora, 1 que é o meu marido. Entendeu?

Poderá você, tendo ouvido esta curiosa e indiscreta conversa feminina, calcular o número de perucas da amável senhora de vestido azul?

Resolução

Sejam y o número de perucas e x o número de filhos da senhora de vestido azul. Então, o número de netos é $2x$.

Logo, $y + x + 2x = 19$. Além disso, temos $y = 2(2x - 1) = 4x - 2$.

Da primeira equação, vem $y = 19 - 3x$. Então, $4x - 2 = 19 - 3x$. Logo, $7x = 21$, pelo que $x = 3$.

Então, $y = 10$, pelo que a senhora tem 10 perucas (e 3 filhos e 6 netos).

50.11 O desencontro

Todos os dias, à mesma hora, Timóteo toma o comboio para os subúrbios, onde mora.

Na estação, espera-o a mulher para o levar, de carro, para casa.

Um dia, sem avisar a mulher, Timóteo apanhou o comboio mais cedo do que o habitual e resolveu ir andando mais cedo para casa. Cruzou-se com a mulher que, infelizmente, não o viu, se não teria chegado a casa 20 minutos mais cedo que o habitual. Quando a mulher chega à estação e não o

vê sair do comboio deixa imediatamente a estação e consegue alcançá-lo, 25 minutos depois de se terem cruzado. Timóteo entra para o carro e, como é evidente, chega a casa à hora habitual.

Supõe-se que a mulher de Timóteo conduz a uma velocidade constante nos dois sentidos e que não há tempos mortos. E o mesmo acontece com a velocidade de Timóteo.

Que adiantamento trazia o comboio apanhado nesse dia por Timóteo sobre o comboio habitual?

Resolução

Timóteo cruzou-se com a mulher 10 minutos antes do comboio habitual chegar à estação. E a mulher demorou 10 minutos, do ponto em que se cruzaram à estação e demorou 15 minutos da estação até encontrar Timóteo. Então, o automóvel gasta 5 minutos a percorrer o trajecto em que Timóteo gasta 25 minutos. Então, o automóvel anda cinco vezes mais depressa que Timóteo.

Então, da estação ao ponto em que se cruzaram, Timóteo gastou 50 minutos (a mulher gastou 10 minutos). E o comboio habitual chegou 10 minutos após a hora em que se cruzaram.

Então, o comboio que o Timóteo apanhou nesse dia partiu uma hora mais cedo.

50.12 A festa

A uma festa assistiram vinte pessoas (rapazes e raparigas). Todas as raparigas que estavam na festa dançaram com rapazes. A Maria dançou com sete rapazes, a Olga com oito, a Vera com nove e assim sucessivamente, até à Nina que dançou com todos os rapazes. Quantos rapazes estavam na festa?

Resolução

Suponhamos que havia x rapazes e y raparigas. Então, $x + y = 20$.

Se a rapariga 1 dançou com sete rapazes, a rapariga y dançou com $6 + y$ rapazes. Logo, $y + y + 6 = 20$, donde se conclui que $y = 7$.

Outra resolução:

A primeira rapariga dançou com 7 rapazes.

A segunda rapariga dançou com 8 rapazes.

A terceira rapariga dançou com 9 rapazes.

A quarta rapariga dançou com 10 rapazes.

A quinta rapariga dançou com 11 rapazes.

A sexta rapariga dançou com 12 rapazes.

A sétima rapariga dançou com 13 rapazes.

E, como $7 + 13 = 20$, podemos concluir que havia 7 raparigas e 13 rapazes.

50.13 A exploração infantil no tempo dos nossos avós

Numa propriedade trabalhavam homens, mulheres e crianças. Sabe-se que o dono da propriedade pagava, por cada dia de trabalho, 3\$00 aos homens, 2\$00 às mulheres e \$50 às crianças, sendo que o total pago, ao fim de cada dia era de 27\$50. Nessa propriedade trabalhavam 30 pessoas. Quantos são os homens, as mulheres e as crianças?

Resolução

Sejam H , M e C os números de homens, de mulheres e de crianças, respectivamente. Então,

$$\begin{cases} H + M + C = 30 \\ 3H + 2M + \frac{C}{2} = \frac{55}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} H + M + C = 30 \\ 6H + 4M + C = 55 \end{cases} \iff \begin{cases} H + M + C = 30 \\ 5H + 3M = 25 \end{cases}$$

Logo, M tem de ser múltiplo de 5 e C tem de ser um número par.
 M tem de ser 5 (não pode ser 10 nem superior). Então, $H = 2$ e $C = 23$.
 Logo, havia 2 homens, 5 mulheres e 23 crianças. Que grande exploração!

50.14 Histórias do baú

Gondoleza, a filha única do mais importante mercador de Veneza, sempre achou que a principal qualidade a exigir de um marido era a inteligência. Por isso, quando chegou à idade de casar, arranhou três baús, um de ouro, um de prata e outro de chumbo.

Em cada um deles gravou duas inscrições e depois colocou o seu retrato num dos baús, anunciando que casaria com quem descobrisse em que baú estava o seu retrato.

Tirolês, um rapaz que a amava em segredo, resolveu tentar a sorte. Gondoleza mostrou-lhe os baús fechados e avisou-o que num dos cofres, as duas afirmações eram verdadeiras, noutro, eram ambas falsas e que no terceiro, uma afirmação era verdadeira e a outra era falsa. As afirmações são as seguintes:

Baú de ouro: 1) O retrato não está neste baú; 2) O retrato está no baú de prata

Baú de prata: 1) O retrato não está no baú de ouro; 2) O retrato está no baú de chumbo

Baú de chumbo: 1) O retrato não está neste baú; 2) O retrato está no baú de ouro

Onde está o retrato?

Resolução

A melhor maneira de resolver este problema é por tentativas:

1. Suponhamos que o retrato está no baú de ouro. Então, as duas afirmações do baú de ouro são falsas, o mesmo acontecendo com as duas afirmações do baú de prata. Logo, o retrato não está no baú de ouro.
2. Suponhamos que o retrato está no baú de prata. Então, a primeira afirmação do baú de prata é verdadeira e a segunda é falsa. As duas afirmações do baú de ouro são verdadeiras. Quanto ao baú de chumbo, a primeira afirmação é verdadeira e a segunda é falsa. Logo, o retrato não está no baú de prata.
3. Embora já possamos concluir que o retrato está no baú de chumbo (supondo que o problema está bem posto), vamos confirmar esse facto. Suponhamos que o retrato está no baú de chumbo. Então, a primeira afirmação do baú de ouro é verdadeira e a segunda é falsa; as duas afirmações do baú de ouro são verdadeiras; e as duas afirmações do baú de chumbo são falsas.

Então, o retrato está no baú de chumbo.

50.15 Cinco chapéus

Três mulheres estão sentadas, umas atrás das outras, com os olhos vendados.

– Tenho aqui cinco chapéus, dois verdes e três amarelos; vou colocar um chapéu na cabeça de cada uma de vocês e guardar os outros dois no armário; depois, podem retirar as vendas dos olhos, mas permaneçam sentadas e não virem a cabeça; a primeira a dizer-me a cor do seu chapéu ganhará um prémio, desde que justifique a resposta – diz uma quarta mulher.

A mulher sentada no fim da fila tira a venda e vê os dois chapéus à sua frente, mas responde que não sabe, quando lhe perguntam a cor do seu chapéu.

Depois, a mulher do meio tira a venda e vê o chapéu à sua frente, mas responde que não sabe, quando lhe perguntam a cor do seu chapéu.

A primeira mulher não tira a venda; contudo, ela diz correctamente a cor do seu chapéu, ganhando o prémio.

Qual a cor desse chapéu? Como é que ela descobriu a cor do seu chapéu?

Resolução

Raciocínio da mulher da frente:

A primeira mulher não viu dois chapéus verdes, pois se tivesse visto dois chapéus verdes, sabia que o seu chapéu era amarelo.

A segunda mulher não viu um chapéu verde, pois se tivesse visto um chapéu verde, sabia que o seu chapéu era amarelo.

Logo, o chapéu da mulher da frente era amarelo.

50.16 A viagem de comboio

Para a resolução deste problema, todos os factos são importantes e devem ser considerados.

Henrique, Joaquim e Afonso são o fogueiro, o guarda-freio e o maquinista de um comboio, mas não por esta ordem. No comboio viajam três empresários com os mesmos nomes: o sr. Joaquim, o sr. Henrique e o sr. Afonso. Sabe-se que:

- O sr. Henrique vive em Barca Nova
- O guarda-freio vive exactamente a meio caminho entre Barca Nova e Barca Velha
- O sr. Afonso ganha exactamente 10000 contos por ano
- O vizinho mais próximo do guarda-freio, um dos passageiros, ganha exactamente o triplo do que ganha o guarda-freio
- O Joaquim bate o fogueiro ao bilhar
- O passageiro com o mesmo nome do fogueiro vive em Barca Velha

Como se chama o maquinista?

Resolução

- O maquinista não é o Afonso (devido à ordem pela qual são apresentados os trabalhadores)
- O vizinho mais próximo do fogueiro não é o sr. Afonso, porque 10000 contos não é o triplo (exacto) de nenhuma importância (em escudos)
- O fogueiro não é o Afonso, pois o sr. Afonso vive em Barca Nova e não em Barca Velha
- O vizinho mais próximo do guarda-freio não vive nem em Barca Velha nem em Barca Nova; logo, não se trata do sr. Henrique nem do sr. Afonso, pelo que é o sr. Joaquim
- O fogueiro não é o Joaquim; então, o fogueiro é o Henrique
- Então, o maquinista é o Joaquim (se fosse o Afonso, a ordem indicada estava correcta)

50.17 Os três cantores

Os cantores Luciano Pavão, Ácido Domingos e José Camionetes são muito supersticiosos: Luciano Pavão dá um concerto de 10 em 10 dias, Ácido Domingos dá um concerto de 6 em 6 dias e, finalmente, José Camionetes dá um concerto de 11 em 11 dias.

Sabendo que, no dia 29 de Fevereiro de 2008, os três cantores darão um concerto, em quantos concertos poderão os três cantar, no período de quatro anos que se segue? E em que dias poderão realizar tais concertos?

Resolução

O mínimo múltiplo comum entre 6 e 10 é 30. E o mínimo múltiplo comum entre 11 e 30 é 330. Logo, $\text{mmc}(6, 10, 30) = 330$.

Então, no período de quatro anos seguinte só pode haver quatro concertos com os três cantores em simultâneo.

Note-se que $5 \times 330 = 1650 > 4 \times 365 + 1 = 1461$.

Sabe-se que 366 dias depois de 29 de Fevereiro de 2008 é o dia 1 de Março de 2009 (esta pode não ser fácil!). Então, 365 dias depois de 29 de Fevereiro de 2008 é o dia 28 de Fevereiro de 2009. Logo, 338 dias depois de 29 de Fevereiro de 2008 é o dia 1 de Fevereiro de 2009 e 337 dias depois de 29 de Fevereiro de 2008 é o dia 31 de Janeiro de 2009.

Então, 330 dias depois de 29 de Fevereiro de 2008 é o dia 24 de Janeiro de 2009. Como $330 = 47 \times 7 + 1 = 365 - 5 \times 7$, basta contar 47 semanas e um dia, ou se preferirmos, 1 ano menos 5 semanas, para obtermos o concerto seguinte.

O segundo concerto poderá realizar-se 5 semanas antes de 24 de Janeiro de 2010, isto é, em 20 de Dezembro de 2009.

O terceiro concerto poderá realizar-se 5 semanas antes de 20 de Dezembro de 2010, isto é, em 15 de Novembro de 2010.

O quarto concerto poderá realizar-se 5 semanas antes de 15 de Novembro de 2011, isto é, em 11 de Outubro de 2011.

50.18 O rei Artur e o dragão

Um dia, o rei Artur teve de lutar contra o dragão das três cabeças e três caudas. A sua tarefa foi facilitada, quando conseguiu arranjar uma espada mágica que podia, de um só golpe, fazer uma (e uma só) das seguintes coisas:

- cortar uma cabeça
- cortar duas cabeças
- cortar uma cauda
- cortar duas caudas

Além disso, a fada Morgana revelou ao rei Artur o segredo do dragão:

- Se uma cabeça é cortada, cresce uma nova
- Se duas cabeças são cortadas, nada acontece (ou seja, o dragão fica com duas cabeças a menos)

- Se cortarmos uma cauda, nascem duas cabeças
- Se cortarmos duas caudas, nasce uma cabeça
- O dragão morre se ficar sem cauda e sem cabeça

Quantos golpes são necessários para matar o dragão?

Resolução

É claro que só adianta cortar uma cabeça, uma cauda ou duas caudas. E, ao cortarmos a última cauda, o dragão tem de ficar com um número par de cabeças. Se o dragão tiver uma cabeça e nenhuma cauda, então não pode morrer.

Podemos começar por cortar duas cabeças ao dragão, ficando este com uma cabeça e três caudas.

Depois, cortamos duas caudas, ficando o dragão com uma cauda e duas cabeças.

Agora, cortamos as duas cabeças, ficando o dragão com uma cauda.

Cortamos a cauda ao dragão, ficando esta com duas cabeças.

Finalmente, cortamos as duas cabeças ao dragão.

Logo, foram necessários 5 golpes da espada mágica para matar o dragão.

Observação

Se o dragão tivesse 3 caudas e um número par de cabeças, teríamos de cortar as caudas, uma a uma. Se cortássemos duas caudas, nascia uma cabeça e nunca mais mataríamos o dragão. E depois de cortarmos as caudas, cortávamos as cabeças duas a duas.

50.19 O aniversário da Cinderela

No dia do aniversário da Cinderela, apareceu-lhe a fada-madrinha que lhe disse:

- Formula um desejo que eu satisfaça-o.
- Como a madrinha sabe, a Ada, que é a minha irmã, tem mais oito anos do que eu. Ora, eu detestaria ser assim tão velha. Peço-lhe que me dê o dom da eterna juventude.
- Assim seja. Fica para sempre com a tua idade actual, disse a fada-madrinha, tocando-lhe com a varinha de condão.

Quando a irmã soube da prenda da fada, ficou furiosa.

“És uma egoísta”, gritou a Ada. “Esqueceste que o pai, todos os anos, na festa do reino, nos dá um saco com um número de moedas de ouro que é igual ao produto das nossas idades?”

E a Ada, que é muito boa no cálculo mental, prosseguiu: “Só nos próximos dois anos, o teu egoísmo vai custar-nos um total de 119 moedas!”

O saco de moedas é dividido equitativamente pelas duas irmãs. Quantos anos tem a Cinderela?

Resolução

Este problema não está muito bem posto, pois o produto das idades é alternadamente par e ímpar. Então, de dois em dois anos, haverá um problema na divisão das moedas. Era preferível que a diferença de idades fosse de 9 anos, pois nesse caso, o produto das idades é sempre par. É claro que o o número 119 deveria ser alterado, de modo ao problema ter solução.

Seja x a idade da Cinderela. Então, no próximo ano, a Ada terá $x + 9$ anos e, no ano seguinte, terá $x + 10$ anos, pelo que receberão um saco com $x(x + 9)$ moedas e outro com $x(x + 10)$ moedas, em vez de receberem um saco com $(x + 1)(x + 9)$ moedas e outro com $(x + 2)(x + 10)$ moedas.

Então, $(x + 1)(x + 9) + (x + 2)(x + 10) - x(x + 9) - x(x + 10) = 119$.

Então, $(x + 1 - x)(x + 9) + (x + 2 - x)(x + 10) = 119$.

Logo, $x + 9 + 2x + 20 = 119$, donde vem $3x = 90$, pelo que $x = 30$.

A Cinderela tem 30 anos.

50.20 A morada da Juliana

Um admirador da Juliana queria escrever-lhe no dia de S. Valentim. Tinham-lhe dito que ela morava na Rua de S. Sebastião. Como não sabia o número, resolveu perguntar-lhe, ao que ela respondeu:

“Digo-te, apenas, que, na minha rua, as casas estão numeradas sequencialmente: 1, 2, 3,... e que, por coincidência, a soma dos números das portas inferiores ao meu é igual à soma dos números superiores”.

No dia seguinte, o admirador foi ter com a Juliana e pediu-lhe: “Preciso que me dê uma ideia sobre o tamanho da tua rua”.

“É grande, mas não é enorme”, respondeu ela.

Qual é a morada da Juliana?

Resolução

Sejam n e m os números da casa da Juliana e da última casa da rua, respectivamente.

Então, $\sum_{k=1}^{n-1} k = \sum_{j=n+1}^m j$. Ora, $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1+n-1}{2} \times (n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Por outro lado, $\sum_{j=n+1}^m j = \frac{n+1+m}{2} \times (m-n) = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Igualando as duas expressões, obtemos a equação $n^2 - n = m^2 + m - n^2 - n$. Ora,

$$\begin{aligned} n^2 - n = m^2 + m - n^2 - n &\iff 2n^2 = m^2 + m \\ &\iff m^2 + m - 2n^2 = 0 \\ &\iff m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8n^2}}{2} \end{aligned}$$

Então, $1 + 8n^2$ tem de ser um quadrado perfeito.

Se resolvermos a equação em ordem a n , temos

$$n = \pm \sqrt{\frac{m^2 + m}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2m^2 + 2m}}{2}$$

Logo, $2m^2 + 2m$ tem de ser um quadrado perfeito.

Como pretendemos saber o valor de n , convém utilizar a condição $1 + 8n^2 = x^2$. Logo, $x = \pm \sqrt{1 + 8n^2}$

A equação $1 + 8n^2 = x^2$ é um caso particular das chamadas equações de Pell-Fermat. No entanto pode ser resolvida numa calculadora ou numa folha de cálculo. Podemos adiantar que a equação tem infinitas soluções. A primeira solução corresponde a $n = 1$, obtendo-se $m = 1$.

A seguir, obtemos a solução $m = 289 \wedge n = 17$

x	1	7	41	239	1393	8119
n	1	6	35	204	1189	6930
m	1	8	49	288	1681	9800

Se considerarmos que uma rua com 288 casas é grande, mas não enorme essa será a resposta.

Observação

Este problema está resolvido no Capítulo “Equações de Pell-Fermat”, bem como outros problemas análogos.

Esse capítulo foi escrito com base neste problema, embora tenha outro tipo de questões.

50.21 Meias, às escuras

Timóteo tem na sua cómoda 17 meias azuis, 11 meias amarelas, 9 meias cor de laranja, 34 meias verdes e duas meias roxas, sabendo-se que meias da mesma cor são iguais. Um dia, de madrugada, antes do Timóteo escolher as meias, faltou a luz, pelo que teve de escolher as meias às escuras. Então, decidiu levar um certo número de meias que fosse mínimo e garantisse que havia duas meias da mesma cor. Quantas meias deve levar o Timóteo?

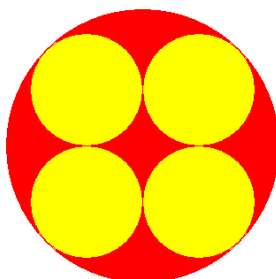
Resolução

O enunciado anterior não é aquele que estava no Choque Mate, mas resolvemos substituir gravatas por meias, uma vez que uma vez que não usamos duas gravatas (de cada vez) e usamos duas meias (que convém serem da mesma cor).

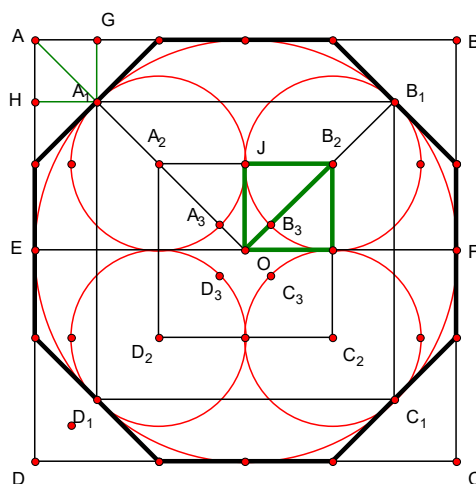
Esta questão é fácil: basta levar seis meias, uma vez que só há cinco cores.

50.22 Circunferências Tangentes

Determine a área da região a vermelho, sabendo que a circunferência maior tem raio 24mm e é tangente às quatro circunferências interiores; além disso, quaisquer duas circunferências interiores consecutivas são tangentes.

**Resolução**

Consideremos a figura seguinte, a qual é suficientemente explícita, pelo que não vamos referir as condições da mesma.



$$B_2 = (r, r), B_3 = (r, r) - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}r, \frac{2 - \sqrt{2}}{2}r \right)$$

$$B_1 = (r, r) + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}r, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}r \right).$$

Equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio R : $x^2 + y^2 = R^2$.

Então, $\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}r \right)^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}r \right)^2 = R^2$. Logo, $2 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}r \right)^2 = R^2$. Ora,

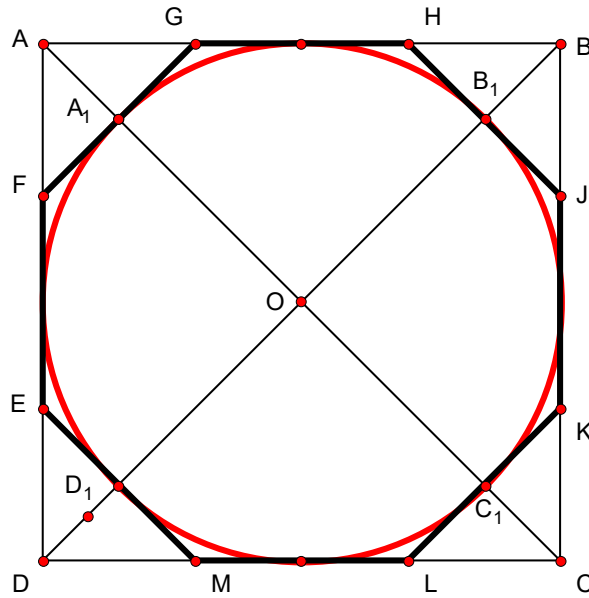
$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}r \right)^2 = R^2 &\iff 2 \left(\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{2}r \right)^2 = R^2 \iff 2 \times \frac{2(\sqrt{2} + 1)^2}{4}r^2 = R^2 \\ &\iff (\sqrt{2} + 1)^2 r^2 = R^2 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } r = \frac{R}{1 + \sqrt{2}} = R(\sqrt{2} - 1).$$

O resto da resolução é igual ao caso anterior.

Note-se que em vez das equações das circunferências, podíamos ter aplicado a fórmula da distância entre dois pontos.

Observação 1



Vejam como obter o comprimento do lado dum octógono regular circunscrito a uma circunferência de raio R :

Não vamos descrever a figura por acharmos que a mesma não ofereça dúvidas.

Já vimos que $\overline{AA_1} = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$. Então, $\overline{FG} = 2R(\sqrt{2} - 1)$, expressão que dá o valor do lado do octógono regular.

Podemos chegar ao mesmo resultado, utilizando a Trigonometria ou fazendo $\overline{AG} = \overline{AF} = x$ e $\overline{GH} = 2R - 2x$.

Neste último caso, temos $\overline{FG} = x\sqrt{2}$, pelo que deve ser $2R - 2x = x\sqrt{2}$.

Então, $x = \frac{2R}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2R(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = R(2 - \sqrt{2})$, pelo que $\overline{FG} = R(2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2R(\sqrt{2} - 1)$.

Usando a Trigonometria:

De $\tan \widehat{OA_1F} = \frac{\overline{A_1F}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_1F}}{R}$, vem $\overline{A_1F} = R \tan \frac{\pi}{8}$. Logo, $\overline{FG} = 2R \tan \frac{\pi}{8}$. Falta-nos obter $\tan \frac{\pi}{8}$.

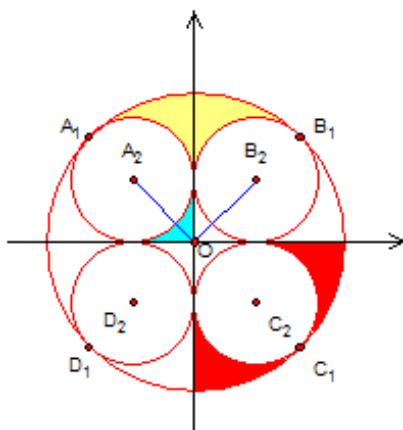
Ora, $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, pelo que $1 = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$. Então, $2 \tan \frac{\pi}{8} = 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}$.

Consideremos a equação $x^2 + 2x - 1 = 0$. Então, $x = -1 \pm \sqrt{1 + 1}$.

Então, $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$, donde se conclui que $\overline{FG} = 2R \tan \frac{\pi}{8} = 2R(\sqrt{2} - 1)$.

Observação 2

Vamos calcular a área da região a amarelo:



Já vimos que $r = R(\sqrt{2} - 1)$, sendo r o raio das circunferências interiores e R o raio da circunferência exterior.

A área do quadrado de diagonal $[OA_2]$ é r^2 . Então, a área da região a azul é $r^2 - \frac{\pi r^2}{4} = \frac{(4 - \pi)r^2}{4}$.

Note-se que a região a amarelo e a região a vermelho têm a mesma área.

Logo, a área da região a amarelo é $\frac{\pi R^2}{4} - \pi r^2 - \frac{(4 - \pi)r^2}{4}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\pi R^2}{4} - \pi r^2 - \frac{(4 - \pi)r^2}{4} &= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{4\pi r^2 + 4r^2 - \pi r^2}{4} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{(3\pi + 4)r^2}{4} \\ &= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{(3\pi + 4)(3 - 2\sqrt{2})R^2}{4} \end{aligned}$$

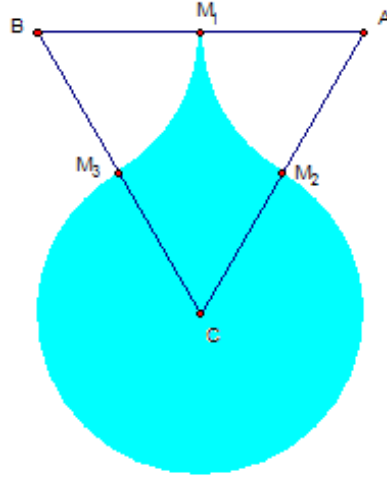
A área da região a vermelho do problema inicial é $4 \times \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{(3\pi + 4)(3 - 2\sqrt{2})R^2}{4} \right)$.

Então, a área pretendida é:

$$\begin{aligned} \pi R^2 - (3\pi + 4)(3 - 2\sqrt{2})R^2 + (4 - \pi)r^2 &= \pi R^2 - (3\pi + 4)(3 - 2\sqrt{2})R^2 + (4 - \pi)(3 - 2\sqrt{2})R^2 \\ &= \pi R^2 + (-3\pi - 4)(3 - 2\sqrt{2})R^2 + (4 - \pi)(3 - 2\sqrt{2})R^2 \\ &= \pi R^2 + (-3\pi - 4 + 4 - \pi)(3 - 2\sqrt{2})R^2 \\ &= \pi R^2 - 4\pi(3 - 2\sqrt{2})R^2 = \pi R^2(1 - 12 + 8\sqrt{2}) \\ &= \pi R^2(8\sqrt{2} - 11) \end{aligned}$$

50.23 A nódoa de azeite

Determine a área da nódoa de azeite da figura seguinte, sabendo que $[ABC]$ é um triângulo equilátero com 5 cm de lado, que M_1 , M_2 e M_3 são os pontos médios dos lados de $[ABC]$ e que o contorno da nódoa é formado por três arcos de circunferência com centros em A , B e C .

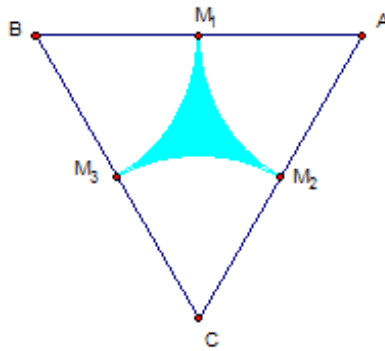


Resolução

De $\overline{AM_1} = \frac{5}{2}$ cm e $\overline{CM_1} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm vem que a área do triângulo $[ABC]$ é $5 \times \frac{5}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \text{ cm}^2$, ou seja, $\frac{25}{4}\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A área da região a azul da figura seguinte é a diferença entre a área do triângulo $[ABC]$ e a área dum semicírculo com $\frac{5}{2}$ cm de raio, uma vez que temos três sectores circulares correspondentes a três ângulos ao centro de 60° .

Então, essa área é $\left(\frac{25}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \frac{25}{4}\pi\right) \text{ cm}^2$.

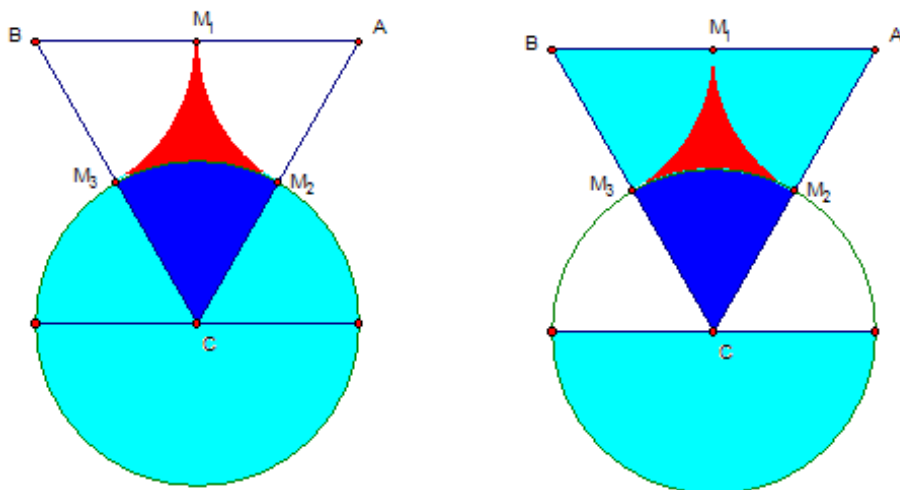


Logo, a área pretendida é $\left(\frac{25}{4}\sqrt{3} - \frac{25}{8}\pi + \frac{25}{4}\pi\right) \text{ cm}^2$, ou seja, $\left(\frac{25}{4}\sqrt{3} + \frac{25}{8}\pi\right) \text{ cm}^2$.

Outra resolução

Conforme podemos ver na figura seguinte, a área da nódoa é a soma da área do triângulo equilátero com a área do semicírculo.

Logo, a área pretendida é $(\frac{25}{4}\sqrt{3} + \frac{25}{8}\pi) \text{ cm}^2$.

**50.24 Um problema de restos**

Qual é o menor número natural que dividido por 2 dá resto 1, dividido por 3 dá resto 2, dividido por 4 dá resto 3, dividido por 5 dá resto 4, dividido por 6 dá resto 5 e dividido por 7 dá resto 0.

Resolução

Seja x tal número natural. Então, $x = 2n - 1 = 3m - 1 = 4r - 1 = 5s - 1 = 6t - 1 = 7u$, em que todos os números anteriores são naturais.

Ora, $\text{mmc}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$, pelo que $x = 60a - 1$, com $a \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} x = 60a - 1 \\ x = 7u \end{cases} \implies \begin{cases} 60a - 1 = 7u \\ x = 7u \end{cases} \implies \begin{cases} 56a + 4a - 1 = 7u \\ x = 7u \end{cases}$$

Então, 7 é um divisor de $4a - 1$ e, portanto, de $4a + 20$. Então, 7 é um divisor de $a + 5$, ou seja, $a = 7y - 5$, com $y \in \mathbb{N}$.

Então, $x = 60a - 1 = 60(7y - 5) - 1 = 420y - 301$.

Para $y = 1$, temos $x = 420 - 301 = 119$.

Logo, 119 é o menor número natural nas condições do problema. O número seguinte é 539.

Observação

Como nota final, registre-se que este problema tem a ver com o chamado Teorema Chinês do(s) Resto(s). Este teorema refere-se a congruências e, neste caso, permite a resolução duma maneira muito fácil (nem é preciso conhecer o Teorema):

Seja x o tal menor número. Então, $x + 1$ é divisível por 2, por 3, por 4, por 5, por 6 e por 7 (porque todos os restos eram o máximo possível).

Então, $x + 1$ é múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6 e 7, ou seja $x + 1$ é múltiplo do mínimo múltiplo comum entre 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Mas, procuramos o menor número, pelo que $x + 1$ é o próprio mínimo múltiplo comum entre 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Ora, $\text{mmc}(2, 3, 4, 5, 6, 7) = \text{mmc}(3, 4, 5, 7) = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$. Logo, $x = 119$.

50.25 Um problema de divisibilidade

Descubra qual o número que é constituído pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (sem repetições) e que verifica as seguintes condições:

- Os dois primeiros algarismos (a contar da esquerda) formam um número par
- Os três primeiros algarismos formam um múltiplo de 3
- Os quatro primeiros algarismos formam um múltiplo de 4
- Os cinco primeiros algarismos formam um múltiplo de 5
- E assim sucessivamente, pelo que o número dado é um múltiplo de 9 (embora esta informação seja desnecessária, para quem conhece a prova dos "noves").

Resolução

Podemos (e devemos) recorrer a uma folha de cálculo, para resolver esta questão.

De qualquer modo, podemos concluir que o segundo, o quarto, o sexto e o oitavo algarismos são 2, 4, 6 e 8, desconhecendo-se a ordem.

Outra conclusão é que o quinto algarismo é 5.

Uma terceira conclusão é que o primeiro, o terceiro, o sétimo e o nono algarismos são 1, 3, 7 e 9, por alguma ordem.

O número de hipóteses é 576.

Mas podemos continuar, para baixar o número de hipóteses.

Para isso, convém saber decidir se um número é múltiplo de 4 e se é múltiplo de 8.

Para decidir se um número é par, basta conhecer o último algarismo (o das unidades).

Para decidir se um número é múltiplo de 4, basta conhecer os dois últimos algarismos.

Para decidir se um número é múltiplo de 8, basta conhecer os quatro últimos algarismos.

Um número é múltiplo de 4, se a soma do dobro do algarismo das dezenas com o algarismo das unidades é múltiplo de 4.

Um número é múltiplo de 8, se a soma do quádruplo do algarismo das centenas, com o dobro do algarismo das dezenas e com o algarismo das unidades é múltiplo de 8.

Logo, o quarto algarismo só pode ser 2 ou 6, uma vez que o terceiro algarismo é ímpar.

Além disso, temos que a soma do quádruplo do sexto algarismo com o dobro do sétimo e com o oitavo tem de ser um múltiplo de 8. Logo, a soma do dobro do sétimo algarismo com o oitavo tem de ser um múltiplo de 8 e, por conseguinte, múltiplo de 4.

Então, o oitavo algarismo tem de ser 2 ou 6.

Logo, o segundo e o quarto algarismos têm de ser 4 e 8 (desconhecendo-se a ordem).

Então, há 4 hipóteses para o 2º, 4º, 6º e 8º algarismos.

Para o 1º, 3º, 5º e 7º algarismos há 24 hipóteses, pelo que o número total de hipóteses a testar é 96.

Essas hipóteses são as seguintes:

1	4	3	2	5	8	7	6	9
1	8	3	2	5	4	7	6	9
1	4	3	6	5	8	7	2	9
1	8	3	6	5	4	7	2	9
1	4	3	2	5	8	9	6	7
1	8	3	2	5	4	9	6	7
1	4	3	6	5	8	9	2	7
1	8	3	6	5	4	9	2	7

1	4	7	2	5	8	3	6	9
1	8	7	2	5	4	3	6	9
1	4	7	6	5	8	3	2	9
1	8	7	6	5	4	3	2	9
1	4	7	2	5	8	9	6	3
1	8	7	2	5	4	9	6	3
1	4	7	6	5	8	9	2	3
1	8	7	6	5	4	9	2	3

1	4	9	2	5	8	3	6	7
1	8	9	2	5	4	3	6	7
1	4	9	6	5	8	3	2	7
1	8	9	6	5	4	3	2	7
1	4	9	2	5	8	7	6	3
1	8	9	2	5	4	7	6	3
1	4	9	6	5	8	7	2	3
1	8	9	6	5	4	7	2	3

3	4	1	2	5	8	7	6	9
3	8	1	2	5	4	7	6	9
3	4	1	6	5	8	7	2	9
3	8	1	6	5	4	7	2	9
3	4	1	2	5	8	9	6	7
3	8	1	2	5	4	9	6	7
3	4	1	6	5	8	9	2	7
3	8	1	6	5	4	9	2	7

3	4	7	2	5	8	1	6	9
3	8	7	2	5	4	1	6	9
3	4	7	6	5	8	1	2	9
3	8	7	6	5	4	1	2	9
3	4	7	2	5	8	9	6	1
3	8	7	2	5	4	9	6	1
3	4	7	6	5	8	9	2	1
3	8	7	6	5	4	9	2	1

3	4	9	2	5	8	1	6	7
3	8	9	2	5	4	1	6	7
3	4	9	6	5	8	1	2	7
3	8	9	6	5	4	1	2	7
3	4	9	2	5	8	7	6	1
3	8	9	2	5	4	7	6	1
3	4	9	6	5	8	7	2	1
3	8	9	6	5	4	7	2	1

7	4	1	2	5	8	3	6	9
7	8	1	2	5	4	3	6	9
7	4	1	6	5	8	3	2	9
7	8	1	6	5	4	3	2	9
7	4	1	2	5	8	9	6	3
7	8	1	2	5	4	9	6	3
7	4	1	6	5	8	9	2	3
7	8	1	6	5	4	9	2	3

7	4	3	2	5	8	1	6	9
7	8	3	2	5	4	1	6	9
7	4	3	6	5	8	1	2	9
7	8	3	6	5	4	1	2	9
7	4	3	2	5	8	9	6	1
7	8	3	2	5	4	9	6	1
7	4	3	6	5	8	9	2	1
7	8	3	6	5	4	9	2	1

7	4	9	2	5	8	1	6	3
7	8	9	2	5	4	1	6	3
7	4	9	6	5	8	1	2	3
7	8	9	6	5	4	1	2	3
7	4	9	2	5	8	3	6	1
7	8	9	2	5	4	3	6	1
7	4	9	6	5	8	3	2	1
7	8	9	6	5	4	3	2	1

9	4	1	2	5	8	3	6	7
9	8	1	2	5	4	3	6	7
9	4	1	6	5	8	3	2	7
9	8	1	6	5	4	3	2	7
9	4	1	2	5	8	7	6	3
9	8	1	2	5	4	7	6	3
9	4	1	6	5	8	7	2	3
9	8	1	6	5	4	7	2	3

9	4	3	2	5	8	1	6	7
9	8	3	2	5	4	1	6	7
9	4	3	6	5	8	1	2	7
9	8	3	6	5	4	1	2	7
9	4	3	2	5	8	7	6	1
9	8	3	2	5	4	7	6	1
9	4	3	6	5	8	7	2	1
9	8	3	6	5	4	7	2	1

9	4	9	2	5	8	1	6	3
9	8	9	2	5	4	1	6	3
9	4	9	6	5	8	1	2	3
9	8	9	6	5	4	1	2	3
9	4	9	2	5	8	3	6	1
9	8	9	2	5	4	3	6	1
9	4	9	6	5	8	3	2	1
9	8	9	6	5	4	3	2	1

Uma solução é 381654729, conforme podemos verificar:

$$\frac{38}{2} = 19$$

$$\frac{381}{3} = 127$$

$$\frac{3816}{4} = 954$$

$$\frac{38165}{5} = 7633$$

$$\frac{381654}{6} = 63609$$

$$\frac{3816547}{7} = 545221$$

$$\frac{38165472}{8} = 4770684$$

$$\frac{381654729}{9} = 42406081$$

Logo, o número 381654729 é solução do problema.

Numa folha de cálculo (EXCEL, por exemplo), podemos verificar que não há mais soluções.

Seguidamente, deixamos a maneira de resolver o problema no EXCEL:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	4	3	2	5	8	7	6	9	=(A1+A2+A3)/3	=(A4+A5+A6)/3
L										M
=(A1+5*A2+4*A3+6*A4+2*A5+3*A6+A7)/7										=(4*F1+2*G1+H1)/8

Depois, copia-se a fórmula para as linhas seguintes e verifica-se quais as linhas em que todos os resultados são números inteiros.

Repare-se que a última fórmula colocada na coluna M é necessária, por causa da divisibilidade por 8.

Outra resolução

Vamos apresentar uma solução ligeiramente diferente, considerando as 24 hipóteses em que podemos colocar os algarismos "ímpares". Depois, vamos verificar o que deve acontecer com os múltiplos de 4 e de 8. Note-se que todo o múltiplo de 8 é múltiplo de 4. Os múltiplos de 4 acabam em 12, 16, 32, 36, 52, 56, 72, 76, 92 e 96 (mas, os algarismos pares e ímpares alternam, pelo que não pode aparecer 24, por exemplo). Aparentemente, haverá 48 hipóteses. Só que um dos múltiplos de quatro tem de ser múltiplo de 8. Como 200, 400, 600 e 800 são múltiplos de 8, então o sétimo e o oitavo algarismos têm de ser 16, 32, 56, 72 ou 96. Mas, como os algarismos ímpares já estão colocados, continuamos com as mesmas 24 hipóteses. Ou seja, colocados os algarismos ímpares, ficamos a saber qual é o penúltimo algarismo.

Então, temos os seguintes casos, sendo que a **negrito** (ou **bold**), temos a maneira como foram colocados os algarismos ímpares:

1.

1	8	3	6	5	4	7	2	9
---	---	----------	---	----------	---	----------	---	----------

Note-se que o penúltimo algarismo tem de ser 2, para que o número formado pelos primeiros 8 algarismos seja múltiplo de 8.

O segundo algarismo tem de ser 8, para que se obtenha um múltiplo de 3 (183). Neste caso, falha a divisibilidade por 7.

$$\frac{1836547}{7} = 262\,363\frac{6}{7}$$

2.

1		3	2	5		9	6	7
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 9, tem de ficar 6 e, à direita do 3 tem de ficar 2. O segundo algarismo tem de ser 8 (143 não é divisível por 3), pelo que obtemos:

1	8	3	2	5	4	9	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 6 (basta aplicar a prova dos noves).

3.

1		7	6	5		3	2	9
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 1, tem de ficar 4.

1	4	7	6	5	8	3	2	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 6 (basta aplicar a prova dos noves).

4.

1		7	2	5		9	6	3
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 1, tem de ficar 4.

1	4	7	2	5	8	9	6	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 7.

Note-se que $\frac{1472589}{7} = 210\,369\frac{6}{7}$.

5.

1		9	6	5		3	2	7
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 1, tem de ficar 8.

1	8	9	6	5	4	3	2	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 7.

$$\frac{1896543}{7} = 270\,934\frac{5}{7}$$

6.

1		9	6	5		7	2	3
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 1, tem de ficar 8.

1	8	9	6	5	4	7	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 7.

$$\frac{1896547}{7} = 270\,935\frac{2}{7}$$

7.

3		1	6	5		7	2	9
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 3, tem de ficar 8.

3	8	1	6	5	4	7	2	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Como $\frac{3816547}{7} = 545\,221$, obtivemos uma solução.

Uma solução:

3	8	1	6	5	4	7	2	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

8.

3		1	2	5		9	6	7
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 3, tem de ficar 8.

3	8	1	2	5	4	9	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

9.

3		7	2	5		1	6	9
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 3, tem de ficar 8.

3	8	7	2	5	4	1	6	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

10.

3		7	2	5		9	6	1
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 À direita do 3, tem de ficar 8.

3	8	7	2	5	4	9	6	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

11.

3		9	2	5		1	6	7
---	--	---	---	---	--	---	---	---

 Neste caso, vai falhar a divisibilidade por 3.

12.

3		9	6	5		7	2	1
---	--	---	---	---	--	---	---	---

Neste caso, vai falhar a divisibilidade por 3.

13.

7		1	6	5		3	2	9
---	--	---	---	---	--	---	---	---

7	4	1	6	5	8	3	2	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 7, tem de ficar 4.

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

14.

7		1	2	5		9	6	3
---	--	---	---	---	--	---	---	---

7	4	1	2	5	8	9	6	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 7, tem de ficar 4.

Neste caso, falha a divisibilidade por 7.

$$\frac{7412589}{7} = 1058941\frac{2}{7}$$

15.

7		3	2	5		1	6	9
---	--	---	---	---	--	---	---	---

7	8	3	2	5	4	1	6	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 7, tem de ficar 8.

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

16.

7		3	2	5		9	6	1
---	--	---	---	---	--	---	---	---

7	8	3	2	5	4	9	6	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 7, tem de ficar 8.

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

17.

7		9	2	5		1	6	3
---	--	---	---	---	--	---	---	---

7	8	9	2	5	4	1	6	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 7, tem de ficar 8.

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

18.

7		9	2	5		3	6	1
---	--	---	---	---	--	---	---	---

7	8	9	2	5	4	3	6	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 7, tem de ficar 8.

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

19.

9		1	6	5		3	2	7
---	--	---	---	---	--	---	---	---

9	8	1	6	5	4	3	2	7
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 9, tem de ficar 8.

Neste caso, falha a divisibilidade por 7.

$$\frac{9816543}{7} = 1402363\frac{2}{7}$$

20.

9		1	6	5		7	2	3
---	--	---	---	---	--	---	---	---

9	8	1	6	5	4	7	2	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 9, tem de ficar 8.

Neste caso, falha a divisibilidade por 7.

$$\frac{9816547}{7} = 1402363\frac{6}{7}$$

21.

9		3	2	5		1	6	7
---	--	---	---	---	--	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 3.

22.

9		3	6	5		7	2	1
---	--	---	---	---	--	---	---	---

Neste caso, falha a divisibilidade por 3.

23.

9		7	2	5		1	6	3
---	--	---	---	---	--	---	---	---

9	8	7	2	5	4	1	6	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 9, tem de ficar 8.

Neste caso, falha a divisibilidade por 6.

24.

9		7	6	5		3	2	1
---	--	---	---	---	--	---	---	---

9	8	7	6	5	4	3	2	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---

À direita do 9, tem de ficar 8.

Neste caso, falha a divisibilidade por 7.

$$\frac{9876543}{7} = 1410934\frac{5}{7}$$

Então, o problema tem uma única solução:

3	8	1	6	5	4	7	2	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Verificação

$$\frac{38}{2} = 19, \frac{381}{3} = 127, \frac{3816}{4} = 954, \frac{38165}{5} = 7633, \frac{381654}{6} = 63609$$

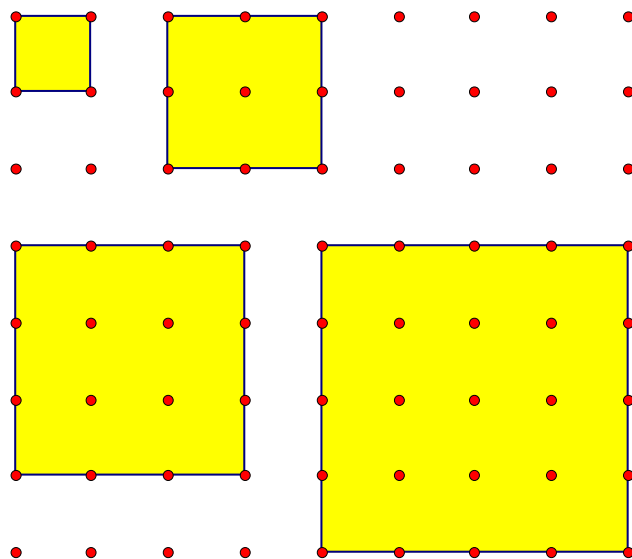
$$\frac{3816547}{7} = 545221, \frac{38165472}{8} = 4770684, \frac{381654729}{9} = 42406081$$

Capítulo 51

A fórmula de Pick

Este Capítulo foi escrito com base num artigo da Mestre Graça Vieira Correia, professora de Matemática da Escola Secundária Jaime Moniz. Esse artigo foi publicado no Choque Mate, Jornal de Matemática da mesma Escola Secundária Jaime Moniz.

Consideremos a figura seguinte, onde está desenhada uma grelha (quadriculada) e vários quadrados (de lados 1 cm, 2 cm, 3 cm e 4 cm).



Então, as áreas dos quadrados são 1 cm^2 , 4 cm^2 , 9 cm^2 e 16 cm^2 . Até aqui nada a comentar!

Aos pontos que definem a grelha, vamos chamar nodos.

No quadrado de lado 1 cm, temos 4 nodos fronteiros e nenhum nodo interior.

No quadrado de lado 2 cm, temos 8 nodos fronteiros e um nodo interior.

No quadrado de lado 3 cm, temos 12 nodos fronteiros e 4 nodos interiores.

No quadrado de lado 4 cm, temos 16 nodos fronteiros e 9 nodos interiores.

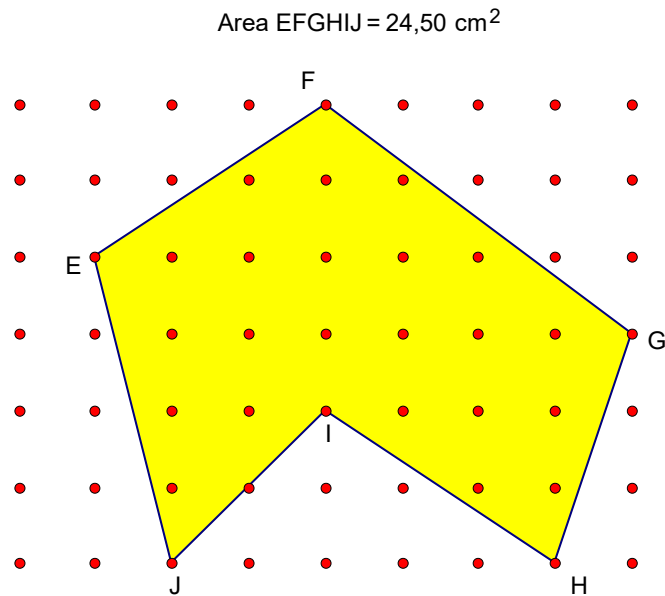
Seja F o número de nodos fronteiros e I o número de nodos interiores. Suponhamos que a área é dada por $A = aF + bI + c$, com a, b, c constantes. Então,

$$\begin{cases} 4a + 0 + c = 1 \\ 8a + b + c = 4 \\ 12a + 4b + c = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + c = 1 \\ 4a + b = 3 \\ 4a + 3b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + c = 1 \\ 4a + b = 3 \\ 2b = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = -1 \\ a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Logo, $A = \frac{F}{2} + I - 1$. O interessante é que esta fórmula é válida para qualquer polígono cujos lados não se cruzam e cujos vértices são nodos duma grelha quadriculada de lado 1.

Consideremos o seguinte polígono:



Número de nodos fronteiros: 7

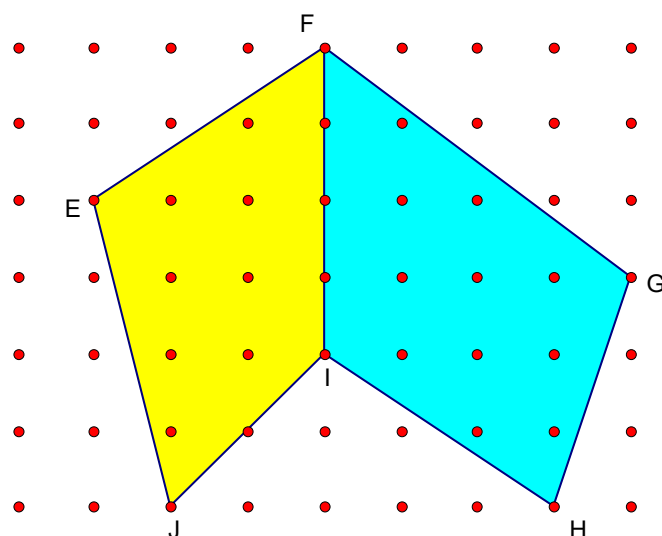
Número de nodos interiores: 22

Área, aplicando a fórmula de Pick: $A = \left(\frac{7}{2} + 22 - 1 \right) \text{ cm}^2 = \frac{49}{2} \text{ cm}^2 = 24,5 \text{ cm}^2$.

Área, medida no programa Sketckpad: 24,50 cm².

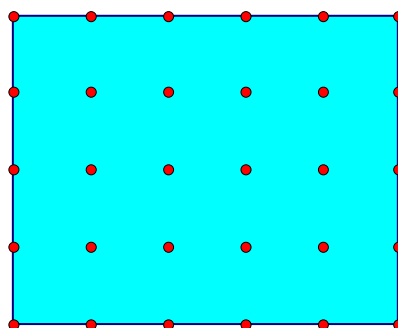
Repare-se qua a fórmula de Pick faz sentido: se dividirmos a figura anterior em duas, traçando a diagonal $[FI]$, obtemos dois polígonos, havendo 3 nodos interiores a menos e passando a haver mais 6 nodos fronteiros. Assim, no cálculo da área, cada ponto interior vale o dobro de cada ponto

fronteiro.



Como justificar a fórmula de Pick?

51.1 Um rectângulo especial



No caso da figura anterior, temos um rectângulo com as dimensões $5\text{ cm} \times 4\text{ cm}$, pelo que a sua área é de 20 cm^2 . O número de nodos que pertencem á fronteira é $6 + 6 + 3 + 3$, ou seja, $F = 18$. O número de nodos interiores é 4×3 , ou seja, $I = 12$. Então, $\frac{F}{2} + I - 1 = 9 + 12 - 1 = 20$, pelo que a fórmula é válida.

Consideremos um rectângulo cujos vértices são nodos, cujos lados são paralelos às duas direcções que definem a grelha e cujas dimensões são m por n unidades.

Então, a área do rectângulo é mn unidades de área.

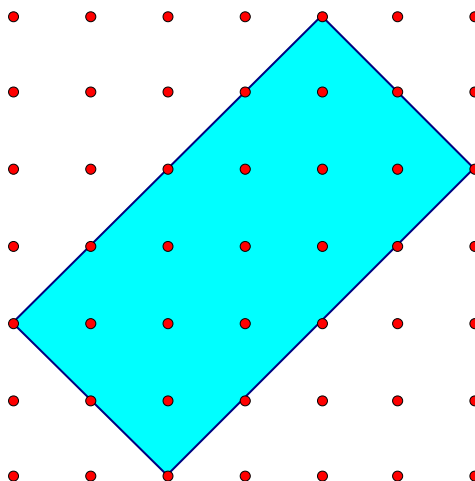
O número de nodos fronteiros é $m + 1 + m + 1 + n + 1 - 2 + n + 1 - 2$, ou seja, $F = 2m + 2n$.

O número de nodos interiores é $(m - 1)(n - 1)$, ou seja, $I = mn - m - n + 1$.

Então, $\frac{F}{2} + I - 1 = m + n + mn - m - n + 1 - 1 = mn$, pelo que, nesta situação, é válida a fórmula de Pick.

Observação

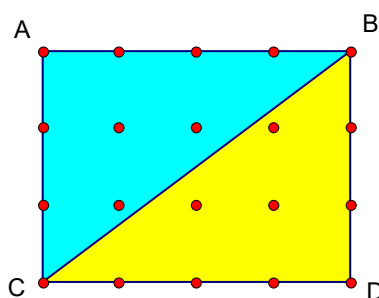
Quando afirmámos que os lados do rectângulo são paralelos às duas direcções que definem a grelha, pretendemos eliminar rectângulos como o da figura seguinte:



51.2 Triângulos

1º Caso

Consideremos o triângulo $[ABC]$, da figura seguinte:



Supondo que $\overline{AB} = 4\text{ cm}$ e que $\overline{AC} = 3\text{ cm}$, temos que área de $[ABC]$ é 6 cm^2 .

O número de nodos fronteiros é dado por $F = 8$ e o número de nodos interiores é dado por $I = 3$.

Então, $\frac{F}{2} + I - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$, o que está de acordo com o valor encontrado anteriormente.

No caso geral, a situação é mais delicada: podem aparecer pontos fronteiros na hipotenusa (para além dos seus extremos).

Suponhamos que $\overline{AB} = m\text{ cm}$ e que $\overline{AC} = n\text{ cm}$. Então, a área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{mn}{2}$.

Então, a área do rectângulo $[ABDC]$ é $mn\text{ cm}^2$, sendo mn dado pela fórmula de Pick.

Mas, ao considerarmos o triângulo $[ABC]$, não sabemos qual o número de pontos fronteiros (distintos de B e de C) que pertencem ao lado $[BC]$. Seja α tal número. Sejam I_1 o número de nodos interiores ao triângulo $[ABC]$, F_1 o número de nodos fronteiros ao triângulo $[ABC]$, I o número de nodos interiores ao rectângulo $[ABDC]$ e F o número de nodos fronteiros ao rectângulo $[ABDC]$.

Para o triângulo $[BDC]$ tudo é idêntico ao triângulo $[ABC]$.

Então, $I = I_1 + I_1 + \alpha = 2I_1 + \alpha$. Por outro lado, $F = F_1 + F_1 - \alpha - \alpha - 2$, uma vez que os α nodos fronteiros foram contados duas vezes (uma em cada triângulo) e passam a ser pontos interiores ao rectângulo. Note-se que os vértices B e C contaram duas vezes (uma em cada triângulo), pelo que temos de descontar 2.

Logo, $F = F_1 + F_1 - \alpha - \alpha - 2 = 2F_1 - 2\alpha - 2$.

Mas, para a área do rectângulo $[ABDC]$ é válida a fórmula de Pick. Então,

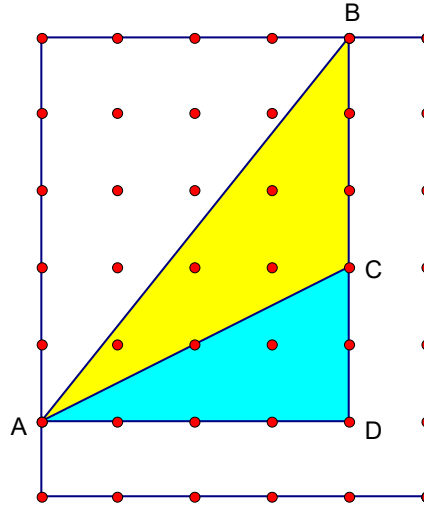
$$\begin{aligned} mn &= \frac{F}{2} + I - 1 = \frac{2F_1 - 2\alpha - 2}{2} + 2I_1 + \alpha - 1 \\ &= F_1 - \alpha - 1 + 2I_1 + \alpha - 1 \\ &= F_1 + 2I_1 - 2 \end{aligned}$$

Dividindo por 2, obtemos

$$\frac{mn}{2} = \frac{F_1 + 2I_1 - 2}{2} = \frac{F_1}{2} + I_1 - 1$$

Então, para o triângulo $[ABC]$, é válida a fórmula de Pick.

2º Caso



A fórmula de Pick é válida para os triângulos $[ABD]$ e $[ACD]$.

Sejam I_1 , I_2 e I os nodos interiores de $[ABC]$, $[ACD]$ e $[ABD]$, respectivamente.

Sejam F_1 , F_2 e F os nodos interiores de $[ABC]$, $[ACD]$ e $[ABD]$, respectivamente.

Sejam Y_1 , Y_2 e Y as áreas de $[ABC]$, $[ACD]$ e $[ABD]$, respectivamente.

Então, $Y_2 = \frac{F_2}{2} + I_2 - 1$ e $Y = \frac{F}{2} + I - 1$

Os nodos interiores de $[ABD]$ são os nodos interiores de $[ABC]$, os nodos interiores de $[ACD]$ e os nodos de $[AC]$ distintos de A e de C . Seja α o número desses nodos. Os nodos fronteiros de

$[ABD]$ são os nodos fronteiros de $[ABC]$, os nodos fronteiros de $[ACD]$, excluindo-se duas vezes os nodos de $[AC]$ distintos de A e de C e excluindo uma vez os nodos A e C .

Então,

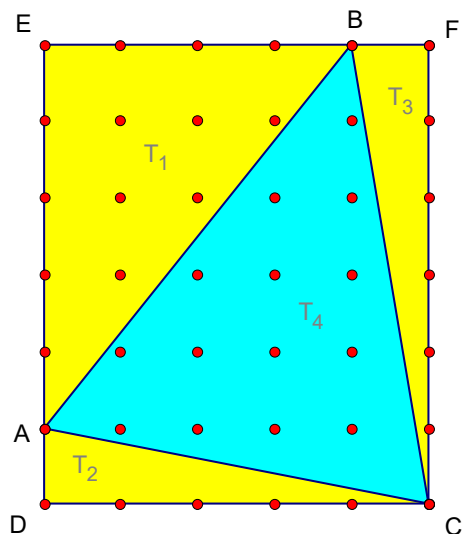
$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{F}{2} + I - 1 = \frac{F_1 + F_2 - 2\alpha - 2}{2} + I_1 + I_2 + \alpha - 1 \\
 &= \frac{F_1}{2} + I_1 + \frac{F_2}{2} + I_2 - \alpha - 1 + \alpha - 1 \\
 &= \frac{F_1}{2} + I_1 - 1 + \frac{F_2}{2} + I_2 - 1 \\
 &= \frac{F_1}{2} + I_1 - 1 + Y_2
 \end{aligned}$$

Logo,

$$Y_1 = Y - Y_2 = \frac{F_1}{2} + I_1 - 1$$

3º Caso

Consideremos um triângulo $[ABC]$, como o seguinte:



A fórmula de Pick é válida para o rectângulo $[CDEF]$ e para os triângulos T_1 , T_2 e T_3 .

Sejam F_k o número de nodos fronteiros do triângulo T_k , I_k o número de nodos interiores do triângulo T_k , com $k = 1, 2, 3, 4$. Seja α_k o número de pontos fronteiros da hipotenusa do triângulo T_k , excluindo os extremos, com $k = 1, 2, 3$. Seja Y_k a área do triângulo T_k , com $k = 1, 2, 3, 4$. Finalmente, seja F o número de nodos fronteiros, I o número de nodos interiores e Y a área do rectângulo $[CDEF]$.

Ora, $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ e $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - 6$, uma vez que os pontos A , B e C contam três vezes como pontos fronteiros.

Então,

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{F_1}{2} + I_1 - 1 \\ Y_2 = \frac{F_2}{2} + I_2 - 1 \\ Y_3 = \frac{F_3}{2} + I_3 - 1 \\ Y = \frac{F}{2} + I - 1 \end{cases}$$

Logo, $Y = \frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - 6}{2} + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1$.

Simplificando a expressão anterior, obtemos

$$Y = \frac{F_1}{2} + \frac{F_2}{2} + \frac{F_3}{2} + \frac{F_4}{2} + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - 4$$

Então,

$$Y = \frac{F_1}{2} + I_1 - 1 + \frac{F_2}{2} + I_2 - 1 + \frac{F_3}{2} + I_3 - 1 + \frac{F_4}{2} + I_4 - 1$$

Então,

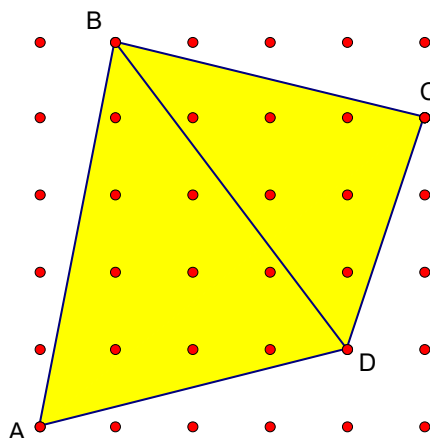
$$\frac{F_4}{2} + I_4 - 1 = Y - Y_1 - Y_2 - Y_3 = Y_4$$

Logo, a fórmula de Pick é válida para qualquer triângulo.

51.3 Quadriláteros

1º Caso: Quadriláteros convexos

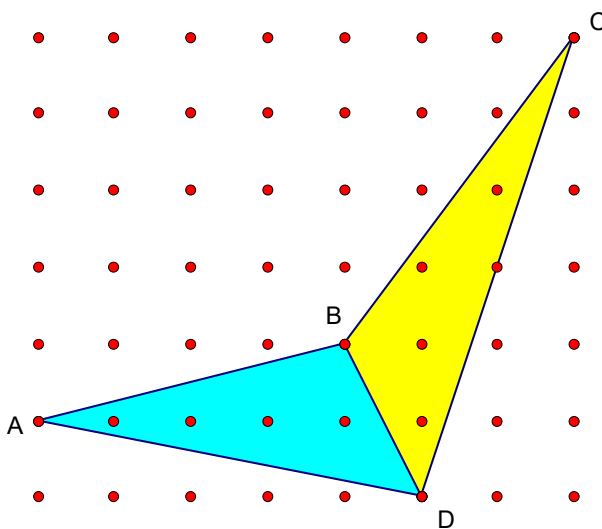
Consideremos um quadrilátero $[ABCD]$ como o seguinte:



A fórmula de Pick continua a ser válida, bastando considerar a diagonal $[BD]$ e ter em consideração o que vimos anteriormente.

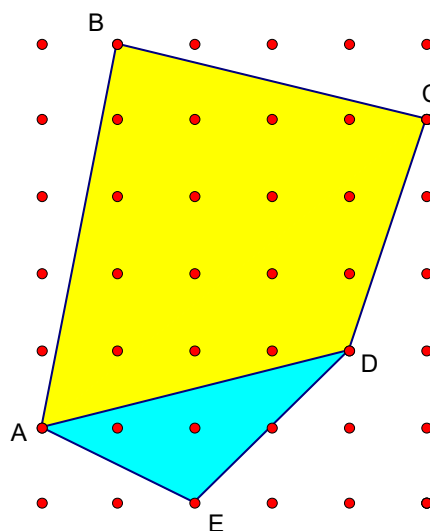
2º Caso: Quadriláteros côncavos

A fórmula de Pick continua a ser válida, no seguinte caso.



51.4 Polígonos convexos

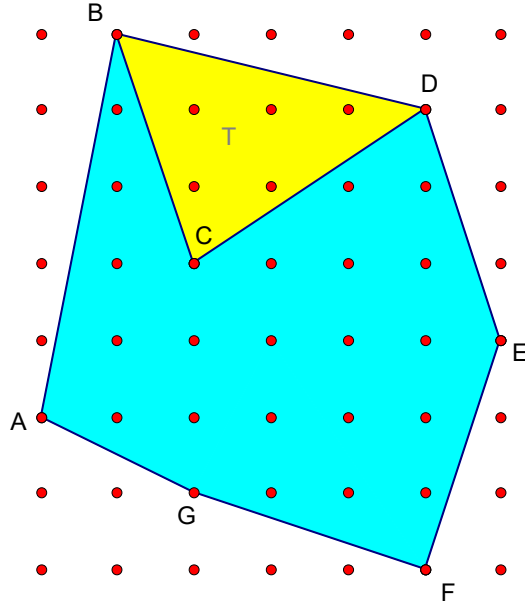
Se tivermos um pentágono $[ABCDE]$, basta-nos traçar a diagonal $[AD]$, obtendo-se um quadrilátero e um triângulo, aos quais podemos aplicar a fórmula de Pick, para obter a área. Então, pelas razões anteriores a fórmula de Pick é válida para a área de qualquer pentágono convexo.



E, por indução, demonstra-se que a fórmula de Pick é válida para a área de qualquer polígono convexo, desde que todos os vértices do polígono sejam nodos duma malha (quadrada).

51.5 Polígonos côncavos

Consideremos um polígono côncavo com uma só *reentrância*, como na figura seguinte. As áreas do triângulo $[BCD]$ e do polígono $[ABDEFG]$ podem ser calculadas pela fórmula de Pick.



Sejam F_1 , F_2 e F os nodos fronteiros do triângulo $[BCD]$, do polígono $[ABDEFG]$ e do polígono côncavo $[ABCDEFG]$, respectivamente.

Sejam I_1 , I_2 e I os nodos interiores do triângulo $[BCD]$, do polígono $[ABDEFG]$ e do polígono côncavo $[ABCDEFG]$, respectivamente.

Sejam α_1 e α_2 os nodos dos lados $[BC]$ e $[CD]$, distintos dos extremos, respectivamente.

Finalmente, sejam Y_1 , Y_2 e Y as áreas dos polígonos $[BCD]$, $[ABDEFG]$ e $[ABCDEFG]$, respectivamente.

Então, $F_2 = F_1 + F - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4$. Note-se que B , C e D contaram duas vezes, que B e D devem contar só uma vez e que C é nodo interior ao polígono $[ABDEFG]$.

Além disso, temos $I_2 = I_1 + I + \alpha_1 + \alpha_2 + 1$, pois C é nodo interior a $[ABDEFG]$.

Então,

$$\begin{aligned}
 Y_2 &= \frac{F_1 + F - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4}{2} + I_1 + I + \alpha_1 + \alpha_2 + 1 - 1 \\
 &= \frac{F_1}{2} + \frac{F}{2} - \alpha_1 - \alpha_2 - 2 + I_1 + I + \alpha_1 + \alpha_2 \\
 &= \frac{F_1}{2} + I_1 - 1 + \frac{F}{2} + I - 1 \\
 &= Y_1 + \frac{F}{2} + I - 1
 \end{aligned}$$

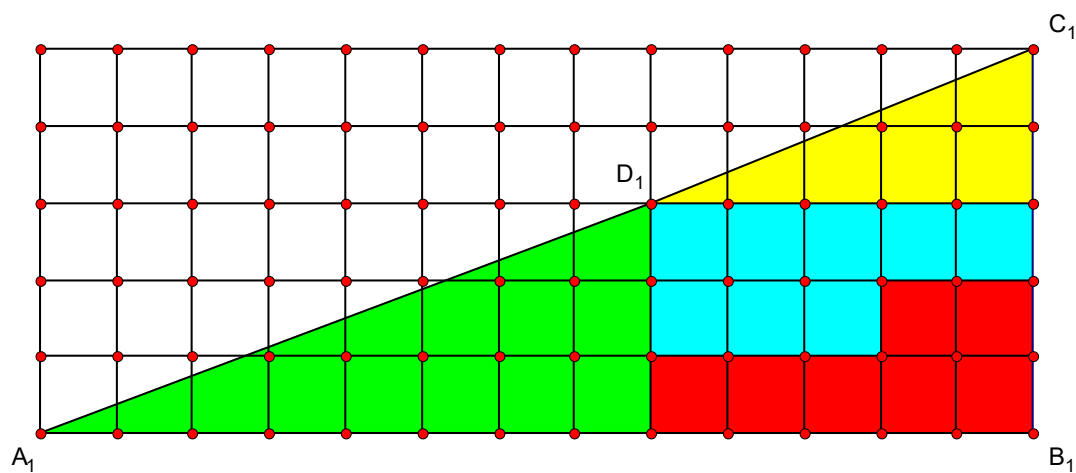
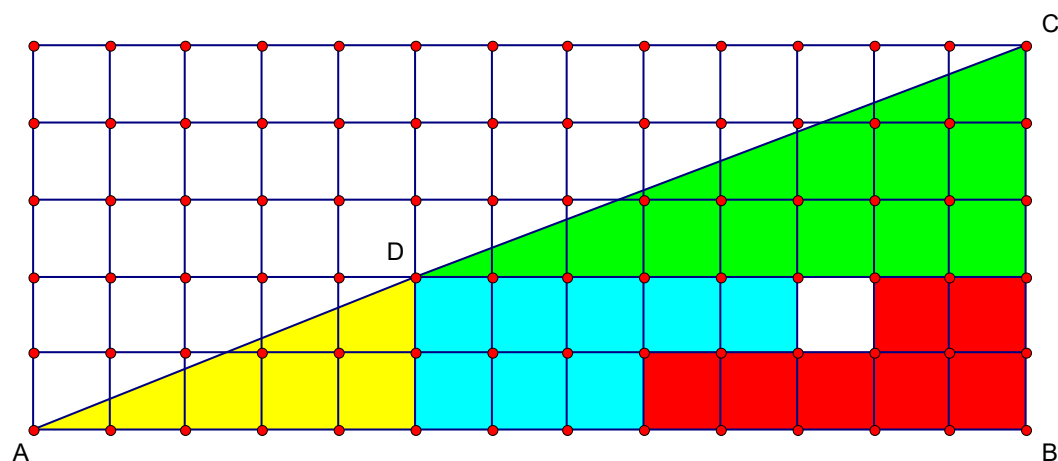
Então,

$$Y = Y_2 - Y_1 = \frac{F}{2} + I - 1$$

Logo, a fórmula de Pick é aplicável a polígonos côncavos com uma reentrância.

E, por indução, demonstra-se que a fórmula de Pick é aplicável a qualquer polígono côncavo com qualquer número de reentrâncias, desde que os lados não se cruzem.

Exemplo 905 Considere as duas figuras seguintes em que duas figuras da mesma cor são geometricamente iguais, pelo que têm a mesma área. Explique por que razão parece ter desaparecido um quadrado, na segunda figura?



Para onde foi o quadrado branco?

A explicação é simples: A parte colorida da segunda figura não é um triângulo, por que as hipotenusas do triângulo verde e do triângulo amarelo não estão contidas numa mesma recta. Isso pode ser visto, calculando os declives das rectas que contêm as hipotenusas. Para isso considera-se um referencial adequado.

O declive da recta que contém a hipotenusa do triângulo verde é $\frac{3}{7}$, enquanto que o declive da recta que contém a hipotenusa do triângulo amarelo é $\frac{2}{5}$.

Vamos usar o Teorema de Pick, para calcular as áreas dos polígonos envolvidos:

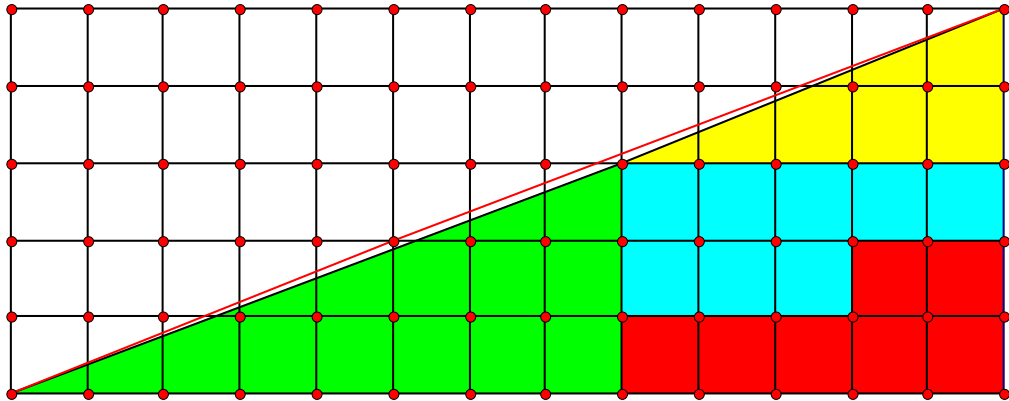
Quadrilátero $[ABCD]$: $I = 24$, $F = 20$; então, a área de $[ABCD]$ é de $24 + \frac{20}{2} - 1$, ou seja, 33 unidades de área.

Quadrilátero $[A_1B_1C_1D_1]$: $I_1 = 23$, $F_1 = 20$; então, a área de $[A_1B_1C_1D_1]$ é de $23 + \frac{20}{2} - 1$, ou seja, 32 unidades de área.

A diferença entre as duas áreas é de uma unidade, a qual corresponde à área do quadrado branco contido no quadrilátero $[ABCD]$.

É claro que podemos chegar à mesma conclusão, calculando as áreas pela maneira habitual.

Na figura seguinte, podemos verificar a existência de um paralelogramo de área 1 (pode aplicar a fórmula de Pick, com $I = 0$ e $F = 4$). Essa área corresponde à área do quadrado branco da figura inicial.



Observação

O teorema de Pick não se aplica a polígonos degenerados num segmento de recta e que por isso têm área nula, a menos que apenas tenhamos dois pontos fronteiros.

No caso de polígonos cujos lados se cruzam, o teorema de Pick aparece ligeiramente modificado.

Note-se que, no caso em que os lados se cruzam num nodo, basta decompor a figura.

Capítulo 52

Modelos Populacionais

52.1 Lei de Malthus

O número de indivíduos duma dada espécie duplica ao fim dum certo tempo (constante).

O facto anterior pode ser dito da seguinte maneira: a população aumenta em progressão geométrica.

A lei de Malthus não é realista: mais tarde ou mais cedo haverá uma diminuição de recursos, levando a uma competição pelos recursos alimentares, pelo que terá de haver uma barreira que a população não pode ultrapassar.

A lei de Malthus pode ser traduzida da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \text{ com } A \in \mathbb{R}$$

Se $A = 0$, a população é constante.

Se $A > 0$, a população aumenta e o número de indivíduos tende para $+\infty$, isto é, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

Se $A < 0$, a população diminui e o número de indivíduos tende para zero, isto é, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y = 0$, ou seja, a espécie tende para a extinção.

A solução da equação diferencial $\frac{dy}{dt} = Ay$, ($A \in \mathbb{R}$) é $y = Ke^{At}$, pelo que é costume dizer-se que a lei de Malthus traduz um crescimento exponencial da população.

Curiosamente, a lei de Malthus aplica-se nas Ciências Físico-Químicas: ao fim dum certo período (de tempo) a massa efectiva dum elemento radioactivo passa a metade (a outra metade dá origem a outro elemento).

52.2 Equação Logística

Já vimos que a função logística é dada por

$$N(t) = \frac{kN_0}{rN_0 + (k - rN_0)e^{-kt}}$$

Esta função satisfaz a condição $N'(t) = kN(t) - r[N(t)]^2$, tendo-se $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{kN_0}{rN_0} = \frac{k}{r}$.

Para $r = 0$, vem $N'(t) = kN(t)$, cuja solução é uma função exponencial, obtendo-se a lei de Malthus.

A função logística é um modelo que resulta duma correcção feita ao modelo de Malthus, subtraindo-se ao segundo membro de $N'(t) = kN(t)$, a parcela $r[N(t)]^2$, obtendo-se $N'(t) = kN(t) - r[N(t)]^2$. O valor de r é muito pequeno, relativamente ao valor de k , tendo pouco efeito para valores pequenos de N . Mas, quando N aumenta, r assume um papel cada vez mais importante, não deixando que o valor de N ultrapasse uma certa barreira, chegando-se a um ponto de equilíbrio traduzido por $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{k}{r}$.

A demonstração de que $N'(t) = kN(t) - r[N(t)]^2$ é algo trabalhosa:

$$N'(t) = \frac{0 - kN_0(k - rN_0)e^{-kt}(-k)}{(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})^2} = \frac{k^2N_0(k - rN_0)e^{-kt}}{(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})^2}$$

Então,

$$\begin{aligned} N'(t) - kN(t) &= \frac{k^2N_0(k - rN_0)e^{-kt}}{(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})^2} - \frac{k^2N_0}{rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt}} \\ &= \frac{k^2N_0(k - rN_0)e^{-kt}}{(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})^2} - \frac{k^2N_0(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})}{(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})^2} \\ &= \frac{k^2N_0(k - rN_0)e^{-kt} - k^2N_0(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})}{(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})^2} \\ &= \frac{k^3N_0e^{-kt} - k^2rN_0^2e^{-kt} - k^2rN_0^2 - k^3N_0e^{-kt} + k^2rN_0^2e^{-kt}}{(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})^2} \\ &= -r \frac{k^2N_0^2}{(rN_0 + ke^{-kt} - rN_0e^{-kt})^2} \\ &= -r[N(t)]^2 \end{aligned}$$

Logo, $N'(t) = kN(t) - r[N(t)]^2, \forall t \in D_N$.

52.3 Interacção entre duas espécies

Começamos por referir dois factos curiosos. O primeiro facto registou-se na 1ª Grande Guerra (1914-1918), tendo-se verificado que, curiosamente, devido à grande diminuição da actividade piscatória, a percentagem de seláceos capturados aumentou, pelo que é natural concluir que o número de seláceos (predadores) aumentou mais rapidamente que o número de presas.

O segundo facto tem a ver com a descoberta do DDT (insecticida). A sua utilização em pomares de citrinos fez com que, numa fase inicial, diminuísse o número de insectos nocivos. No entanto, os seus predadores também diminuíram, sendo esse decréscimo mais acentuado. Numa segunda fase, os insectos nocivos aumentaram, tendo ultrapassado o número inicial, pelo que a utilização do insecticida foi contraproducente.

Intuitivamente, podemos raciocinar do seguinte modo: o aumento do número de presas provoca um aumento maior no número de predadores, mas este aumento acaba por implicar um decréscimo

no número de presas o que provoca um decréscimo no número de predadores. E o número de presas volta a aumentar, pelo que tudo se repete.

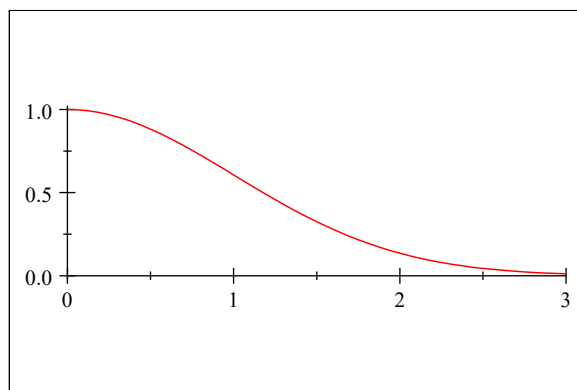
No caso do insecticida, a situação é diferente, pois os predadores dos insectos são vítimas do decréscimo do número de presas e, mais grave, são vítimas do envenenamento indirecto provocado pelo insecticida.

Finalizamos, referindo que duas espécies podem viver em simbiose, podem lutar por alimentos comuns, podem ser completamente independentes uma da outra ou uma das espécies pode ser predadora da outra.

Exemplo 906 Suponhamos que $y' = -xy$, onde x é o número de indivíduos duma espécie e y é o número de indivíduos doutra espécie.

Então, $\frac{y'}{y} = -x$, pelo que $\ln y = -\frac{x^2}{2} + c$. Então, $y = e^{-\frac{x^2}{2} + c} = Ke^{-\frac{x^2}{2}}$, com $K = e^c$.

Para $K = 1$, temos (para $x > 0$) a seguinte representação gráfica:



É claro que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, pelo que se x aumentar muito, a outra espécie extingue-se.

Então, as duas espécies são antagónicas, pelo que é natural que uma espécie seja predadora da outra.

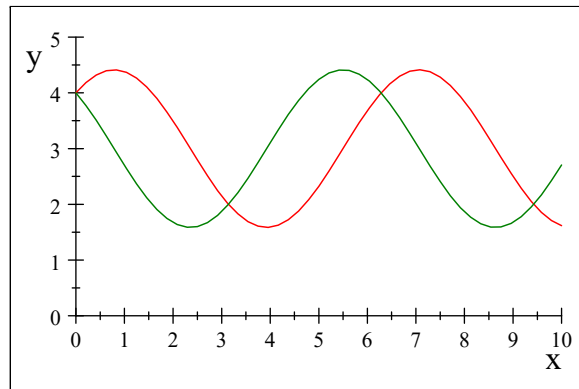
Exemplo 907 Seja x o número de indivíduos duma espécie e y o número de indivíduos doutra espécie. Suponhamos que x e y são funções de t e que $\frac{dx}{dt} = y - K_1$ e $\frac{dy}{dt} = -x - K_2$.

É costume representar $\frac{dx}{dt}$ por \dot{x} e $\frac{dy}{dt}$ por \dot{y} . Então, $\dot{x} = y - K_1$ e $\dot{y} = -x - K_2$.

Logo, $\ddot{x} = \dot{y} = -x - K_2$, pelo que $\ddot{x} + x = -K_2$. Logo, $x = a \cos t + b \sin t - K_2$.

Então, $y = \dot{x} + K_1 = -a \sin t + b \cos t - K_2 + K_1$.

Assim, para $a = b = 1, K_1 = K_2 = 3$, temos



Exemplo 908 Suponhamos que $\frac{dx}{dt} = x$ e $\frac{dy}{dt} = -y$, onde x é o número de indivíduos duma espécie e y é o número de indivíduos doutra espécie.

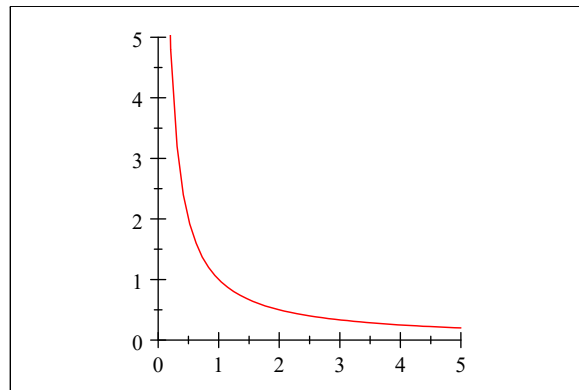
Então, $\frac{dx}{x} = dt$ e $\frac{dy}{y} = -dt$, pelo que $t + c_1 = \ln x$ e $-t + c_2 = \ln y$. Então, $x = K_1 e^t$ e $y = K_2 e^{-t}$, com $K_1 = e^{c_1}$ e $K_1 = e^{c_1}$ e $K_2 = e^{c_2}$.

Multiplicando, membro a membro, obtemos

$$xy = K_1 K_2$$

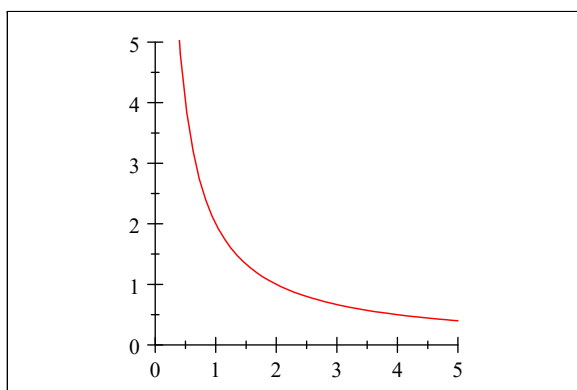
Suponhamos que $K_1 = K_2 = 1$. Então, $xy = 1$, donde vem $y = \frac{1}{x}$.

Para $x > 0$, temos que o gráfico de $y(x)$ é um ramo de hipérbole:



O gráfico anterior é uma das órbitas do sistema de equações diferenciais dado. Trata-se da órbita que passa por $(1, 1)$.

Se $K_1 = 1, K_2 = 2$, então $xy = 2$, donde vem $y = \frac{2}{x}$. Órbita que passa por $(1, 2)$:



Se $K_1 = 0$, então $x = 0$ e $y = K_2 e^{-t}$, com $K_2 = e^{c_2}$. A órbita correspondente é o conjunto dos pontos da forma $(0, y)$, com $y > 0$, ou seja, o semieixo positivo das ordenadas.

Se $K_1 = K_2 = 0$, então $x = y = 0$, pelo que a órbita se reduz a um ponto.

Exemplo 909 Suponhamos que $\frac{dx}{dt} = 3x - 2xy$ e $\frac{dy}{dt} = -2y + 4xy$, onde x é o número de indivíduos duma espécie e y é o número de indivíduos doutra espécie.

Então, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$, pelo que $-2y + 4xy = (3x - 2xy) \frac{dy}{dx}$. Então, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2y + 4xy}{3x - 2xy}$.

Logo, $(-2y + 4xy) dx = (3x - 2xy) dy$, pelo que

$$(3x - 2xy) dy + (2y - 4xy) dx = 0$$

Então, $x(3 - 2y) dy + y(2 - 4x) dx = 0$, donde vem

$$\left(\frac{3}{y} - 2\right) dy + \left(\frac{2}{x} - 4\right) dx = 0$$

Primitivando, temos $3 \ln y - 2y + 2 \ln x - 4x = C$.

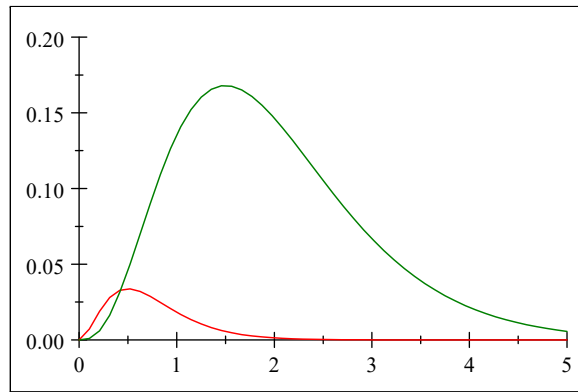
Logo, $\ln(y^3) + \ln(x^2) - 2y - 4x = C$. Então, $\ln(y^3) + \ln(x^2) - \ln(e^{2y}) - \ln(e^{4x}) = C$.

E, por fim, vem

$$\frac{x^2}{e^{4x}} \times \frac{y^3}{e^{2y}} = e^C = K$$

Sejam $f(x) = \frac{x^2}{e^{4x}}$ e $g(y) = \frac{y^3}{e^{2y}}$. É claro que só nos interessam os casos em que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

A seguir estão representadas graficamente as funções $f(x)$ e $g(x)$.



Ora, $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{e^{4x}} \right) = \frac{d}{dx} (x^2 e^{-4x}) = 2x e^{-4x} - 4x^2 e^{-4x} = 2x e^{-4x} (1 - 2x)$.
Então,

x	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x$	0	+	+	+
$1 - 2x$	+	+	0	-
e^{-4x}	+	+	+	+
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	\nearrow Máx			\searrow

Logo, o máximo da função é $f\left(\frac{1}{2}\right)$, ou seja, $\frac{1}{4e^2}$.

De modo análogo, temos $g'(x) = \frac{d}{dx} (x^3 e^{-2x}) = (3x^2 - 2x^3) e^{-2x} = x^2 (3 - 2x) e^{-2x}$.
Então,

x	0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x^2	0	+	+	+
$3 - 2x$	+	+	0	-
e^{-4x}	+	+	+	+
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	\nearrow Máx			\searrow

Logo, o máximo da função é $g\left(\frac{3}{2}\right)$, ou seja, $\frac{27}{8e^3}$.

Retomando a equação $\frac{x^2}{e^{4x}} \times \frac{y^3}{e^{2y}} = K$, temos que $\frac{x^2}{e^{4x}} \times \frac{y^3}{e^{2y}} = \frac{1}{4e^2} \times \frac{27}{8e^3}$, para $\frac{x^2}{e^{4x}} = \frac{1}{4e^2}$ e $\frac{y^3}{e^{2y}} = \frac{27}{8e^3}$.

Então, tem de ser $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{3}{2}$. Logo, $\frac{dx}{dt} = 3x - 2xy = x(3 - 2y) = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 4xy - 2y = 2y(2x - 1) = 0$.

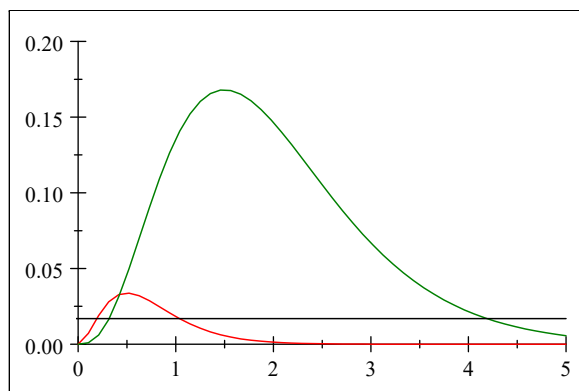
Logo, $x(t) = \frac{1}{2}$ e $y(t) = \frac{3}{2}$ são solução do sistema dado. O ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é chamado ponto de equilíbrio.

A órbita que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ tem um único ponto.

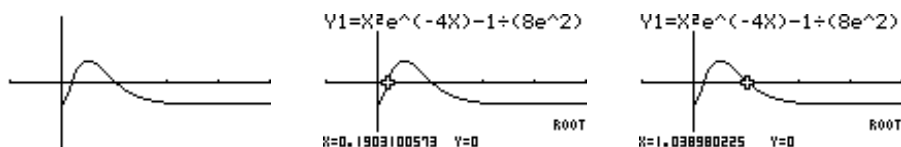
Seja, $K = \frac{27}{64e^5} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4e^2} \times \frac{27}{8e^3}$. Neste caso, temos infinitas soluções.

Assim, por exemplo, se $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4e^2}$, então devemos ter $g(y) = \frac{27}{8e^3}$, pelo que $y = \frac{3}{2}$.

A equação $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4e^2}$ tem duas soluções, conforme podemos ver na figura seguinte:



Valores aproximados das soluções podem ser encontrados com uma calculadora gráfica:

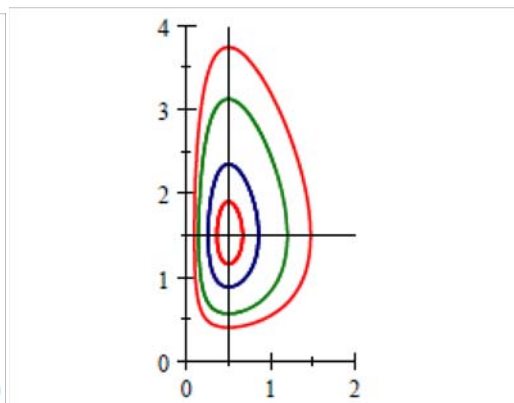
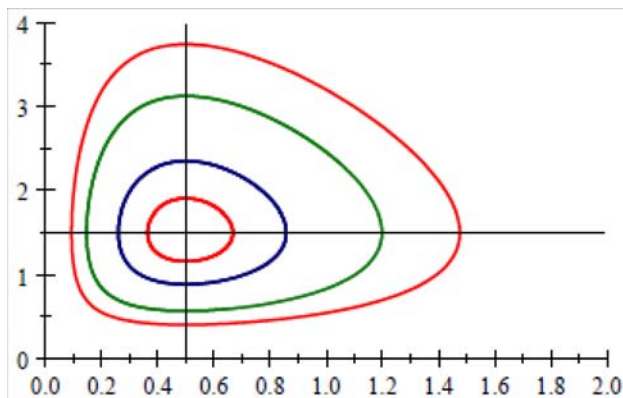


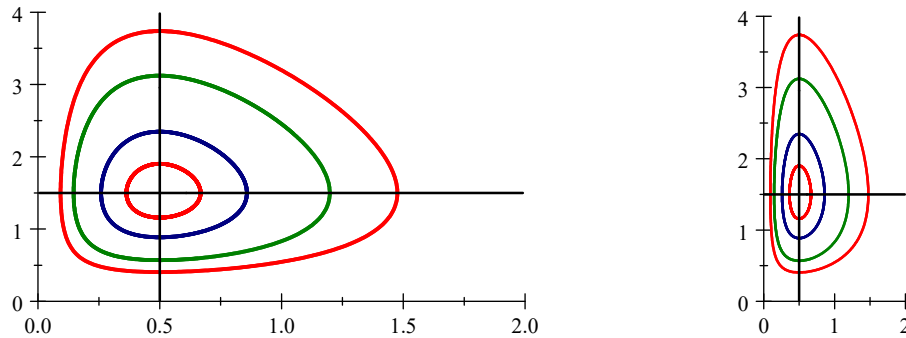
Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{4x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3}{e^{2y}} = 0$, para cada K , tal que $0 < K < \frac{1}{4e^2} \times \frac{27}{8e^3}$, podemos fazer $\frac{y^3}{e^{2y}} = \frac{27}{8e^3}$, obtendo-se dois valores para x . Desses dois valores, um é inferior a $\frac{1}{2}$ e outro é superior.

Para cada K , tal que $0 < K < \frac{1}{4e^2} \times \frac{27}{8e^3}$, o gráfico da multifunção $y(x)$ é uma linha fechada. Neste caso, diz-se que a órbita é um ciclo.

O facto de chamar-se ciclo tem a ver com o facto de $x(t)$ e $y(t)$ serem funções periódicas com o mesmo período T .

Nas duas figuras seguintes, estão indicadas as órbitas definidas por $\frac{x^2}{e^{4x}} \times \frac{y^3}{e^{2y}} = 10^{-3}$, $\frac{x^2}{e^{4x}} \times \frac{y^3}{e^{2y}} = 2 \times 10^{-3}$, $\frac{x^2}{e^{4x}} \times \frac{y^3}{e^{2y}} = 4 \times 10^{-3}$ e $\frac{x^2}{e^{4x}} \times \frac{y^3}{e^{2y}} = \frac{1}{4e^2} \times \frac{27}{8e^3} - 0.0005$. O referencial da direita é ortonormado (ortogonal e monométrico).





Na figura da esquerda, estão representadas várias órbitas do primeiro quadrante (quadrante da população), estando este quadrante dividido em quatro regiões nas quais é fácil estudar os sinais de $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$. Esses sinais permitem-nos responder à seguinte pergunta:

Em que sentido são percorridas as órbitas?

Como $\frac{dx}{dt} = 3x - 2xy = x(2y - 3)$ e $\frac{dy}{dt} = -2y + 4xy = 2y(2x - 1)$, temos que x aumenta com t , para $y > \frac{3}{2}$, enquanto que y aumenta com t , para $x > \frac{1}{2}$. Então, as órbitas são descritas no sentido contrário ao dos ponteiros dos relógios.

Note-se que, para o problema ter significado biológico, $x(t)$ e $y(t)$ terão de assumir valores maiores do que aqueles que se verificam neste caso. Para isso, basta considerar que os valores apresentados são em milhares (ou dezenas de milhar, ou...).

Exemplo 910 Suponhamos que $\frac{dx}{dt} = 3x - 2xy - 2x^2$ e $\frac{dy}{dt} = -2y + 4xy - 3y^2$, onde x é o número de indivíduos duma espécie e y é o número de indivíduos doutra espécie.

Então, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$, pelo que $-2y + 4xy - 3y^2 = (3x - 2xy - 2x^2) \frac{dy}{dx}$.

Então, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2y+4xy-3y^2}{3x-2xy-2x^2} = -\frac{y(4x-3y-2)}{x(2x+2y-3)}$.

Ora, de $4x - 3y - 2 = 0$, vem $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$. Por outro lado, de $2x + 2y - 3 = 0$ vem $y = -x + \frac{3}{2}$.

Então,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x - 3y - 2 = 0 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = -x + \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = -x + \frac{3}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ 8x - 4 = -6x + 9 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ 14x = 13 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \frac{4}{3} \times \frac{13}{14} - \frac{2}{3} \\ x = \frac{13}{14} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{4}{7} \\ x = \frac{13}{14} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, $(\frac{13}{14}, \frac{4}{7})$ é um ponto de equilíbrio. Os outros pontos de equilíbrio são $(0, 0)$, $(\frac{3}{2}, 0)$ e $(0, -\frac{2}{3})$. Destes, apenas o segundo tem algum interesse, embora signifique que existe, apenas, uma espécie.

Na figura seguinte, estão representadas as retas definidas por $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ e por $y = -x + \frac{3}{2}$.

As duas retas dividem o primeiro quadrante em quatro regiões.

Seja a região 1, aquela que fica acima da reta a vermelho e abaixo da reta a verde.

Seja a região 2, aquela que fica abaixo da reta a vermelho e abaixo da reta a verde.

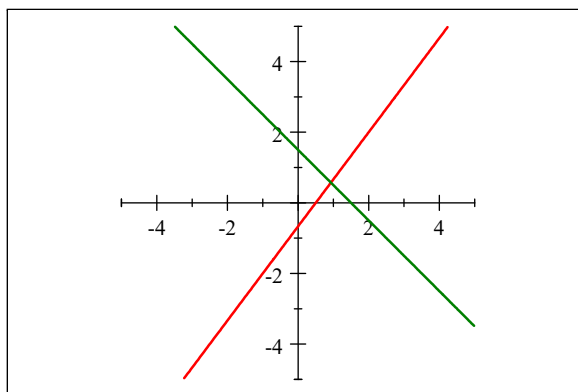
Seja a região 3, aquela que fica abaixo da reta a vermelho e acima da reta a verde.

Seja a região 4, aquela que fica acima da reta a vermelho e acima da reta a verde.

Ora, $4x - 3y - 2 > 0$ implica $y < \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ e $2x + 2y - 3 > 0$ implica $y > -x + \frac{3}{2}$.

Logo, $4x - 3y - 2 > 0$, nas regiões 2 e 3, enquanto que $4x - 3y - 2 < 0$, nas regiões 1 e 4.

Analogamente, $2x + 2y - 3 > 0$, nas regiões 3 e 4 e $2x + 2y - 3 < 0$, nas regiões 1 e 2.



Região 1: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(4x-3y-2)}{x(2x+2y-3)} < 0$. Logo, y diminui, quando x aumenta.

Região 2: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(4x-3y-2)}{x(2x+2y-3)} > 0$. Logo, y aumenta, quando x aumenta.

Região 3: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(4x-3y-2)}{x(2x+2y-3)} < 0$. Logo, y diminui, quando x aumenta.

Região 4: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(4x-3y-2)}{x(2x+2y-3)} > 0$. Logo, y aumenta, quando x aumenta.

Capítulo 53

Lógica

Duas das palavras muito frequentes na linguagem comum são verdadeiro e falso. Todos têm ideia do que é ser verdadeiro e do que é ser falso. Digamos que proposição é uma afirmação que fazemos e que será verdadeira ou será falsa.

Quando uma proposição é verdadeira, dizemos que tem o valor lógico V (de verdade), quando é falsa, dizemos que tem o valor lógico F (de falso). E qualquer proposição estará num dos dois casos: ou é verdadeira ou é falsa, não podendo ser as duas coisas simultaneamente nem havendo uma terceira hipótese. Isso tem a ver com dois princípios: o princípio da não contradição e o princípio do terceiro excluído.

Convém referir que, do facto duma proposição ser verdadeira ou falsa, não significa que saibamos qual o seu valor lógico.

Por exemplo, a afirmação de que há um número infinito de primos gémeos será verdadeira ou falsa? Nesta altura, não sabemos.

Observemos que dois números naturais são primos gémeos se um deles for p e o outro $p + 2$, como 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19,...

Neste caso, ainda ninguém conseguiu fazer a demonstração matemática de que esse número é infinito, como se supõe (ou conjectura), nem se conseguiu demonstrar que esse número é finito.

Vejam os um outro exemplo: sabe-se que o número π é irracional e são conhecidos muitos algarismos da dízima que dá o valor de π . Consideremos a afirmação seguinte: na dízima de π , há 1000 zeros consecutivos. Possivelmente, nunca saberemos se esta proposição é verdadeira ou falsa, porque nunca conheceremos um número de algarismos suficientes, para que apareçam 1000 zeros consecutivos. Se descobrirmos que há 1000 zeros consecutivos, a proposição será verdadeira. Se não descobrirmos esses 1000 zeros, ficaremos sempre na dúvida. Ou seja, a afirmação é verdadeira ou falsa, mas só podemos aspirar a descobrir que ela é verdadeira, pois nunca poderemos descobrir que ela é falsa. A menos que a Matemática atual conheça uma evolução que permita descobrir esse facto. É caso para dizer que nunca devemos dizer nunca. No entanto, eu acabei de dizer (escrever) nunca duas vezes. Isso tem a ver com algo que se chama metalinguagem.

53.1 Trabalhando com V e F

Consideremos o conjunto $\mathcal{L} = \{V, F\}$. Este conjunto tem dois elementos, V e F , que são os dois valores lógicos acima referidos.

Na linguagem comum, as afirmações elementares são "ligadas" por certas "palavras" formando afirmações mais complexas.

53.1.1 A negação

O caso mais simples é a chamada negação de uma proposição. Dada a afirmação "5 é um número primo", podemos negá-la, obtendo-se "5 não é um número primo". Neste caso, a primeira proposição é verdadeira e a segunda é falsa. Podemos, então, concluir que a negação de uma proposição verdadeira é uma proposição falsa. Evidentemente, a negação de uma proposição falsa é uma proposição verdadeira.

A negação é uma operação unária, pois negamos uma proposição de cada vez. Essa operação unária pode aplicar-se a proposições, ou de modo mais fácil, a valores lógicos. Simbolicamente, a negação é representada por \sim . Assim, se tivermos uma proposição p , a negação de p será representada por $\sim p$. Se tivermos um valor lógico a , a sua negação será $\sim a$. Logo, a negação pode ser encarada como uma aplicação de \mathcal{L} em \mathcal{L} , em que $\sim F = V$ e $\sim V = F$.

Uma propriedade muito simples da negação é que $\sim(\sim a) = a$, para qualquer valor lógico a .

A demonstração é trivial: $\sim(\sim F) = \sim V = F$ e $\sim(\sim V) = \sim F = V$.

Esta propriedade costuma ser chamada propriedade da dupla negação. Também podemos dizer que a negação é uma aplicação involutiva (ou involução), já que a inversa da aplicação negação é a própria negação. Ou, de outro modo ainda, a aplicação composta da negação consigo mesma dá a aplicação identidade.

A tabuada da negação é muito simples:

Negação		
a	F	V
$\sim a$	V	F

Curiosamente, há outros sinais para a negação. Assim, a negação de a pode ser representada por \bar{a} ou por $\neg a$. Este último sinal é o sinal "oficial" e costuma ler-se "não lógico" (lnot, em inglês, onde o "l" vem de logical). Daqui em diante, vamos usar (para a negação) o sinal \neg .

53.1.2 A conjunção, a disjunção e a disjunção exclusiva

Consideremos, agora, a afirmação "O João tem 16 anos e a Rita tem 14 anos". "O João tem 16 anos" é uma proposição elementar, o mesmo acontecendo com "a Rita tem 14 anos". A partir das duas proposições elementares, construímos uma nova proposição. O que pretendemos é saber qual o valor lógico da nova proposição, conhecendo o valor lógico de cada uma das proposições elementares (ou atômicas).

Também podemos formar uma outra proposição: "O João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos".

Em "O João tem 16 anos e a Rita tem 14 anos", temos a conjunção de duas proposições e em "O João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos", temos a disjunção das mesmas duas proposições.

Como não sabemos quem é o João, nem a Rita, temos de colocar hipóteses.

Se o Rui tiver 12 anos e a Rita tiver 11 anos, temos que "O João tem 16 anos" é uma proposição falsa, o mesmo acontecendo com "a Rita tem 14 anos". E a proposição "O João tem 16 anos e a Rita tem 14 anos" é manifestamente falsa.

Se pensarmos apenas nos valores lógicos, temos que descobrimos um valor lógico a partir de outros dois. Neste caso, descobrimos que ao par (F, F) corresponde o valor F . Então, temos, aqui, uma operação binária (embora nos falte saber o "valor final" nos restantes casos).

Podemos, então, considerar uma operação binária (chamada conjunção) que transforma pares de valores lógicos num valor lógico.

Isso significa que podemos trabalhar apenas com valores lógicos desligados das proposições que lhes deram origem.

Então, iremos ter várias operações binárias (e não só), cada uma das quais vai ser definida por uma "tabuada". Felizmente, é uma tabuada pequena (nada que se compare às tabuadas dos babilónios, que tinham 60 símbolos e não apenas 2).

Mas voltemos à proposição "O João tem 16 anos e a Rita tem 14 anos".

Se o João tiver 16 anos e a Rita tiver 12 anos, então a afirmação "O João tem 16 anos e a Rita tem 14 anos" é falsa (não há proposições metade verdadeiras e metade falsas). Então, temos que a conjunção transforma o par (V, F) em F .

Se o João tiver 13 anos e a Rita tiver 14 anos, então a afirmação "O João tem 16 anos e a Rita tem 14 anos" é falsa (não há proposições metade falsas e metade verdadeiras). Então, temos que a conjunção transforma o par (F, V) em F .

Por fim, se o João tiver 16 anos e a Rita tiver 14 anos, então a afirmação "O João tem 16 anos e a Rita tem 14 anos" é verdadeira. Então, temos que a conjunção transforma o par (V, V) em V .

O sinal usado para a conjunção é \wedge , pelo que podemos escrever a seguinte tabuada:

$$\left\{ \begin{array}{l} F \wedge F = F \\ V \wedge F = F \\ F \wedge V = F \\ V \wedge V = V \end{array} \right.$$

Podemos encarar a conjunção como uma operação sobre proposições ou uma operação sobre valores lógicos. Na realidade, o que interessa mesmo é saber "operar" com valores lógicos. Passemos à proposição "O João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos".

Se o João tiver 15 anos e a Rita tiver 50 anos, a proposição "O João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos" será falsa, porque não se verificou nenhuma das duas "proposições elementares". Então, a disjunção transforma o par (F, F) em F .

Se o João tiver 16 anos e a Rita tiver 20 anos, a proposição "O João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos" será verdadeira.

Então, a disjunção transforma o par (V, F) em V .

Se o João tiver 13 anos e a Rita tiver 14 anos, a proposição "O João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos" será verdadeira, pelo que a disjunção transforma o par (F, V) em V .

Por fim, temos o caso em que as duas proposições atómicas são verdadeiras (o que corresponde ao caso em que o João tem 16 anos e a Rita tem 14 anos). Neste caso, temos duas possibilidades: o resultado poderá ser verdadeiro ou falso, havendo dois tipos de disjunção. A disjunção inclusiva (ou apenas disjunção) transforma o par (V, V) em V . Então, poderíamos ter escrito "O João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos (ou as duas "coisas")". Vamos combinar que, ao escrevermos, "O João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos", estamos a considerar que as duas proposições podem ser verdadeiras. Aliás, é o que estamos habituados a fazer, quando resolvemos uma equação de segundo grau e temos $b^2 - 4ac = 0$.

Além da disjunção inclusiva, temos a disjunção exclusiva. Em linguagem comum, será "Ou o João tem 16 anos ou a Rita tem 14 anos (mas não ambas as "coisas")". A única diferença (em

relação à disjunção inclusiva) está que a disjunção exclusiva transforma o par (V, V) em F . Podemos traduzir esse facto dizendo que a disjunção exclusiva traduz um dilema.

Simbolicamente, a disjunção inclusiva é representada por \vee , enquanto que a disjunção exclusiva é representada por $\dot{\vee}$.

Então, teremos as seguintes tabuadas, para as duas disjunções (inclusiva e exclusiva):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{disjunção (inclusiva)} \\ F \vee F = F \\ V \vee F = V \\ F \vee V = V \\ V \vee V = V \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{disjunção exclusiva} \\ F \dot{\vee} F = F \\ V \dot{\vee} F = V \\ F \dot{\vee} V = V \\ V \dot{\vee} V = F \end{array} \right.$$

As três tabuadas apresentadas (disjunção, disjunção exclusiva e conjunção) costumam aparecer com outro aspecto, utilizando tabelas de dupla entrada. Nas tabelas seguintes, p é o primeiro elemento do par ordenado e q é o segundo. O sinal \backslash em $p \backslash q$ tem a finalidade de dividir o retângulo em duas partes. Não se trata de nenhuma operação.

$p \vee q$			$p \dot{\vee} q$			$p \wedge q$		
$p \backslash q$	F	V	$p \backslash q$	F	V	$p \backslash q$	F	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	F	V	F	V

Observações

1. Os pares ordenados podem ser obtidos pelo diagrama da árvore.
2. É fácil verificar que as três operações são comutativas.
3. Se, na tabuada da disjunção, substituirmos F por V e V por F , obtemos a seguinte tabuada:

$p \backslash q$	V	F
V	V	F
F	F	F

Trata-se da tabuada da conjunção. Evidentemente, se fizermos o mesmo na tabuada da conjunção, obtemos a tabuada da disjunção.

As propriedades acabadas de referir têm a ver com aquilo que se chama "dualidade".

4. As três operações binárias que definimos, têm elemento neutro.

$p \vee q$			$p \dot{\vee} q$			$p \wedge q$		
$p \backslash q$	F	V	$p \backslash q$	F	V	$p \backslash q$	F	V
F	F	V	F	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	F	V	F	V

O elemento neutro é F , no caso das disjunções (inclusiva e exclusiva) e é V , no caso da conjunção.

Isso resulta do seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{disjunção (inclusiva)} \\ F \vee F = F \\ V \vee F = V \\ F \vee V = V \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{disjunção (exclusiva)} \\ F \dot{\vee} F = F \\ V \dot{\vee} F = V \\ F \dot{\vee} V = V \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{conjunção} \\ V \wedge F = F \\ F \wedge V = F \\ V \wedge V = V \end{array} \right.$$

Simbolicamente, podemos escrever o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \vee F = F \vee p = p \\ p \wedge V = V \wedge p = p \end{array} \right.$$

5. A disjunção e a conjunção têm elemento absorvente (V , no caso da disjunção e F , no caso da conjunção):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{disjunção (inclusiva)} \\ V \vee F = V \\ F \vee V = V \\ V \vee V = V \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{conjunção} \\ F \wedge F = F \\ V \wedge F = F \\ F \wedge V = F \end{array} \right.$$

Simbolicamente, podemos escrever o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \vee V = V \vee p = V \\ p \wedge F = F \wedge p = F \end{array} \right.$$

6. Outra propriedade interessante é que a disjunção (inclusiva!) e a conjunção são operações idempotentes, ou seja, $p \vee p = p$ e $p \wedge p = p$, independentemente do valor lógico p , isto é, verifica-se que $p \vee p = p$ e $p \wedge p = p$, independentemente de p ser V ou F .

7. As três operações binárias acima definidas são associativas, ou seja, temos $\left\{ \begin{array}{l} (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \end{array} \right.$,

quaisquer que sejam os valores lógicos a, b, c . Esta propriedade já é mais difícil de ser demonstrada e não pode sê-lo, utilizando uma tabela de dupla entrada. Temos de fazê-lo, verificando a igualdade em todos os casos possíveis. Como temos três valores lógicos (três variáveis), vamos ter 8 casos possíveis ($2 \times 2 \times 2 = 8$). Ao fim e ao cabo, temos um cubo cartesiano, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^3 &= \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L} \\ &= \{(F, F, F), (F, F, V), (F, V, F), (F, V, V), (V, F, F), (V, F, V), (V, V, F), (V, V, V)\} \end{aligned}$$

Consideremos, por exemplo, (F, V, F) . Então, $a = F, b = V, c = F$. E teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a \vee b) \vee c = (F \vee V) \vee F = V \vee F = V \\ a \vee (b \vee c) = F \vee (V \vee F) = F \vee V = V \end{array} \right.$$

Logo, no caso em que $a = F, b = V, c = F$, temos $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$. E teríamos de fazer o mesmo para os outros 7 casos.

E, analogamente, para a conjunção.

No entanto, podemos fazer a demonstração de forma mais rápida:

Consideremos a disjunção e o caso em que $a = F$. Como F é elemento neutro da disjunção, vem:

$$\begin{cases} (a \vee b) \vee c = (F \vee b) \vee c = b \vee c \\ a \vee (b \vee c) = F \vee (b \vee c) = b \vee c \end{cases}$$

Se $a = V$, e como V é elemento absorvente da disjunção, temos

$$\begin{cases} (a \vee b) \vee c = (V \vee b) \vee c = V \vee c = V \\ a \vee (b \vee c) = V \vee (b \vee c) = V \end{cases}$$

Em ambos os casos, tivemos $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.

8. O caso da conjunção é análogo.
9. O caso da disjunção exclusiva é mais complicado, porque só existe elemento neutro.

Se $a = F$, temos

$$\begin{cases} (a \dot{\vee} b) \dot{\vee} c = (F \dot{\vee} b) \dot{\vee} c = b \dot{\vee} c \\ a \dot{\vee} (b \dot{\vee} c) = F \dot{\vee} (b \dot{\vee} c) = b \dot{\vee} c \end{cases}$$

Se $b = F$, temos

$$\begin{cases} (a \dot{\vee} b) \dot{\vee} c = (a \dot{\vee} F) \dot{\vee} c = a \dot{\vee} c \\ a \dot{\vee} (b \dot{\vee} c) = a \dot{\vee} (F \dot{\vee} c) = a \dot{\vee} c \end{cases}$$

Se $c = F$, temos

$$\begin{cases} (a \dot{\vee} b) \dot{\vee} c = (a \dot{\vee} b) \dot{\vee} F = a \dot{\vee} b \\ a \dot{\vee} (b \dot{\vee} c) = a \dot{\vee} (b \dot{\vee} F) = a \dot{\vee} b \end{cases}$$

Apenas nos falta um caso (aquele em que $a \neq F, b \neq F, c \neq F$, ou seja, $a = b = c = V$). Ora,

$$\begin{cases} (V \dot{\vee} V) \dot{\vee} V = F \dot{\vee} V = V \\ V \dot{\vee} (V \dot{\vee} V) = V \dot{\vee} F = V \end{cases}$$

Está, assim, terminada a demonstração. Este último caso podia ter sido justificado por comutatividade.

10. Quando consideramos duas proposições, temos 4 possibilidades para os valores lógicos: ambas falsas, ambas verdadeiras, primeira falsa e segunda verdadeira e, por fim, a primeira verdadeira e a segunda falsa. Então, temos o quadrado cartesiano $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L} \times \mathcal{L} = \{(F, F), (F, V), (V, F), (V, V)\}$.

Operação binária é uma aplicação de \mathcal{L}^2 em \mathcal{L} , pelo que há duas possibilidades para (a imagem de) cada par. Logo, no total, temos $2 \times 2 \times 2 \times 2$ operações binárias diferentes.

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
λ_1	F	F	F	F
λ_2	F	F	F	V
λ_3	F	F	V	F
λ_4	F	F	V	V
λ_5	F	V	F	F
λ_6	F	V	F	V
λ_7	F	V	V	F
λ_8	F	V	V	V
λ_9	V	F	F	F
λ_{10}	V	F	F	V
λ_{11}	V	F	V	F
λ_{12}	V	F	V	V
λ_{13}	V	V	F	F
λ_{14}	V	V	F	V
λ_{15}	V	V	V	F
λ_{16}	V	V	V	V

Essas 16 operações binárias incluem aquelas que já foram referidas: disjunção, disjunção exclusiva e conjunção.

Assim, λ_2 é a conjunção, λ_8 é a disjunção (inclusiva) e λ_7 é a disjunção exclusiva.

Exercício 911 *Mostre que a conjunção é distributiva em relação à disjunção e o mesmo acontece com a disjunção relativamente à conjunção.*

Resolução

Começemos por provar que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, quais quer que sejam os valores lógicos a, b, c . Isso pode ser feito recorrendo a uma tabela de verdade, ou de maneira mais rápida, como se segue:

Se $a = F$, temos $a \wedge (b \vee c) = F \wedge (b \vee c) = F$ e $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (F \wedge b) \vee (F \wedge c) = F \vee F = F$, pelo que se verifica que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Se $a = V$, temos $a \wedge (b \vee c) = V \wedge (b \vee c) = b \vee c$ e $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (V \wedge b) \vee (V \wedge c) = b \vee c$, pelo que se verifica que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Está, assim demonstrada a propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção.

Provemos, agora, que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, quais quer que sejam os valores lógicos a, b, c .

Se $a = F$, então $a \vee (b \wedge c) = F \vee (b \wedge c) = b \wedge c$ e $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (F \vee b) \wedge (F \vee c) = b \wedge c$.

Se $a = V$, então $a \vee (b \wedge c) = V \vee (b \wedge c) = V$ e $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = (V \vee b) \wedge (V \vee c) = V \wedge V = V$.

Está, assim, terminada a demonstração.

Exercício 912 *Mostre que a conjunção é distributiva em relação à disjunção exclusiva, mas tal não acontece com a disjunção exclusiva relativamente à conjunção.*

Resolução

Queremos provar que $a \wedge (b \dot{\vee} c) = (a \wedge b) \dot{\vee} (a \wedge c)$, quais quer que sejam os valores lógicos a, b, c .

Se $a = F$, temos $a \wedge (b \dot{\vee} c) = F \wedge (b \dot{\vee} c) = F$ e $(a \wedge b) \dot{\vee} (a \wedge c) = (F \wedge b) \dot{\vee} (F \wedge c) = F \dot{\vee} F = F$.

Se $a = V$, temos $a \wedge (b \dot{\vee} c) = V \wedge (b \dot{\vee} c) = b \dot{\vee} c$ e $(a \wedge b) \dot{\vee} (a \wedge c) = (V \wedge b) \dot{\vee} (V \wedge c) = b \dot{\vee} c$.

Está, assim, terminada a demonstração de que a conjunção é distributiva relativamente à disjunção exclusiva.

Quanto à segunda parte, se a disjunção exclusiva não é distributiva em relação à conjunção, então não se verificará $a \dot{\vee} (b \wedge c) = (a \dot{\vee} b) \wedge (a \dot{\vee} c)$, para algum valor (alguns valores) de a, b, c .

Podemos testar vários casos, ou podemos raciocinar, até descobrirmos um caso que falhe.

Se $a = F$, o primeiro membro dá $b \wedge c$ e o mesmo acontece com o segundo membro.

Logo, a propriedade só poderá falhar com $a = V$.

Se $a = V$, então $a \dot{\vee} (b \wedge c) = V \dot{\vee} (b \wedge c)$, resultado este que será falso, se $b \wedge c$ for verdadeiro e será verdadeiro se $b \wedge c$ for falso.

Então, com $a = V$, só há há uma maneira de $a \dot{\vee} (b \wedge c)$ ser falso que é termos $b = c = V$.

Quanto ao segundo membro, $(V \dot{\vee} b) \wedge (V \dot{\vee} c)$ pode dar falso em mais situações: então, basta fazermos com que $V \dot{\vee} b$ seja falso e $V \dot{\vee} c$ seja verdadeiro.

Suponhamos que $a = V, b = V, c = F$.

Então, $a \dot{\vee} (b \wedge c) = V \dot{\vee} (V \wedge F) = V \dot{\vee} F = V$ e $(a \dot{\vee} b) \wedge (a \dot{\vee} c) = (V \dot{\vee} V) \wedge (V \dot{\vee} F) = F \wedge V = F \neq V$.

Exercício 913 Dados os valores lógicos a, b, c , mostre que $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$ e que $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$.

Resolução

As duas propriedades enunciadas são conhecidas por Primeiras Leis de De Morgan.

Reparemos que a negação é uma operação unária, pelo que faz sentido negar uma conjunção, por exemplo, uma vez que a conjunção de duas proposições é uma proposição.

A demonstração pode ser feita por meio duma tabela de verdade ou da seguinte maneira:

Se $a = F$, temos $\neg(a \vee b) = \neg(F \vee b) = \neg b$ e $(\neg a) \wedge (\neg b) = (\neg F) \wedge (\neg b) = V \wedge (\neg b) = \neg b$.

Se $a = V$, temos $\neg(a \vee b) = \neg(V \vee b) = \neg V = F$ e $(\neg a) \wedge (\neg b) = (\neg V) \wedge (\neg b) = F \wedge (\neg b) = F$.

Está, assim, terminada a demonstração da primeira igualdade.

Para a segunda igualdade, temos:

Se $a = F$, temos $\neg(a \wedge b) = \neg(F \wedge b) = \neg F = V$ e $(\neg a) \vee (\neg b) = (\neg F) \vee (\neg b) = V \vee \neg b = V$.

Se $a = V$, temos $\neg(a \wedge b) = \neg(V \wedge b) = \neg b$ e $(\neg a) \vee (\neg b) = (\neg V) \vee (\neg b) = F \vee \neg b = \neg b$.

Está, assim, terminada a demonstração.

A negação, a disjunção inclusiva e a conjunção são importantes, porque qualquer função de dois (ou mais) valores lógicos pode ser definida utilizando essas três operações. Na realidade, até podemos só usar duas: a negação e uma das outras duas.

Vejamos alguns exemplos, começando pela operação λ_{10} , anteriormente apresentada.

Como vimos, uma operação binária, num dado conjunto A , é uma aplicação de A^2 em A . No caso presente, uma aplicação de \mathcal{L}^2 em \mathcal{L} .

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
λ_{10}	V	F	F	V

A operação binária λ_{10} está definida na tabela anterior, tendo-se que $\lambda_{10}(F, F) = V = \lambda_{10}(V, V)$ e $\lambda_{10}(F, V) = F = \lambda_{10}(V, F)$.

Vejamos como definir λ_{10} , à custa da negação, da conjunção e da disjunção:

Ora, $a \wedge b$ garante-nos o último V da terceira linha da tabela anterior, sendo F nas restantes posições.

Do mesmo modo, $(\neg a) \wedge (\neg b)$ dá-nos o primeiro V da terceira linha, sendo F nas outras posições, conforme podemos ver na tabela seguinte:

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
$a \wedge b$	F	F	F	V
$(\neg a) \wedge (\neg b)$	V	F	F	F
$(a \wedge b) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b))$	V	F	F	V

A disjunção entre as duas expressões dá-nos λ_{10} . Ou seja, $\lambda_{10}(a, b) = (a \wedge b) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b))$, sendo que nesta expressão, apenas temos as variáveis a, b e os sinais \neg, \vee, \wedge . Se quisermos, podemos usar apenas os sinais \neg, \vee . Para isso, teríamos de usar uma das primeiras leis de De Morgan. Como $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$, podemos concluir que $A \vee B = \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$.

Agora, substituindo, A por $a \wedge b$ e B por $(\neg a) \wedge (\neg b)$, temos uma expressão (complicada, por sinal) que nos dá $\lambda_{10}(a, b)$:

$$\begin{aligned}\lambda_{10}(a, b) &= (a \wedge b) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b)) \\ &= \neg((\neg(a \wedge b)) \wedge \neg((\neg a) \wedge (\neg b)))\end{aligned}$$

Pergunta: qual a utilidade de substituir uma expressão simples por uma expressão complicada?

Resposta: nem tudo o que parece simples é simples, nem tudo o que parece complicado é complicado. E o que parece complicado pode simplificar muita coisa. Contemos, então, uma pequena história. A maior parte da tecnologia atual é baseada na informática. A informática, por sua vez, é baseada na negação, na conjunção e na disjunção. E em outras coisas, como a capacidade de construirmos microchips. Toda a tecnologia digital deve a sua existência ao estudo da lógica binária. Se acha que a lógica binária não devia existir, retire da sua vida quase tudo o que usa...

Há outra maneira de definir a mesma operação binária λ_{10} :

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
λ_{10}	V	F	F	V

Consideremos a expressão $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b)$ e construa-se a tabela de verdade:

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
$a \vee \neg b$	V	F	V	V
$\neg a \vee b$	V	V	F	V
$(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b)$	V	F	F	V
λ_{10}	V	F	F	V

Neste último caso, a disjunção faz com que apareça um só F , ao contrário do caso da conjunção em que aparece um só V . No caso da operação binária λ_{10} , temos dois V e dois F , pelo que não interessa se usamos conjunções de disjunções ou disjunções de conjunções. Mas, por vezes, há vantagem em usar umas ou outras.

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
λ_3	F	F	V	F
λ_{15}	V	V	V	F

No caso das operações λ_3 e λ_{15} , temos o seguinte:

$$\begin{cases} \lambda_3(a, b) = a \wedge \neg b = (a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \\ \lambda_{15}(a, b) = \neg a \vee \neg b = (\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \end{cases}$$

Também poderíamos escrever $\lambda_{15}(a, b) = \neg(a \wedge b)$.

Agora, consideremos a seguinte tabela:

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
$a \wedge b$	F	F	F	V
λ_{15}	V	V	V	F
$a \vee b$	F	V	V	V
λ_9	V	F	F	F

Então, $\lambda_{15}(a, b) = \neg(a \wedge b)$ e $\lambda_9(a, b) = \neg(a \vee b)$. No primeiro caso, temos a negação da conjunção e, no segundo caso, a negação da disjunção. Devido à sua importância, estas operações binárias receberam nomes especiais:

$$\begin{cases} \lambda_{15}(a, b) = \neg(a \wedge b) = a \text{ Nand } b \\ \lambda_9(a, b) = \neg(a \vee b) = a \text{ Nor } b \end{cases}$$

Curiosamente, qualquer operação binária sobre valores lógicos pode ser definida usando uma só destas duas últimas funções.

Repare que $a \text{ Nand } a = \neg(a \wedge a) = \neg a$ e que $a \wedge b = \neg(\neg(a \wedge b)) = \neg(a \text{ Nand } b) = (a \text{ Nand } b) \text{ Nand } (a \text{ Nand } b)$, porque $\neg A = A \text{ Nand } A$.

Também $a \vee b$ pode ser definido à custa da função (ou operação) Nand.

Tudo o que estivemos a dizer tem muito interesse prático, se tivermos aplicações de \mathcal{L}^5 em \mathcal{L} , ou de \mathcal{L}^{15} em \mathcal{L} , em vez de \mathcal{L}^2 em \mathcal{L} . Assim, tem interesse saber definir uma função arbitrária, usando as operações \vee , \wedge e \neg . Depois, interessa saber simplificar a expressão obtida. Só que isso ultrapassa o que pretendemos (neste momento). Os computadores para desempenharem o seu papel, têm de

utilizar funções de muitas variáveis. Por exemplo, para escrevermos um texto no computador, nem sonhamos com a lógica que está por trás disso.

Observação

Para simplificar a escrita, existe uma hierarquia de prioridades em certas operações. Assim, $\neg a \vee b$ significa $(\neg a) \vee b$, ou seja, primeiro se faz a negação e, depois, a disjunção. Tal significa que a expressão $\neg a \vee b$ é uma disjunção, enquanto que $\neg(a \vee b)$ é uma negação. Na linguagem simbólica da Matemática, podemos recorrer a parênteses, enquanto que na linguagem comum, não podemos. Logo, a linguagem simbólica da Matemática é mais rigorosa. Os parênteses servem para alterar a prioridade das operações. A negação tem prioridade em relação a todas as outras operações binárias, ou seja, a negação só atinge o que vem imediatamente a seguir. As operações $\wedge, \vee, \dot{\vee}$ efetuam-se pela ordem em que aparecem (salvo o caso em que apareçam parênteses), pelo que estão no mesmo nível da hierarquia.

Quando se utiliza os sinais de + e de \cdot , é costume utilizar \bar{a} , para a negação de a . Assim, temos para as (primeiras) leis de De Morgan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \\ \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \\ \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{ab} = \bar{a} + \bar{b} \\ \overline{a + b} = \bar{a} \bar{b} \end{array} \right.$$

A utilização dos sinais + e \cdot tem muitas vantagens práticas, por causa das propriedades que costumamos usar nas operações habituais com números. Assim, por exemplo

$$a + ab = a(1 + b) = a \cdot 1 = a$$

A simplificação da expressão $a + ab$ fica bastante fácil, desde que nos lembremos que a soma lógica tem elemento absorvente (que é 1).

A mesma simplificação, com outros sinais, fica mais "complicada":

$$a \vee (a \wedge b) = (a \wedge V) \vee (a \wedge b) = a \wedge (V \vee b) = a \wedge V = a$$

E se tivermos $a \cdot (a + b)$? Há várias maneiras de simplificarmos a expressão anterior, sendo que uma delas é

$$a \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b = a + a \cdot b = a(1 + b) = a \cdot 1 = a$$

Mas podemos seguir outro caminho:

$$a \cdot (a + b) = (a + 0) \cdot (a + b) = a + (0 \cdot b) = a + 0 = a$$

Esta última maneira é que não é nada semelhante ao que se passa com as operações com números reais (por exemplo).

53.1.3 A implicação

A Matemática é a ciência da dedução por excelência. E deduzir é descobrir implicações. Mas, afinal, o que é uma implicação?

Começemos pela seguinte afirmação: se hoje é dia 31, então amanhã é dia 1. Esta é uma afirmação verdadeira, porque a seguir ao dia 31 vem sempre o dia 1 do mês seguinte. Convém referir que apenas dissemos que se hoje for 31, amanhã será 1. Não dissemos mais nada, não dissemos o que acontecerá amanhã, se hoje não for dia 31. Este exemplo é interessante, porque

permite tirar uma dúvida muito frequente. Muitas pessoas partem do princípio que nós também afirmamos que se hoje não for dia 31, amanhã, não será dia 1. E isso não é verdade. Se hoje for dia 29 de Fevereiro, amanhã será dia 1 (de Março). Ou seja, se hoje não for dia 31, amanhã poderá ser dia 1, mas poderá não ser dia 1.

Então, implicação é uma relação existente entre duas proposições, de tal maneira que, se a primeira for verdadeira, a segunda terá de ser verdadeira. Se a primeira for falsa, a segunda poderá ser verdadeira ou falsa. Isso quer dizer que uma proposição verdadeira implica outra proposição verdadeira e que uma proposição verdadeira não implica uma proposição falsa. Além disso, uma proposição falsa implica qualquer proposição.

Como anteriormente, normalmente interessa trabalhar com os valores lógicos. E diremos que verdadeiro implica verdadeiro, falso implica falso, falso implica verdadeiro e que verdadeiro não implica falso. O sinal de implicação é \Rightarrow , pelo que escreveremos $F \Rightarrow F$, $F \Rightarrow V$, $V \Rightarrow V$ e $V \nRightarrow F$.

Também podemos considerar que a implicação é uma operação binária, tendo-se que $F \Rightarrow F = V$, $F \Rightarrow V = V$, $V \Rightarrow F = F$ e $V \Rightarrow V = V$.

Considerada como operação binária, a implicação não tem propriedades interessantes, contrariamente ao caso em que é considerada como uma relação binária. Por isso, normalmente ela é considerada uma relação binária.

Consideremos a seguinte tabela de verdade:

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
$a \Rightarrow b$	V	V	F	V
$\neg a$	V	V	F	F
$\neg a \vee b$	V	V	F	V

A tabela anterior mostra que, considerada como operação binária, a implicação pode ser transformada numa disjunção. Então, é importante fixar que $a \Rightarrow b$ é o mesmo que $\neg a \vee b$. Então, $\neg(a \Rightarrow b) = \neg(\neg a \vee b) = (\neg\neg a) \wedge \neg b = a \wedge \neg b$.

Resumindo, a implicação pode ser transformada numa disjunção e a sua negação numa conjunção, tendo-se a seguinte regra prática: negar uma implicação, consiste em afirmar o antecedente (aquilo que está antes do sinal \Rightarrow) e negar o conseqüente (o que está depois). Dito de outro modo: dizer que uma implicação é falsa, é o mesmo que dizer que o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso.

Já vimos o seguinte exemplo: se hoje é 31, então amanhã é 1. Se hoje não é 31, amanhã pode ser 1 ou pode não ser. Mas, se amanhã não é 1, hoje não pode ser 31. Logo, se $a \Rightarrow b$, então $\neg b \Rightarrow \neg a$, como podemos confirmar na tabela de verdade seguinte:

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
$a \Rightarrow b$	V	V	F	V
$\neg a$	V	V	F	F
$\neg b$	V	F	V	F
$\neg b \Rightarrow \neg a$	V	V	F	V

Esta última propriedade é conhecida por regra do contra recíproco.

Exercício 914 Dados os valores lógicos a, b , mostre que $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$.

Resolução

Se $a = F$, a implicação $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$ é verdadeira, independentemente de $b \Rightarrow a$ ser verdadeira ou falsa.

Se $a = V$, $b \Rightarrow a$ é verdadeira, pelo que a implicação $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$ é verdadeira.

Outra maneira:

$$\begin{aligned}(a \Rightarrow (b \Rightarrow a)) &= \neg a \vee (b \Rightarrow a) = \neg a \vee (\neg b \vee a) \\ &= \neg a \vee (a \vee \neg b) = (\neg a \vee a) \vee \neg b \\ &= V \vee \neg b = V\end{aligned}$$

Exercício 915 Dados os valores lógicos a, b , mostre que $a \Rightarrow a \vee b$.

Resolução

Ora, $(a \Rightarrow a \vee b) = (\neg a \vee (a \vee b)) = (\neg a \vee a) \vee b = V \vee b = V$, pelo que terminou a demonstração.

Exercício 916 Dados os valores lógicos a, b , mostre que $a \wedge b \Rightarrow a$.

Resolução

Ora,

$$\begin{aligned}(a \wedge b \Rightarrow a) &= (\neg(a \wedge b) \vee a) = ((\neg a \vee \neg b) \vee a) = ((\neg b \vee \neg a) \vee a) \\ &= (\neg b \vee (\neg a \vee a)) = (\neg b \vee V) = V\end{aligned}$$

Exercício 917 Mostre que a implicação, considerada como relação binária, é transitiva.

Resolução

Queremos mostrar que, se $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$, então $a \Rightarrow c$. Ou seja, $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

Para que não se verificasse a implicação (total), seria necessário que tivéssemos $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) = V$ e $(a \Rightarrow c) = F$.

De $(a \Rightarrow c) = F$, concluímos que $a = V$ e $c = F$. Pelo que nos resta analisar dois casos (os dois valores lógicos possíveis para b).

Se $b = F$, vem $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) = (V \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow F) = F \wedge V = F$, pelo que a implicação total será verdadeira.

Se $b = V$, vem $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) = (V \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow F) = V \wedge F = F$, pelo que a implicação total será verdadeira.

Logo, a implicação total nunca poderá ser falsa. Está, assim, terminada a demonstração.

Exercício 918 Mostre que a implicação, considerada como relação binária, é reflexiva.

Resolução

Queremos mostrar que $a \Rightarrow a$, qualquer que seja o valor lógico a . Isso resulta do facto que F implica F e V implica V . Fim da demonstração.

Exercício 919 Mostre que a implicação, considerada como relação binária, é antissimétrica em sentido lato.

Resolução

Se a implica b e se b implica a , então a e b têm de ser ambos V ou ambos F , pelo que, em qualquer caso, temos $a = b$. Isso significa que a relação implicação é antissimétrica (em sentido lato).

Outros exemplos de relações binárias com as propriedades da implicação: $x \leq y$, em \mathbb{R} , $x \geq y$, em \mathbb{R} , x é divisor de y , em \mathbb{N} , x é múltiplo de y , em \mathbb{N} .

Exercício 920 *Mostre que a implicação, considerada como operação binária, não é comutativa nem associativa.*

Resolução

É claro que a implicação não é comutativa, porque $(V \Rightarrow F) = F \wedge (F \Rightarrow V) = V$.

Por outro lado, $[(F \Rightarrow F) \Rightarrow F] = (V \Rightarrow F) = F$ e $[F \Rightarrow (F \Rightarrow F)] = F \Rightarrow V = V$. Logo, a implicação não é associativa.

Note-se que $(X \Rightarrow F) = \sim X$, que $(X \Rightarrow V) = V$, que $(F \Rightarrow X) = V$ e que $(V \Rightarrow X) = X$.

Logo, não existe elemento neutro nem elemento absorvente (para a operação binária implicação).

53.1.4 A equivalência

Duas proposições são equivalentes, se tiverem o mesmo valor lógico. Isso significa que V é equivalente a V e que F é equivalente a F . O sinal de equivalente é bem conhecido dos alunos: \Leftrightarrow

Então, a tabela de verdade da equivalência é a seguinte:

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
$a \Leftrightarrow b$	V	F	F	V

Esta é a tabela da operação λ_{10} , apresentada no início deste Capítulo.

Do mesmo modo que a implicação, a equivalência pode ser encarada como uma operação binária ou como uma relação binária.

Exercício 921 *Mostre que a equivalência é uma dupla implicação*

Resolução

Tabela de verdade:

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
$a \Rightarrow b$	V	V	F	V
$b \Rightarrow a$	V	F	V	V
$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	V	F	F	V
$a \Leftrightarrow b$	V	F	F	V

O sinal de equivalência traduz essa dupla implicação: $a \Leftrightarrow b$ é resultado de se escrever $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$, tendo os sinais \Rightarrow e \Leftarrow originado o sinal \Leftrightarrow .

Exercício 922 *Mostre que a equivalência é uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva.*

Resolução

A equivalência é uma relação binária reflexiva, porque $a \Leftrightarrow a$ e $b \Leftrightarrow b$.

A equivalência é uma relação binária simétrica, porque se $a \Leftrightarrow b$, a e b têm o mesmo valor lógico, pelo que é verdadeiro dizer que $b \Leftrightarrow a$.

A equivalência é uma relação binária transitiva, porque se $a \Leftrightarrow b$ e $b \Leftrightarrow c$, então a, b, c são todos iguais a V , ou todos iguais a F , pelo que, em ambas as situações, temos $a \Leftrightarrow c$.

Sempre que uma relação binária definida num conjunto tem as propriedades anteriores, dizemos que se trata duma relação de equivalência.

Neste caso da equivalência, temos apenas dois pares pertencentes à relação. Representando a relação de equivalência por ρ , temos que $F\rho F$ e $V\rho V$, ou seja, $(F, F) \in \rho$ e $(V, V) \in \rho$, não havendo mais pares que pertençam à relação.

Então, $\rho = \{(F, F), (V, V)\}$. Ao conjunto dos elementos que se relacionam com F , chamamos classe de equivalência de F e representamo-la por $[F]$. Então, $[F] = \{F\}$. De forma análoga, temos $[V] = \{V\}$.

Ao conjunto das classes de equivalência, chamamos conjunto quociente e, neste caso, representamo-lo por \mathcal{L}/ρ , uma vez que a relação binária está definida em \mathcal{L} . Então, temos que $\mathcal{L}/\rho = \{\{F\}, \{V\}\}$.

Observação

Na linguagem comum, a implicação corresponde a uma frase do tipo "se p , então q ", enquanto que a equivalência corresponde a " p se e só se q ".

Exercício 923 Dados dois valores lógicos a e b , mostre que $a \dot{\vee} b = \neg(a \Leftrightarrow b)$.

Resolução

Basta construir a tabela de verdade:

a	F	F	V	V
b	F	V	F	V
$a \Leftrightarrow b$	V	F	F	V
$\neg(a \Leftrightarrow b)$	F	V	V	F
$a \dot{\vee} b$	F	V	V	F

É claro que também teremos $(a \Leftrightarrow b) = \neg(a \dot{\vee} b)$.

Exemplo 924 Consideremos a seguinte frase: domingo, vou ao futebol a não ser que chova.

Nesta frase, temos duas proposições ligadas por "a não ser que". Que significado lógico tem a expressão "a não ser que"?

O que o autor da frase quis dizer é que irá ao futebol, no caso de não chover e não irá ao futebol, caso chova.

Então, o autor da frase irá ao futebol se e só se não chover. Ou de outro modo, ou ele vai ao futebol ou chove (disjunção exclusiva). Logo, "não ser que" traduz a disjunção exclusiva. Também é costume utilizar a expressão "a menos que". Outra maneira é dizer que ele irá ao futebol se e só se não chover. Temos, aqui, uma variante da propriedade anterior:

$$(a \dot{\vee} b) = \neg(a \Leftrightarrow b) = (\neg a \Leftrightarrow b) = (a \Leftrightarrow \neg b)$$

É costume dizer que a negação da equivalência é a disjunção exclusiva.

Observação

Seja $\mathcal{L} = \{F, V\}$. Então, $(\mathcal{L}, \dot{\vee}, \wedge)$ é um Corpo e $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$ é uma Álgebra de Boole. Se não sabe o significado de Corpo e Álgebra de Boole, não se preocupe com esta observação.

Exemplo 925 Considerando a equivalência como operação binária, verifique se a mesma é distributiva em relação às operações $\wedge, \vee, \dot{\vee}$.

1. Será que $a \Leftrightarrow (b \wedge c)$ dá o mesmo resultado que $(a \Leftrightarrow b) \wedge (a \Leftrightarrow c)$?

Se $a = b = F$ e $c = V$, a primeira expressão tem o valor lógico V , enquanto que a segunda expressão dá $V \wedge F$, ou seja, F .

2. Será que $a \Leftrightarrow (b \vee c)$ dá o mesmo resultado que $(a \Leftrightarrow b) \vee (a \Leftrightarrow c)$?

a	\Leftrightarrow	$(b$	\vee	$c)$	$=$	$(a \Leftrightarrow b)$	\vee	$(a \Leftrightarrow c)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	V	V	V
1	3	1	2	1	7	4	6	5

3. Será que $a \Leftrightarrow (b \dot{\vee} c)$ dá o mesmo resultado que $(a \Leftrightarrow b) \dot{\vee} (a \Leftrightarrow c)$?

Se $a = b = c = F$, então a primeira expressão dá V , enquanto a segunda expressão dá F .

Logo, a equivalências não é distributiva em relação a nenhuma das três operações indicadas.

Na realidade, a equivalência e a implicação só têm propriedades interessantes, quando consideradas relações binárias (e não, quando consideradas operações binárias).

53.2 Trabalhando com 0 e 1

Começaremos com um exemplo, envolvendo F e V : simplifiquemos a expressão $a \wedge (a \vee b)$.

A primeira tentativa poderá ser aplicar a distributividade: $a \wedge (a \vee b) = (a \wedge a) \vee (a \wedge b) = a \vee (a \wedge b)$.

E obtivemos uma expressão semelhante à expressão dada. E poderíamos passar para a expressão inicial, aplicando, agora, a propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção. Só que continuaríamos sem ter simplificado a expressão.

A maneira de simplificar a expressão dada, é a seguinte:

$$a \wedge (a \vee b) = (a \vee F) \wedge (a \vee b) = a \vee (F \wedge b) = a \vee F = a$$

Se quisermos simplificar a expressão $a \vee (a \wedge b)$, podemos transformá-la em $a \wedge (a \vee b)$, expressão que já sabemos simplificar; ou podemos seguir outro caminho:

$$a \vee (a \wedge b) = (a \wedge V) \vee (a \wedge b) = a \wedge (V \vee b) = a \wedge V = a$$

Nesta segunda parte do Capítulo, vamos substituir F por 0, V por 1, \vee por $+$ e \wedge por \cdot ou \times . Então, em vez de $a \vee b$, escrevemos $a + b$, e em vez de $a \wedge b$, escrevemos $a \cdot b$, ou $a \times b$, ou conforme é costume, ab . Então, tudo fica mais fácil, uma vez que as propriedades são quase as mesmas. Há duas diferenças importantes: $1 + 1 = 1$ e $a + bc = (a + b) \cdot (a + c)$.

Simplifiquemos as duas expressões anteriores, usando a nova notação:

$$a(a + b) = a \cdot a + ab = a + ab = a(1 + b) = a \cdot 1 = a$$

E simplificámos as duas expressões duma vez só.

Quando usamos esta nova notação, a disjunção exclusiva costuma ser representada por \oplus e a negação de a é representada por \bar{a} .

Assim, as primeiras leis de De Morgan ficam da seguinte maneira:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \text{ e } \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Vejamos a tabela de verdade da conjunção, da disjunção e da disjunção exclusiva, as quais passam a ser chamadas de soma lógica, produto lógico e soma, módulo 2. Em bom rigor, deveríamos dizer adição lógica, multiplicação lógica e adição, módulo 2.

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
$a + b$	0	1	1	1
$a \cdot b$	0	0	0	1
$a \oplus b$	0	1	1	0

Como toda a função booleana pode ser definida utilizando a negação (o complementar), a soma lógica e o produto lógico, não precisamos de outras operações. No entanto, são muito utilizadas em estudos mais avançados, as funções Nand e Nor, de que já falámos anteriormente.

Como curiosidade, informamos que a implicação não é mais do que a relação \leq , definida em $\{0, 1\}$ e, a equivalência é a vulgar relação $=$.

Repare-se que não é costume escrever $0 \Leftrightarrow 0$, nem $1 \Leftrightarrow 1$, nem $0 \Rightarrow 1$, por exemplo, mesmo quando 0 e 1 representam valores lógicos..

O Teorema do ponto fixo

Exemplo 927 Determine os pontos fixos da função real de variável real $f(x) = x^2$.

Exemplo 928 Começemos por escrever um número numa Calculadora gráfica. Carregando na tecla EXE, obtemos o mesmo número. Escrevemos, agora, \cos e carregamos na tecla EXE, obtendo-se um valor aproximado do cosseno do número inicial. Carregando sucessivamente na tecla EXE, vamos obtendo vários números até que o resultado estabiliza. Tal resultado é o ponto fixo (aproximado) da função $\cos x$.

0	0	0.6542897905	0.7314040424	0.7383692041
cos Ans	0	0.7934803587	0.7442373549	0.7395672022
	1	0.7013687736	0.7356847404	0.7387603199
0.5403023059		0.7639596829	0.7414250866	0.7393038924
0.8575532158		0.722102425	0.7375068905	0.7389377567
0.6542897905		0.7504177618	0.7401473356	0.7391843998
▶MAT	▶MAT	0.7314040424	0.7383692041	0.7390182624
0.7390182624	0.739078886	0.7390845496	0.7390850787	0.7390850787
0.7391301765	0.7390893414	0.7390855264	0.7390851699	0.7390851699
0.7390547907	0.7390822985	0.7390848684	0.7390850885	0.7390850885
0.7391055719	0.7390870427	0.7390853116	0.7390851499	0.7390851499
0.7390713653	0.739083847	0.739085013	0.739085122	0.739085122
0.7390944074	0.7390859996	0.7390852142	0.7390851408	0.7390851408
0.739078886	0.7390845496	0.7390850787	0.7390851281	0.7390851281
▶MAT	▶MAT	▶MAT	▶MAT	▶MAT
0.7390851281	0.7390851327	0.7390851331	0.7390851331	0.7390851331
0.7390851366	0.7390851335	0.7390851333	0.7390851333	0.7390851333
0.7390851309	0.739085133	0.7390851332	0.7390851332	0.7390851332
0.7390851348	0.7390851334	0.7390851332	0.7390851332	0.7390851332
0.7390851322	0.7390851331	0.7390851332	0.7390851332	0.7390851332
0.7390851339	0.7390851333	0.7390851332	0.7390851332	0.7390851332
0.7390851327	0.7390851332	0.7390851332	0.7390851332	0.7390851332
▶MAT	▶MAT	▶MAT	▶MAT	▶MAT

1233

Prova. Seja f uma função contínua de $[a, b]$ em $[a, b]$. Consideremos a função real de variável real definida por $g(x) = f(x) - x$. Esta função tem domínio $[a, b]$, é contínua e temos

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geq 0 \\ g(b) = f(b) - b \leq 0 \end{cases}, \text{ uma vez que } f(a) \geq a \text{ e } f(b) \leq b.$$

Então, $g(a) \times g(b) \leq 0$. Se $g(a) \times g(b) = 0$, então $g(a) = 0 \vee g(b) = 0$ e um dos valores a ou b é ponto fixo da função f .

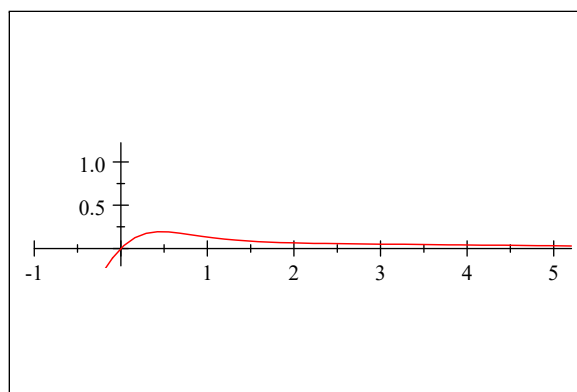
Se $g(a) \times g(b) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema do valor intermédio de Bolzano, existe um elemento c pertencente ao intervalo $]a, b[$, tal que $g(c) = 0$. Então, para tal c , temos $f(c) = c$, pelo que c é ponto fixo da função f . ■

Exemplo 932 *Determine, pelo método das aproximações sucessivas, um ponto fixo da função $f(x) = e^{-x} + \arctan x + 4$, partindo do valor conveniente.*

Resolução

Como $f'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{1+x^2}$, temos que $f'(0) = -e^0 + \frac{1}{1+0^2} = -1 + 1 = 0$.

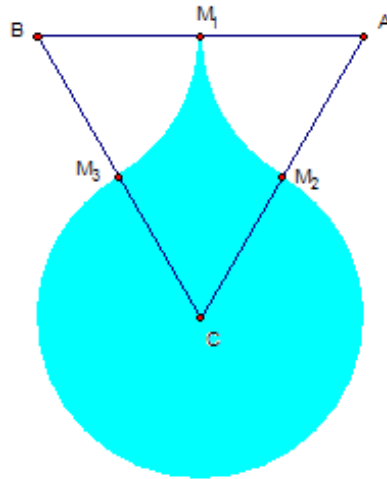
É natural que, numa vizinhança de zero, a derivada tome valores próximos de zero. Isso pode ser verificado graficamente:



Partindo do valor inicial 0, temos

0	5.391631812
$e^{(-Ans)} + \tan^{-1}(Ans) + 4$	5.391962168
	5.391971655
	5.391971922
	5.391971933
5.380138714	5.391971933
5.391631812	5.391971933

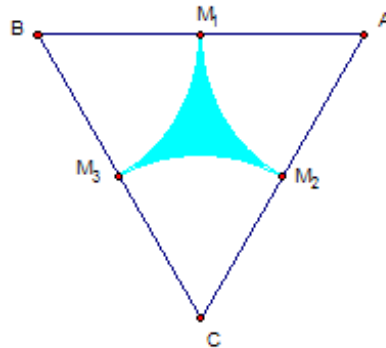
Logo, um dos pontos fixos da função é (aproximadamente) 5,39197193.

**Resolução**

De $\overline{AM_1} = \frac{5}{2}$ e $\overline{CM_1} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ vem que a área do triângulo $[ABC]$ é $5 \times \frac{5}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \text{ cm}^2$, ou seja, $\frac{25}{4}\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

A área da região a azul da figura seguinte é a diferença entre a área do triângulo $[ABC]$ e a área dum semicírculo com $\frac{5}{2} \text{ cm}$ de raio, uma vez que temos três sectores circulares correspondentes a três ângulos ao centro de 60° .

Então, essa área é $\left(\frac{25}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \frac{25}{4}\pi\right) \text{ cm}^2$.

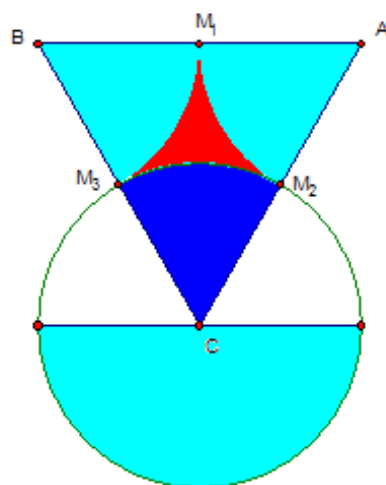
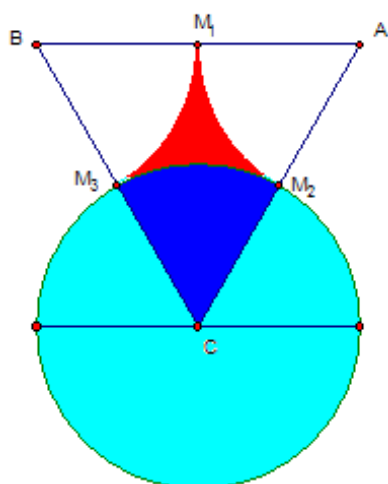


Logo, a área pretendida é $\left(\frac{25}{4}\sqrt{3} - \frac{25}{8}\pi + \frac{25}{4}\pi\right) \text{ cm}^2$, ou seja, $\left(\frac{25}{4}\sqrt{3} + \frac{25}{8}\pi\right) \text{ cm}^2$.

Outra resolução

Conforme podemos ver na figura seguinte, a área da nódoa é a soma da área do triângulo equilátero com a área do semicírculo.

Logo, a área pretendida é $\left(\frac{25}{4}\sqrt{3} + \frac{25}{8}\pi\right) \text{ cm}^2$.

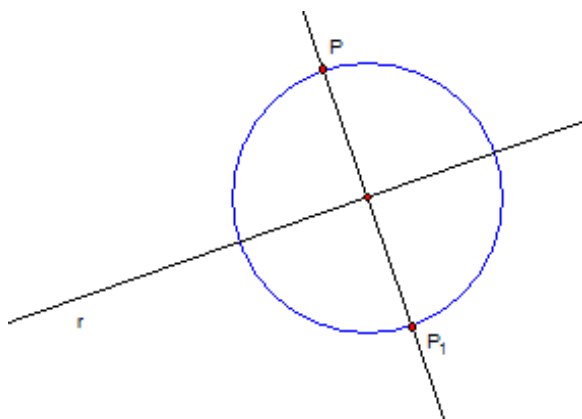


$$\begin{aligned}
 & 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
 \cos (x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
 \cos (x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
 \cos (x+y) + \cos (x-y) &= 2 \cos x \cos y \\
 \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
 x+y &= p \\
 x-y &= q
 \end{aligned}$$

Capítulo 55

Simetria axial

Consideremos, num plano π , uma reta r e um ponto P . O simétrico de P , relativamente à reta r , é o ponto P_1 pertencente a π , tal que a reta r é a mediatriz de $[PP_1]$.



Definição 933 Consideremos uma reta r que passa por A e que é perpendicular ao vector unitário \vec{n} . Então, o simétrico dum ponto P , relativamente à reta r , é o ponto $P_1 = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n}$.

Observação

Na definição anterior, há dois problemas: a reta tem infinitos pontos, pelo que em vez de A , podemos ter qualquer outro ponto da reta e há dois vectores unitários perpendiculares à reta (\vec{n} e $-\vec{n}$).

Se tivermos $-\vec{n}$, em vez de \vec{n} , vem

$$P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot (-\vec{n}) \right) (-\vec{n}) = P + 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) (-\vec{n}) = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P_1$$

Então, obtemos o mesmo ponto quer utilizemos \vec{n} quer utilizemos $-\vec{n}$.

Suponhamos, agora, que temos um ponto B pertencente à reta r . Então, $B = A + \alpha \vec{u}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e \vec{u} perpendicular a \vec{n} .

Então,

$$\begin{aligned} P - 2 \left(\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} &= P - 2 \left(\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \right) \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P - 2 \left(\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \\ &= P - 2 \left(0 + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P_1 \end{aligned}$$

Logo, o ponto obtido não depende do ponto escolhido sobre a reta r .

Logo, a aplicação está bem definida. A simetria em relação à reta r é denotada por σ_r .

Exemplo 934 Considere, num referencial ortonormado, a reta de equação $y = 2x + 3$. Determine o simétrico do ponto $P = (a, b)$, relativamente à reta r .

Resolução

Sejam $A = (0, 3)$ e $\vec{n} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$. Então,

$$\begin{aligned} P_1 &= (a, b) - 2 \left[\left((a, b) - (0, 3) \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right] \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= (a, b) - 2 \left((a, b - 3) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= (a, b) - 2 \left(\frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{b-3}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= (a, b) - 2(2a - b + 3) \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right) \\ &= (a, b) - (4a - 2b + 6) \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5} \right) \\ &= (a, b) - \frac{1}{5}(8a - 4b + 12, -4a + 2b - 6) \\ &= \left(a - \frac{1}{5}(8a - 4b + 12), b - \frac{1}{5}(-4a + 2b - 6) \right) \\ &= \frac{1}{5}(5a - 8a + 4b - 12, 5b + 4a - 2b + 6) \\ &= \left(\frac{-3a + 4b - 12}{5}, \frac{4a + 3b + 6}{5} \right) \end{aligned}$$

Proposição 935 A simetria axial é uma involução (aplicação inversa de si própria).

Demonstração

Não apresentamos a demonstração (a qual envolve o conhecimento de algumas propriedades do produto interno).

Corolário 936 A simetria axial é uma aplicação injectiva.

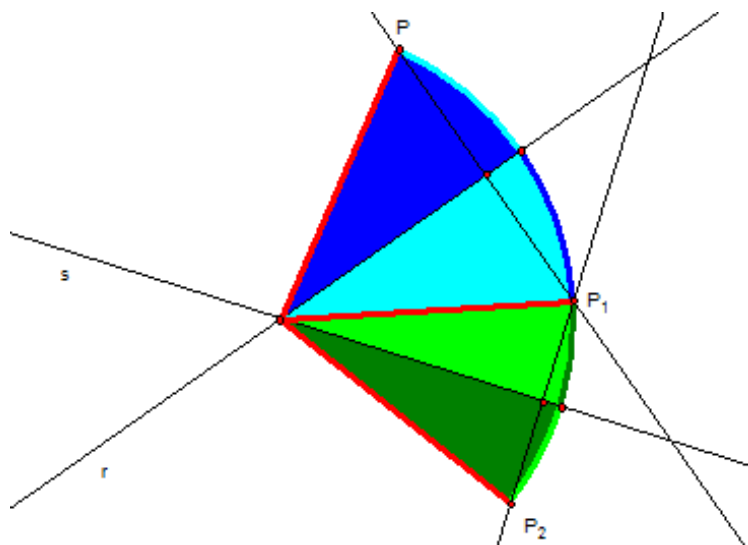
Demonstração

Suponhamos que $\sigma_r(X_1) = \sigma_r X_2$, com X_1, X_2 pertencentes ao plano.

Então, $\sigma_r(X_1) = \sigma_r X_2$, pelo que $\sigma_r(\sigma_r(X_1)) = \sigma_r(\sigma_r X_2)$.

Logo, $(\sigma_r \circ \sigma_r)(X_1) = (\sigma_r \circ \sigma_r)(X_2)$. Então, pela proposição anterior, $X_1 = X_2$, donde se conclui que σ_r é injectiva.

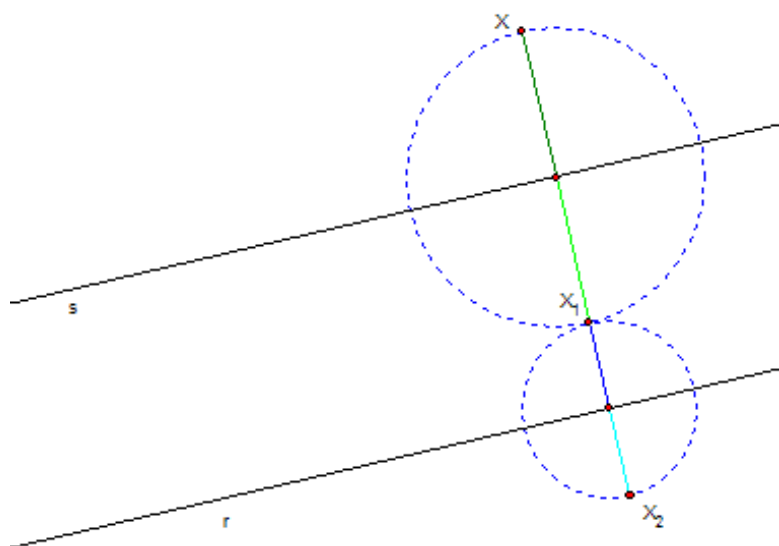
Exemplo 937 Sejam r e s duas retas concorrentes que se intersectam no ponto I . Então, $\sigma_s \circ \sigma_r$ é uma rotação em torno do ponto I . O ângulo de rotação é o dobro do ângulo formado pelas duas retas, no sentido de r para s .



Note-se que $\sigma_r \circ \sigma_s$ é uma rotação em torno de I , mas descrita em sentido contrário à rotação definida por $\sigma_s \circ \sigma_r$, isto é, $\sigma_r \circ \sigma_s$ é a aplicação inversa de $\sigma_s \circ \sigma_r$. Como podemos verificar, temos

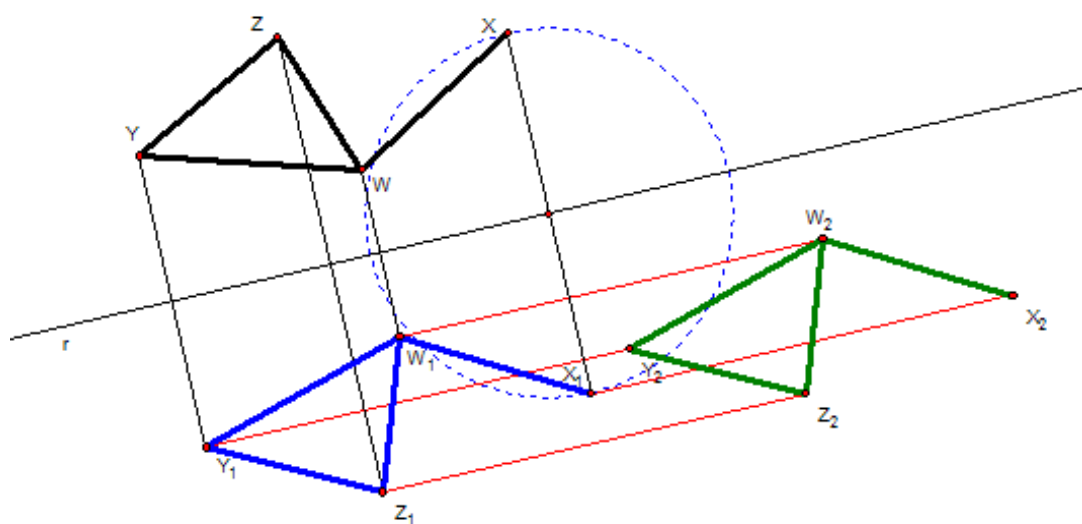
$$\begin{aligned} (\sigma_s \circ \sigma_r) \circ (\sigma_r \circ \sigma_s)(X) &= \sigma_s \circ \sigma_r \circ \sigma_r \circ \sigma_s(X) = \sigma_s \circ \text{Id} \circ \sigma_s(X) \\ &= \sigma_s \circ \sigma_s(X) = \text{Id}(X) = X \end{aligned}$$

Exemplo 938 Sejam r e s duas retas paralelas. Então, $\sigma_s \circ \sigma_r$ é a translação associada ao vector \vec{u} perpendicular às duas retas r e s , cuja norma é o dobro da distância entre as retas r e s e que tem o sentido da reta s para a reta r .



Proposição 939 *Toda a isometria pode decompor-se como aplicação composta dum número de simetrias axiais que é menor ou igual a 3. Mais, embora essa decomposição não seja única, para cada isometria, o número de simetrias axiais tem paridade fixa.*

Exemplo 940 *Consideremos a composição duma simetria axial com um vector não nulo paralelo ao eixo de simetria, conforme a figura seguinte.*



Observações

1. A isometria considerada na figura anterior (reflexão deslizante) não é uma simetria axial, nem uma rotação, nem uma translação.
2. Não há mais isometrias do plano, para além das quatro já consideradas.
3. A simetria axial e a reflexão deslizante são isometrias negativas, enquanto que a rotação e a translação são isometrias positivas.

Capítulo 56

Transformações Afins

Definição 941 *Transformação afim é uma aplicação do plano em si próprio tal que a imagem dum segmento de reta é um segmento de reta.*

Proposição 942 *Seja \mathcal{A} uma transformação afim. Então, se P , Q e R são pontos colineares, as imagens $\mathcal{A}(P)$, $\mathcal{A}(Q)$ e $\mathcal{A}(R)$ também o são.*

Demonstração

A imagem de $[PR]$ é o segmento de reta $[\mathcal{A}(P)\mathcal{A}(R)]$. Se Q pertence a $[PR]$, então $\mathcal{A}(Q)$ pertence a $[\mathcal{A}(P)\mathcal{A}(R)]$. Logo, $\mathcal{A}(P)$, $\mathcal{A}(Q)$ e $\mathcal{A}(R)$ são colineares.

Proposição 943 *Seja \mathcal{A} uma transformação afim. Então, \mathcal{A} é uma aplicação injectiva.*

Demonstração

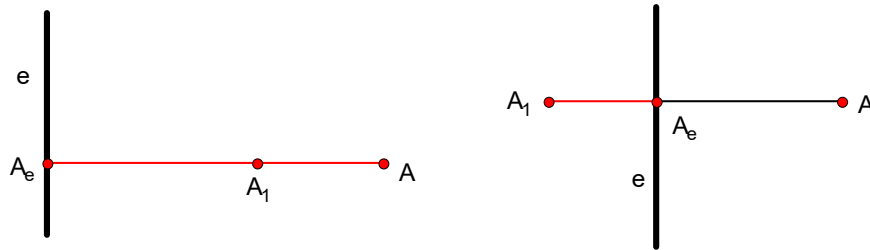
Se tivéssemos $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q)$, para dois pontos distintos P e Q , então a imagem de $[PQ]$ seria um único ponto. Então, se P e Q são distintos, $\mathcal{A}(P) \neq \mathcal{A}(Q)$, pelo que \mathcal{A} é uma aplicação injectiva.

56.1 Afinidades

Neste texto, vamos distinguir entre Afinidade e Transformação Afim. Uma afinidade é uma aplicação dum plano nele próprio que possui uma reta de pontos fixos (eixo da afinidade) e que transforma segmentos de reta paralelos em segmentos de reta paralelos. Uma afinidade pode ser vista como uma faixa elástica que é esticada segundo uma direcção, afastando os extremos da faixa. Note que existe um segmento de recta fixo (ponto a ponto) e que os restantes pontos são deslocados, num sentido ou noutro, consoante os pontos estejam de um lado ou de outro relativamente ao segmento que fica fixo. Esta acção deforma as figuras.

Definição 944 *Afinidade de eixo e e razão r (com $r \neq 0$) é a aplicação dum plano nele mesmo tal que transforma um dado ponto A num ponto A_1 , de modo que $\overrightarrow{A_e A_1} = r \times \overrightarrow{A_e A}$, onde A_e é a projecção ortogonal do ponto A sobre a reta e .*

Na figura seguinte temos um exemplo de afinidade de razão positiva e outro de razão negativa.

**Observação 1**

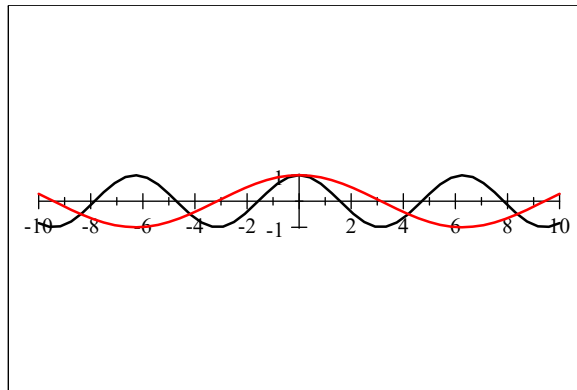
Se $r = 1$, então a afinidade é a aplicação identidade.

Se $r = -1$, então a afinidade é a simetria em relação ao eixo da afinidade.

Observação 2

Há uma situação muito comum em Matemática que pode ser encarada como uma afinidade:

Consideremos as funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos \frac{x}{2}$, de domínio \mathbb{R} , que são representadas graficamente do seguinte modo:



O gráfico de $g(x)$ obtém-se do gráfico de $f(x)$, por meio duma afinidade de razão 2 e cujo eixo é o eixo das ordenadas.

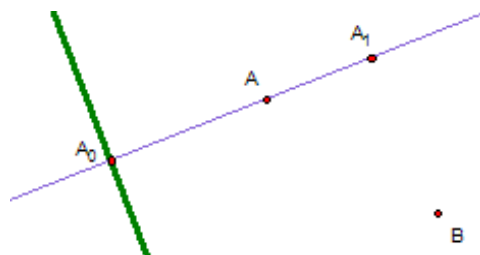
Observação 3

Na definição apresentada, considerámos que um ponto não pertencente ao eixo e a respectiva imagem definem uma reta perpendicular ao eixo, mas podíamos apresentar uma definição em que essa reta não fosse perpendicular ao eixo.

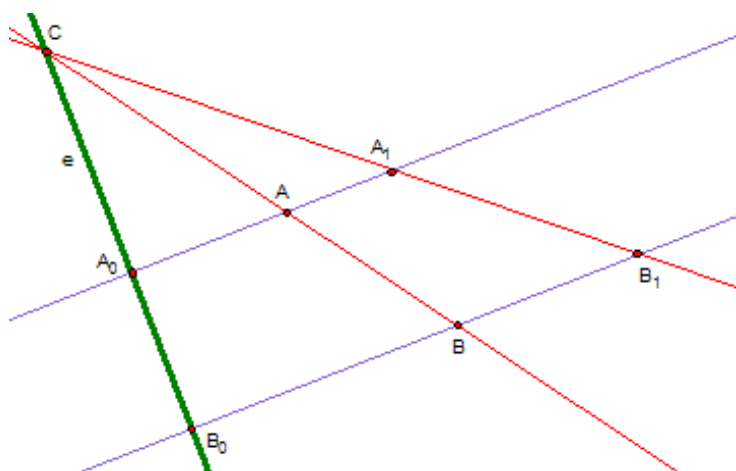
Observação 4

Há quem considere que afinidade é o mesmo que transformação afim.

Exemplo 945 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (ver figura seguinte).

**Resolução**

É claro que estamos a considerar que os pontos A e A_1 não pertencem ao eixo da afinidade, o mesmo se passando com os exemplos seguintes. A razão é que há infinitas afinidades (distintas) que transformam um ponto do eixo nele próprio e não há nenhuma afinidade que transforme um ponto do eixo noutro que não pertença ao eixo.

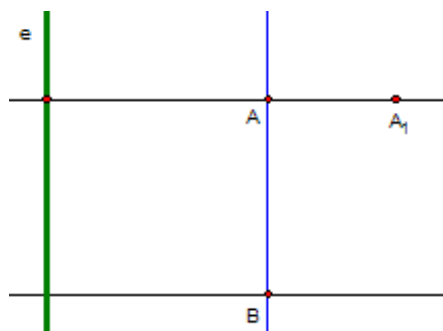
**Justificação**

Para quem conheça o Teorema de Thales, a justificação é muito fácil:

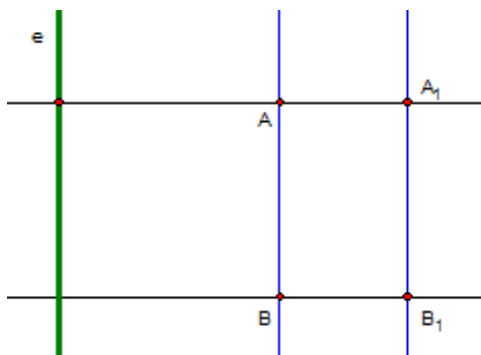
$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{B_0B_1}} = \frac{\overline{A_0A}}{\overline{B_0B}} \implies \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{B_0B_1}}{\overline{B_0B}}$$

Para quem não conheça o Teorema de Thales, tem de usar semelhanças (ou homotetias), chegando ao mesmo resultado.

Exemplo 946 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (ver figura seguinte), supondo que a reta AB é paralela ao eixo da afinidade.

**Resolução**

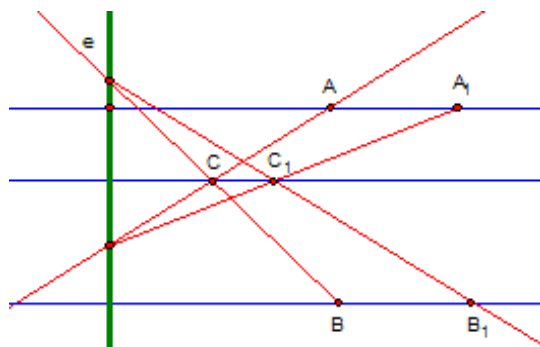
Basta traçar por A_1 uma paralela ao eixo da afinidade e por B uma perpendicular a esse eixo, obtendo-se o ponto B_1 .



Exemplo 947 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (ver figura seguinte).

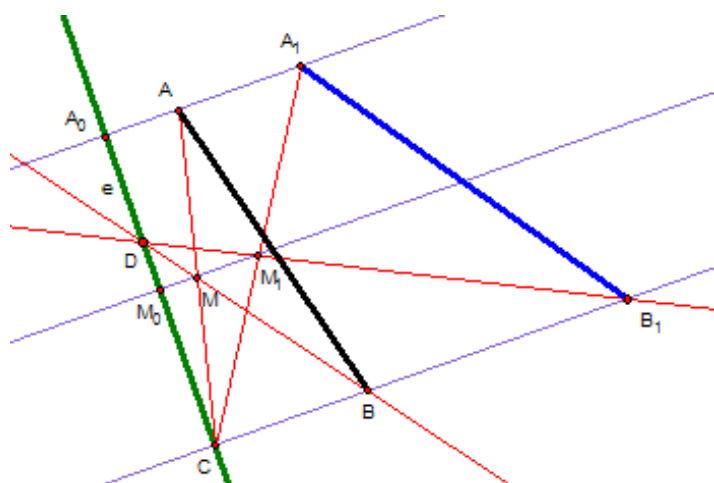
Resolução

Neste caso, não sabemos se a reta AB é (ou não) paralela ao eixo da afinidade, pelo que consideramos um ponto auxiliar C , de modo que a reta AC intersecte o eixo da afinidade nos limites do desenho. Depois, começamos por encontrar a imagem de C e, por fim, determinamos a imagem de B .



Exemplo 948 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (ver figura seguinte).

Resolução



O ponto M é o ponto médio de $[AC]$, enquanto que M_0 é o ponto médio de $[A_0C]$. A construção é perfeitamente inteligível, pelo que não a vamos descrever.

Esta construção tem vantagens em relação à construção do exemplo anterior, no caso da Geometria Dinâmica, pois, no exemplo anterior, a reta BC pode ser paralela ao eixo.

Justificação

Os triângulos $[CM_0M]$ e $[CA_0A]$ são semelhantes, o mesmo acontecendo com $[CM_0M_1]$ e $[CA_0A_1]$. Então,

$$\frac{\overline{CM_0}}{\overline{CA_0}} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} \wedge \frac{\overline{CM_0}}{\overline{CA_0}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{A_0A_1}} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{CA_1}}$$

Logo,

$$\frac{\overline{CM_0}}{\overline{CA_0}} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{A_0A_1}} = \frac{\overline{CM_1}}{\overline{CA_1}}$$

Analogamente, os triângulos $[DM_0M]$ e $[DCB]$ são semelhantes, o mesmo acontecendo com $[DM_0M_1]$ e $[DCB_1]$. Então,

$$\frac{\overline{DM_0}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DB}} \wedge \frac{\overline{DM_0}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{DM_1}}{\overline{DB_1}}$$

Logo,

$$\frac{\overline{DM_0}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{M_0M}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{DM_1}}{\overline{DB_1}}$$

Então,

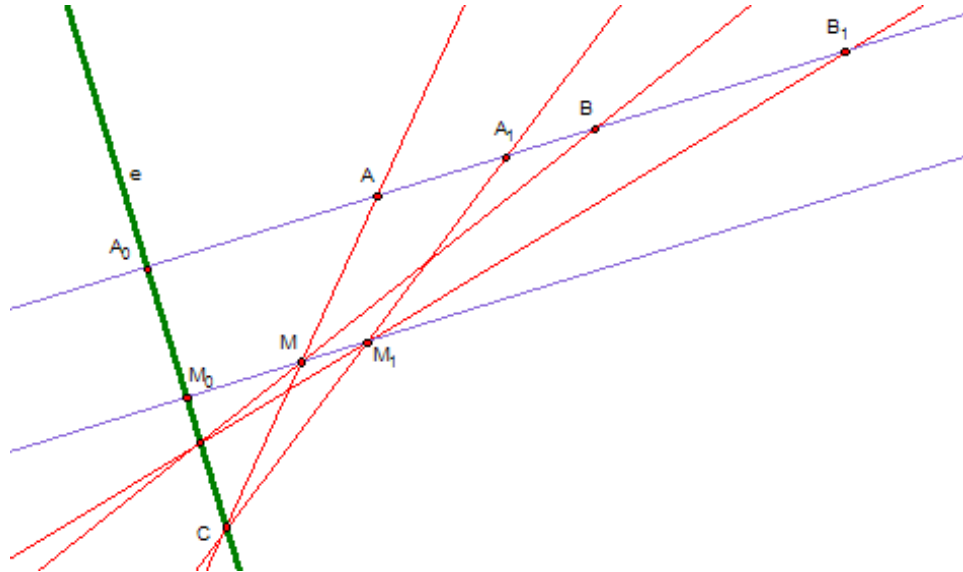
$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{M_0M}} \wedge \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{M_0M_1}}{\overline{M_0M}}$$

Logo,

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CB}}$$

Exemplo 949 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do ponto B (pertencente à reta AA_1).

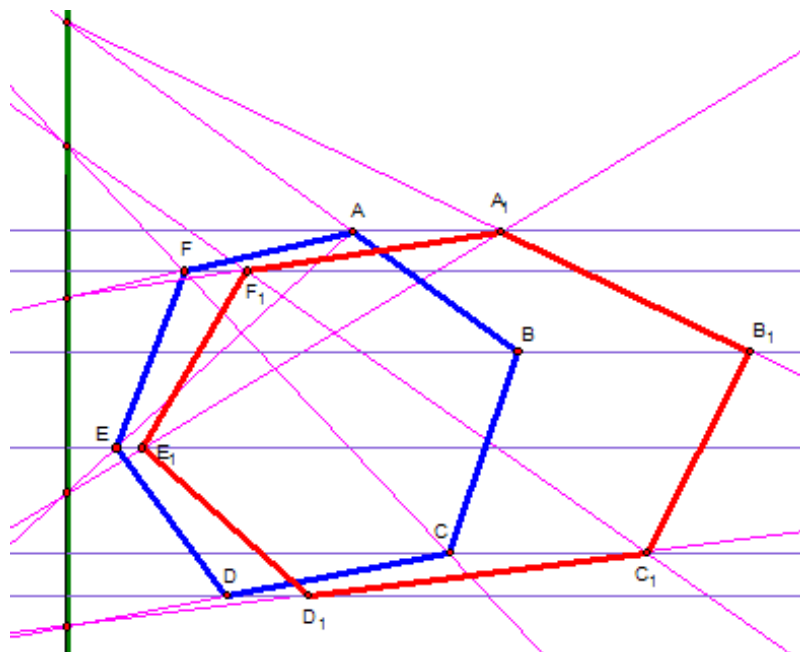
Resolução



Consideramos, sobre o eixo e , um ponto C não pertencente à reta AB . Depois, determinamos M , o ponto médio de $[AC]$.

A seguir, determinamos a imagem de M e, por fim, a imagem de B .

Exemplo 950 Consideremos a afinidade de eixo e que transforma A em A_1 . Determinemos a imagem do hexágono $[ABCDEF]$ (ver figura seguinte).



Exercício 951 Mostre que a aplicação composta de duas afinidades pode não ser uma afinidade.

Resolução

Consideremos a afinidade φ de razão 2 e cujo eixo é o eixo das abcissas e a afinidade ψ de razão 2 e cujo eixo é o eixo das ordenadas. Então, $\varphi(x, y) = (x, 2y)$ e $\psi(x, y) = (2x, y)$.

Logo, $(\varphi \circ \psi)(x, y) = \varphi(\psi(x, y)) = \varphi(2x, y) = (2x, 2y)$.

Então, a aplicação $\varphi \circ \psi$ não é uma afinidade, pois possui um único ponto fixo (que é a origem).

Na realidade, $(\varphi \circ \psi)(x, y) = (2x, 2y) = 2(x, y)$ é a homotetia de centro $(0, 0)$ e razão 2.

Exercício 952 Considere a afinidade de razão 3, cujo eixo é a reta s de equação $2x + 3y = 7$. Determine:

1. A imagem do ponto $A = (3, 4)$.
2. A imagem do ponto $P = (x, y)$.

Resolução

1. O ponto $B = (2, 1)$ pertence à reta s . Ora, $\overrightarrow{BA} = A - B = (3, 4) - (2, 1) = (1, 3)$.

Por outro lado, o vector $\vec{u} = (2, 3)$ é perpendicular à reta s , tendo-se que

$$\text{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{(1, 3) \cdot (2, 3)}{(2, 3) \cdot (2, 3)} (2, 3) = \frac{2+9}{4+9} (2, 3) = \left(\frac{22}{13}, \frac{33}{13} \right)$$

Sejam A_1 a imagem de A e A_0 a intersecção do eixo da afinidade com a reta que lhe é perpendicular e passa por A .

$$\text{Então, } A_0 = A - \text{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{BA} = (3, 4) - \left(\frac{22}{13}, \frac{33}{13} \right) = \left(\frac{17}{13}, \frac{19}{13} \right).$$

$$\text{E, por fim, } A_1 = A_0 + 3 \text{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{BA} = \left(\frac{17}{13}, \frac{19}{13} \right) + 3 \left(\frac{22}{13}, \frac{33}{13} \right) = \left(\frac{83}{13}, \frac{118}{13} \right)$$

2. O ponto $B = (2, 1)$ pertence à reta s . Ora, $\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y) - (2, 1) = (x - 2, y - 1)$.

Por outro lado, o vector $\vec{u} = (2, 3)$ é perpendicular à reta s , tendo-se que

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{BP} &= \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{(x-2, y-1) \cdot (2, 3)}{(2, 3) \cdot (2, 3)} (2, 3) = \left(\frac{2}{13}x + \frac{3}{13}y - \frac{7}{13} \right) (2, 3) \\ &= \left(\frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{14}{13}, \frac{6}{13}x + \frac{9}{13}y - \frac{21}{13} \right) \end{aligned}$$

Sejam P_1 a imagem de P e P_0 a intersecção do eixo da afinidade com a reta que lhe é perpendicular e passa por P .

Então,

$$\begin{aligned} P_0 &= P - \text{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{BP} = (x, y) - \left(\frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{14}{13}, \frac{6}{13}x + \frac{9}{13}y - \frac{21}{13} \right) \\ &= \left(\frac{9}{13}x - \frac{6}{13}y + \frac{14}{13}, -\frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y + \frac{21}{13} \right) \end{aligned}$$

E, por fim,

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + 3 \text{proj}_{\vec{u}} \overrightarrow{BP} \\ &= \left(\frac{9}{13}x - \frac{6}{13}y + \frac{14}{13}, -\frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y + \frac{21}{13} \right) + 3 \left(\frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{14}{13}, \frac{6}{13}x + \frac{9}{13}y - \frac{21}{13} \right) \\ &= (x, y) + 2 \left(\frac{4}{13}x + \frac{6}{13}y - \frac{14}{13}, \frac{6}{13}x + \frac{9}{13}y - \frac{21}{13} \right) \\ &= \left(\frac{21}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{28}{13}, \frac{12}{13}x + \frac{31}{13}y - \frac{42}{13} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{21}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{31}{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{28}{13} \\ -\frac{42}{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se substituirmos x por 3 e y por 4, vem

$$P_1 = \left(\frac{21}{13} \times 3 + \frac{12}{13} \times 4 - \frac{28}{13}, \frac{12}{13} \times 3 + \frac{31}{13} \times 4 - \frac{42}{13} \right) = \left(\frac{83}{13}, \frac{118}{13} \right) = A_1$$

Observação

Como veremos, no exercício seguinte, o resultado obtido não depende da escolha do ponto do eixo nem do vector perpendicular.

Exercício 953 Considere a afinidade de razão $\lambda \neq 0$, cujo eixo é a reta s de equação $ax+by+c=0$, com $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Determine a imagem do ponto $P = (x, y)$, por meio da afinidade considerada.

Resolução

Seja $A = (\alpha, \beta)$ um ponto pertencente à reta s . Então, $a\alpha + b\beta + c = 0$. O vector $\vec{n} = (a, b)$ é perpendicular à reta s .

Seja $P = (X, Y)$ um ponto qualquer do plano. Então, $\vec{AP} = P - A = (X - \alpha, Y - \beta)$.

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} = \frac{(X - \alpha, Y - \beta) \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)} (a, b) \\ &= \frac{aX - a\alpha + bY - b\beta}{a^2 + b^2} (a, b) \\ &= \frac{aX + bY + c}{a^2 + b^2} (a, b) \end{aligned}$$

Sejam P_1 a imagem de P e P_0 a intersecção do eixo da afinidade com a reta que lhe é perpendicular e passa por P .

Então,

$$P_0 = P - \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} = (X, Y) - \frac{aX + bY + c}{a^2 + b^2} (a, b)$$

E, por fim,

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \lambda \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} \\ &= P - \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} + \lambda \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} \\ &= P + (\lambda - 1) \text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} \\ &= (X, Y) + (\lambda - 1) \frac{aX + bY + c}{a^2 + b^2} (a, b) \end{aligned}$$

Note-se que $A = (\alpha, \beta)$ e que o resultado não depende nem de α nem de β . Logo, o resultado obtido não depende do ponto que se escolha sobre o eixo da afinidade.

Suponhamos que $\vec{n} = (\mu a, \mu b)$, com $\mu \neq 0$.

Então,

$$\begin{aligned}
\text{proj}_{\vec{n}} \vec{AP} &= \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \\
&= \frac{(X - \alpha, Y - \beta) \cdot (\mu a, \mu b)}{(\mu a, \mu b) \cdot (\mu a, \mu b)} (\mu a, \mu b) \\
&= \frac{\mu (X - \alpha, Y - \beta) \cdot (a, b)}{\mu (a, b) \cdot \mu (a, b)} \mu (a, b) \\
&= \frac{\mu^2 (X - \alpha, Y - \beta) \cdot (a, b)}{\mu^2 (a, b) \cdot (a, b)} (a, b) \\
&= \frac{(X - \alpha, Y - \beta) \cdot (a, b)}{(a, b) \cdot (a, b)} (a, b)
\end{aligned}$$

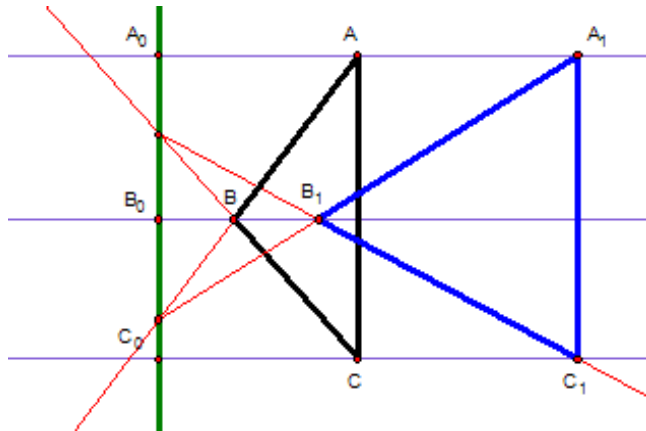
Logo, o resultado não depende de μ .

Muitas vezes escolhe-se um vector unitário, perpendicular ao eixo, ou seja, $\vec{N} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$.

A escolha anterior pode ter vantagens, a nível teórico, mas tem algumas desvantagens nos casos práticos.

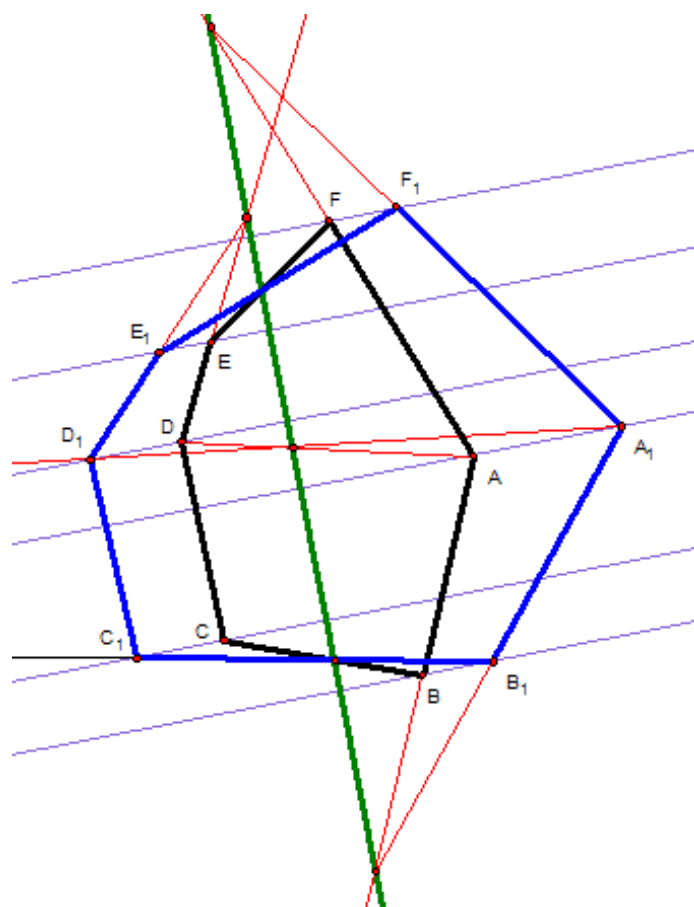
Exemplo 954 Determine a imagem do triângulo $[ABC]$ por meio da afinidade de eixo A_0B_0 que transforma A em A_1 .

Resolução



Exemplo 955 Determine a imagem do hexágono $[ABCDEF]$ por meio da afinidade cujo eixo é a reta a verde e que transforma A em A_1 .

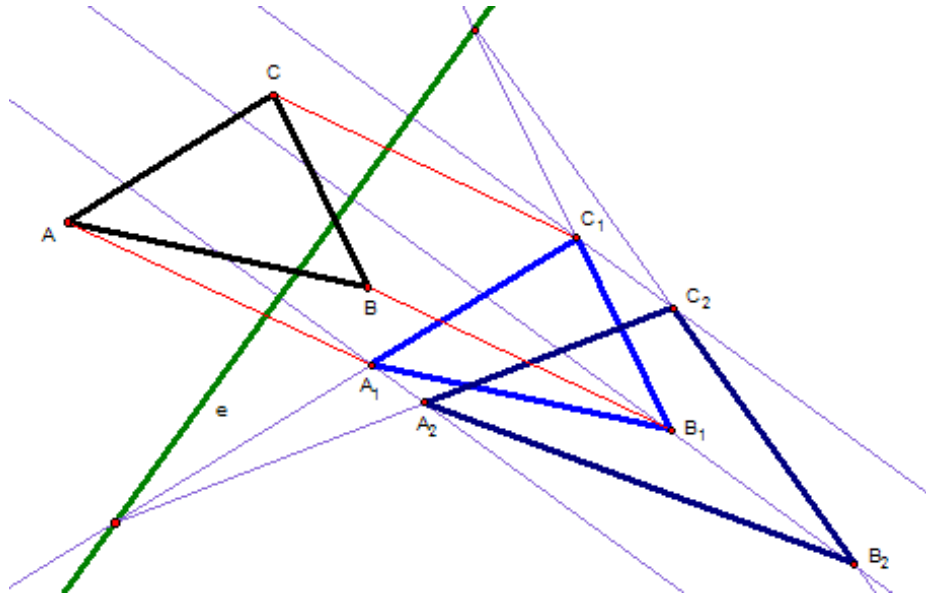
Resolução



A reta AB intersecta o eixo da afinidade num ponto que coincide com a sua imagem. Unindo esse ponto com A_1 , obtemos uma reta que é a imagem da reta AB . Traçando, por B , uma reta perpendicular ao eixo, obtemos o ponto B_1 . Repetindo o processo, obtemos as imagens dos restantes vértices do hexágono.

56.2 Transformações Afins

Definição 956 *Transformação afim é uma aplicação composta dum translação após uma aplicação linear (bijectiva).*

Observação

A aplicação que transforma $[ABC]$ em $[A_2B_2C_2]$ não é uma afinidade, porque as retas AA_2 , BB_2 e CC_2 não são paralelas, nem é uma semelhança.

Exemplo 957 Suponhamos que $g(x, y) = (x, 2y)$ e $f(x, y) = (x + 2, y + 3)$.

Então,

$$(g \circ f)(x, y) = g(x + 2, y + 3) = (x + 2, 2y + 6)$$

Pontos fixos: Não há, porque $(x + 2, 2y + 6) = (x, y)$ é uma equação impossível.

Consideremos os pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$. Então, $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = 1$ e $\overline{BC} = \sqrt{2}$.

Por outro lado, $(g \circ f)(0, 0) = (2, 6)$, $(g \circ f)(1, 0) = (3, 6)$ e $(g \circ f)(0, 1) = (2, 8)$.

Logo, a distância entre $(g \circ f)(0, 0)$ e $(g \circ f)(1, 0)$ é 1 e a distância entre $(g \circ f)(0, 0)$ e $(g \circ f)(0, 1)$ é 2.

Representemos a distância entre dois pontos X e Y por $d(X, Y)$.

Então, $d(A, B) = d((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)) = 1$ e $1 = d(A, C) \neq d((g \circ f)(A), (g \circ f)(C)) = 2$, pelo que a aplicação g não é uma semelhança.

O Capítulo anterior está inacabado

56.2.1 Reflexão

A Reflexão em relação a um plano também se pode chamar de Simetria em relação a esse plano.

A definição é semelhante à simetria em relação a uma recta, em \mathbb{R}^2 . Aliás, a definição é a mesma em \mathbb{R}^2 , ou em \mathbb{R}^3 , ou em \mathbb{R}^4 , ou em \mathbb{R}^n , com n um número natural qualquer. A diferença está no número de coordenadas. A semelhança está no facto de se fazer a simetria em relação a um hiperplano (plano de dimensão $n-1$, em \mathbb{R}^n). Em \mathbb{R}^2 , um hiperplano é uma recta vulgar e, em \mathbb{R}^3 , um hiperplano é um plano vulgar. Em \mathbb{R}^4 , um hiperplano é um plano de dimensão 3: translação dum subespaço de \mathbb{R}^4 , com dimensão 3).

Definição 958 Consideremos um plano Π que passa por A e que é perpendicular ao vector unitário \vec{n} . Então, o simétrico dum ponto P , relativamente ao plano Π , é o ponto $P_1 = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n}$.

Observação

Note-se que a expressão $P_1 = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n}$ é rigorosamente a mesma que aparecia na definição de simetria em relação a uma recta de \mathbb{R}^2 .

Da mesma maneira que em \mathbb{R}^2 , o ponto P_1 não depende do ponto A escolhido no plano, nem depende de usarmos \vec{n} ou $-\vec{n}$. E continuamos a ter uma involução.

Vamos representar a simetria em relação ao plano Π , por σ_Π .

Exercício 959 Mostre que a definição de reflexão é coerente.

Resolução

Suponhamos que utilizamos $-\vec{n}$ em vez de \vec{n} . Então, ficamos com

$$\begin{aligned} P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot (-\vec{n}) \right) (-\vec{n}) &= P + 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot (-\vec{n}) \right) \vec{n} = P + 2 \left(- \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \right) \vec{n} \\ &= P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \end{aligned}$$

Logo, é indiferente usar \vec{n} ou $-\vec{n}$.

Suponhamos que temos um ponto B pertencente ao mesmo plano Π . Então, $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$.

Mas,

$$\begin{aligned} P - 2 \left(\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} &= P - 2 \left(\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \right) \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P - 2 \left(\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \\ &= P - 2 \left(0 + \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} = P - 2 \left(\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \end{aligned}$$

Logo, o resultado não depende do ponto A que se escolha no plano Π .

Então, a definição é coerente.

Exemplo 960 Determine o simétrico do ponto $P = (1, 3, -2)$, em relação ao plano Π definido por $x + 2y - 4z = 5$.

Resolução

Seja $\vec{N} = (1, 2, -4)$, cuja norma é $\sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$, um vector perpendicular ao plano Π e seja $A = (5, 0, 0)$.

$$\text{Então, } \vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}} \right) = \left(\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}, -\frac{4\sqrt{21}}{21} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \sigma_{\Pi}(1, 3, -2) = (1, 3, -2) - 2(((1, 3, -2) - (5, 0, 0)) \cdot \vec{n}) \vec{n} \\
 &= (1, 3, -2) - 2\left((-4, 3, -2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}\right)\right) \vec{n} \\
 &= (1, 3, -2) - 2 \times \frac{10}{21} \sqrt{21} \left(\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}, -\frac{4\sqrt{21}}{21}\right) \\
 &= (1, 3, -2) - \left(\frac{20}{21}, \frac{40}{21}, -\frac{80}{21}\right) = \left(\frac{1}{21}, \frac{23}{21}, \frac{38}{21}\right)
 \end{aligned}$$

Ponto médio de $[\overrightarrow{PP_1}]$:

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{21}}{2}, \frac{3 + \frac{23}{21}}{2}, \frac{-2 + \frac{38}{21}}{2}\right) = \left(\frac{11}{21}, \frac{43}{21}, -\frac{2}{21}\right)$$

O ponto anterior deve pertencer a Π : $\frac{11}{21} + \frac{86}{21} + \frac{8}{21} = \frac{105}{21} = 5$. Logo o ponto médio pertence a Π .

Por outro lado, o segmento definido por P e por P_1 deve ser perpendicular ao plano Π . Logo, deve ser colinear com $\vec{N} = (1, 2, -4)$.

Ora,

$$\begin{aligned}
 P_1 - P &= \sigma_{\Pi}(P) - P = \left(\frac{1}{21}, \frac{23}{21}, \frac{38}{21}\right) - (1, 3, -2) \\
 &= \left(-\frac{20}{21}, -\frac{40}{21}, \frac{80}{21}\right) = -\frac{20}{21}(1, 2, -4) = -\frac{20}{21}\vec{N}
 \end{aligned}$$

Então, a imagem de P está bem calculada.

As reflexões são importantes, porque toda a isometria se escreve como produto de rotações.

56.2.2 Rotação em torno duma recta (ou eixo)

As rotações no espaço (rotações em \mathbb{R}^3) são mais complicadas do que em \mathbb{R}^2 , mas há casos tão simples como as rotações em \mathbb{R}^2 : são os casos em que a rotação é feita em relação a um dos eixos coordenados.

- Rotação, em \mathbb{R}^2 (em torno da Origem do referencial):

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ donde } T(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{Note-se que } \det \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

- Rotação, em relação ao eixo Oz, em \mathbb{R}^3 :

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha \\ z \end{bmatrix}$$

Note-se que $\det \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times \det \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = 1$

- Rotação, em relação ao eixo Ox:

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ z \cos \alpha + y \sin \alpha \end{bmatrix}$$

É claro que $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

- Rotação, em relação ao eixo Oy:

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - z \sin \alpha \\ y \\ z \cos \alpha + x \sin \alpha \end{bmatrix}$$

E $\det \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Rotações sucessivas:

- Em torno de Oz e, depois em torno de Ox:

Suponhamos que o primeiro ângulo é α e que o segundo é β .

Então, a composta é dada por

$$\begin{aligned} (\rho_2 \circ \rho_1)(x, y, z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha \cos \beta - z \sin \beta + x \cos \beta \sin \alpha \\ z \cos \beta + y \cos \alpha \sin \beta + x \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note-se que, se multiplicarmos as duas matrizes 3×3 , obtemos uma matriz de determinante 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Mas é preferível multiplicar os dois determinantes a calcularmos o determinante do produto, de maneira directa.

E se tivermos três rotações consecutivas, em relação aos três eixos coordenados?

Em primeiro lugar, temos que definir a ordem. Suponhamos que escolhemos Oz, em primeiro lugar, Ox, em segundo lugar e por fim, Oy.

Neste caso, podemos aproveitar o resultado anterior, tendo-se para a última rotação:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1)(x, y, z) \\ &= \rho_3((\rho_2 \circ \rho_1)(x, y, z)) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha \cos \beta - z \sin \beta + x \cos \beta \sin \alpha \\ z \cos \beta + y \cos \alpha \sin \beta + x \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \cos \alpha \cos \gamma - y \cos \gamma \sin \alpha - z \cos \beta \sin \gamma - y \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - x \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ y \cos \alpha \cos \beta - z \sin \beta + x \cos \beta \sin \alpha \\ z \cos \beta \cos \gamma + x \cos \alpha \sin \gamma - y \sin \alpha \sin \gamma + y \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta + x \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E se trocamos a ordem das matrizes?

•

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \gamma \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \cos \gamma \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \sin \beta & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} M_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha - \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta & -\cos \gamma \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{bmatrix} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
M_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma & -\cos \gamma \sin \alpha & -\sin \gamma \\ \cos \beta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \gamma \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
M_5 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma & \cos \gamma \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
M_6 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \gamma \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta - \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Embora tenham origem em três matrizes relativamente simples, as seis matrizes encontradas são razoavelmente complexas.

Serão as seis matrizes anteriores, matrizes de rotação em relação a alguma recta? E, em caso afirmativo, que recta será essa? No entanto, há uma coisa que sabemos: os determinantes das seis matrizes anteriores são iguais a 1. E, embora não seja nada óbvio, um dos valores próprios é 1. Então, há sempre um eixo de rotação. Apenas no caso da matriz identidade, há mais do que um eixo de rotação. Então, a aplicação composta por um número finito de rotações, em relação a rectas que passem pela origem, é ainda uma rotação, em relação a certa recta que passa pela origem.

Pensemos num ponto do espaço, diferente da origem do referencial. Quando ele sofre uma rotação em relação a uma recta que passa pela origem, a sua imagem continua à mesma distância da origem que está o ponto inicial. Então, esses dois pontos (objecto e imagem) têm de pertencer a uma superfície esférica de centro em O e cujo raio é a distância do ponto à origem. Então, o ponto tem dois graus de liberdade. Suponhamos que temos o ponto A e o ponto A' que pretendemos seja a imagem do ponto A , por meio duma rotação em torno duma recta que passe pela origem. Então, o ponto B e a sua imagem pela rotação anterior têm de pertencer a uma superfície esférica de centro em O e cujo raio seja $d(O, B) = \overline{OB}$.

Logo, o ponto B' tem de pertencer a duas superfícies esféricas, pois também tem de pertencer à superfície de centro A' e raio $d(A, B) = \overline{AB} = \overline{A'B'}$. A intersecção das duas superfícies esféricas é uma circunferência, pelo que B' tem um grau de liberdade. Agora, um terceiro ponto já fica com a sua imagem definida.

Exemplo 961 Consideremos os dois planos Π_1 e Π_2 , definidos por $\Pi_1 : 2x + y + 2z = 0$ e $\Pi_2 : x - 2y + 2z = 0$. Determine a imagem do ponto P por meio de $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ (Ω_{Π_2} e Ω_{Π_1} são as reflexões em relação aos planos Π_2 e Π_1).

Resolução

Neste exemplo, escolhemos os coeficientes das variáveis, de modo que os vectores unitários, normais aos dois planos, originem cálculos fáceis. Mas, no caso geral, podemos trabalhar com vectores não unitários. Note-se que a origem pertence aos dois planos.

Sejam $u_1 = (2, 1, 2)$ e $u_2 = (1, -2, 2)$, vectores perpendiculares aos dois planos dados. Então, $\|u_1\| = \|(2, 1, 2)\| = \sqrt{4+1+4} = 3$ e $\|u_2\| = \|(1, -2, 2)\| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

Logo, podemos considerar os vectores unitários $N_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ e $N_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Seja $P = (x_P, y_P, z_P) = (x, y, z)$, para facilitar a notação.

Então,

$$\begin{aligned}\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \left((x, y, z) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right) \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \\ &= (x, y, z) - 2 \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right) \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right) \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right) \\ &= \left(x - \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z, y - \frac{4}{9}x - \frac{2}{9}y - \frac{4}{9}z, z - \frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z \right) \\ &= \left(\frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z, -\frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z, -\frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z \right)\end{aligned}$$

Escrevendo o resultado anterior, usando matrizes, temos:

$$\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz anterior é -1 .

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Omega_{\Pi_2}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \left((x, y, z) \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right) \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \\ &= (x, y, z) - 2 \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \right) \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \right) \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right) \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{2}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{4}{9}z, -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}y - \frac{8}{9}z, \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{8}{9}z \right) \\ &= \left(\frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z, \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z, -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}y + \frac{1}{9}z \right)\end{aligned}$$

Matricialmente, vem

$$\Omega_{\Pi_2}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

O determinante da matriz anterior também é -1 .

Mas, substituindo, (x, y, z) por $(\frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z, -\frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z, -\frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z)$, obtemos

$$\begin{cases} X = \frac{7}{9}(\frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z) + \frac{4}{9}(-\frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z) - \frac{4}{9}(-\frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z) \\ Y = \frac{4}{9}(\frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z) + \frac{1}{9}(-\frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z) + \frac{8}{9}(-\frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z) \\ Z = -\frac{4}{9}(\frac{1}{9}x - \frac{4}{9}y - \frac{8}{9}z) + \frac{8}{9}(-\frac{4}{9}x + \frac{7}{9}y - \frac{4}{9}z) + \frac{1}{9}(-\frac{8}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{1}{9}z) \end{cases}$$

Com algum trabalho, chegamos a

$$\begin{cases} X = \frac{23}{81}x + \frac{16}{81}y - \frac{76}{81}z \\ Y = -\frac{64}{81}x - \frac{41}{81}y - \frac{28}{81}z \\ Z = -\frac{44}{81}x + \frac{68}{81}y + \frac{1}{81}z \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) &= \left(\frac{23}{81}x + \frac{16}{81}y - \frac{76}{81}z, -\frac{64}{81}x - \frac{41}{81}y - \frac{28}{81}z, -\frac{44}{81}x + \frac{68}{81}y + \frac{1}{81}z \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É claro que $\begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix}$, pelo que o determinante desta última matriz é 1.

Vejamus que $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ é uma isometria:

Há duas maneiras de mostrar que $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ é uma isometria. A primeira maneira é partir da expressão que obtivemos. A segunda maneira é provar que uma reflexão, em relação a um plano, é uma isometria. É claro que a segunda maneira é aquela que é mais interessante, porque provamos várias coisas duma só vez, enquanto que a primeira maneira só prova o caso particular desta aplicação composta. No entanto, vamos usar a primeira maneira, para vermos o imenso trabalho que temos:

Sejam $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$. Então,

$$P - Q = (x_P, y_P, z_P) - (x_Q, y_Q, z_Q) = (x_P - x_Q, y_P - y_Q, z_P - z_Q)$$

Logo, $d(P, Q)$, a distância entre P e Q , é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{cases} (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(P) = \begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \\ (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(Q) = \begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} \end{cases}$$

Então, saltando um passo, por causa do espaço, temos

$$\begin{aligned} (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(P) - (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(Q) &= \begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P - x_Q \\ y_P - y_Q \\ z_P - z_Q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{23}{81}(x_P - x_Q) + \frac{16}{81}(y_P - y_Q) - \frac{76}{81}(z_P - z_Q) \\ -\frac{64}{81}(x_P - x_Q) - \frac{41}{81}(y_P - y_Q) - \frac{28}{81}(z_P - z_Q) \\ -\frac{44}{81}(x_P - x_Q) + \frac{68}{81}(y_P - y_Q) + \frac{1}{81}(z_P - z_Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Então, fazendo } \begin{cases} x_P - x_Q = x \\ y_P - y_Q = y \\ z_P - z_Q = z \end{cases}, \text{ temos: } \begin{cases} X_0^2 = \left(\frac{23}{81}x + \frac{16}{81}y - \frac{76}{81}z\right)^2 \\ Y_0^2 = \left(-\frac{64}{81}x - \frac{41}{81}y - \frac{28}{81}z\right)^2 \\ Z_0^2 = \left(-\frac{44}{81}x + \frac{68}{81}y + \frac{1}{81}z\right)^2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} X_0^2 = \frac{529}{6561}x^2 + \frac{736}{6561}xy - \frac{3496}{6561}xz + \frac{256}{6561}y^2 - \frac{2432}{6561}yz + \frac{5776}{6561}z^2 \\ Y_0^2 = \frac{4096}{6561}x^2 + \frac{5248}{6561}xy + \frac{3584}{6561}xz + \frac{1681}{6561}y^2 + \frac{2296}{6561}yz + \frac{784}{6561}z^2 \\ Z_0^2 = \frac{1936}{6561}x^2 - \frac{5984}{6561}xy - \frac{88}{6561}xz + \frac{4624}{6561}y^2 + \frac{136}{6561}yz + \frac{1}{6561}z^2 \end{cases}$$

Mas, $\begin{cases} \frac{529}{6561}x^2 + \frac{4096}{6561}x^2 + \frac{1936}{6561}x^2 = x^2 \\ \frac{256}{6561}y^2 + \frac{1681}{6561}y^2 + \frac{4624}{6561}y^2 = y^2 \\ \frac{5776}{6561}z^2 + \frac{784}{6561}z^2 + \frac{1}{6561}z^2 = z^2 \\ \frac{736}{6561}xy + \frac{5248}{6561}xy - \frac{5984}{6561}xy = 0 \\ -\frac{3496}{6561}xz + \frac{3584}{6561}xz - \frac{88}{6561}xz = 0 \\ -\frac{2432}{6561}yz + \frac{2296}{6561}yz + \frac{136}{6561}yz = 0 \end{cases}$

Logo, $X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$, pelo que

$$\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

Então,

$$\|(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(P) - (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(Q)\| = \|P - Q\|$$

Dito de outro modo, $d((\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(P), (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(Q)) = d(P, Q)$, ou seja, $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ é uma isometria.

Agora, podemos encontrar os pontos fixos de $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$. Como Ω_{Π_1} fixa (ponto a ponto) o plano Π_1 e Ω_{Π_2} fixa (ponto a ponto) o plano Π_2 , então $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ fixa (ponto a ponto) a recta intersecção dos dois planos. Haverá mais algum ponto fixo?

$$\text{Suponhamos que } (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = (x, y, z). \text{ Então, } \begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\text{donde vem } \begin{bmatrix} \frac{23}{81} - 1 & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} - 1 & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema anterior tem solução e já sabemos que é indeterminado, porque tem infinitas soluções (os pontos duma recta).

Por isso, basta saber qual é a característica da matriz.

Ora, $\begin{bmatrix} \frac{23}{81} - 1 & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} - 1 & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{58}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{122}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & -\frac{80}{81} \end{bmatrix}$ e esta matriz tem característica maior ou igual a 2. Logo, a característica é 2 e o sistema é simplesmente indeterminado. Logo, os pontos fixos estão todos numa recta.

É claro que é mais fácil resolver o sistema $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 2(2y - 2z) + y + 2z = 0 \\ x = 2y - 2z \end{cases} \iff \begin{cases} 4y - 4z + y + 2z = 0 \\ x = 2y - 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5y - 2z = 0 \\ x = 2y - 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2}{5}z \\ x = \frac{4}{5}z - 2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2}{5}z \\ x = -\frac{6}{5}z \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a solução é $(-\frac{6}{5}z, \frac{2}{5}z, z)$, ou seja, todo o ponto fixo de $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ é da forma $(-\frac{6}{5}z, \frac{2}{5}z, z)$. Se acharmos $(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(-\frac{6}{5}z, \frac{2}{5}z, z)$, o resultado deve ser $(-\frac{6}{5}z, \frac{2}{5}z, z)$.

$$\text{Ora, } (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(-\frac{6}{5}z, \frac{2}{5}z, z) = \begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{5}z \\ \frac{2}{5}z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5}z \\ \frac{2}{5}z \\ z \end{bmatrix}$$

Consideremos, agora, um ponto não pertencente à recta anterior, por exemplo, $P = (1, 2, 3)$. A imagem deste ponto por $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ é o ponto $P' = (-\frac{173}{81}, -\frac{230}{81}, \frac{95}{81})$.

$$\begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{173}{81} \\ -\frac{230}{81} \\ \frac{95}{81} \end{bmatrix}$$

Calculemos a distância entre cada um dos pontos P e P' e a recta invariante (anterior).

A recta tem a direcção de $(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1)$, ou seja, $(6, -2, -5)$.

Então, uma equação do plano que passa por A e é perpendicular à recta é $6(x - 1) - 2(y - 2) - 5(z - 3) = 0$, ou seja, $6x - 2y - 5z + 13 = 0$.

Podemos verificar que $P' = (-\frac{173}{81}, -\frac{230}{81}, \frac{95}{81})$ também pertence a esse plano (perpendicular):

$$\begin{aligned} 6\left(-\frac{173}{81}\right) - 2\left(-\frac{230}{81}\right) - 5 \times \frac{95}{81} + 13 &= -\frac{346}{27} + \frac{460}{81} - \frac{475}{81} + 13 \\ &= -\frac{346}{27} - \frac{15}{81} + 13 = -\frac{346}{27} - \frac{5}{27} + 13 \\ &= -\frac{351}{27} + 13 = -13 + 13 = 0 \end{aligned}$$

Falta encontrar o ponto da recta que pertence ao plano (perpendicular):

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6x - 2y - 5z = -13 \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases} &\iff \begin{cases} -\frac{36}{5}z - \frac{4}{5}z - 5z = -13 \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases} \iff \begin{cases} 36z + 4z + 25z = 65 \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 65z = 65 \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = -\frac{6}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Note-se que podemos encontrar o ponto anterior, através da projecção ortogonal:

$\overrightarrow{OP} = (1, 2, 3)$, pelo que a projecção de \overrightarrow{OP} sobre o vector $N = (6, -2, -5)$ é

$$\begin{aligned}\text{proj}_N \overrightarrow{OP} &= \frac{(1, 2, 3) \cdot (6, -2, -5)}{(6, -2, -5) \cdot (6, -2, -5)} (6, -2, -5) = \frac{6 - 4 - 15}{36 + 4 + 25} (6, -2, -5) \\ &= -\frac{1}{5} (6, -2, -5) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)\end{aligned}$$

Então, $C = (0, 0, 0) + \text{proj}_N \overrightarrow{OP} = \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$.

Então, a distância entre cada um dos pontos e a recta é igual à distância entre esses pontos e o ponto $C = \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)$.

$$\begin{aligned}d\left((1, 2, 3), \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right)\right) &= \left\| (1, 2, 3) - \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \right\| = \left\| \left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}, \frac{10}{5}\right) \right\| \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{121 + 64 + 100} = \frac{1}{5} \sqrt{285}\end{aligned}$$

Note-se que não é preciso achar a distância entre P' e o ponto C , porque C é um ponto fixo e temos uma isometria.

De qualquer modo, aqui ficam os cálculos:

$$\begin{aligned}\left\| \left(-\frac{173}{81}, -\frac{230}{81}, \frac{95}{81}\right) - \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \right\| &= \left\| \left(-\frac{379}{405}, -\frac{1312}{405}, \frac{14}{81}\right) \right\| = \left\| \left(-\frac{379}{405}, -\frac{1312}{405}, \frac{70}{405}\right) \right\| \\ &= \frac{1}{405} \|(-379, -1312, 70)\| = \frac{\sqrt{379^2 + 1312^2 + 4900}}{405} \\ &= \frac{\sqrt{23085}}{405} = \frac{1}{5} \sqrt{285}\end{aligned}$$

Logo a distância entre P' e o ponto C é $\frac{1}{5} \sqrt{285}$.

Então, podemos imaginar que o ponto A descreveu um arco de circunferência contido no plano perpendicular à recta de pontos fixos e em que o raio é $\frac{1}{5} \sqrt{285}$.

Note-se que há fórmulas que permitem achar a distância entre um ponto e uma recta. Aliás, há fórmulas que permitem achar a distância entre um ponto e um plano de \mathbb{R}^n , de qualquer dimensão. Note-se que em \mathbb{R}^3 , além dos pontos e do espaço todo, só temos "planos" de dimensão 1 (as rectas) e os "planos" de dimensão 2, a que costumamos chamar planos. Mas, em \mathbb{R}^4 , além dos pontos e do espaço todo, temos os planos de dimensão 1 (as rectas), os planos de dimensão 3 (os hiperplanos de \mathbb{R}^4) e os planos de dimensão 2 (que não são rectas nem hiperplanos).

Agora, podemos achar o ângulo entre \overrightarrow{CA} e $\overrightarrow{CA'}$:

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (1, 2, 3) - \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}, 2\right)$$

$$\overrightarrow{CA'} = A' - C = \left(-\frac{173}{81}, -\frac{230}{81}, \frac{95}{81}\right) - \left(-\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) = \left(-\frac{379}{405}, -\frac{1312}{405}, \frac{14}{81}\right)$$

Então,

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA'} = \left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}, 2\right) \cdot \left(-\frac{379}{405}, -\frac{1312}{405}, \frac{14}{81}\right) = -\frac{931}{135}$$

Logo,

$$\cos \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}} \right) = \frac{-\frac{931}{135}}{\frac{1}{5} \sqrt{285} \times \frac{1}{5} \sqrt{285}} = -\frac{931}{135} \times \frac{25}{285} = -\frac{49}{81}$$

Sendo α o ângulo entre \overrightarrow{CA} e $\overrightarrow{CA'}$, temos $\cos \alpha = -\frac{49}{81}$, pelo que $\alpha = \arccos\left(-\frac{49}{81}\right) = \pi - \arccos \frac{49}{81}$. Logo, $\alpha \approx 2,22048467$ rad.

Recordamos que $u_1 = (2, 1, 2)$ e $u_2 = (1, -2, 2)$ são vectores perpendiculares aos dois planos dados.

Ora, $u_1 \cdot u_2 = (2, 1, 2) \cdot (1, -2, 2) = 2 - 2 + 4 = 4$ e $\|u_1\| = 3 = \|u_2\|$.

Então, $\cos \widehat{u_1 u_2} = \frac{4}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$. Chamemos a este ângulo β . Então, $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{16}{81}} = \frac{1}{9}\sqrt{65}$.

Logo, $\cos(2\beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{16}{81} - \frac{65}{81} = -\frac{49}{81}$. Logo, o ângulo de rotação é o dobro do ângulo entre os dois planos.

Note-se que, no caso do produto interno dar negativo, era preciso trocar os sinais a um dos vectores, porque o ângulo entre dois planos nunca é superior a um ângulo recto.

Se repetirmos o raciocínio com um ponto genérico $P = (x_P, y_P, z_P)$, vamos encontrar o mesmo ângulo, embora com cálculos algo maçadores.

Note-se que há uma maneira muito simples de encontrar a direcção da recta que é a intersecção dos planos Π_1 e Π_2 :

Sejam $u = (2, 1, 2)$ e $v = (1, -2, 2)$, vectores perpendiculares a Π_1 e Π_2 , respectivamente. Então, a intersecção dos dois planos Π_1 e Π_2 é uma recta cuja direcção é dada pelo produto externo $u \times v$:

$$\text{Ora, } u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6e_1 - 2e_2 - 5e_3 = (6, -2, -5).$$

A equação do plano que passa por P e é perpendicular à intersecção de Π_1 e Π_2 é:

$$6(x - x_P) - 2(y - y_P) - 5(z - z_P) = 0$$

$$\text{A imagem de } P \text{ (por } \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}) \text{ é } \begin{bmatrix} \frac{23}{81} & \frac{16}{81} & -\frac{76}{81} \\ -\frac{64}{81} & -\frac{41}{81} & -\frac{28}{81} \\ -\frac{44}{81} & \frac{68}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{81}x_P + \frac{16}{81}y_P - \frac{76}{81}z_P \\ -\frac{64}{81}x_P - \frac{41}{81}y_P - \frac{28}{81}z_P \\ -\frac{44}{81}x_P + \frac{68}{81}y_P + \frac{1}{81}z_P \end{bmatrix}.$$

Vejamos que o ponto P' pertence ao plano de equação $6(x - x_P) - 2(y - y_P) - 5(z - z_P) = 0$:

$$\begin{cases} 6\left(\frac{23}{81}x_P + \frac{16}{81}y_P - \frac{76}{81}z_P - x_P\right) = -\frac{116}{27}x_P + \frac{32}{27}y_P - \frac{152}{27}z_P \\ -2\left(-\frac{64}{81}x_P - \frac{41}{81}y_P - \frac{28}{81}z_P - y_P\right) = \frac{128}{81}x_P + \frac{244}{81}y_P + \frac{56}{81}z_P \\ -5\left(-\frac{44}{81}x_P + \frac{68}{81}y_P + \frac{1}{81}z_P - z_P\right) = \frac{220}{81}x_P - \frac{340}{81}y_P + \frac{400}{81}z_P \end{cases}$$

$$\text{Mas, } \begin{cases} \frac{128}{81}x_P + \frac{220}{81}x_P - \frac{116}{27}x_P = \frac{348}{81}x_P - \frac{348}{81}x_P = 0 \\ \frac{32}{27}y_P + \frac{244}{81}y_P - \frac{340}{81}y_P = \frac{96}{81}y_P - \frac{96}{81}y_P = 0 \\ -\frac{152}{27}z_P + \frac{56}{81}z_P + \frac{400}{81}z_P = -\frac{456}{27}z_P + \frac{456}{81}z_P = 0 \end{cases} \quad \text{E } 0 + 0 + 0 = 0, \text{ pelo que o ponto}$$

P' pertence ao plano de equação $6(x - x_P) - 2(y - y_P) - 5(z - z_P) = 0$.

Intersecção do plano com a recta:

$$\begin{cases} 6x - 2y - 5z = 6x_P - 2y_P - 5z_P \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{36}{5}z - \frac{4}{5}z - 5z = 6x_P - 2y_P - 5z_P \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -36z - 4z - 25z = 30x_P - 10y_P - 25z_P \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases} \iff \begin{cases} -65z = 30x_P - 10y_P - 25z_P \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13z = -6x_P + 2y_P + 5z_P \\ x = -\frac{6}{5}z \\ y = \frac{2}{5}z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{36}{65}x_P - \frac{12}{65}y_P - \frac{6}{13}z_P \\ y = -\frac{12}{65}x_P + \frac{4}{65}y_P + \frac{2}{13}z_P \\ z = -\frac{6}{13}x_P + \frac{2}{13}y_P + \frac{1}{13}z_P \end{cases}$$

Seja $C = (\frac{36}{65}x_P - \frac{12}{65}y_P - \frac{6}{13}z_P, -\frac{12}{65}x_P + \frac{4}{65}y_P + \frac{2}{13}z_P, -\frac{6}{13}x_P + \frac{2}{13}y_P + \frac{5}{13}z_P)$, o ponto de intersecção da recta com o plano. Então,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= (x_P, y_P, z_P) - \left(\frac{36x_P}{65} - \frac{12y_P}{65} - \frac{6z_P}{13}, -\frac{12x_P}{65} + \frac{4y_P}{65} + \frac{2z_P}{13}, -\frac{6x_P}{13} + \frac{2y_P}{13} + \frac{5z_P}{13} \right) \\ &= \left(\frac{29}{65}x_P + \frac{12}{65}y_P + \frac{6}{13}z_P, \frac{12}{65}x_P + \frac{61}{65}y_P - \frac{2}{13}z_P, \frac{6}{13}x_P - \frac{2}{13}y_P + \frac{8}{13}z_P \right)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{CP}\|^2 &= \left(\frac{29x_P}{65} + \frac{12y_P}{65} + \frac{6z_P}{13} \right)^2 + \left(\frac{12x_P}{65} + \frac{61y_P}{65} - \frac{2z_P}{13} \right)^2 + \left(\frac{6x_P}{13} - \frac{2y_P}{13} + \frac{8z_P}{13} \right)^2 \\ &= \dots = \frac{29}{65}x_P^2 + \frac{24}{65}x_Py_P + \frac{12}{13}x_Pz_P + \frac{61}{65}y_P^2 - \frac{4}{13}y_Pz_P + \frac{8}{13}z_P^2\end{aligned}$$

Por outro lado, (e trabalhando com matrizes, por causa do espaço), temos para $\overrightarrow{CP'}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{23}{81}x_P + \frac{16}{81}y_P - \frac{76}{81}z_P \\ -\frac{64}{81}x_P - \frac{41}{81}y_P - \frac{28}{81}z_P \\ -\frac{44}{81}x_P + \frac{68}{81}y_P + \frac{1}{81}z_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{36}{65}x_P - \frac{12}{65}y_P - \frac{6}{13}z_P \\ -\frac{12}{65}x_P + \frac{4}{65}y_P + \frac{2}{13}z_P \\ -\frac{6}{13}x_P + \frac{2}{13}y_P + \frac{5}{13}z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2012}{5265}y_P - \frac{1421}{5265}x_P - \frac{502}{1053}z_P \\ -\frac{3188}{5265}x_P - \frac{2989}{5265}y_P - \frac{526}{1053}z_P \\ \frac{722}{1053}y_P - \frac{86}{1053}x_P - \frac{392}{1053}z_P \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP'} &= \left(\frac{2012y_P}{5265} - \frac{1421x_P}{5265} - \frac{502z_P}{1053}, -\frac{3188x_P}{5265} - \frac{2989y_P}{5265} - \frac{526z_P}{1053}, \frac{722y_P}{1053} - \frac{86x_P}{1053} - \frac{392z_P}{1053} \right) \\ \overrightarrow{CP} &= \left(\frac{29}{65}x_P + \frac{12}{65}y_P + \frac{6}{13}z_P, \frac{12}{65}x_P + \frac{61}{65}y_P - \frac{2}{13}z_P, \frac{6}{13}x_P - \frac{2}{13}y_P + \frac{8}{13}z_P \right)\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CP'} = \dots = -\frac{1421}{5265}x_P^2 - \frac{392}{1755}x_Py_P - \frac{196}{351}x_Pz_P - \frac{2989}{5265}y_P^2 + \frac{196}{1053}y_Pz_P - \frac{392}{1053}z_P^2$$

Então,

$$\begin{aligned}\cos \widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'}} &= \frac{-\frac{1421}{5265}x_P^2 - \frac{392}{1755}x_Py_P - \frac{196}{351}x_Pz_P - \frac{2989}{5265}y_P^2 + \frac{196}{1053}y_Pz_P - \frac{392}{1053}z_P^2}{\frac{29}{65}x_P^2 + \frac{24}{65}x_Py_P + \frac{12}{13}x_Pz_P + \frac{61}{65}y_P^2 - \frac{4}{13}y_Pz_P + \frac{8}{13}z_P^2} \\ &= \frac{-\frac{1421}{5265}x_P^2 - \frac{1176}{5265}x_Py_P - \frac{2940}{5265}x_Pz_P - \frac{2989}{5265}y_P^2 + \frac{980}{5265}y_Pz_P - \frac{1960}{5265}z_P^2}{\frac{29}{65}x_P^2 + \frac{24}{65}x_Py_P + \frac{60}{65}x_Pz_P + \frac{61}{65}y_P^2 - \frac{20}{65}y_Pz_P + \frac{40}{65}z_P^2} \\ &= \frac{65(-1421x_P^2 - 1176x_Py_P - 2940x_Pz_P - 2989y_P^2 + 980y_Pz_P - 1960z_P^2)}{5265(29x_P^2 + 24x_Py_P + 60x_Pz_P + 61y_P^2 - 20y_Pz_P + 40z_P^2)} \\ &= \frac{-1421x_P^2 - 1176x_Py_P - 2940x_Pz_P - 2989y_P^2 + 980y_Pz_P - 1960z_P^2}{81(29x_P^2 + 24x_Py_P + 60x_Pz_P + 61y_P^2 - 20y_Pz_P + 40z_P^2)} \\ &= -\frac{49(29x_P^2 + 61y_P^2 + 40z_P^2 + 24x_Py_P + 60x_Pz_P - 20y_Pz_P)}{81(29x_P^2 + 24x_Py_P + 60x_Pz_P + 61y_P^2 - 20y_Pz_P + 40z_P^2)} = -\frac{49}{81}\end{aligned}$$

E obtivemos o mesmo valor que havíamos encontrado no caso dum ponto particular. Então, todos os pontos "descrevem" arcos com a mesma amplitude.

56.2.3 Translação

A translação resulta de compor duas reflexões em relação a dois planos paralelos. Vejamos um exemplo:

Exemplo 962 Consideremos os dois planos Π_1 e Π_2 , definidos por $\Pi_1 : x + y - 2z = 2$ e $\Pi_2 : x + y - 2z = 6$. Determine a imagem do ponto P por meio de $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ (Ω_{Π_2} e Ω_{Π_1} são as reflexões em relação aos planos Π_2 e Π_1).

Vamos começar por escolher um ponto em Π_1 e outro em Π_2 : $A = (2, 0, 0)$ e $B = (6, 0, 0)$. É claro que $N = (1, 1, -2)$ é um vector perpendicular aos dois planos.

Então,

$$\begin{aligned}\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{2(x - 2, y, z) \cdot (1, 1, -2)}{(1, 1, -2) \cdot (1, 1, -2)} (1, 1, -2) \\ &= (x, y, z) - \frac{1}{3}(x - 2 + y - 2z)(1, 1, -2) \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

Agora, temos de calcular $\Omega_{\Pi_2}(a, b, c)$, com

$$(a, b, c) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}\right)$$

Ora,

$$\begin{aligned}\Omega_{\Pi_2}(a, b, c) &= (a, b, c) - \frac{2(a - 6, b, c) \cdot (1, 1, -2)}{(1, 1, -2) \cdot (1, 1, -2)} (1, 1, -2) \\ &= (a, b, c) - \frac{(a - 6 + b - 2c)}{3} (1, 1, -2) \\ &= (a, b, c) - \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c - 2, \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c - 2, \frac{4}{3}c - \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}a + 4\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c + 2, \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c + 2, \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c - 4\right)\end{aligned}$$

Agora, substituímos a, b, c por $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}$, respectivamente:

$$\Omega_{\Pi_2}(a, b, c) = \Omega_{\Pi_2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}\right)$$

Ora,

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{4}{9}z + \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y - \frac{2}{9}z - \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}\right) + 2 = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{2}{9}z + \frac{10}{9} \end{cases}$$

Logo, somando as três expressões, obtemos:

$$\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c + 2 = x + \frac{4}{3}$$

Continuemos:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}y - \frac{2}{9}x - \frac{2}{9}z - \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}y - \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}z + \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}\right) + 2 = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{2}{9}z + \frac{10}{9} \end{cases}$$

Somando as três expressões anteriores, obtemos

$$-\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c + 2 = y + \frac{4}{3}$$

E, por fim

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{4}{9}z + \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{4}{9}z + \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}\right) - 4 = -\frac{2}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{1}{9}z - \frac{32}{9} \end{cases}$$

Somando as três expressões anteriores, obtemos

$$\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c - 4 = z - \frac{8}{3}$$

Então,

$$(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \left(x + \frac{4}{3}, y + \frac{4}{3}, z - \frac{8}{3}\right) = (x, y, z) + \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

Então, obtivemos uma translação (associada ao vector $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$).

Como obtemos este vector $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$, sem longos cálculos?

Recordamos que temos os pontos $A = (2, 0, 0)$ e $B = (6, 0, 0)$, sendo o primeiro de Π_1 e o segundo de Π_2 .

Então, $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, 0)$. O vector $\vec{N} = (1, 1, -2)$ é perpendicular aos dois planos.

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{N}} \overrightarrow{AB} &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{N}}{\vec{N} \cdot \vec{N}} \vec{N} = \frac{(4, 0, 0) \cdot (1, 1, -2)}{(1, 1, -2) \cdot (1, 1, -2)} (1, 1, -2) \\ &= \frac{4}{1 + 1 + 4} (1, 1, -2) = \frac{2}{3} (1, 1, -2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Agora, basta multiplicar por 2, obtendo-se $2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

Recorde-se que $\left\|\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right\|$ dá a distância entre os dois planos.

Note-se que $(\Omega_{\Pi_1} \circ \Omega_{\Pi_2})(x, y, z) = (x, y, z) + \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$, sendo importante sabermos se utilizamos \overrightarrow{AB} ou \overrightarrow{BA} . Para $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$, usamos \overrightarrow{AB} , com A em Π_1 e B em Π_2 .

Por fim, registre-se que uma translação não trivial (diferente da aplicação identidade) não tem pontos fixos.

Podemos usar um \mathcal{T} , para designar a translação.

56.2.4 Reflexão Deslizante

A aplicação composta de três reflexões pode dar uma reflexão ou pode dar uma reflexão deslizante, dependendo da posição relativa dos planos ("espelhos").

Exemplo 963 Sejam Π_1 , Π_2 , Π_3 os planos definidos por $2x + y - 3z = 0$, $2x + y - 3z = 4$ e $2x + y - 3z = -2$, respectivamente. Determine $(\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z)$.

$\vec{N} = \frac{(2,1,-3)}{\|(2,1,-3)\|} = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14}\right)$ é um vector unitário perpendicular aos três planos. Os pontos $O = (0, 0, 0)$, $B = (2, 0, 0)$ e $C = (-1, 0, 0)$ pertencem aos planos Π_1 , Π_2 , Π_3 (por esta ordem). Então,

$$\begin{aligned}\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \left((x, y, z) \cdot \vec{N} \right) \vec{N} \\ &= (x, y, z) - 2 \left((x, y, z) \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \right) \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \\ &= (x, y, z) - 2 \left(\frac{x\sqrt{14}}{7} + \frac{y\sqrt{14}}{14} - \frac{3z\sqrt{14}}{14} \right) \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \\ &= (x, y, z) - 2 \left(\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y - \frac{3}{7}z, \frac{1}{7}x + \frac{1}{14}y - \frac{3}{14}z, \frac{9}{14}z - \frac{3}{14}y - \frac{3}{7}x \right) \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{4}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z, \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y - \frac{3}{7}z, \frac{9}{7}z - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}x \right) \\ &= \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z, -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z, \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z \right)\end{aligned}$$

Agora, calculemos $\Omega_{\Pi_2}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}\Omega_{\Pi_2}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \left((x-2, y, z) \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \right) \vec{N} \\ &= (x, y, z) - 2 \left(\frac{1}{7}\sqrt{14}x + \frac{1}{14}\sqrt{14}y - \frac{3}{14}\sqrt{14}z - \frac{2}{7}\sqrt{14} \right) \vec{N} \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{2}{7}\sqrt{14}x + \frac{1}{7}\sqrt{14}y - \frac{3}{7}\sqrt{14}z - \frac{4}{7}\sqrt{14} \right) \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{4}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{8}{7}, \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y - \frac{3}{7}z - \frac{4}{7}, \frac{9}{7}z - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}x + \frac{12}{7} \right) \\ &= \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z + \frac{8}{7}, -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z + \frac{4}{7}, \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - \frac{12}{7} \right)\end{aligned}$$

Só que nós pretendemos calcular $\Omega_{\Pi_2} \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z, -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z, \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z \right)$:

$$(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \Omega_{\Pi_2} \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z, -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z, \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z \right)$$

$$\text{Ora, } \begin{cases} \frac{3}{7} \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z \right) - \frac{2}{7} \left(-\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z \right) + \frac{6}{7} \left(\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z \right) + \frac{8}{7} = x + \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{7} \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z \right) + \frac{6}{7} \left(-\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z \right) + \frac{3}{7} \left(\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z \right) + \frac{4}{7} = y + \frac{4}{7} \\ \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z \right) + \frac{3}{7} \left(-\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z \right) - \frac{2}{7} \left(\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z \right) - \frac{12}{7} = z - \frac{12}{7} \end{cases}$$

Então,

$$(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \left(x + \frac{8}{7}, y + \frac{4}{7}, z - \frac{12}{7} \right) = (x, y, z) + \left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{12}{7} \right)$$

Então, temos uma translação associada ao vector $\left(\frac{8}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{12}{7}\right)$, vector este que é colinear com \vec{N} e com $(2, 1, -3)$. Então, a translação faz-se perpendicularmente aos dois planos.

Passemos à terceira reflexão:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\Pi_3}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \left((x+1, y, z) \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \right) \vec{N} \\
 &= (x, y, z) - 2 \left(\frac{x\sqrt{14}}{7} + \frac{\sqrt{14}}{7} + \frac{y\sqrt{14}}{14} - \frac{3z\sqrt{14}}{14} \right) \vec{N} \\
 &= (x, y, z) - \left(\frac{2x\sqrt{14}}{7} + \frac{2\sqrt{14}}{7} + \frac{y\sqrt{14}}{7} - \frac{3z\sqrt{14}}{7} \right) \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \\
 &= (x, y, z) - \left(\frac{4}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z + \frac{4}{7}, \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y - \frac{3}{7}z + \frac{2}{7}, \frac{9}{7}z - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}x - \frac{6}{7} \right) \\
 &= \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z - \frac{4}{7}, -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - \frac{2}{7}, \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z + \frac{6}{7} \right)
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 (\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) &= \Omega_{\Pi_3} \left(x + \frac{8}{7}, y + \frac{4}{7}, z - \frac{12}{7} \right) = \dots = \\
 &= \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z - \frac{12}{7}, -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - \frac{6}{7}, \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z + \frac{18}{7} \right)
 \end{aligned}$$

Em particular, temos $(\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(0, 0, 0) = \left(-\frac{12}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{18}{7}\right)$

O ponto médio do segmento de recta definido por $(0, 0, 0)$ e $\left(-\frac{12}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{18}{7}\right)$ é $\left(-\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{9}{7}\right)$.

A equação do plano paralelo aos anteriores que passa por $\left(-\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{9}{7}\right)$ é

$$2 \left(x + \frac{6}{7} \right) + \left(y + \frac{3}{7} \right) - 3 \left(z - \frac{9}{7} \right) = 0 \iff 2x + y - 3z + 6 = 0$$

Podemos usar o ponto $(0, 0, 2)$:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\Pi}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \left((x, y, z-2) \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \right) \vec{N} \\
 &= (x, y, z) - \left(\frac{2}{7}\sqrt{14}x + \frac{1}{7}\sqrt{14}y - \frac{3}{7}\sqrt{14}z + \frac{6}{7}\sqrt{14} \right) \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \\
 &= (x, y, z) - \left(\frac{4}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{6}{7}z + \frac{12}{7}, \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}y - \frac{3}{7}z + \frac{6}{7}, -\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{9}{7}z - \frac{18}{7} \right) \\
 &= \left(\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z - \frac{12}{7}, -\frac{2}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - \frac{6}{7}, \frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z + \frac{18}{7} \right) \\
 &= (\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z)
 \end{aligned}$$

E se tivermos os dois primeiros planos paralelos e o terceiro não paralelo a esses dois?

Exemplo 964 Considere dois planos paralelos $(\Pi_1$ e $\Pi_2)$ e um terceiro plano (Π_3) não paralelo aos dois anteriores. Determine $(\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z)$.

Resolução

Suponhamos que os planos são definidos por

$$\begin{cases} \Pi_1 : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ \Pi_2 : a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0 \\ \Pi_3 : a_1(x - x_C) + b_1(y - y_C) + c_1(z - z_C) = 0 \end{cases}$$

Estamos a supor que $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$ pertencem a Π_1 , Π_2 e Π_3 , respectivamente, e que $a^2 + b^2 + c^2 = 1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, isto é, (a, b, c) e (a_1, b_1, c_1) são vectores unitários. Sejam $\vec{N}_1 = \vec{N}_2 = \vec{N} = (a, b, c)$ e $\vec{N}_3 = (a_1, b_1, c_1)$. Então,

$$\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_1}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A))$$

Por outro lado,

$$\Omega_{\Pi_2}(x, y, z) = (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_2}((x, y, z) - (x_B, y_B, z_B))$$

Então,

$$\begin{aligned}
E &= \Omega_{\Pi_2} \left((x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_1} ((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \right) \\
&= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_1} ((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \\
&\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_2} \left((x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_1} ((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) - (x_B, y_B, z_B) \right) \\
&= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} ((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \\
&\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} \left((x, y, z) - (x_B, y_B, z_B) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} ((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \right) \\
&= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} ((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \\
&\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} ((x, y, z) - (x_B, y_B, z_B)) + 4 \operatorname{proj}_{\vec{N}} \left(\operatorname{proj}_{\vec{N}} ((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \right) \\
&= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \\
&\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x - x_B, y - y_B, z - z_B) + 4 \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \\
&= (x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x - x_A, y - y_A, z - z_A) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x - x_B, y - y_B, z - z_B) \\
&= (x, y, z) + 2 \left(\operatorname{proj}_{\vec{N}} (x - x_A, y - y_A, z - z_A) - \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x - x_B, y - y_B, z - z_B) \right) \\
&= (x, y, z) + 2 \left(\operatorname{proj}_{\vec{N}} ((x - x_A, y - y_A, z - z_A) - (x - x_B, y - y_B, z - z_B)) \right) \\
&= (x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = (x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Então, $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ é a translação associada ao vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ou seja,

$$\vec{v} = 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Agora, vem

$$\begin{aligned}
\Omega_{\Pi_3}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3} ((x, y, z) - (x_C, y_C, z_C)) \\
&= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3} (x - x_C, y - y_C, z - z_C)
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\Pi_3}((x, y, z) + (v_1, v_2, v_3)) &= \Omega_{\Pi_3}(x + v_1, y + v_2, z + v_3) \\
 &= (x + v_1, y + v_2, z + v_3) \\
 &\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}((x + v_1, y + v_2, z + v_3) - (x_C, y_C, z_C)) \\
 &= (x + v_1, y + v_2, z + v_3) \\
 &\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}((x - x_C, y - y_C, z - z_C) + (v_1, v_2, v_3)) \\
 &= (x + v_1, y + v_2, z + v_3) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) \\
 &\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(v_1, v_2, v_3) \\
 &= (x, y, z) + (v_1, v_2, v_3) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) \\
 &\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3} \left(2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \right) \\
 &= (x, y, z) + (v_1, v_2, v_3) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) \\
 &\quad - 4 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3} \left(\operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \right)
 \end{aligned}$$

O caso mais interessante é quando \vec{N}_3 e \vec{N} são perpendiculares. Nesse caso, teremos:

$$\begin{aligned}
 (\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) &= (x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \\
 &\quad - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) \\
 &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) \\
 &\quad + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \\
 &= \Omega_{\Pi_3}(x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)
 \end{aligned}$$

Logo, temos uma reflexão em relação a um plano seguida duma translação associada a um vector paralelo ao plano que serve de "espelho".

Exemplo 965 Considere os planos Π_1 , Π_2 e Π_3 , definidos por $\Pi_1: x+y-2z=2$, $\Pi_2: x+y-2z=6$ e $\Pi_3: x+2y-z=4$. Determine a imagem do ponto P por meio de $\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$.

Começemos por $\Omega_{\Pi_3}(x, y, z)$, uma vez que já conhecemos $(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}\Omega_{\Pi_3}(x, y, z) &= (x, y, z) - \frac{2(x, y - 2, z) \cdot (1, 2, -1)}{(1, 2, -1) \cdot (1, 2, -1)}(1, 2, -1) \\ &= (x, y, z) - \frac{2(x + 2y - 4 - z)}{1 + 4 + 1}(1, 2, -1) \\ &= (x, y, z) - \frac{(x + 2y - 4 - z, 2x + 4y - 8 - 2z, -x - 2y + 4 + z)}{3} \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{8}{3}, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \right)\end{aligned}$$

Agora, o próximo passo é fácil, embora dê algum trabalho:

$$(\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \Omega_{\Pi_3} \left(x + \frac{4}{3}, y + \frac{4}{3}, z - \frac{8}{3} \right)$$

Mas,

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \left(x + \frac{4}{3} \right) - \frac{2}{3} \left(y + \frac{4}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(z - \frac{8}{3} \right) + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{3} \left(x + \frac{4}{3} \right) - \frac{1}{3} \left(y + \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{3} \left(z - \frac{8}{3} \right) + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} \left(x + \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{3} \left(y + \frac{4}{3} \right) + \frac{2}{3} \left(z - \frac{8}{3} \right) - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{16}{9} \end{cases}$$

Então,

$$(\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{9}, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{9}, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{16}{9} \right)$$

É claro que tudo seria mais fácil se pretendêssemos definir $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1} \circ \Omega_{\Pi_3}$:

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1} \circ \Omega_{\Pi_3})(x, y, z) = (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(\Omega_{\Pi_3}(x, y, z)) \\ &= \Omega_{\Pi_3}(x, y, z) + \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{8}{3}, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 4, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 4 \right)\end{aligned}$$

Se usarmos matrizes, vem:

$$(\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{20}{9} \end{bmatrix}$$

E, para a outra aplicação

$$(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1} \circ \Omega_{\Pi_3})(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

Note-se que a "parte" linear é a mesma (só a translação é diferente).

E se tivermos $\Omega_{\Pi_1} \circ \Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_1}$? Neste caso, já não vamos obter uma translação como resultado da composta de duas reflexões, mas isso não significa que, no fim, não haja uma parte não linear.

$$\text{Já vimos que } \begin{cases} \Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3}\right) \\ \Omega_{\Pi_2}(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 2, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 2, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 4\right) \\ \Omega_{\Pi_3}(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{8}{3}, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

$$\text{Se usamos matrizes, vem } \begin{cases} \Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ \Omega_{\Pi_2}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \Omega_{\Pi_3}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Logo,

$$\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \frac{4}{3} \\ y + \frac{4}{3} \\ z - \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + \frac{4}{3} \\ y + \frac{4}{3} \\ z - \frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{22}{9} \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{16}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{22}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observação

No caso de termos uma aplicação composta de várias reflexões, das quais já sabemos as suas expressões em função das coordenadas do "ponto" a transformar, podemos achar a aplicação composta dessas reflexões, em duas partes. A parte linear corresponde ao produto das matrizes que definem as reflexões, enquanto que a parte não linear pode ser encontrada pelas sucessivas imagens, partindo de $(0, 0, 0)$.

No caso de $\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ (acabado de tratar), podemos proceder do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Então, a parte linear é dada por } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \end{bmatrix}$$

Para a parte não linear:

$$\begin{aligned}
1. \quad \Omega_{\Pi_1}(0, 0, 0) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
2. \quad (\Omega_{\Pi_2})\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \\
3. \quad (\Omega_{\Pi_3})\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{22}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } (\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{22}{9} \\ -\frac{16}{9} \end{bmatrix}$$

Exemplo 966 Consideremos os planos Π_1 , Π_2 e Π_3 , definidos por $\Pi_1 : x + y - 2z = 2$, $\Pi_2 : x - 2y - z = 6$ e $\Pi_3 : x + y - z = 4$. Determine a imagem do ponto P por meio de $\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$.

Resolução

1.

$$\begin{aligned}
\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \frac{(x - 2, y, z) \cdot (1, 1, -2)}{(1, 1, -2) \cdot (1, 1, -2)} (1, 1, -2) \\
&= (x, y, z) - 2 \frac{(x - 2 + y - 2z)}{1 + 1 + 4} (1, 1, -2) \\
&= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3} \right)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Omega_{\Pi_2}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \frac{(x - 6, y, z) \cdot (1, -2, -1)}{(1, -2, -1) \cdot (1, -2, -1)} (1, -2, -1) \\
&= (x, y, z) - \frac{2(x - 6 - 2y - z)}{1 + 4 + 1} (1, -2, -1) \\
&= \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 2, \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 4, \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 \right)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\Omega_{\Pi_3}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \frac{(x - 4, y, z) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} (1, 1, 1) \\
&= (x, y, z) - \frac{2(x - 4 + y + z)}{3} (1, 1, 1) \\
&= \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3} \right)
\end{aligned}$$

Matricialmente, temos

$$1. \Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$2. \Omega_{\Pi_2}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 2 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 4 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - 2 \end{bmatrix}$$

$$3. \Omega_{\Pi_3}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

4. **Parte linear** de $\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{27} & \frac{22}{27} & \frac{7}{27} \\ -\frac{23}{27} & -\frac{14}{27} & -\frac{2}{27} \\ -\frac{2}{27} & \frac{7}{27} & -\frac{26}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{27}x + \frac{22}{27}y + \frac{7}{27}z \\ -\frac{23}{27}x - \frac{14}{27}y - \frac{2}{27}z \\ -\frac{2}{27}x + \frac{7}{27}y - \frac{26}{27}z \end{bmatrix}$$

5. **Parte não linear**

$$\Omega_{\Pi_1}(0, 0, 0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\Omega_{\Pi_2}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{9} \\ -\frac{26}{9} \\ -\frac{28}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{22}{9} \\ -\frac{26}{9} \\ -\frac{28}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{202}{27} \\ \frac{28}{27} \\ \frac{25}{27} \end{bmatrix}$$

6. Então,

$$(\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\frac{14}{27}x + \frac{22}{27}y + \frac{7}{27}z \\ -\frac{23}{27}x - \frac{14}{27}y - \frac{2}{27}z \\ -\frac{2}{27}x + \frac{7}{27}y - \frac{26}{27}z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{202}{27} \\ \frac{28}{27} \\ \frac{25}{27} \end{bmatrix}$$

Cálculo directo:

1.

$$\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}
 (\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z + \frac{22}{9} \\ \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{9}z - \frac{26}{9} \\ \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{1}{9}z - \frac{28}{9} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 (\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z + \frac{22}{9} \\ \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{9}z - \frac{26}{9} \\ \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{1}{9}z - \frac{28}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{14}{27}x + \frac{22}{27}y + \frac{7}{27}z + \frac{202}{27} \\ -\frac{23}{27}x - \frac{14}{27}y - \frac{2}{27}z + \frac{58}{27} \\ -\frac{2}{27}x + \frac{7}{27}y - \frac{26}{27}z + \frac{52}{27} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

56.2.5 Simetria em relação a um ponto

- O caso mais fácil é quando temos o simétrico dum ponto em relação à origem.

$$\text{Neste caso, temos } \mathcal{S}_{(0,0,0)}(x, y, z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix}$$

Torna-se imediato provar que esta aplicação só tem um ponto fixo. No entanto, esta aplicação fixa qualquer recta e qualquer plano que passe pela origem.

Também é fácil provar que se trata duma isometria:

Sejam P e Q dois pontos arbitrários e façamos $P = (x_P, y_P, z_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$.

Então, $\mathcal{S}_{(0,0,0)}(x_P, y_P, z_P) = (-x_P, -y_P, -z_P)$ e $\mathcal{S}_{(0,0,0)}(x_Q, y_Q, z_Q) = (-x_Q, -y_Q, -z_Q)$

$$\text{Então, } \begin{cases} d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} \\ d(\mathcal{S}_{(0,0,0)}(x_P, y_P, z_P), \mathcal{S}_{(0,0,0)}(x_Q, y_Q, z_Q)) = d((-x_P, -y_P, -z_P), (-x_Q, -y_Q, -z_Q)) \\ \quad = \sqrt{(-x_Q + x_P)^2 + (-y_Q + y_P)^2 + (-z_Q + z_P)^2} = d(P, Q) \end{cases}$$

É claro que esta aplicação é inversa de si própria (diz-se que é uma involução).

A simetria em relação a um ponto é uma aplicação composta entre três reflexões.

Simétrico de (x, y, z) em relação ao plano xOy: $(x, y, -z)$

Simétrico de $(x, y, -z)$ em relação ao plano xOz: $(x, -y, -z)$

Simétrico de $(x, -y, -z)$ em relação ao plano yOz: $(-x, -y, -z)$

- Qual o simétrico dum ponto P , relativamente a um ponto Q arbitrário? Basta imaginar que a imagem fica na recta PQ , à mesma distância, mas para o lado "contrário". Ou seja, basta somarmos a Q o simétrico de \overrightarrow{PQ} .

$$\mathcal{S}_{(x_Q, y_Q, z_Q)}(x_P, y_P, z_P) = (x_Q, y_Q, z_Q) + \overrightarrow{QP} = (x_Q, y_Q, z_Q) + (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P)$$

Dito de outro modo, a imagem de P é o ponto R tal que Q é o ponto médio de $[PR]$.

Há uma maneira alternativa, para encontrar a imagem de P :

Faz-se uma translação do segmento $[PQ]$, de modo que a imagem de Q fique na origem, acha-se o simétrico de P' (a imagem de P , pela translação) e desfazemos a translação.

Simbolicamente, temos:

1. $(x_P, y_P, z_P) \longrightarrow (x_P, y_P, z_P) - (x_Q, y_Q, z_Q) = (x_P - x_Q, y_P - y_Q, z_P - z_Q)$
 2. $(x_P - x_Q, y_P - y_Q, z_P - z_Q) \longrightarrow (-x_P + x_Q, -y_P + y_Q, -z_P + z_Q)$
 3. $(-x_P + x_Q, -y_P + y_Q, -z_P + z_Q) \longrightarrow (-x_P + x_Q, -y_P + y_Q, -z_P + z_Q) + (x_Q, y_Q, z_Q)$
- Logo, $(x_P, y_P, z_P) \longrightarrow (2x_Q - x_P, 2y_Q - y_P, 2z_Q - z_P)$

56.2.6 Simetria em relação a uma recta

Embora se possa definir o simétrico dum ponto, em relação a uma recta, de forma autónoma, podemos aproveitar as reflexões. Para isso, podemos considerar dois planos que contenham a recta e sejam perpendiculares entre si, porque temos de rodar o ponto de 180° , em torno da recta. O problema é que não é fácil descobrir a matriz de rotação em torno duma recta.

Suponhamos que a recta passa pela origem e tem a direcção do vector $(1, 2, 1)$. Um vector normal a um plano que contenha a recta, tem de ser perpendicular à recta.

Então, podemos escolher o vector $(2, -1, 0)$. Repare que $(1, 2, 1) \cdot (2, -1, 0) = 0$. Agora, calculamos o produto externo dos dois vectores:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = e_1 + 2e_2 - 5e_3 = (1, 2, -5)$$

Agora, temos dois planos que contêm a recta e são perpendiculares entre si:

$$\begin{cases} \Pi_1 : 2x - y = 0 \\ \Pi_2 : x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Agora, basta aplicar a reflexão em relação a um plano e, depois, a reflexão da imagem, em relação ao outro plano, não interessando a ordem, porque a rotação será do dobro de um ângulo recto.

$$\begin{aligned} \Omega_{\Pi_1}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \frac{(x, y, z) \cdot (2, -1, 0)}{(2, -1, 0) \cdot (2, -1, 0)} (2, -1, 0) = (x, y, z) - \frac{2}{5} (2x - y) (2, -1, 0) \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{8}{5}x - \frac{4}{5}y, -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y, 0 \right) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, z \right) \end{aligned}$$

Em relação ao outro plano:

$$\begin{aligned} \Omega_{\Pi_2}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \frac{(x, y, z) \cdot (1, 2, -5)}{(1, 2, -5) \cdot (1, 2, -5)} (1, 2, -5) = (x, y, z) - \frac{2(x + 2y - 5z)}{30} (1, 2, -5) \\ &= (x, y, z) - \left(\frac{1}{15}x + \frac{2}{15}y - \frac{1}{3}z, \frac{2}{15}x + \frac{4}{15}y - \frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{5}{3}z \right) \\ &= \left(\frac{14}{15}x - \frac{2}{15}y + \frac{1}{3}z, -\frac{2}{15}x + \frac{11}{15}y + \frac{2}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \right) \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{cases} \frac{14}{15} \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \right) - \frac{2}{15} \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \right) + \frac{1}{3}z = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ -\frac{2}{15} \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \right) + \frac{11}{15} \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \right) + \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \right) - \frac{2}{3}z = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \end{cases}$$

Logo,

$$(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \right)$$

Pelo outro processo:

Equação do plano que passa por P e é perpendicular ao vector $(1, 2, 1)$:

$$x - x_P + 2(y - y_P) + z - z_P = 0$$

Intersecção do plano anterior com a recta cujos pontos são da forma $(\alpha, 2\alpha, \alpha)$:

$$\begin{cases} x - x_P + 2y - 2y_P + z - z_P = 0 \\ x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - x_P + 4\alpha - 2y_P + \alpha - z_P = 0 \\ x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6\alpha = x_P + 2y_P + z_P \\ x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{x_P}{6} + \frac{y_P}{3} + \frac{z_P}{6} \\ x = \frac{x_P}{6} + \frac{y_P}{3} + \frac{z_P}{6} \\ y = \frac{x_P}{3} + \frac{2y_P}{3} + \frac{z_P}{3} \\ z = \frac{x_P}{6} + \frac{y_P}{3} + \frac{z_P}{6} \end{cases}$$

Então, o ponto de intersecção é $I = \left(\frac{x_P}{6} + \frac{y_P}{3} + \frac{z_P}{6}, \frac{x_P}{3} + \frac{2y_P}{3} + \frac{z_P}{3}, \frac{x_P}{6} + \frac{y_P}{3} + \frac{z_P}{6} \right)$

Então,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PI} &= I - P = \left(\frac{x_P}{6} + \frac{y_P}{3} + \frac{z_P}{6}, \frac{x_P}{3} + \frac{2y_P}{3} + \frac{z_P}{3}, \frac{x_P}{6} + \frac{y_P}{3} + \frac{z_P}{6} \right) - (x_P, y_P, z_P) \\ &= \left(-\frac{5}{6}x_P + \frac{1}{3}y_P + \frac{1}{6}z_P, \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}y_P + \frac{1}{3}z_P, \frac{1}{6}x_P + \frac{1}{3}y_P - \frac{5}{6}z_P \right) \end{aligned}$$

E por fim, temos

$$I + \overrightarrow{PI} = \left(-\frac{2}{3}x_P + \frac{2}{3}y_P + \frac{1}{3}z_P, \frac{2}{3}x_P + \frac{1}{3}y_P + \frac{2}{3}z_P, \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}y_P - \frac{2}{3}z_P \right)$$

Outra maneira de resolver a questão

Suponhamos que a recta passa pela origem e tem a direcção do vector $u = (1, 2, 1)$ e que pretendemos achar o simétrico de P em relação à recta.

Então, $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P, z_P) - (0, 0, 0) = (x_P, y_P, z_P)$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{proj}_u \overrightarrow{OP} &= \frac{(x_P, y_P, z_P) \cdot (1, 2, 1)}{(1, 2, 1) \cdot (1, 2, 1)} (1, 2, 1) = \frac{x_P + 2y_P + z_P}{1 + 4 + 1} (1, 2, 1) \\ &= \left(\frac{1}{6}x_P + \frac{1}{3}y_P + \frac{1}{6}z_P, \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}y_P + \frac{1}{3}z_P, \frac{1}{6}x_P + \frac{1}{3}y_P + \frac{1}{6}z_P \right) \end{aligned}$$

Agora, vem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} - \text{proj}_u \overrightarrow{OP} &= (x_P, y_P, z_P) - \left(\frac{1}{6}x_P + \frac{1}{3}y_P + \frac{1}{6}z_P, \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}y_P + \frac{1}{3}z_P, \frac{1}{6}x_P + \frac{1}{3}y_P + \frac{1}{6}z_P \right) \\ &= \left(\frac{5}{6}x_P - \frac{1}{3}y_P - \frac{1}{6}z_P, \frac{1}{3}y_P - \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}z_P, -\frac{1}{6}x_P - \frac{1}{3}y_P + \frac{5}{6}z_P \right)\end{aligned}$$

Este vector $v = \overrightarrow{OP} - \text{proj}_u \overrightarrow{OP}$ é perpendicular à recta e é definido por um ponto da recta e por P . Então, basta fazer $P - 2v$, para obtermos o simétrico de P em relação à recta.

Então,

$$\begin{aligned}P' &= (x_P, y_P, z_P) - 2 \left(\frac{5}{6}x_P - \frac{1}{3}y_P - \frac{1}{6}z_P, \frac{1}{3}y_P - \frac{1}{3}x_P - \frac{1}{3}z_P, -\frac{1}{6}x_P - \frac{1}{3}y_P + \frac{5}{6}z_P \right) \\ &= \left(-\frac{2}{3}x_P + \frac{2}{3}y_P + \frac{1}{3}z_P, \frac{2}{3}x_P + \frac{1}{3}y_P + \frac{2}{3}z_P, \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}y_P - \frac{2}{3}z_P \right)\end{aligned}$$

56.2.7 Simetria em relação a um plano

A situação é análoga ao caso anterior: consideramos a recta perpendicular ao plano que passa pelo ponto original e encontramos a intersecção da recta com o plano. Depois, basta encontrar o simétrico do ponto original em relação a este ponto da intersecção.

É claro que podemos resolver esta questão da maneira como vínhamos resolvendo antes, até porque essa maneira é mais rápida. Mas vamos deixar aqui esta maneira alternativa.

Exemplo 967 Determine o simétrico do ponto P , em relação ao plano Π de equação $x + 2y - 3z = 0$.

Resolução

Seja $P = (x_P, y_P, z_P)$ e determinemos a intersecção do plano Π com a recta definida por $(x, y, z) = (x_P, y_P, z_P) + \alpha(1, 2, -3)$, recta esta que é perpendicular ao plano.

Então, $(x, y, z) = (x_P + \alpha, y_P + 2\alpha, z_P - 3\alpha)$. Logo,

$$\begin{aligned}x_P + \alpha + 2y_P + 4\alpha - 3z_P + 9\alpha &= 0 \iff 14\alpha = -x_P - 2y_P + 3z_P \\ &\iff \alpha = -\frac{1}{14}x_P - \frac{1}{7}y_P + \frac{3}{14}z_P\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}I &= (x, y, z) = (x_P, y_P, z_P) + \left(-\frac{1}{14}x_P - \frac{1}{7}y_P + \frac{3}{14}z_P \right) (1, 2, -3) \\ &= \left(\frac{13}{14}x_P - \frac{1}{7}y_P + \frac{3}{14}z_P, -\frac{1}{7}x_P + \frac{5}{7}y_P + \frac{3}{7}z_P, \frac{3}{14}x_P + \frac{3}{7}y_P + \frac{5}{14}z_P \right)\end{aligned}$$

Agora, basta-nos encontrar $P' = I + \overrightarrow{PI}$.

Ora,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PI} &= \left(\frac{13}{14}x_P - \frac{1}{7}y_P + \frac{3}{14}z_P, -\frac{1}{7}x_P + \frac{5}{7}y_P + \frac{3}{7}z_P, \frac{3}{14}x_P + \frac{3}{7}y_P + \frac{5}{14}z_P \right) - (x_P, y_P, z_P) \\ &= \left(-\frac{1}{14}x_P - \frac{1}{7}y_P + \frac{3}{14}z_P, -\frac{1}{7}x_P - \frac{2}{7}y_P + \frac{3}{7}z_P, \frac{3}{14}x_P + \frac{3}{7}y_P - \frac{9}{14}z_P \right)\end{aligned}$$

Então, as coordenadas de P' são dadas por

$$\begin{cases} \frac{13}{14}x_P - \frac{1}{7}y_P + \frac{3}{14}z_P - \frac{1}{14}x_P - \frac{1}{7}y_P + \frac{3}{14}z_P = \frac{6}{7}x_P - \frac{2}{7}y_P + \frac{3}{7}z_P \\ -\frac{1}{7}x_P + \frac{5}{7}y_P + \frac{3}{7}z_P - \frac{1}{7}x_P - \frac{2}{7}y_P + \frac{3}{7}z_P = -\frac{2}{7}x_P + \frac{3}{7}y_P + \frac{6}{7}z_P \\ \frac{3}{14}x_P + \frac{3}{7}y_P + \frac{5}{14}z_P + \frac{3}{14}x_P + \frac{3}{7}y_P - \frac{9}{14}z_P = \frac{3}{7}x_P + \frac{6}{7}y_P - \frac{2}{7}z_P \end{cases}$$

Logo, $P' = \Omega_{\Pi}(x_P, y_P, z_P) = (\frac{6}{7}x_P - \frac{2}{7}y_P + \frac{3}{7}z_P, -\frac{2}{7}x_P + \frac{3}{7}y_P + \frac{6}{7}z_P, \frac{3}{7}x_P + \frac{6}{7}y_P - \frac{2}{7}z_P)$.
Resolução, utilizando o primeiro processo:

$$\begin{aligned} \Omega_{\Pi}(x_P, y_P, z_P) &= (x_P, y_P, z_P) - 2 \frac{(x_P, y_P, z_P) \cdot (1, 2, -3)}{(1, 2, -3) \cdot (1, 2, -3)} (1, 2, -3) \\ &= (x_P, y_P, z_P) - 2 \frac{x_P + 2y_P - 3z_P}{1 + 4 + 9} (1, 2, -3) \\ &= (x_P, y_P, z_P) - \frac{x_P + 2y_P - 3z_P}{7} (1, 2, -3) \\ &= (x_P, y_P, z_P) - \left(\frac{x_P}{7} + \frac{2y_P}{7} - \frac{3z_P}{7}, \frac{2x_P}{7} + \frac{4y_P}{7} - \frac{6z_P}{7}, -\frac{3x_P}{7} - \frac{6y_P}{7} + \frac{9z_P}{7} \right) \\ &= \left(\frac{6}{7}x_P - \frac{2}{7}y_P - \frac{3}{7}z_P, -\frac{2}{7}x_P + \frac{3}{7}y_P + \frac{6}{7}z_P, \frac{3}{7}x_P + \frac{6}{7}y_P - \frac{2}{7}z_P \right) \end{aligned}$$

56.2.8 Parafusos

No caso de \mathbb{R}^3 , há isometrias que não aparecem em \mathbb{R}^3 . Um desses casos corresponde ao movimento dum parafuso: quando rodamos um parafuso no sentido horário e fazemos uma pressão suficiente, o parafuso penetra na madeira (por exemplo). Ou seja, roda e avança simultaneamente. E isso é feito de forma contínua. No entanto, se analisarmos a posição inicial e a posição final, temos uma rotação em torno dum eixo, seguida duma translação ao longo do mesmo eixo. Ou a translação seguida da rotação.

A matriz correspondente é simples, quando o eixo de rotação é um dos eixos do referencial (ou é estritamente paralelo a um desses eixos).

- Matriz do movimento do parafuso, quando o eixo de rotação é Oz:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha \\ z + \lambda \alpha \end{bmatrix}$$

Fazendo $\alpha = 2\pi$, obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} x \cos(2\pi) - y \sin(2\pi) \\ y \cos(2\pi) + x \sin(2\pi) \\ z + 2\pi\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z + 2\pi\lambda \end{bmatrix}$$

Então, obtivemos os valores iniciais para x e y , enquanto que o valor de z foi incrementado de $2\pi\lambda$, passando de z para $z + 2\pi\lambda$. No caso dum parafuso real, há alguns problemas com o sinal de λ e com o sinal do ângulo de rotação. Podemos pensar nos dois movimentos: aparafusar e desaparafusar. No entanto, esses dois movimentos estão ligados, a menos que se fabriquem parafusos de dois tipos,

quanto à maneira como rodam e avançam. Assim, quando rodamos a nossa mão direita no sentido anti-horário, o parafuso roda e avança.

O valor $2\pi\lambda$, da maneira como foi definida a matriz, tem o nome de "passo". Talvez seja mais rigoroso dizer que o passo é $|2\pi\lambda|$, pois na Matemática não ficamos "amarrados" a situações concretas e damos uma definição geral, pelo que λ é um parâmetro real.

- Matriz do movimento do parafuso, quando o eixo de rotação é Oy:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - z \sin \alpha \\ y + \lambda \alpha \\ z \cos \alpha + x \sin \alpha \end{bmatrix}$$

- Matriz do movimento do parafuso, quando o eixo de rotação é Ox:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{2\pi} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \lambda \alpha \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ z \cos \alpha + y \sin \alpha \end{bmatrix}$$

56.2.9 Reflexões rotativas

No caso do parafuso, tínhamos uma rotação e uma translação associada a um vector paralelo ao eixo de rotação.

Agora, vamos ter uma reflexão relativamente a um plano e uma rotação em torno duma recta perpendicular a esse plano.

Imaginemos a situação em que alguém está de pé, com os pés num espelho, pelo que vemos a pessoa e a sua imagem. Suponhamos que através dum truque, se conseguia rodar a imagem. Então, estávamos em presença duma reflexão rotativa (ou duma rotação reflexiva?).

• Exemplo 1

Reflexão em relação ao plano xOy seguida duma rotação em relação ao eixo Oz:

$$\text{Reflexão (em relação ao plano xOy): } \Omega(x, y, z) = (x, y, -z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

Rotação da imagem anterior em torno de Oz:

$$\rho(x, y, -z) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha \\ -z \end{bmatrix}$$

E se fizermos a rotação em torno de Oz, seguida da reflexão?

$$\text{Ora, } \rho(x, y, z) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha \\ z \end{bmatrix}$$

$$\text{E } \Omega(x, y, z) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, y \cos \alpha + x \sin \alpha, z) = (x \cos \alpha - y \sin \alpha, y \cos \alpha + x \sin \alpha, -z)$$

Logo, o resultado é o mesmo, independentemente da ordem (as duas aplicações comutam).

• **Exemplo 2**

Reflexão em relação ao plano xOz seguida duma rotação em relação ao eixo Oy :

Reflexão: $\Omega(x, y, z) = (x, -y, z)$

Rotação de $(x, -y, z)$, em torno de Oy :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - z \sin \alpha \\ -y \\ z \cos \alpha + x \sin \alpha \end{bmatrix}$$

• **Exemplo 3**

Reflexão em relação ao plano yOz seguida duma rotação em relação ao eixo Ox :

Reflexão: $\Omega(x, y, z) = (-x, y, z)$

Rotação de $(-x, y, z)$, em torno de Ox :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ z \cos \alpha + y \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Observação

É claro que, no caso geral, podemos ter qualquer plano como "espelho" e qualquer recta como eixo de rotação.

56.2.10 Homotetias

Consideremos a aplicação definida por $\mathcal{H}_{(0,0,0)}(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda(x, y, z)$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$). O parâmetro real λ recebe o nome de razão da homotetia. Se $\lambda = \pm 1$, temos uma isometria. Se $|\lambda| > 1$, temos uma dilatação (ou ampliação) e se $0 < |\lambda| < 1$, temos uma redução. As homotetias mantêm a forma dos objectos (logo, mantêm os ângulos).

Como designar uma homotetia?

Para não complicar muito, vamos escrever $\mathcal{H}_{(O,\lambda)}$, quando o centro é a origem (ou seja, quando o centro é $(0, 0, 0)$). Se o centro for P e a razão λ , escrevemos $\mathcal{H}_{(P,\lambda)}$.

Homotetia de centro distinto da origem:

Como definimos $\mathcal{H}_{(P,\lambda)}(x, y, z)$? Da maneira natural: por meio duma translação, trazemos o centro da homotetia para a origem, multiplicamos as coordenada por λ (a razão) e desfazemos a translação. Representando a translação por \mathcal{T} , temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(P,\lambda)}(x, y, z) &= (\mathcal{T}_P \circ \mathcal{H}_{(O,\lambda)} \circ \mathcal{T}_{-P})(x, y, z) = (\mathcal{T}_P \circ \mathcal{H}_{(O,\lambda)})(\mathcal{T}_{-P}(x, y, z)) \\ &= (\mathcal{T}_P \circ \mathcal{H}_{(O,\lambda)})(x - x_P, y - y_P, z - z_P) \\ &= \mathcal{T}_P(\mathcal{H}_{(O,\lambda)}(x - x_P, y - y_P, z - z_P)) \\ &= \mathcal{T}_P(\lambda(x - x_P), \lambda(y - y_P), \lambda(z - z_P)) \\ &= \mathcal{T}_P(\lambda x - \lambda x_P, \lambda y - \lambda y_P, \lambda z - \lambda z_P) \\ &= (\lambda x - \lambda x_P, \lambda y - \lambda y_P, \lambda z - \lambda z_P) + (x_P, y_P, z_P) \\ &= (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (x_P - \lambda x_P, y_P - \lambda y_P, z_P - \lambda z_P) \\ &= \lambda(x, y, z) + ((1 - \lambda)x_P, (1 - \lambda)y_P, (1 - \lambda)z_P) \\ &= \lambda(x, y, z) + (1 - \lambda)(x_P, y_P, z_P) \end{aligned}$$

Note-se que \mathcal{T}_P e \mathcal{T}_{-P} são notações formais ("sem significado matemático").

Homotetia de centro $P = (1, 2, 3)$ e razão $\lambda = 4$.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{(P,4)}(x, y, z) &= (\mathcal{T}_P \circ \mathcal{H}_{(O,4)} \circ \mathcal{T}_{(-1,-2,-3)})(x, y, z) = (\mathcal{T}_P \circ \mathcal{H}_{(O,4)})(x-1, y-2, z-3) \\ &= \mathcal{T}_P(4x-4, 4y-8, 4z-12) = (4x-4, 4y-8, 4z-12) + (1, 2, 3) \\ &= (4x-3, 4y-6, 4z-9)\end{aligned}$$

Note-se que era mais fácil termos feito

$$\mathcal{H}_{(P,4)}(x, y, z) = 4(x, y, z) + (1-4)(1, 2, 3) = (4x-3, 4y-6, 4z-9)$$

Relação entre as distâncias e os ângulos

Consideremos a aplicação definida por $\mathcal{H}_{(O,\lambda)}(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda(x, y, z)$, com $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Sejam A e B dois pontos arbitrários e comparemos a distância entre A e B com a distância entre as suas imagens. Façamos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ e sejam A' e B' as imagens de A e de B . Então,

$$\begin{aligned}d(A', B') &= d((\lambda x_A, \lambda y_A, \lambda z_A), (\lambda x_B, \lambda y_B, \lambda z_B)) \\ &= \|(\lambda x_A - \lambda x_B, \lambda y_A - \lambda y_B, \lambda z_A - \lambda z_B)\| \\ &= \sqrt{(\lambda x_A - \lambda x_B)^2 + (\lambda y_A - \lambda y_B)^2 + (\lambda z_A - \lambda z_B)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2(x_A - x_B)^2 + \lambda^2(y_A - y_B)^2 + \lambda^2(z_A - z_B)^2} \\ &= |\lambda| \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} \\ &= |\lambda| \times d(A, B)\end{aligned}$$

Dito de outra maneira, $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |\lambda|$, o que significa que existe uma proporcionalidade (directa) entre o comprimento do segmento imagem e o comprimento do segmento objecto.

Outra coisa importante tem a ver com os vectores $\overrightarrow{A'B'}$ e \overrightarrow{AB} :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} &= B' - A' = (\lambda x_B, \lambda y_B, \lambda z_B) - (\lambda x_A, \lambda y_A, \lambda z_A) \\ &= (\lambda x_B - \lambda x_A, \lambda y_B - \lambda y_A, \lambda z_B - \lambda z_A) \\ &= \lambda(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = \lambda \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

E da igualdade anterior vem $\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\lambda \overrightarrow{AB}\| = |\lambda| \times \|\overrightarrow{AB}\|$, ou seja, $\overline{A'B'} = |\lambda| \times \overline{AB}$, o que dá outra prova de que $d(A', B') = |\lambda| \times d(A, B)$.

Vejam os que as homotetias preservam os ângulos:

Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$ três pontos distintos e sejam A' , B' e C' as suas imagens por meio de $\mathcal{H}_{(O,\lambda)}$. Então,

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{A'B'C'}) &= \frac{\overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{B'C'}}{\|\overrightarrow{B'A'}\| \times \|\overrightarrow{B'C'}\|} = \frac{(\lambda \overrightarrow{BA}) \cdot (\lambda \overrightarrow{BC})}{|\lambda| \|\overrightarrow{BA}\| \times |\lambda| \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\lambda \times \lambda (\overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BC})}{|\lambda|^2 \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} \\ &= \frac{\lambda^2 (\overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BC})}{\lambda^2 \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(\overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BC})}{\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\|} = \cos(\widehat{ABC})\end{aligned}$$

Então, os ângulos têm o mesmo cosseno. Mas, se $\lambda > 0$, os vectores $\overrightarrow{B'A'}$ e $\overrightarrow{B'C'}$ são directamente paralelos, pelo que $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$; e se $\lambda < 0$, os vectores $\overrightarrow{B'A'}$ e $\overrightarrow{B'C'}$ são inversamente paralelos, pelo que $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.

Observação

Em \mathbb{R}^2 , uma homotetia de razão negativa é uma semelhança positiva (ou directa). No entanto, em \mathbb{R}^3 , uma homotetia de razão negativa é uma semelhança negativa (ou inversa). Isso tem a ver com o facto duma matriz escalar δI_n , com $\delta \neq 0$, ter determinante positivo em \mathbb{R}^2 e ter determinante positivo ou negativo em \mathbb{R}^3 . Por isso, uma homotetia de razão negativa volta a ser uma semelhança directa em \mathbb{R}^4 , em \mathbb{R}^6 , etc...

56.2.11 Semelhanças

Uma semelhança é uma aplicação composta dum número finito de isometrias e homotetias, pelo que as semelhanças mantêm a forma dos objectos.

As semelhanças podem ser positivas ou negativas, consoante o número de reflexões que aparecem. Se esse número é par, a semelhança é positiva, se for ímpar, a semelhança é negativa.

56.2.12 Cisalhamento (Shear)

Vejamos vários exemplos de cisalhamento, começando pelo cisalhamento segundo a direcção do eixo das abcissas.

Cisalhamento segundo o eixo Ox

Seja $T_\lambda(x, y, z) = (x, y, z) + \lambda(z, 0, 0) = (x + \lambda z, y, z)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pontos fixos de T_λ :

$$T_\lambda(x, y, z) = (x, y, z) \iff (x + \lambda z, y, z) = (x, y, z) \iff \lambda z = 0$$

Se $\lambda = 0$, temos a aplicação identidade e qualquer ponto é ponto fixo. Se $\lambda \neq 0$, então $z = 0$, pelo que os pontos fixos são os pontos do plano $z = 0$.

Note-se que a aplicação fixa todos os planos horizontais e todas as rectas paralelas ao eixo das abcissas.

Usando matrizes, temos
$$\begin{bmatrix} x + \lambda z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Se quisermos, podemos separar a expressão anterior em duas partes (ambas lineares):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \lambda z \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Calculemos $A' = T_\lambda(x_A, y_A, z_A)$ e $B' = T_\lambda(x_B, y_B, z_B)$:

$$A' = T_\lambda(x_A, y_A, z_A) = (x_A + \lambda z_A, y_A, z_A) \wedge B' = T_\lambda(x_B, y_B, z_B) = (x_B + \lambda z_B, y_B, z_B)$$

Então,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} &= T_\lambda(x_B, y_B, z_B) - T_\lambda(x_A, y_A, z_A) = (x_B + \lambda z_B, y_B, z_B) - (x_A + \lambda z_A, y_A, z_A) \\ &= (x_B - x_A - \lambda z_A + \lambda z_B, y_B - y_A, z_B - z_A) \\ &= (x_B - x_A + \lambda(z_B - z_A), y_B - y_A, z_B - z_A)\end{aligned}$$

Se $z_B = z_A$, então $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, pelo que T_λ preserva as distâncias entre dois pontos com a mesma cota.

Se $z_B \neq z_A$, só em casos especiais é que T_λ preserva as distâncias.

Vejamos um exemplo, com $\lambda = 2$. Sejam $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 4, z)$. Então,

$$\begin{cases} T_2(A) = T_2(1, 2, 3) = (1 + 2 \times 3, 2, 3) = (7, 2, 3) \\ T_2(B) = T_2(3, 4, z) = (3 + 2z, 4, z) \end{cases}$$

Logo, $T_2(B) - T_2(A) = (3 + 2z, 4, z) - (7, 2, 3) = (2z - 4, 2, z - 3)$

Então, $\|T_2(B) - T_2(A)\|^2 = (2z - 4)^2 + 4 + (z - 3)^2 = 5z^2 - 22z + 29$

Mas, $B - A = (3, 4, z) - (1, 2, 3) = (2, 2, z - 3)$

Logo, os dois vectores têm a mesma norma se e só se $2z - 4 = \pm 2$, ou seja se $z = 1$ ou $z = 3$.

Verificação:

Se $z = 3$, $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 4, 3)$. Então, $T_2(A) = (7, 2, 3)$ e $T_2(B) = (9, 4, 3)$.

Logo, $B - A = (3, 4, 3) - (1, 2, 3) = (2, 2, 0)$ e $T_2(B) - T_2(A) = (9, 4, 3) - (7, 2, 3) = (2, 2, 0)$, obtendo-se o mesmo vector, pelo que as normas são iguais.

Se $z = 1$, então $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 4, 1)$, pelo que $B - A = (3, 4, 1) - (1, 2, 3) = (2, 2, -2)$

E $T_2(A) = (7, 2, 3)$ e $T_2(B) = (5, 4, 1)$, pelo que $T_2(B) - T_2(A) = (5, 4, 1) - (7, 2, 3) = (-2, 2, -2)$

Neste caso, os vectores são diferentes, mas a sua norma é igual.

Neste primeiro exemplo, o cisalhamento depende exclusivamente de z .

Segundo exemplo

Seja $T_\lambda(x, y, z) = (x, y, z) + \lambda(y, 0, 0) = (x + \lambda y, y, z)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Matricialmente, temos

$$T_\lambda(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \lambda y \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \lambda y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pontos fixos: qualquer ponto da forma $(x, 0, z)$.

Note-se que todos os pontos sofrem uma translação segundo a direcção $(1, 0, 0)$, só que essa translação não é a mesma, pois depende de y . No entanto, pontos com a mesma ordenada sofrem a mesma translação. Repare-se que estes dois primeiros exemplos fixam a ordenada e a cota.

Terceiro exemplo

$$\text{E se tivermos } T_\lambda(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \lambda y + \mu z \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Neste caso, temos uma situação análoga às anteriores, mas a translação depende quer da abcissa quer da cota.

Repare-se que $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, não importando qual a ordem das duas aplicações.

Então, $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é uma aplicação composta de dois cisalhamentos

Pontos fixos:

$$x + \lambda y + \mu z = x \iff \lambda y + \mu z = 0$$

Como só interessa considerar o caso em que os dois parâmetros são diferentes de zero (para não cairmos num dos casos anteriores), temos um plano de pontos fixos. O plano pode ser definido por $y = -\frac{\mu}{\lambda}z$, o que corresponde a uma recta, no plano yOz . No caso geral, dá um plano, pois x pode ser qualquer.

Façamos $\lambda = 1$ e $\mu = 2$. Então, obtemos $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + 2z \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Pontos fixos:

$$(x + y + 2z, y, z) = (x, y, z) \iff x + y + 2z = x \iff y + 2z = 0 \iff y = -2z$$

Logo, qualquer ponto da forma $(x, -2z, z)$ mantém-se inalterado, quando se aplica a transformação.

Calculemos $T(1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1)$:

$$\begin{cases} T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) \\ T(0, 1, 0) = (1, 1, 0) \\ T(0, 0, 1) = (2, 0, 1) \end{cases}$$

$$T(0, y, 2y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5y \\ y \\ 2y \end{bmatrix}$$

Consideremos os pontos do plano $y + 2z = k$, com $k \neq 0$. Este é um plano estritamente paralelo ao plano de pontos fixos.

Seja $P = (x, k - 2z, z)$ e calculemos $T(x, k - 2z, z)$. Ora,

$$T(x, k - 2z, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ k - 2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k + x \\ k - 2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ k - 2z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Qual a conclusão? Todos os pontos desse plano são transformados em pontos com a mesma ordenada e a mesma cota, enquanto a abcissa é aumentada de uma constante. Ou seja, todos esses pontos sofrem uma translação associada ao vector $(k, 0, 0)$. É claro que passando para outro plano estritamente paralelo aos dois anteriores, teremos uma nova translação, uma vez que o valor de k será diferente.

Por este exemplo, vemos a importância de sabermos quais os pontos fixos duma aplicação linear.

Observação

O produto de duas matrizes do tipo da matriz anterior ainda é uma matriz do mesmo tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+c & b+d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento segundo o eixo Oy**Primeiro exemplo**

Seja $T_\lambda(x, y, z) = (x, y + \lambda z, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Note-se que a abcissa e a cota ficam inalteradas e que estamos a supor que $\lambda \neq 0$.

Pontos fixos: $y + \lambda z = y$, pelo que devemos ter $z = 0$.

$$\text{De facto, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Voltemos a } T_\lambda(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + \lambda z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ao longo do plano $z = k$, com k constante, todos os planos sofrem a mesma translação.

Por exemplo, $T_\lambda(x, y, 2) = (x, y + 2\lambda, 2) = (x, y, 2) + (0, 2\lambda, 0)$, sendo que esta translação é feita segundo o eixo das ordenadas.

Segundo exemplo

Seja $T_\lambda(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + \lambda x \\ z \end{bmatrix}$. Note-se que a abcissa e a cota ficam inalteradas e que estamos a supor que $\lambda \neq 0$.

Pontos fixos: os pontos do plano $x = 0$. Ora, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda x \\ 0 \end{bmatrix}$, pelo que para x constante, a translação é a mesma.

$$\text{Assim, por exemplo, } T_\lambda(4, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4\lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Terceiro exemplo

Também podemos combinar os dois tipos de cisalhamento anteriores:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + \lambda x + \mu z \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda x + \mu z \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe-se que estas duas matrizes (do cisalhamento) comutam, pelo que podemos efectuar a composição destes dois cisalhamentos por qualquer ordem.

No entanto, este cisalhamento já não é feito segundo a direcção Oy nem segundo a direcção Ox. Isto, se tivermos $\lambda \neq 0 \wedge \mu \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pontos fixos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda x + \mu z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff \lambda x + \mu z = 0 \text{ (equação dum plano)}$$

Suponhamos que temos um plano estritamente paralelo ao plano anterior, por exemplo, o plano definido por $\lambda x + \mu z = k$, com $k \neq 0$.

Então, $z = \frac{k - \lambda x}{\mu}$, pelo que temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{k}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ k + y \\ \frac{k}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{k}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então, todos os pontos do plano $\lambda x + \mu z = k$ sofrem a mesma translação. É claro que para outro valor de k , a translação já é diferente.

Observação

O produto de duas matrizes do tipo da matriz anterior ainda é uma matriz do mesmo tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+c & 1 & b+d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento segundo o eixo Oz

Consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & d & 1 \end{bmatrix}$.

Então, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a+c & b+d & 1 \end{bmatrix}$ que é uma matriz do mesmo tipo.

Como nos casos anteriores, temos que $AB = BA$.

Primeiro exemplo

Mas, comecemos pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}$ à qual corresponde a aplicação linear:

$$T_\lambda(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z + \lambda x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda x \end{bmatrix}$$

Então, a aplicação fixa a abcissa e ordenada, alterando a cota, se $\lambda x \neq 0$.

Pontos fixos:

Consideremos que $\lambda \neq 0$, para não cairmos na aplicação identidade. Então, pretendemos resolver a condição $(x, y, z + \lambda x) = (x, y, z)$.

Então, $\lambda x = 0$, ou seja, $x = 0$. Logo, os pontos fixos da aplicação são os pontos do tipo $(0, y, z)$.

Na verdade, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Suponhamos que $x = 1$. Então,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ z + \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Então, o ponto $(1, y, z)$ sofre uma translação associada ao vector $(0, 0, \lambda)$. A este valor λ , vamos chamar factor de cisalhamento. Este valor λ é o responsável pela mudança de "inclinação" das rectas.

Segundo exemplo

Seja $T_\lambda(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z + \lambda y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda y \end{bmatrix}$

Pontos fixos: $(x, y, z) + (0, 0, \lambda y) = (x, y, z)$, donde vem $\lambda y = 0$. Logo, $y = 0$, pois estamos a supor que $\lambda \neq 0$.

Então, os pontos fixos são da forma $(x, 0, z)$.

Na verdade, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$. Então, a aplicação fixa os pontos do plano $y = 0$.

Consideremos o plano $y = 1$. Então, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ z + \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$.

Neste caso, o factor de cisalhamento é λ .

Terceiro exemplo

Seja $T_{(\lambda, \mu)}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z + \lambda x + \mu y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda x + \mu y \end{bmatrix}$

Pontos fixos: $(x, y, z) + (0, 0, \lambda x + \mu y) = (x, y, z)$. Logo, devemos ter $\lambda x + \mu y = 0$, sendo que esta condição define um plano.

Como definir o factor de cisalhamento, neste caso?

Vamos ter que abandonar a noção que tínhamos e vamos considerar que, nos casos anteriores (em que fizemos referência a esse factor), temos $|\lambda|$ em vez de λ . A menos que se defina previamente uma direcção especial. Por enquanto, deixemos a situação assim.

Neste caso, em que há dois parâmetros, temos uma situação mais problemática. Que plano vamos considerar?

Consideremos o plano $\lambda x + \mu y = k$, com k a definir. A distância entre dois planos paralelos é a distância dum ponto qualquer de um dos planos ao outro plano.

Então, queremos encontrar a distância do ponto $(0, 0, 0)$ ao plano de equação $\lambda x + \mu y - k = 0$.

Ora, essa distância é dada por $\frac{|\lambda \times 0 + \mu \times 0 - k|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$, ou seja $\frac{|k|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$.

Logo, devemos ter $\frac{|k|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 1$. Logo, $k = \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$

Consideremos o plano $\lambda x + \mu y = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$. Então, $y = -\frac{\lambda}{\mu}x + \frac{1}{\mu}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$

Logo,

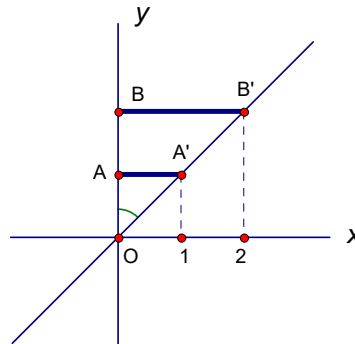
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\mu}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} - \frac{\lambda}{\mu}x \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\mu}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} - \frac{\lambda}{\mu}x \\ z + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\mu}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} - \frac{\lambda}{\mu}x \\ z + \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então, o factor de cisalhamento é $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$. Vamos convencionar que o factor de cisalhamento é sempre positivo.

Voltemos ao caso de \mathbb{R}^2

Seja $T(x, y) = (x + y, y)$. Como a ordenada fica inalterada, o cisalhamento faz-se segundo a direcção horizontal.

Ora $T(0, 1) = (1, 1)$ e $T(0, 2) = (2, 2)$

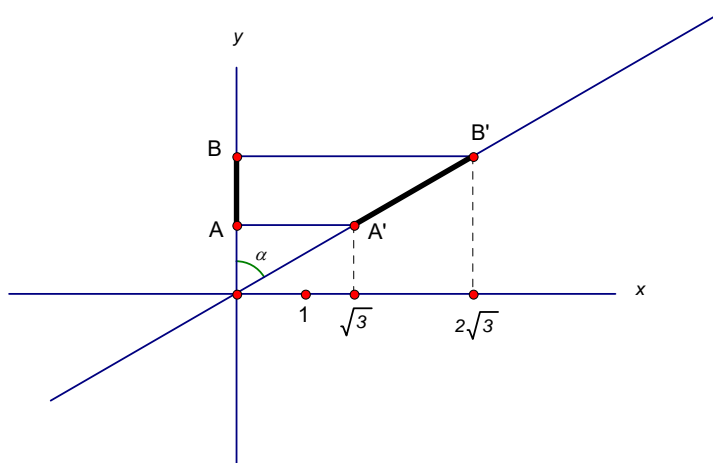


Este exemplo não é muito interessante, porque a recta de equação $y = x$ divide o primeiro quadrante em dois ângulos de 45° .

Vejamos um segundo exemplo, sem essa ambiguidade (aparente).

Seja $T(x, y) = (x + y\sqrt{3}, y)$. Então, $T(0, 1) = (\sqrt{3}, 1)$ e $T(0, 2) = (2\sqrt{3}, 2)$.

Logo, $T(x, y) = (x, y) + (y\sqrt{3}, 0)$, o que significa que, quando a ordenada (do objecto) aumenta uma unidade, a abcissa (da imagem) aumenta $\sqrt{3}$. Então a taxa de aumento é de $\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$. Se observarmos a figura seguinte, vemos que, para A e A' , a diferença entre as abcissas é $\sqrt{3}$, enquanto que, para B e B' , a diferença entre as abcissas é $2\sqrt{3}$. No entanto, o ângulo entre os vectores \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{OA'}$ é o mesmo que o ângulo entre \overrightarrow{OB} e $\overrightarrow{OB'}$. Note-se que o factor de cisalhamento tem a ver com o "desvio" sofrido pelas rectas verticais (no caso da figura seguinte), ou pelas rectas horizontais, no caso do cisalhamento vertical. Note-se que, se tivermos uma recta horizontal, a sua imagem é a própria recta, pelo que não tivemos nenhuma mudança de direcção. Se tivermos uma recta oblíqua, a imagem dessa recta sofre uma mudança de direcção, mas esse "desvio" é inferior ao "desvio" sofrido por uma recta perpendicular à recta de pontos fixos.



Relativamente à figura anterior, temos $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, onde α é o ângulo entre \overrightarrow{OA} e $\overrightarrow{OA'}$. Neste caso, o ângulo é "descrito" no sentido negativo, mas há casos em que o ângulo é descrito no sentido positivo (basta considerar o caso simétrico do anterior, em relação ao eixo das abcissas). Então, estamos a obter resultados com os sinais contrários ao costume, pelo que o melhor é definir factor de cisalhamento como um valor positivo.

Note-se que podemos encontrar α da seguinte maneira:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = \begin{cases} (0, 1) \cdot (\sqrt{3}, 1) = 1 \\ \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OA'}\| \times \cos \alpha = 1 \times 2 \cos \alpha = 2 \cos \alpha \end{cases}$$

Logo, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Então, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\tan \alpha = \sqrt{3}$. Logo, o factor de cisalhamento é $\sqrt{3}$.

Se tivéssemos $T(x, y) = (x - y\sqrt{3}, y)$, o factor de cisalhamento seria $\sqrt{3}$, na mesma

Voltemos a \mathbb{R}^3

Consideremos o caso em que $T(x, y, z) = (x, y, z + 2x + 3y)$. Então, os pontos fixos são dados por $2x + 3y = 0$.

Neste caso, vamos ter que ver o que acontece à direcção perpendicular ao plano de pontos fixos. Essa direcção é dada por $(2, 3, 0)$.

Então, $T(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(2, 3, 0) = (2, 3, 0)$. Fazendo $A = (2, 3, 0)$, temos $\overrightarrow{OA} = (2, 3, 0)$ e $\overrightarrow{OA'} = (2, 3, 13)$. Então,

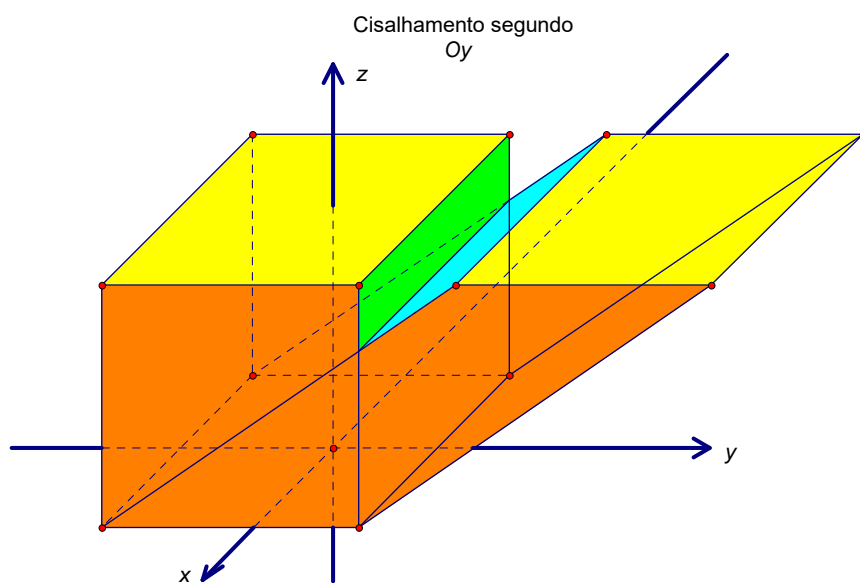
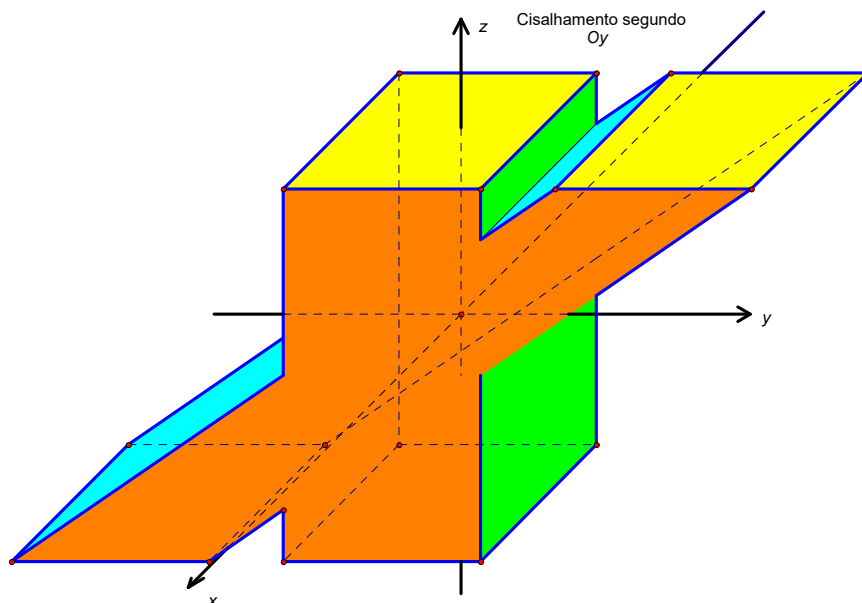
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = \begin{cases} (2, 3, 0) \cdot (2, 3, 13) = 4 + 9 + 0 = 13 \\ \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OA'}\| \times \cos \alpha = \sqrt{13} \times \sqrt{182} \cos \alpha \end{cases}$$

Então, $\cos \alpha = \frac{13}{\sqrt{13} \times \sqrt{182}} = \frac{1}{13 \times 14} \sqrt{13} \sqrt{13 \times 14} = \frac{\sqrt{14}}{14}$, donde vem

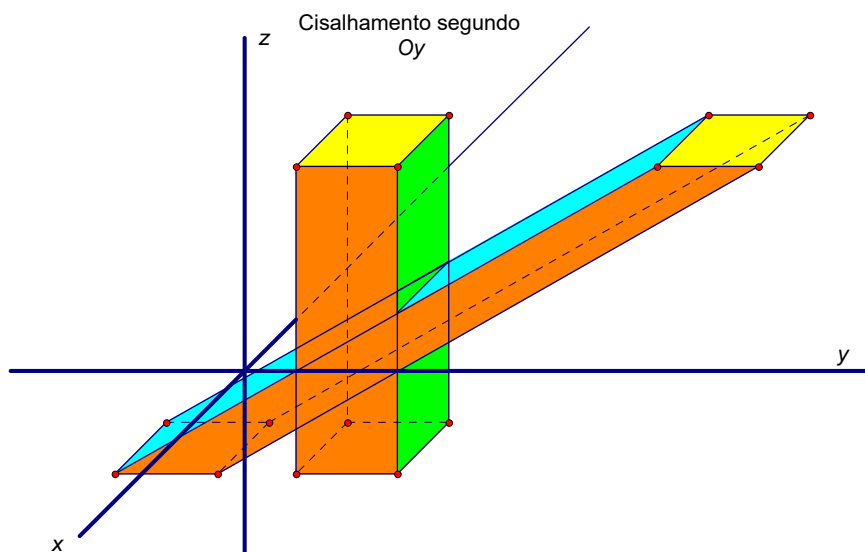
$$1 + \tan^2 \alpha = 14$$

Logo, $\tan \alpha = \sqrt{13}$. O factor de cisalhamento é $\sqrt{13}$.

Completamos este assunto com algumas imagens de cisalhamento horizontal em \mathbb{R}^3 :



É fácil de ver que os dois paralelepípedos têm a mesma base e a mesma altura. Logo, têm o mesmo volume.

**Observação**

As imagens apresentadas são relativas a "deslocamentos" na direcção de Oy, mas esses "deslocamentos" poderiam ser feitos segundo qualquer direcção horizontal. Só que isso daria mais trabalho...

Composição de cisalhamentos

Exemplo 968 Seja $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ y + 4z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y + 3z \\ 4z \\ 0 \end{bmatrix}$. Determine os pontos fixos da transformação.

Pontos fixos: a recta $y = 0 \wedge z = 0$ (eixo das abcissas). Já não se trata dum cisalhamento como os anteriores.

No entanto, é o produto de dois cisalhamentos, pelo que continua a transformar rectas paralelas em rectas paralelas.

Note-se que temos uma matriz triangular de determinante 1. Mas é óbvio que não se trata duma isometria.

$$T(0, 0, 1) = (3, 4, 1)$$

Suponhamos que queremos achar a imagem dum cubo de aresta 2, centrado na origem.

$$T(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, T(1, 1, -1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, T(1, -1, 1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, T(1, -1, -1) = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T(-1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, T(-1, 1, -1) = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, T(-1, -1, 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, T(-1, -1, -1) = \begin{bmatrix} -6 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) = \begin{bmatrix} 3 \cos \phi + \cos \theta \sin \phi + 2 \sin \theta \sin \phi \\ 4 \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & (3 \cos \phi + \cos \theta \sin \phi + 2 \sin \theta \sin \phi)^2 + (4 \cos \phi + \sin \theta \sin \phi)^2 + \cos^2 \phi = \cos^2 \theta \sin^2 \phi + 6 \cos \theta \cos \phi \sin \phi + \\ & 4 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi + 26 \cos^2 \phi + 20 \cos \phi \sin \theta \sin \phi + 5 (1 - \cos^2 \theta) \sin^2 \phi = \\ & -4 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + 6 \cos \theta \cos \phi \sin \phi + 4 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi + 26 \cos^2 \phi + 20 \sin \theta \cos \phi \sin \phi + 5 \sin^2 \phi \end{aligned}$$

$$\det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$T(x, y, z)$$

$$T(0, 1, 1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \cos \phi$$

Façamos o contrário e partamos da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, cujo determinante é 1. Como

obter duas matrizes correspondentes a transformações lineares com um plano de pontos fixos, tais que o produto seja esta matriz?

$$\text{Sejam } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Então, } A = BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, devemos ter } \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = -4 \end{cases}. \text{ Logo, } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Verificação: } BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainda é possível decompor a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ num produto de duas matrizes mais simples:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então, } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso geral, temos uma matriz diagonal superior do tipo $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

O caso das matrizes triangulares inferiores é análogo.

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$. Então,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}$$

Repare-se que a , b e c ficam na mesma posição. Se considerarmos a decomposição num produto de três matrizes, na primeira, mantemos a e substituímos b e c por 0, na segunda, mantemos b e substituímos a e c por 0, enquanto na terceira, mantemos c e substituímos a e b por 0. No caso da matriz triangular superior, temos a ordem inversa: na primeira matriz, mantemos c e fazemos $a = b = 0$,...

Quinto exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 17 \end{bmatrix}$. Então,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 7 & 17 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

É possível decompor a matriz A num produto LU , em que L é uma matriz triangular inferior em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e U é uma matriz triangular superior. Existem regras que permitem determinar as matrizes L e U de forma rápida, mas vamos resolver a questão sem recorrer a essas regras.

Sejam $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$. Então,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & u_{22} + l_{21}u_{12} & u_{23} + l_{21}u_{13} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & u_{33} + l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} \end{bmatrix}$$

Logo, temos $u_{11} = 1$, $u_{12} = 3$, $u_{13} = 2$ (comparando os valores que estão na primeira linha do produto e na primeira linha da matriz A).

Passando à primeira coluna, temos $\begin{bmatrix} u_{11} \\ l_{21}u_{11} \\ l_{31}u_{11} \end{bmatrix}$, com $u_{11} = 1$. Então, obtemos $\begin{bmatrix} 1 \\ l_{21} \\ l_{31} \end{bmatrix}$, pelo que

$l_{21} = 2$ e $l_{31} = 3$.

Para maior facilidade, vamos substituir os valores já conhecidos, obtendo-se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & u_{22} + 6 & u_{23} + 4 \\ 3 & l_{32}u_{22} + 9 & u_{33} + l_{32}u_{23} + 6 \end{bmatrix}$$

Comparando as segundas linhas, temos $\begin{bmatrix} 2 & u_{22} + 6 & u_{23} + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

Então, $\begin{cases} u_{22} + 6 = 7 \\ u_{23} + 4 = -1 \end{cases}$, donde vem $\begin{cases} u_{22} = 1 \\ u_{23} = -5 \end{cases}$.

Passando à segunda coluna, temos $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 + 6 \\ l_{32} \times 1 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$, pelo que $l_{32} = -2$.

Por fim, devemos ter $u_{33} + l_{32}u_{23} + 6 = 17$, donde vem $u_{33} = 11 - l_{32}u_{23} = 11 - (-2) \times (-5) = 1$

Então, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $A = LU$

Neste exemplo, obtivemos duas matrizes triangulares em que todas as entradas das diagonais principais são iguais a 1.

Logo, $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Agora, podemos decompor cada uma das duas matrizes:

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Logo,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 17 \end{bmatrix}$

Então, se considerarmos a aplicação $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y + 2z \\ 2x + 7y - z \\ 3x + 7y + 17z \end{bmatrix}$, temos que

$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Vejamos as sucessivas transformações:

$$1. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + 3y \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y + 2z \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ y-5z \\ z \end{bmatrix} \\
4. \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ y-5z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ y-5z \\ 11z-2y \end{bmatrix} \\
5. \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ y-5z \\ 11z-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ y-5z \\ 3x+7y+17z \end{bmatrix} \\
6. \quad & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ y-5z \\ 3x+7y+17z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ 2x+7y-z \\ 3x+7y+17z \end{bmatrix} \\
7. \quad & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y+2z \\ 2x+7y-z \\ 3x+7y+17z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Neste exemplo, só obtivemos matrizes com números inteiros, mas isso não foi por acaso.

Sexto exemplo

O cisalhamento pode efectuar-se segundo qualquer direcção, mas vamos escolher uma direcção dum plano horizontal.

Suponhamos que queremos fazer o cisalhamento segundo a direcção $(1, 2, 0)$. Então, podemos fazer:

$$T_\lambda(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

E queremos que o factor de cisalhamento seja 2 (segundo a direcção considerada).

$$\begin{aligned}
\text{Então, teremos } T_2(x, y, z) &= (x, y, z) + 2z \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0 \right) = \left(x + \frac{2}{5}\sqrt{5}z, y + \frac{4}{5}\sqrt{5}z, z \right) \\
&= (x + \lambda z, y + 2\lambda z, z)
\end{aligned}$$

Pontos fixos:

$$(x + z, y + 2z, z) = (x, y, z) \iff \begin{cases} T_2(A) = T_2(1, 2, 3) = (1 + 2 \times 3, 2, 3) = (7, 2, 3) \\ T_2(B) = T_2(3, 4, z) = (3 + 2z, 4, z) \end{cases}$$

Sétimo exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Para a matriz U , a decomposição já é mais difícil, porque já não temos as entradas da diagonal principal iguais a 1.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2a & 2b \\ 0 & 4 & 4c \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{Então, } a = 2, b = \frac{1}{2}, c = \frac{7}{8}, \text{ pelo que temos } U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, já sabemos fazer a decomposição da matriz triangular:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, } U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Então,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = BC, \text{ com } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação, em \mathbb{R}^2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y + x\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \sqrt{3}y \\ y \end{bmatrix}$$

Resolução????????????????????Teorema do ponto fixo resolve para a homotetia de razão entre -1 e 1. Logo, para as outras também

Exemplo 969 Mostre que a função composta de duas rotações (no plano) pode não ser uma rotação.

Resolução

É óbvio que a aplicação de duas rotações com o mesmo centro é uma rotação com o mesmo centro das outras duas. Mas façamos a demonstração:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

Se as duas rotações tiverem centro $C = (x_C, y_C)$, teremos, para a função composta:

1. $(x, y) - (x_C, y_C) = (x - x_C, y - y_C)$
2. $\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C + x \cos \beta - y \sin \beta - x_C \cos \beta + y_C \sin \beta \\ y_C + y \cos \beta + x \sin \beta - y_C \cos \beta - x_C \sin \beta \end{bmatrix}$

$$3. \begin{bmatrix} x_C + x \cos \beta - y \sin \beta - x_C \cos \beta + y_C \sin \beta \\ y_C + y \cos \beta + x \sin \beta - y_C \cos \beta - x_C \sin \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \beta - y \sin \beta - x_C \cos \beta + y_C \sin \beta \\ y \cos \beta + x \sin \beta - y_C \cos \beta - x_C \sin \beta \end{bmatrix}$$

$$4. M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \cos \beta - y \sin \beta - x_C \cos \beta + y_C \sin \beta \\ y \cos \beta + x \sin \beta - y_C \cos \beta - x_C \sin \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \text{ com}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= x_C + x \cos \alpha \cos \beta - y \cos \alpha \sin \beta - y_C \cos \beta \sin \alpha - x \sin \alpha \sin \beta - x_C \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + y_C \cos \alpha \sin \beta + y_C \cos \beta \sin \alpha + x_C \sin \alpha \sin \beta \\ m_2 &= y_C + y \cos \alpha \cos \beta + x \cos \alpha \sin \beta + x_C \cos \beta \sin \alpha - y \sin \alpha \sin \beta - y_C \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad - x_C \cos \alpha \sin \beta - x_C \cos \beta \sin \alpha + y_C \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$5. N = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_C \\ y - y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \text{ com}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= x_C + x \cos \alpha \cos \beta - y \cos \alpha \sin \beta - y_C \cos \beta \sin \alpha - x \sin \alpha \sin \beta - x_C \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + y_C \cos \alpha \sin \beta + y_C \cos \beta \sin \alpha + x_C \sin \alpha \sin \beta \\ n_2 &= y_C + y \cos \alpha \cos \beta + x \cos \alpha \sin \beta + x_C \cos \beta \sin \alpha - y \sin \alpha \sin \beta - y_C \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad - x_C \cos \alpha \sin \beta - x_C \cos \beta \sin \alpha + y_C \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$6. M - N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. Logo, $M = N$

Consideremos uma rotação de ângulo α e centro na origem:

$$\text{Então, temos } \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Consideremos, agora, uma rotação da imagem anterior, por meio duma rotação de ângulo $-\alpha$ e centro em (x_C, y_C) :

Então, temos

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha - x_C \\ y \cos \alpha + x \sin \alpha - y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \cos^2 \alpha - x_C \cos \alpha + x \sin^2 \alpha - y_C \sin \alpha + x_C \\ y \cos^2 \alpha - y_C \cos \alpha + y \sin^2 \alpha + x_C \sin \alpha + y_C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x - x_C \cos \alpha - y_C \sin \alpha + x_C \\ y - y_C \cos \alpha + x_C \sin \alpha + y_C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C - x_C \cos \alpha - y_C \sin \alpha \\ y_C - y_C \cos \alpha + x_C \sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E obtivemos uma translação. Esta translação será uma rotação no caso em que, por exemplo, $\alpha = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Mas, é fácil arranjar um caso que $\begin{bmatrix} x_C - x_C \cos \alpha - y_C \sin \alpha \\ y_C - y_C \cos \alpha + x_C \sin \alpha \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

Se $\alpha = \pi$, temos $\begin{bmatrix} x_C - x_C \cos \pi - y_C \sin \pi \\ y_C - y_C \cos \pi + x_C \sin \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_C \\ 2y_C \end{bmatrix}$. Então, para obtermos uma translação não trivial, basta que, por exemplo, $x_C \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} x_C - x_C \cos \alpha - y_C \sin \alpha \\ y_C - y_C \cos \alpha + x_C \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff (x_C - x_C \cos \alpha - y_C \sin \alpha)^2 + (y_C - y_C \cos \alpha + x_C \sin \alpha)^2 =$$

$$x_C^2 \cos^2 \alpha - 2x_C^2 \cos \alpha + x_C^2 \sin^2 \alpha + x_C^2 + y_C^2 \cos^2 \alpha - 2y_C^2 \cos \alpha + y_C^2 \sin^2 \alpha + y_C^2$$

$$x_C^2 - 2x_C^2 \cos \alpha + x_C^2 + y_C^2 - 2y_C^2 \cos \alpha + y_C^2 = 2x_C^2 - 2x_C^2 \cos \alpha + 2y_C^2 - 2y_C^2 \cos \alpha =$$

$$2x_C^2 - 2x_C^2 \cos \alpha = 2x_C^2 (1 - \cos \alpha) + 2y_C^2 (1 - \cos \alpha) = 2(x_C^2 + y_C^2)(1 - \cos \alpha)$$

Como $\cos \alpha \neq 1$, temos uma translação não trivial (desde que não tenhamos $x_C = y_C = 0$).

Exercício 970 Qual a matriz da rotação espacial que transforma $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e $(0, 1, 0)$ em $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$?

Resolução

Esta é uma questão que pode parecer um pouco complicada, mas é bastante fácil.

Sabemos que a rotação é uma isometria, pelo que mantém comprimentos e ângulos.

Uma vez que $\begin{cases} (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1) \\ (0, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \\ (0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, 0) \end{cases}$, o "mesmo" deve acontecer com as suas imagens.

Como, $\begin{cases} (0, 1, 0) \mapsto (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0) \\ (0, 0, 1) \mapsto (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$, então

$$(1, 0, 0) \mapsto \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{15}\sqrt{5}, \frac{4}{15}\sqrt{5}, -\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)$$

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \text{ Logo, } M = \begin{bmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

É claro que $\begin{cases} (1, 0, 0) \mapsto (\frac{2}{15}\sqrt{5}, \frac{4}{15}\sqrt{5}, -\frac{1}{3}\sqrt{5}) \\ (0, 1, 0) \mapsto (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0) \\ (0, 0, 1) \mapsto (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \text{ transpose: } \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 \\ -\frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 \\ -\frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3}\sqrt{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

O problema pode ser resolvido da seguinte maneira alternativa:

Começemos por considerar a rotação em torno duma recta que aplica $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. O eixo de rotação é a recta perpendicular aos dois vectores anteriores que passa pela origem. Calculemos o produto externo $(0, 0, 1) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

Recordamos que o produto externo é dado pelo determinante simbólico:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Então, o eixo de rotação é a recta definida por $(-2x, x, 0)$. Agora, pretendemos encontrar a imagem de $(1, 0, 0)$ e de $(0, 1, 0)$, por meio da rotação anterior que transforma $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Para isso, podemos achar a imagem dum ponto (ou vector) genérico e, depois resolver os dois casos particulares ou podemos resolver cada caso particular sem nos preocuparmos com o caso geral.

Começemos por calcular o produto interno entre os dois vectores $(0, 0, 1)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Ora, $(0, 0, 1) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Então, o ângulo entre estes dois vectores é $\cos^{-1}(\frac{2}{3})$, ou seja, usando a notação tradicional, $\arccos \frac{2}{3}$. Note-se que os dois vectores são unitários (têm norma 1).

Equação do plano que passa por $P = (1, 0, 0)$ e é perpendicular ao vector $(2, -1, 0)$:

$$2(x - 1) - y = 0 \iff y = 2x - 2$$

Intersecção do plano anterior com o eixo de rotação:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -4y - 2 \\ x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{2}{5} \\ x = \frac{4}{5} \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, obtemos o ponto de intersecção $I = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$.

Agora, o ponto $P = (1, 0, 0)$ tem de rodar em torno do eixo de rotação, descrevendo um arco da mesma amplitude que aquele que foi descrito pelo ponto $(0, 0, 1)$.

Embora, a questão possa ser resolvida de outras maneiras, vamos usar a seguinte:

$$\overrightarrow{IP} = P - I = (1, 0, 0) - \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

Agora, queremos encontrar um vector u que tenha a mesma norma de \overrightarrow{IP} , seja perpendicular ao eixo de rotação e faça com \overrightarrow{IP} um ângulo igual a $\arccos \frac{2}{3}$.

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$. Então, devemos ter

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (u_1, u_2, u_3) \cdot (2, -1, 0) = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} \\ \frac{(u_1, u_2, u_3) \cdot (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0)}{\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{2}{3} \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2u_1 - u_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}u_1 + \frac{2}{5}u_2 = \frac{2}{3} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_2 = 2u_1 \\ u_1^2 + 4u_1^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{4}{15} \\ 5u_1^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3^2 = \frac{1}{5} - 5 \times \frac{4}{225} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3^2 = \frac{1}{9} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3 = \pm \frac{1}{3} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Seja $u = (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \pm \frac{1}{3})$. Então, $P' = I + u = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0) + (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \pm \frac{1}{3}) = (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, \pm \frac{1}{3})$.

Ora, $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$ e $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 0$, pelo que $P' = (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3})$, o que corresponde a $u = (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{1}{3})$, embora isso nem seja relevante.

Então, já sabemos as imagens de $(1, 0, 0)$ e de $(0, 0, 1)$.

Ora, $(1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$, pelo que $(0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, 0)$.

Então, a imagem de $(0, 1, 0)$ é $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3})$

Então, sabemos que $\begin{cases} (1, 0, 0) \mapsto (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \\ (0, 1, 0) \mapsto (\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3}) \\ (0, 0, 1) \mapsto (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$

Comecemos por considerar a rotação em torno duma recta que aplica $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. O eixo de rotação é a recta perpendicular a estes dois vectores e que passa pela origem. Calculemos o produto externo $(0, 0, 1) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

Recordamos que o produto externo é dado pelo determinante simbólico:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Então, o eixo de rotação é a recta definida por $(-2x, x, 0)$. Agora, pretendemos encontrar a imagem de $(1, 0, 0)$ e de $(0, 1, 0)$, por meio da rotação anterior que transforma $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Para isso, podemos achar a imagem dum ponto (ou vector) genérico e, depois resolver os dois casos particulares ou podemos resolver cada caso particular sem nos preocuparmos com o caso geral.

Comecemos por calcular o produto interno entre os dois vectores $(0, 0, 1)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Ora, $(0, 0, 1) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Então, o ângulo entre estes dois vectores é $\cos^{-1}(\frac{2}{3})$, ou seja, usando a notação tradicional, $\arccos \frac{2}{3}$. Note-se que os dois vectores são unitários (têm norma 1).

Equação do plano que passa por $P = (1, 0, 0)$ e é perpendicular ao vector $(2, -1, 0)$:

$$2(x - 1) - y = 0 \iff y = 2x - 2$$

Intersecção do plano anterior com o eixo de rotação:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -4y - 2 \\ x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{2}{5} \\ x = \frac{4}{5} \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, obtemos o ponto de intersecção $I = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$.

Agora, o ponto $P = (1, 0, 0)$ tem de rodar em torno do eixo de rotação, descrevendo um arco da mesma amplitude que aquele que foi descrito pelo ponto $(0, 0, 1)$.

Embora, a questão possa ser resolvida de outras maneiras, vamos usar a seguinte:

$$\overrightarrow{IP} = P - I = (1, 0, 0) - \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

Agora, queremos encontrar um vector u que tenha a mesma norma de \overrightarrow{IP} , seja perpendicular ao eixo de rotação e faça com \overrightarrow{IP} um ângulo igual a $\arccos \frac{2}{3}$.

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$. Então, devemos ter

$$\begin{aligned} \begin{cases} (u_1, u_2, u_3) \cdot (2, -1, 0) = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} \\ \frac{(u_1, u_2, u_3) \cdot (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0)}{\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{2}{3} \end{cases} &\iff \begin{cases} 2u_1 - u_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ \frac{\frac{1}{5}u_1 + \frac{2}{5}u_2}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ u_1^2 + 4u_1^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_2 = \frac{4}{15} \\ 5u_1^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3^2 = \frac{1}{5} - 5 \times \frac{4}{225} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3^2 = \frac{1}{9} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3 = \pm \frac{1}{3} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $u = (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \pm \frac{1}{3})$. Então, $P' = I + u = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0) + (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \pm \frac{1}{3}) = (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, \pm \frac{1}{3})$.

Ora, $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$ e $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 0$, pelo que $P' = (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3})$, o que corresponde a $u = (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{1}{3})$, embora isso nem seja relevante.

Então, já sabemos as imagens de $(1, 0, 0)$ e de $(0, 0, 1)$.

Ora, $(1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$, pelo que $(0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, 0)$.

Então, a imagem de $(0, 1, 0)$ é $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3})$

Então, sabemos que $\begin{cases} (1, 0, 0) \mapsto (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \\ (0, 1, 0) \mapsto (\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3}) \\ (0, 0, 1) \mapsto (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$

Comecemos por considerar a rotação em torno duma recta que aplica $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. O eixo de rotação é a recta perpendicular aos dois vectores anteriores que passa pela origem. Calculemos o produto externo $(0, 0, 1) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

Recordamos que o produto externo é dado pelo determinante simbólico:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Então, o eixo de rotação é a recta definida por $(-2x, x, 0)$. Agora, pretendemos encontrar a imagem de $(1, 0, 0)$ e de $(0, 1, 0)$, por meio da rotação anterior que transforma $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Para isso, podemos achar a imagem dum ponto (ou vector) genérico e, depois resolver os dois casos particulares ou podemos resolver cada caso particular sem nos preocuparmos com o caso geral.

Comecemos por calcular o produto interno entre os dois vectores $(0, 0, 1)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Ora, $(0, 0, 1) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$. Então, o ângulo entre estes dois vectores é $\cos^{-1}(\frac{2}{3})$, ou seja, usando a notação tradicional, $\arccos \frac{2}{3}$. Note-se que os dois vectores são unitários (têm norma 1).

Equação do plano que passa por $P = (1, 0, 0)$ e é perpendicular ao vector $(2, -1, 0)$:

$$2(x - 1) - y = 0 \iff y = 2x - 2$$

Intersecção do plano anterior com o eixo de rotação:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -4y - 2 \\ x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{2}{5} \\ x = \frac{4}{5} \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, obtemos o ponto de intersecção $I = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$.

Agora, o ponto $P = (1, 0, 0)$ tem de rodar em torno do eixo de rotação, descrevendo um arco da mesma amplitude que aquele que foi descrito pelo ponto $(0, 0, 1)$.

Embora, a questão possa ser resolvida de outras maneiras, vamos usar a seguinte:

$$\overrightarrow{IP} = P - I = (1, 0, 0) - \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

Agora, queremos encontrar um vector u que tenha a mesma norma de \overrightarrow{IP} , seja perpendicular ao eixo de rotação e faça com \overrightarrow{IP} um ângulo igual a $\arccos \frac{2}{3}$.

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$. Então, devemos ter

$$\begin{aligned} \begin{cases} (u_1, u_2, u_3) \cdot (2, -1, 0) = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} \\ \frac{(u_1, u_2, u_3) \cdot (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0)}{\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{2}{3} \end{cases} &\iff \begin{cases} 2u_1 - u_2 = 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ \frac{\frac{1}{5}u_1 + \frac{2}{5}u_2}{\frac{1}{5}} = \frac{2}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = 2u_1 \\ u_1^2 + 4u_1^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}u_1 + \frac{4}{5}u_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_2 = \frac{4}{15} \\ 5u_1^2 + u_3^2 = \frac{1}{5} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3^2 = \frac{1}{5} - 5 \times \frac{4}{225} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3^2 = \frac{1}{9} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = \frac{4}{15} \\ u_3 = \pm \frac{1}{3} \\ u_1 = \frac{2}{15} \end{cases} \end{aligned}$$

Seja $u = (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \pm \frac{1}{3})$. Então, $P' = I + u = (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0) + (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \pm \frac{1}{3}) = (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, \pm \frac{1}{3})$.

Ora, $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, \frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$ e $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 0$, pelo que $P' = (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3})$, o que corresponde a $u = (\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{1}{3})$, embora isso nem seja relevante.

Então, já sabemos as imagens de $(1, 0, 0)$ e de $(0, 0, 1)$.

Ora, $(1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$, pelo que $(0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, 0)$.

Então, a imagem de $(0, 1, 0)$ é $(\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3})$

Então, sabemos que $\begin{cases} (1, 0, 0) \mapsto (\frac{14}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}) \\ (0, 1, 0) \mapsto (\frac{2}{15}, -\frac{11}{15}, \frac{2}{3}) \\ (0, 0, 1) \mapsto (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$

Utilização dos ângulos de Euler????

Nós pretendemos que $(0, 0, 1)$ seja transformado em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Ora, $(0, 0, 1) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$, pelo que o ângulo entre os dois vectores é $\alpha = \arccos \frac{2}{3}$.

Mas vamos transformar $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, em dois passos.

1º passo

Rodamos qualquer ponto (ou vector), do ângulo α , em torno do eixo das abcissas (Ox). Então, a abcissa mantém-se constante, pelo que a matriz que define a rotação é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, ou seja,

$$R_1(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}\sqrt{5}z \\ \frac{1}{3}\sqrt{5}y + \frac{2}{3}z \end{bmatrix}$$

Em particular, $R_1(0, 0, 1) = (0, -\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3})$ e $R_1(0, 1, 0) = (0, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$. É claro que $R_1(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$. Esta primeira rotação, pode ser feita no sentido horário ou no sentido anti-horário, ou seja, no sentido negativo ou no sentido positivo. Note-se que o observador está no sentido de $(1, 1, 1)$, a uma distância tal que veja os movimentos descritos.

Este primeiro passo tem um problema: qual o sinal de $\sin \alpha$? E, no caso geral, entre que valores varia α ? Devemos escolher qual dos seguintes intervalos, para os valores de α ?

$[0, 2\pi]$, $[0, 2\pi[$, $[-\pi, \pi]$, $]-\pi, \pi]$, $[0, \pi]$ ou $[0, \pi[$? Observe-se que existe a seguinte alternativa de notação: $[0, 2\pi)$ em vez de $[0, 2\pi[$, por exemplo.

2º passo

Agora, queremos definir uma rotação de amplitude β , em torno do eixo das cotas (Oz), rotação essa que transforme $(0, -\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3})$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

A matriz dessa rotação é $\begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{5}\sin \beta \\ -\frac{1}{3}\sqrt{5}\cos \beta \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Então, $\begin{cases} \sqrt{5}\sin \beta = 1 \\ \sqrt{5}\cos \beta = -2 \end{cases}$, pelo que $\cos \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Então, temos $R_2(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5}x - \frac{1}{5}\sqrt{5}y \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}x - \frac{2}{5}\sqrt{5}y \\ z \end{bmatrix}$

Em particular, temos

$$\begin{cases} R_2(1, 0, 0) = (-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}, 0) \\ R_2(0, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}) = (-\frac{2}{15}\sqrt{5}, -\frac{4}{15}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\sqrt{5}) \\ R_2(0, -\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

Note-se que podemos multiplicar a segunda matriz pela primeira, para obtermos a matriz que permite obter uma só matriz de rotação.

$$\text{Assim, } \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Está assim terminado o segundo passo.

Observação

Note-se que o ângulo β pode ser encontrado da seguinte maneira:

Consideremos o ponto $Q = (0, 0, \frac{2}{3})$. Então, este ponto Q define, com $(0, -\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3})$ e com $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, dois vectores:

$$\begin{cases} (0, -\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}) - (0, 0, \frac{2}{3}) = (0, -\frac{\sqrt{5}}{3}, 0) \\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - (0, 0, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0) \end{cases}$$

Os dois vectores obtidos já não têm norma 1, mas norma $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\text{Logo, } \cos \beta = \frac{(0, -\frac{\sqrt{5}}{3}, 0) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)}{\frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{-\frac{2\sqrt{5}}{9}}{\frac{5}{9}} = -\frac{2\sqrt{5}}{9} \times \frac{9}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

E $\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \frac{4 \times 5}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. E temos um problema com o sinal!

$$\begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Neste caso, o sinal positivo é o sinal apropriado.

Terceira rotação

$$\text{É óbvio que } \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} (1, 0, 0) \mapsto (-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}, 0) \\ (0, 1, 0) \mapsto (-\frac{2}{15}\sqrt{5}, -\frac{4}{15}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\sqrt{5}) \\ (0, 0, 1) \mapsto (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

A última rotação tem de ser em torno da recta que passa pela origem e tem a direcção $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, para que este ponto/vector fique fixo.

$$\text{Então, queremos que } R_3(x, y, z) \text{ transforme } \begin{cases} (-\frac{2}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}, 0) \mapsto ? \\ (-\frac{2}{15}\sqrt{5}, -\frac{4}{15}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\sqrt{5}) \mapsto (-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0) \\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \mapsto (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{2}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{15}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Exercício 971 Qual a matriz da rotação espacial que transforma $(0, 0, 1)$ em $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e $(0, 1, 0)$ em $(-\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}, \frac{\sqrt{5}}{6})$?

Resolução

$$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \cdot (-\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}, \frac{\sqrt{5}}{6}) = 0$$

$$\|(-\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}, \frac{\sqrt{5}}{6})\| = 1$$

$$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \times (-\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}, \frac{\sqrt{5}}{6}) = (\frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{15}\sqrt{15}, -\frac{1}{10}\sqrt{5} - \frac{2}{15}\sqrt{15}, \frac{1}{6}\sqrt{15})$$

$$\text{Logo, } M = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{15}\sqrt{15} & -\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5} - \frac{2}{15} & \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{15} & \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} - \frac{1}{15}\sqrt{15} & -\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{5} - \frac{2}{15} & \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6}\sqrt{15} & \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}$$

$$c = \frac{1}{6}\sqrt{5}$$

$$(a, b, c) = (-\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}, \frac{\sqrt{5}}{6})$$

$$\|(-\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}, \frac{\sqrt{5}}{6})\| = 1$$

$$(-\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}, \frac{\sqrt{5}}{6}) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 0$$

$$(-\frac{2}{15}\sqrt{5}, -\frac{4}{15}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\sqrt{5}) \cdot (-\frac{\sqrt{5}}{15} - \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{3\sqrt{15}-4\sqrt{5}}{30}, \frac{\sqrt{5}}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$-2b - 2c = -\frac{14}{15}$$

$$(-\frac{14}{15}, \frac{1}{3}, \frac{2}{15}) \cdot$$

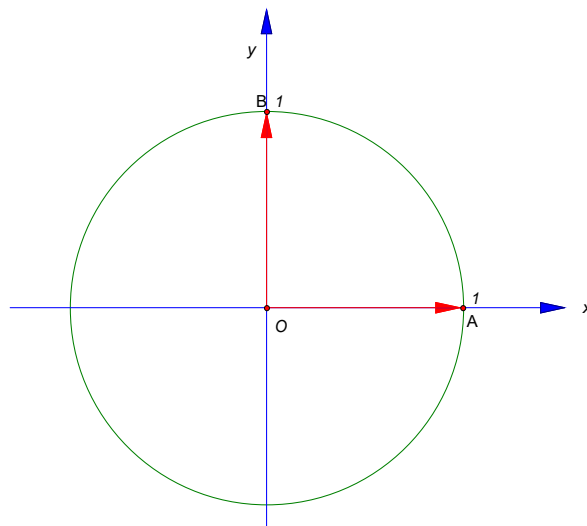
$$(-\frac{2}{15}\sqrt{5}, -\frac{4}{15}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\sqrt{5}) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

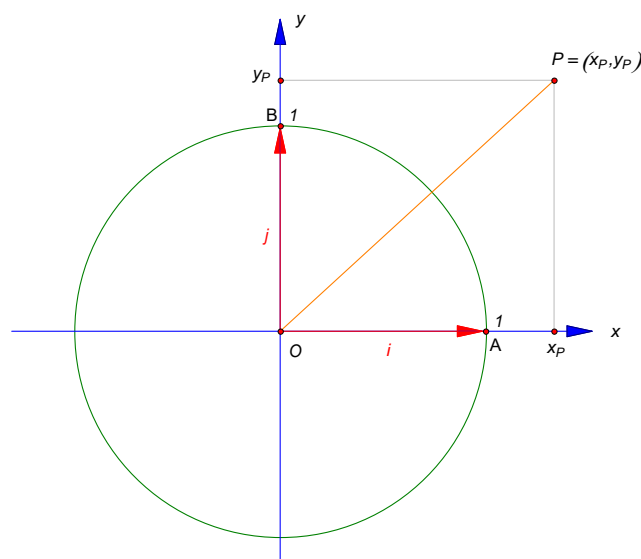
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

56.3 Mudança de referencial

Na Geometria Analítica, usamos um referencial xOy , constituído por dois eixos perpendiculares (ou não...) concorrentes num ponto O , chamado origem do referencial.



Qualquer ponto do plano fica definido pelas suas coordenadas:



O referencial anterior é um referencial cartesiano, havendo outro tipo de referenciais: referencial de coordenadas polares, por exemplo.

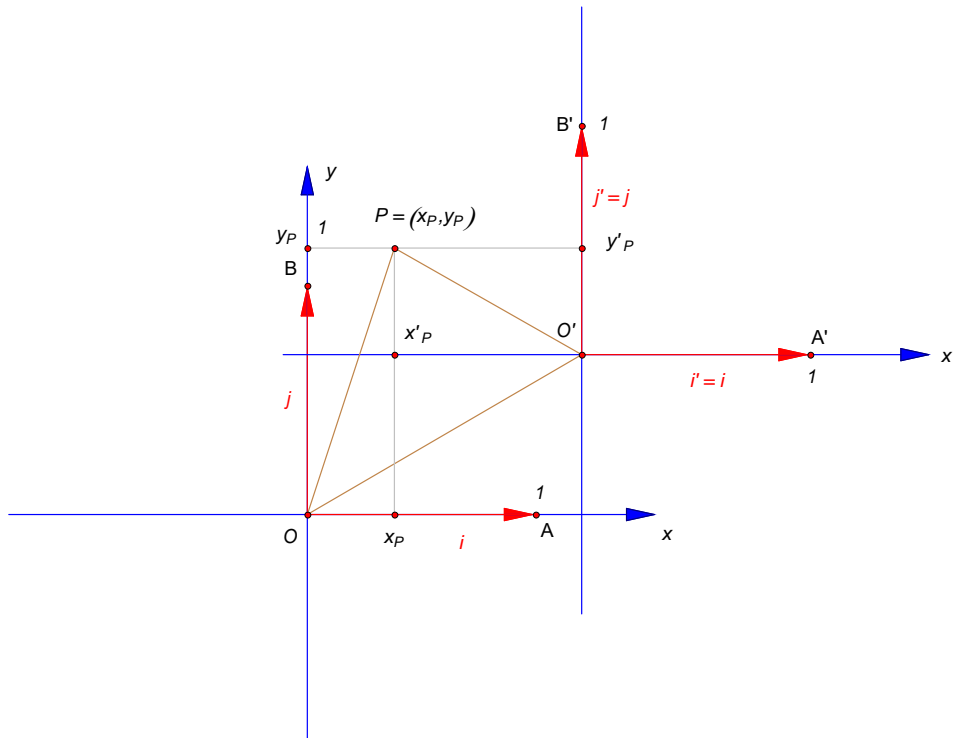
Note-se que a escolha da origem do referencial é completamente arbitrária, bem como a direcção de um dos eixos.

Tradicionalmente, escolhe-se os eixos na posição das figuras anteriores. É claro que temos de usar uma unidade em cada eixo, sendo que os referenciais mais comuns são aqueles em que a unidade de comprimento é a mesma nos dois eixos. Escolhida a unidade de comprimento, temos dois vectores unitários que, na figura anterior, estão representados por \vec{i} e \vec{j} . Muitas vezes, para evitar confusões, escrevemos \vec{i} e \vec{j} , mas também podemos usar e_1 e e_2 ou \vec{e}_1 e \vec{e}_2 .

Relativamente à figura anterior, temos que, por exemplo,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} = (1, 0) \\ \overrightarrow{OB} = \vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} = (0, 1) \\ \overrightarrow{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} = (x_P, y_P) \end{cases}$$

Por vezes, há conveniência em mudar de referencial. O caso mais fácil é quando fazemos uma translação da origem do referencial, ficando os novos eixos paralelos aos anteriores:



No caso da figura anterior, temos que o ponto P tem coordenadas diferentes nos dois referenciais. Assim, no referencial xOy , as coordenadas de P são (x_P, y_P) e temos $\overrightarrow{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j}$, tendo-se manifestamente $0 < x_P < 1 \wedge 0 < y_P < 1$.

No segundo referencial, $x'O'y'$, as coordenadas de P são diferentes, tendo-se que P tem coordenadas (x'_P, y'_P) , tendo-se que $\overrightarrow{O'P} = x'_P\vec{i}' + y'_P\vec{j}' = x'_P\vec{i} + y'_P\vec{j}$, tendo-se manifestamente que $x'_P < 0$.

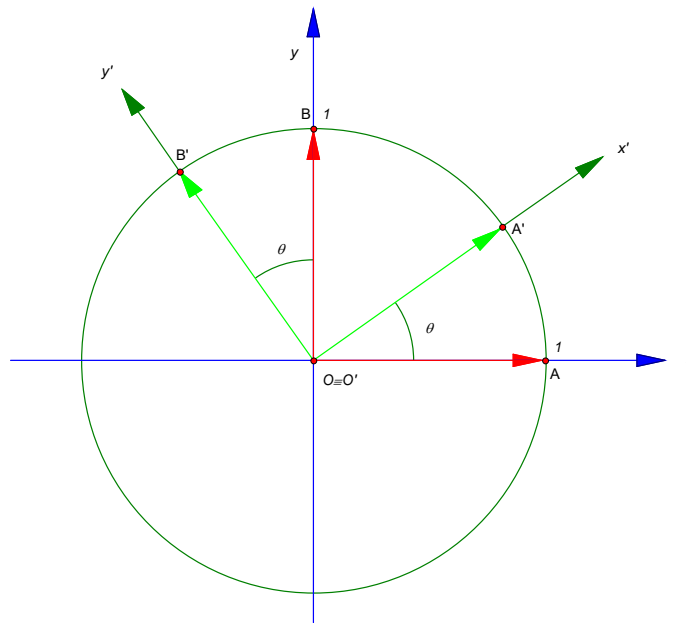
Se as coordenadas são diferentes, então não devemos escrever $P = (x_P, y_P)$ e $P = (x'_P, y'_P)$. Talvez pudéssemos escrever algo semelhante a $P = (x_P, y_P)_{xOy}$ e $P = (x'_P, y'_P)_{x'O'y'}$.

Ou ainda, algo do género $P \hookrightarrow (x_P, y_P)_{xOy}$ e $P \hookrightarrow (x'_P, y'_P)_{x'O'y'}$.

Chama-se a atenção para o facto de que o ponto P manteve-se fixo. Se P tivesse sofrido a mesma translação que O , teríamos as mesmas coordenadas em ambos os referenciais. Outro facto: se somarmos $\overrightarrow{OO'}$ com $\overrightarrow{O'P}$, obtemos \overrightarrow{OP} , como não pode deixar de ser.

Se $\overrightarrow{OO'} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{6}{5}\vec{j}$, então $x'_P = x_P - \frac{2}{3}$ e $y'_P = y_P - \frac{6}{5}$, o que corresponde à translação inversa daquela que é sofrida pelo ponto O . Note-se que, nesse caso, teríamos que o ponto O sofreria uma translação associada ao vector $\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{6}{5}\vec{j} = (\frac{2}{3}, \frac{6}{5})$, enquanto que as novas coordenadas são $x'_P = x_P - \frac{2}{3}$ e $y'_P = y_P - \frac{6}{5}$, ou seja, $(x'_P, y'_P) = (x_P, y_P) - (\frac{2}{3}, \frac{6}{5})$.

No entanto, o caso mais habitual não é a translação do referencial, mas a sua rotação, em torno da origem, como na figura seguinte:



Na figura anterior, os vectores \vec{i} e \vec{j} estão desenhados a vermelho, enquanto os vectores \vec{i}' e \vec{j}' estão desenhados a verde. Os vectores a verde foram obtidos dos vectores a vermelho, através duma rotação de centro O e amplitude θ .

Suponhamos que não conhecemos as matrizes de rotação, mas conhecemos os números complexos e as operações com esses números na forma trigonométrica.

Então, sabemos que $\rho \operatorname{cis} \alpha \times \operatorname{cis} \theta = \rho \operatorname{cis} (\alpha + \theta)$ e que

$$\begin{aligned} (a + bi) \times \operatorname{cis} \theta &= (a + bi) (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ &= a \cos \alpha + ia \sin \alpha + ib \cos \alpha + i^2 b \sin \alpha \\ &= (a \cos \alpha - b \sin \alpha) + i (a \sin \alpha + b \cos \alpha) \end{aligned}$$

É claro que estamos a supor que a e b são números reais.

Usando matrizes, temos que rodar um ponto (ou vector) (a, b) , em torno da origem e com um ângulo de amplitude α , faz-se da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \alpha - b \sin \alpha \\ b \cos \alpha + a \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Na figura anterior, temos $A' = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $B' = (\cos(\frac{\pi}{2} + \theta), \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)) = (-\sin \theta, \cos \theta)$.

Suponhamos que temos um ponto P , de coordenadas (x_P, y_P) , relativamente ao referencial xOy . É claro que se rodarmos o ponto P em torno de O e com a mesma amplitude de rotação, passando P para a posição P' , as coordenadas de P' , em relação ao novo referencial são exactamente as mesmas de P , relativamente ao primeiro referencial. Então, as coordenadas de P , relativamente ao segundo referencial são obtidas "voltando atrás", como no caso da translação.

Então, as novas coordenadas de P são dadas por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'_P \\ y'_P \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha \\ y_P \cos \alpha - x_P \sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe-se que

$$\begin{aligned} x'_P \vec{i}' + y'_P \vec{j}' &= (x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha) (\cos \alpha, \sin \alpha) + (y_P \cos \alpha - x_P \sin \alpha) (-\sin \alpha, \cos \alpha) \\ &= (x_P \cos^2 \alpha + x_P \sin^2 \alpha, y_P \cos^2 \alpha + y_P \sin^2 \alpha) = (x_P, y_P) \end{aligned}$$

Note-se que, em \mathbb{R}^3 , temos mais um eixo que é perpendicular aos dois eixos usados em \mathbb{R}^3 , mas a posição desses dois eixos é ligeiramente diferente: o semi-eixo positivo das abcissas fica voltado para a frente e o semi-eixo positivo das ordenadas fica voltado para a direita. O semi-eixo positivo das cotas fica voltado para cima.

Exemplo 972 Considere dois planos paralelos $(\Pi_1$ e $\Pi_2)$ e um terceiro plano (Π_3) não paralelo aos dois anteriores. Determine $(\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z)$.

Resolução

Suponhamos que os planos são definidos por

$$\begin{cases} \Pi_1 : a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ \Pi_2 : a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0 \\ \Pi_3 : a_1(x - x_C) + b_1(y - y_C) + c_1(z - z_C) = 0 \end{cases}$$

Estamos a supor que $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$ pertencem a Π_1 , Π_2 e Π_3 , respectivamente, e que $a^2 + b^2 + c^2 = 1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, isto é, (a, b, c) e (a_1, b_1, c_1) são vectores unitários. Sejam $\vec{N}_1 = \vec{N}_2 = \vec{N} = (a, b, c)$ e $\vec{N}_3 = (a_1, b_1, c_1)$. Então,

$$\Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = (x, y, z) - 2 \frac{\text{proj}_{\vec{N}_1}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A))}{\vec{N}_1}$$

Por outro lado,

$$\Omega_{\Pi_2}(x, y, z) = (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_2}((x, y, z) - (x_B, y_B, z_B))$$

Então,

$$\begin{aligned} E &= \Omega_{\Pi_2} \left((x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_1}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \right) \\ &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_1}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_2} \left((x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_1}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) - (x_B, y_B, z_B) \right) \\ &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}} \left((x, y, z) - (x_B, y_B, z_B) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \right) \\ &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}((x, y, z) - (x_B, y_B, z_B)) + 4 \operatorname{proj}_{\vec{N}} \left(\operatorname{proj}_{\vec{N}}((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \right) \\ &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x - x_A, y - y_A, z - z_A) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x - x_B, y - y_B, z - z_B) + 4 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x - x_A, y - y_A, z - z_A) \\ &= (x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x - x_A, y - y_A, z - z_A) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x - x_B, y - y_B, z - z_B) \\ &= (x, y, z) + 2 \left(\operatorname{proj}_{\vec{N}}(x - x_A, y - y_A, z - z_A) - \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x - x_B, y - y_B, z - z_B) \right) \\ &= (x, y, z) + 2 \left(\operatorname{proj}_{\vec{N}}((x - x_A, y - y_A, z - z_A) - (x - x_B, y - y_B, z - z_B)) \right) \\ &= (x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \end{aligned}$$

Logo,

$$(\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) = (x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Então, $\Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1}$ é a translação associada ao vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Agora, vem

$$\begin{aligned} \Omega_{\Pi_3}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}((x, y, z) - (x_C, y_C, z_C)) \\ &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\Pi_3}((x, y, z) + (v_1, v_2, v_3)) &= \Omega_{\Pi_3}(x + v_1, y + v_2, z + v_3) \\
 &= (x + v_1, y + v_2, z + v_3) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}((x + v_1, y + v_2, z + v_3) - (x_C, y_C, z_C)) \\
 &= (x + v_1, y + v_2, z + v_3) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}((x - x_C, y - y_C, z - z_C) + (v_1, v_2, v_3)) \\
 &= (x + v_1, y + v_2, z + v_3) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(v_1, v_2, v_3) \\
 &= (x, y, z) + (v_1, v_2, v_3) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3} \left(2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \right) \\
 &= (x, y, z) + (v_1, v_2, v_3) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) - 4 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3} \left(\operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \right)
 \end{aligned}$$

O caso mais interessante é quando \vec{N}_3 e \vec{N} são perpendiculares. Nesse caso, teremos:

$$\begin{aligned}
 (\Omega_{\Pi_3} \circ \Omega_{\Pi_2} \circ \Omega_{\Pi_1})(x, y, z) &= (x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) \\
 &= (x, y, z) - 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}_3}(x - x_C, y - y_C, z - z_C) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \\
 &= \Omega_{\Pi_3}(x, y, z) + 2 \operatorname{proj}_{\vec{N}}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)
 \end{aligned}$$

Logo, temos uma reflexão em relação a um plano seguida duma translação associada a um vector paralelo ao plano que serve de "espelho".

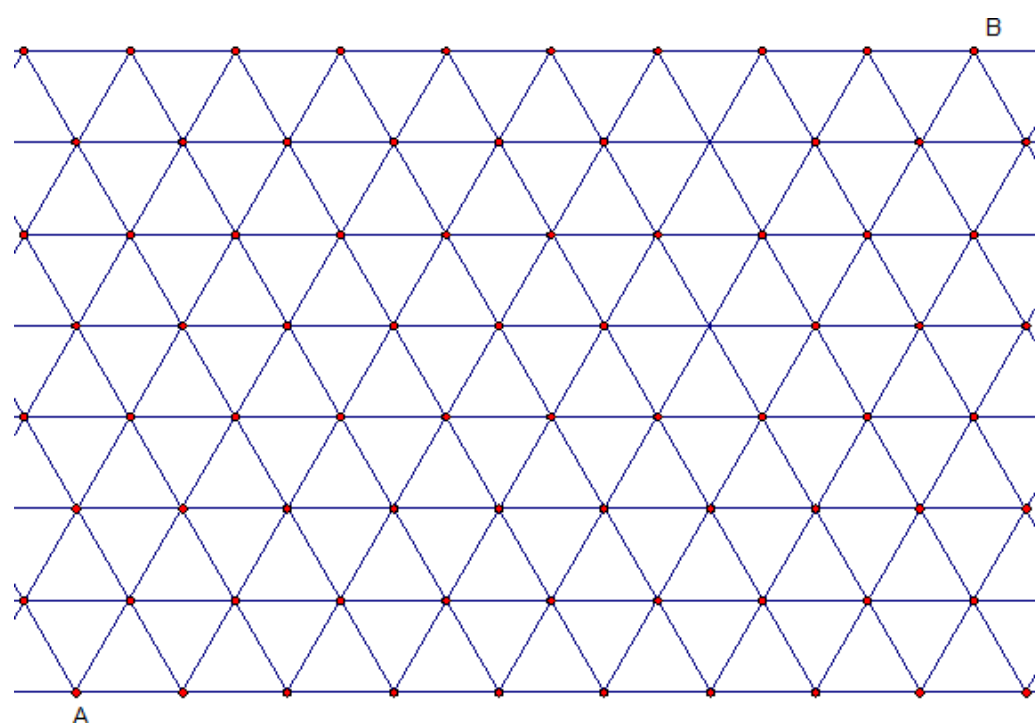
Sejam A, B, C três pontos pertencentes a três planos paralelos (um ponto em cada plano). Sejam \vec{N} um vector unitário perpendicular a esses planos e $P = (x, y, z)$, um ponto genérico de \mathbb{R}^3 .

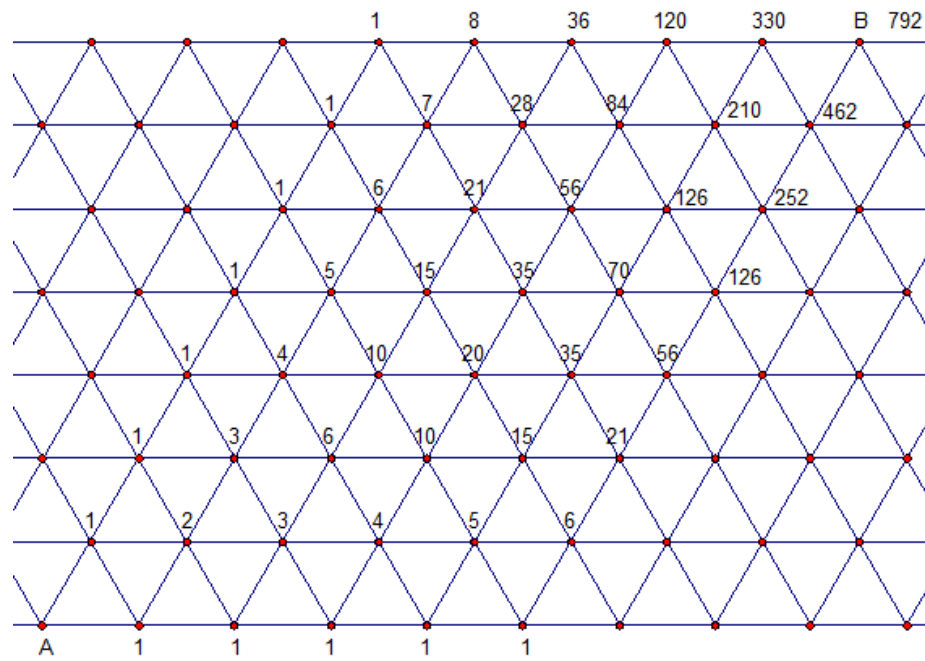
$$\begin{aligned}
 \Omega_{\Pi_1}(P) &= \Omega_{\Pi_1}(x, y, z) = (x, y, z) - 2 \left(((x, y, z) - (x_A, y_A, z_A)) \cdot \vec{N} \right) \vec{N} \\
 &= (x, y, z) - 2 \left((x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot \vec{N} \right) \vec{N} = P'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\Pi_2}(P') &= \Omega_{\Pi_2} \left((x, y, z) - 2 \left((x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot \vec{N} \right) \vec{N} \right) \\
 &= \Omega_{\Pi_2}(x, y, z) - 2 \Omega_{\Pi_2} \left(\left((x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot \vec{N} \right) \vec{N} \right) \\
 &= (x, y, z) - 2 \left((x, y, z) - (x_B, y_B, z_B) \cdot \vec{N} \right) \vec{N} - 2 \left((x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot \vec{N} \right) \Omega_{\Pi_2}(\vec{N}) \\
 &= \Omega_{\Pi_2}(x, y, z) - 2 \left((x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot \vec{N} \right) (-\vec{N}) \\
 &= \Omega_{\Pi_2}(x, y, z) + 2 \left((x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot \vec{N} \right) \vec{N} = P''
 \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] BRISON, O. J., Grupos e Representações (1999), Lisboa, Faculdade de Ciências de Lisboa
- [2] BRISON, O. J., Teoria de Galois (1998), 2^a edição, Lisboa, Faculdade de Ciências de Lisboa
- [3] GROSSWALD, E., Representation of Integers as Sums of Squares (1985), New York, Springer-Verlag
- [4] LEVEQUE, W. J., Fundamentals of Number Theory (1996), New York, Dover
- [5] ANDREWS E. G., Number Theory (1994), New York, Dover
- [6] HARDY, G. H. & WRIGHT, E. M., An Introduction to the Number Theory (1960), 4th edition, London, Oxford at Clarendon Press
- [7] SWETZ, F. J., From Five Fingers to Infinity (1994), Chicago, Open Court
- [8] STARK, H. M., An Introduction to Number Theory (1978), Cambridge, The MIT Press
- [9] SILVA, J. S., Compêndio de Matemática (1975), Lisboa, Gabinete de Estudos e Planeamento, Ministério da Educação e Cultura
- [10] FERREIRA, M. A. M. e AMARAL, I., Programação Matemática (1995), 2^a edição, Lisboa, Edições Sílabo
- [11] ??, Probabilidades, Brochuras (?), Lisboa, GAVE, Ministério da Educação



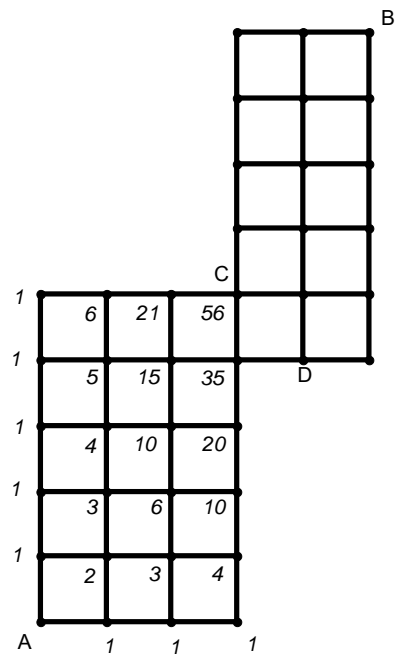
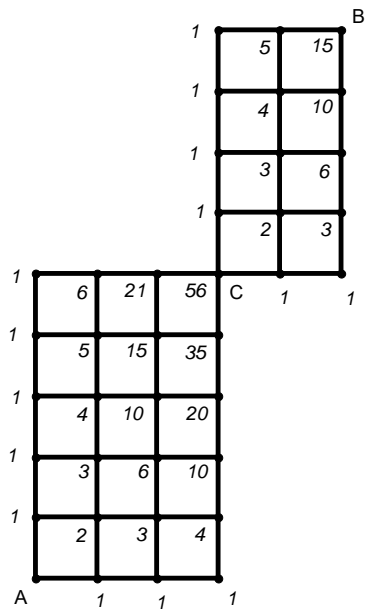


$$\binom{12}{5} = 792$$

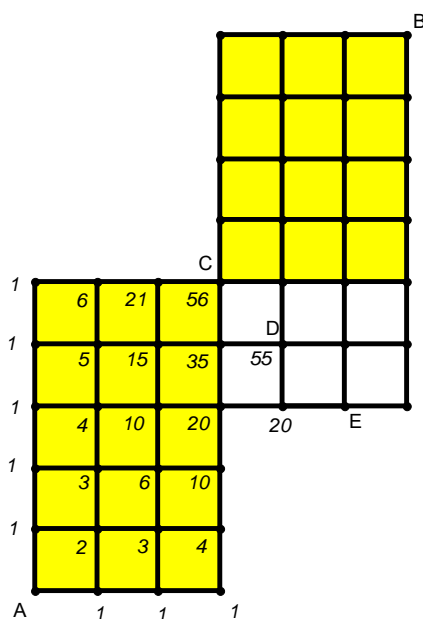
$$\binom{8}{3} = 56$$

$$\binom{6}{2} = 15$$

$$\binom{8}{3} \times \binom{6}{2} = 56 \times 15 = 840$$



Há 56 maneiras de ir de A a C e 15 maneiras de ir de C a B. Logo, há 840 maneiras de ir de A a B, passando por C. Agora, temos de contar as maneiras de ir de A a B, não passando por C. Há 35 maneiras de chegar a D e $\binom{6}{1} = 6$ maneiras de ir de D a B. Logo, há 210 maneiras de ir de A a B, passando por D. Logo, há $840 + 210 = 1050$ maneiras de ir de A a B.

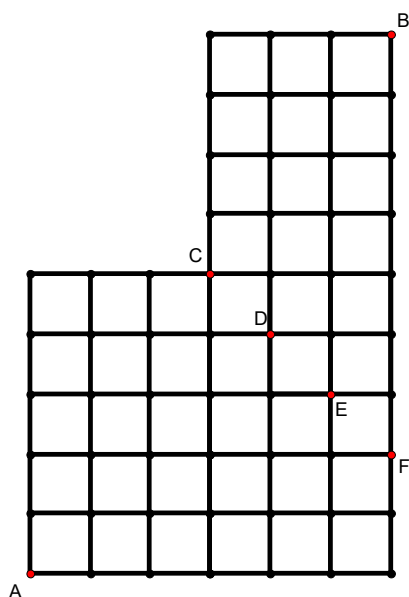


Há 56 maneiras de ir de A a C e $\binom{7}{3} = 35$ maneiras de ir de C a B. Logo, há $56 \times 35 = 1960$ maneiras de ir de A a B, passando por C.

Há 55 maneiras de ir de A a D e $\binom{7}{2} = 21$ maneiras de ir de D a B. Logo, há $55 \times 21 = 1155$ maneiras de ir de A a B, passando por D.

Há 20 maneiras de ir de A a E e há 7 maneiras de ir de E a B. Logo, há 140 maneiras de ir de A a B, passando por E.

Então, há $1960 + 1155 + 140 = 3255$ maneiras de ir de A a B.



Nº de caminhos de A a B.

1º Nº de caminhos de A a C: $\binom{8}{3} = 56$

1º Nº de caminhos de C a B: $\binom{7}{3} = 35$

Nº de caminhos de A a B, passando por C: $56 \times 35 = 1960$

1º Nº de caminhos de A a D: $\binom{8}{4} = 70$

1º Nº de caminhos de D a B: $\binom{7}{2} = 21$

Nº de caminhos de A a B, passando por D: $70 \times 21 = 1470$

1º Nº de caminhos de A a E: $\binom{8}{5} = 56$

1º Nº de caminhos de E a B: $\binom{7}{1} = 7$

Nº de caminhos de A a B, passando por E: $7 \times 56 = 392$

1º Nº de caminhos de A a F: $\binom{8}{6} = 28$

1º Nº de caminhos de F a B: 1

Nº de caminhos de A a B, passando por F: $1 \times 28 = 28$

Nº de caminhos de A a B: $1960 + 1470 + 392 + 28 = 3850$

Observação

$$\binom{25}{8} - \binom{25}{7} = 600\,875$$

$$\binom{24}{8} - \binom{24}{6} = 600\,875$$

$$\binom{24}{8} - \binom{24}{7} + \binom{24}{7} - \binom{24}{6} = 600\,875$$

$$\binom{23}{8} - \binom{23}{6} + \binom{23}{7} - \binom{23}{5} = 600\,875$$

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k-1}$$

Valor de C_{16383}

Vamos apresentar o valor de C_{16383} (um dos números de Catalan). Trata-se de um número que ocupa várias páginas (em tamanho normal). Se não me enganei na contagem, é um número com 9857 algarismos (quando escrito na base dez). Note-se que $16384 = 2^{14}$, pelo que $C_{16383} = C_{2^{14}-1}$

95 201 331 192 448 009 105 573 795 202 124 244 741 481 906 319 015
322 558 416 209 332 503 858 852 030 152 380 323 419 774 153 122 548
982 439 461 979 188 770 564 458 773 732 126 495 378 358 277 412 853
974 478 670 311 949 624 738 983 695 234 167 186 458 379 733 073 626
286 501 528 974 827 320 757 977 595 359 538 648 484 506 855 916 670
178 806 870 316 405 227 796 127 639 133 193 096 487 841 958 496 945
503 401 995 823 962 008 134 800 143 654 012 944 886 138 471 105 570
295 341 694 193 474 981 069 414 760 910 563 085 276 868 127 623 200
228 870 304 151 089 901 467 265 636 647 901 601 120 974 052 470 371
074 216 794 345 598 731 484 335 601 203 473 926 359 297 083 160 979
617 668 190 332 719 159 759 031 406 187 228 259 880 673 643 243 188
171 067 096 899 367 369 849 004 860 922 186 588 617 470 112 339 657
651 730 984 414 575 021 595 313 792 080 699 694 441 650 985 723 564
119 346 913 038 330 580 298 453 481 290 207 081 274 820 294 251 937
450 869 234 256 666 893 895 743 989 896 519 754 560 839 512 417 766
576 009 586 254 561 682 999 211 370 554 507 868 737 495 659 517 588
659 056 046 934 483 855 992 470 331 043 188 066 626 941 392 398 063
877 524 673 599 292 305 978 127 178 299 019 360 491 783 220 277 952
204 179 727 520 089 833 707 658 288 591 699 057 704 901 078 486 653
027 990 083 568 715 856 427 293 804 123 698 050 211 152 764 861 113
940 678 349 575 425 776 385 968 740 181 198 549 082 344 058 942 129
974 766 306 147 614 636 834 522 554 550 643 226 231 589 836 088 391
238 994 312 513 269 668 237 041 999 620 607 076 635 011 355 693 817
493 300 908 795 141 356 173 188 825 601 195 404 229 520 654 152 837
290 076 037 241 233 046 416 261 104 833 792 986 936 674 001 426 105
131 604 408 018 164 594 444 839 340 917 979 893 074 044 712 293 784
128 627 927 077 190 040 133 806 218 094 489 337 215 435 934 213 948
151 927 730 769 472 794 047 743 979 173 387 279 101 409 850 686 714
709 985 756 563 417 399 807 567 911 088 762 458 012 355 149 757 808
904 035 520 061 838 086 204 376 487 324 189 502 698 362 929 233 526
619 908 792 622 549 231 824 297 320 261 178 566 248 659 801 680 114
357 697 899 018 381 229 207 434 568 703 296 640 164 607 930 861 903

813 801 200 154 430 297 684 798 882 265 323 403 975 239 229 605 603
565 664 109 146 245 242 684 016 912 258 629 311 680 103 009 326 276
650 444 681 870 836 410 085 148 544 670 848 989 606 999 425 267 731
044 899 467 256 641 608 255 393 230 488 862 033 694 962 482 307 222
248 543 815 992 807 700 757 089 061 774 594 357 431 824 529 642 406
838 802 249 445 645 552 052 258 879 888 217 412 837 150 290 282 361
463 305 440 839 122 584 403 909 754 952 371 716 903 634 104 080 290
310 854 481 850 936 813 811 682 118 747 954 253 050 083 282 571 450
940 464 036 667 479 325 244 437 107 726 457 708 296 285 700 219 609
379 499 658 992 177 155 090 674 009 430 730 037 987 464 965 213 271
873 645 746 746 790 057 547 985 129 778 768 789 943 220 456 066 614
212 533 566 272 015 551 812 154 953 128 747 797 829 598 180 662 484
075 742 566 897 618 451 222 868 111 335 180 331 308 113 720 923 697
624 473 218 948 694 537 872 556 199 330 100 434 169 189 192 931 907
415 635 391 566 955 797 357 326 523 101 865 719 839 299 414 702 398
993 032 795 662 122 504 770 006 327 414 507 816 164 222 812 935 476
825 897 167 808 959 694 188 466 407 482 006 866 350 857 139 194 725
587 888 650 261 555 332 633 513 824 729 447 792 330 762 037 177 634
152 892 537 931 731 950 247 285 184 377 974 199 848 441 755 361 854
108 466 086 678 336 789 087 757 173 390 396 755 343 016 207 813 047
363 245 457 386 118 027 445 953 277 240 489 999 280 690 135 733 993
363 167 270 372 697 084 922 814 771 121 735 139 800 518 479 844 747
008 224 565 976 100 628 016 822 510 118 438 568 107 172 152 278 246
347 823 391 484 228 694 462 483 879 384 962 254 840 519 452 579 483
765 661 573 362 857 793 949 838 307 278 071 801 122 124 076 673 800
325 385 426 242 939 890 668 643 227 185 209 358 605 702 365 211 159
186 655 767 480 556 053 284 831 975 126 643 703 817 913 255 324 974
186 996 638 414 401 557 881 347 321 002 346 684 115 602 030 699 683
584 911 740 191 584 589 394 866 078 479 883 468 781 420 964 998 028
363 442 411 080 816 324 684 352 374 007 834 191 909 948 664 498 158
330 400 727 395 536 471 632 132 060 032 080 446 569 131 672 943 122
698 345 837 584 454 080 837 408 033 471 514 249 199 168 542 200 139
643 550 697 334 102 841 924 236 656 249 429 627 044 730 959 156 130
114 636 727 255 457 359 285 500 008 164 899 068 517 278 829 499 997
409 300 498 769 223 378 444 958 156 288 439 250 520 653 937 795 419
342 570 162 707 754 388 284 860 655 445 674 831 944 025 406 157 304
905 229 344 749 717 802 827 736 404 008 053 422 006 440 145 231 132
437 890 652 669 416 269 049 694 399 608 403 181 625 779 581 686 420
862 053 017 117 981 472 631 555 294 360 258 032 343 419 718 414 290
851 441 337 756 377 023 805 909 543 501 635 349 575 538 262 672 762
152 896 892 105 123 796 213 366 012 739 678 593 471 632 357 031 433
057 024 333 282 902 909 891 677 659 023 594 244 018 706 591 865 278
247 225 908 130 088 834 386 806 235 400 798 216 568 935 373 678 229
075 322 463 592 119 828 618 484 480 849 037 161 627 276 968 088 878
097 105 222 859 409 218 519 088 249 037 619 348 046 423 778 409 025
324 739 856 714 905 570 149 614 266 835 389 318 274 959 475 729 615

732 572 224 612 719 057 150 771 460 857 649 612 526 505 975 241 897
578 464 602 747 204 075 425 981 707 792 119 145 022 024 715 601 438
801 065 736 737 602 864 349 333 823 218 851 746 385 165 844 677 284
421 364 008 329 467 028 126 630 313 650 804 253 115 313 998 538 390
458 855 102 073 495 672 401 653 820 502 780 170 807 339 370 993 002
629 755 210 733 015 513 120 695 371 880 746 883 248 407 012 692 026
838 594 892 404 223 271 185 240 028 379 395 603 923 751 191 102 393
174 752 882 259 115 613 775 261 808 839 001 144 804 256 396 077 214
254 685 848 660 109 785 961 268 679 368 207 479 121 564 092 021 817
730 865 554 348 806 614 286 809 687 739 069 969 516 297 331 698 416
193 851 615 919 028 043 352 161 673 190 347 282 131 771 553 763 479
603 807 084 985 727 599 272 910 476 797 316 967 905 321 928 727 732
554 448 661 049 709 217 219 222 495 674 084 151 314 207 018 907 356
232 492 424 238 635 829 956 152 648 899 103 228 097 484 242 866 455
185 380 060 061 164 686 259 370 206 093 468 372 784 366 315 681 294
897 734 981 930 480 212 072 797 261 425 250 198 289 632 015 678 484
187 446 649 905 372 737 812 028 507 540 211 598 857 217 354 846 594
163 771 179 399 731 116 684 226 516 420 062 629 168 976 567 724 894
012 581 067 318 449 917 655 792 862 736 384 585 420 132 298 654 605
539 077 591 412 380 358 372 461 803 894 250 619 593 629 478 423 456
050 786 451 039 225 950 431 633 703 489 792 204 268 760 789 947 770
334 604 143 937 750 269 998 484 169 502 570 264 256 881 631 941 405
048 026 353 479 776 543 298 156 706 393 402 503 780 652 850 584 666
624 857 431 229 913 412 311 817 567 032 447 251 105 710 201 994 607
378 128 882 177 387 216 012 547 930 816 757 008 514 675 938 869 349
480 122 653 466 406 751 861 880 006 081 129 164 548 006 017 209 986
134 576 733 694 901 455 166 189 842 903 684 059 366 986 400 520 897
390 573 674 772 227 833 464 999 721 835 653 369 571 260 045 213 376
465 347 704 166 991 742 688 782 954 259 447 930 635 507 208 553 554
406 069 732 680 221 504 856 273 451 809 252 031 092 619 838 825 907
937 578 613 336 233 795 201 925 151 947 003 210 190 493 998 110 730
260 342 255 461 235 683 560 882 988 735 767 200 045 969 811 357 637
937 119 270 842 889 471 480 013 076 187 099 200 488 390 327 072 369
964 576 613 007 208 765 470 620 993 331 231 377 998 329 384 558 376
025 166 128 397 619 128 915 793 388 741 358 886 602 770 504 419 968
124 335 396 457 864 135 848 126 955 899 286 652 465 948 919 401 331
758 438 172 498 788 432 407 651 137 120 927 302 207 822 168 803 707
423 840 163 443 517 420 863 653 006 317 186 297 985 406 230 032 725
826 890 109 150 349 671 502 491 093 915 164 687 377 516 097 020 648
497 229 926 605 328 625 136 967 269 330 940 932 859 760 901 014 618
840 925 471 675 975 478 273 512 602 983 530 941 258 227 305 974 450
233 020 733 295 367 379 663 911 816 154 697 589 736 706 174 203 779
621 365 198 164 599 462 408 272 662 015 174 181 905 123 329 573 626
113 920 523 884 108 721 410 821 096 440 935 294 874 604 202 456 812
377 464 222 016 000 661 275 377 971 626 760 058 293 963 369 931 767
002 870 100 077 634 117 806 947 065 313 041 493 166 361 301 229 548

211 041 678 395 328 423 024 252 709 211 152 491 336 710 866 807 155
489 461 720 972 240 242 439 318 921 153 255 600 182 447 440 371 239
769 835 671 340 627 416 353 527 456 482 323 925 880 475 228 241 474
851 479 777 578 657 948 763 405 165 975 811 728 991 610 869 916 994
607 448 959 715 215 662 786 540 044 607 423 394 864 084 090 084 268
698 154 696 649 218 078 606 186 128 411 306 401 806 675 770 406 199
429 171 977 080 597 975 967 390 639 787 063 575 423 026 331 464 316
783 077 028 570 437 773 716 035 436 830 626 357 982 229 953 252 898
978 409 045 890 201 376 717 935 699 834 211 478 918 222 779 499 547
908 786 493 388 958 558 333 861 693 077 766 867 607 410 761 446 915
346 011 139 047 153 410 385 691 664 585 099 481 084 632 339 034 342
233 064 633 915 110 452 430 310 698 814 973 178 278 428 300 121 332
458 416 351 747 461 155 658 977 864 663 675 268 578 477 496 882 919
907 050 007 358 673 909 724 337 099 879 260 408 979 273 680 315 744
406 690 835 786 798 420 621 006 005 416 389 950 702 790 436 401 305
690 093 875 614 591 323 152 854 764 331 331 867 402 417 793 679 476
413 064 611 743 236 790 714 634 624 735 387 794 933 667 701 442 460
594 892 493 302 306 846 694 340 880 191 792 921 549 573 304 607 239
205 111 485 817 315 081 164 169 305 285 375 676 014 737 529 230 389
421 079 747 204 222 584 577 298 694 268 481 077 032 672 201 847 690
843 517 233 269 488 476 120 729 029 163 409 911 053 735 312 635 165
230 061 806 658 275 094 515 154 018 488 254 907 542 974 921 241 540
545 786 849 391 980 572 354 687 645 335 020 484 131 528 524 272 341
049 417 077 119 118 579 254 786 982 052 496 239 707 677 505 773 695
576 011 428 311 061 875 454 370 460 210 388 148 563 735 847 088 878
958 123 759 364 068 699 970 968 515 215 067 549 512 948 062 826 056
268 945 683 181 960 615 726 823 587 407 876 158 159 973 285 329 942
899 668 271 515 308 079 847 495 836 708 331 647 298 295 940 187 312
565 396 637 678 889 743 596 338 239 690 305 927 062 310 190 641 297
393 224 337 978 336 611 347 887 012 213 949 931 353 442 495 998 115
978 204 716 869 278 393 117 610 435 687 409 235 701 651 294 794 883
950 531 053 704 090 681 014 546 194 692 306 985 502 160 469 077 954
463 950 700 209 042 117 619 710 383 807 068 193 489 229 455 076 722
292 765 913 853 847 411 593 977 395 703 444 558 906 368 416 840 706
929 333 792 521 748 556 739 460 445 168 666 436 231 178 404 495 071
771 636 098 611 007 531 987 620 646 875 009 402 542 270 092 211 238
293 252 691 332 860 167 648 770 561 726 462 378 124 385 524 339 589
760 129 648 377 990 972 906 211 174 726 330 467 318 345 102 930 924
596 248 862 735 507 608 920 063 798 580 667 723 963 253 524 542 868
249 972 718 726 474 967 622 937 309 311 763 718 176 614 757 564 749
584 780 731 735 586 613 613 282 653 880 312 748 499 917 909 582 417
651 671 281 837 311 337 767 322 301 529 535 452 996 594 770 786 605
955 322 743 052 479 385 261 309 965 717 965 123 749 463 760 228 803
268 601 398 405 318 630 206 640 742 196 024 897 358 282 050 766 129
312 092 607 994 945 624 332 325 375 224 655 487 406 119 697 465 775
931 623 814 992 222 818 789 108 929 249 963 458 858 027 434 452 346

929 691 852 595 043 755 757 210 042 531 058 228 954 641 435 712 365
 609 257 949 309 428 251 071 695 348 212 624 283 541 088 297 963 922
 015 647 997 937 614 834 963 846 145 570 500 859 521 614 778 843 320
 177 102 755 731 052 055 084 538 920 036 340 341 061 554 666 897 978
 262 420 135 401 465 730 041 519 358 761 124 857 046 982 059 042 071
 068 761 524 318 587 786 486 614 472 405 088 651 602 364 345 889 543
 809 759 641 055 285 268 763 556 714 992 607 789 973 356 175 387 904
 326 363 945 126 654 591 844 055 039 208 230 496 109 168 692 722 704
 914 757 334 927 736 520 915 406 783 064 974 407 565 986 972 517 411
 274 700 186 177 106 556 340 257 975 473 940 423 464 832 192 734 487
 912 504 103 963 054 039 491 446 597 042 875 356 099 682 005 168 427
 223 699 037 453 510 969 307 213 379 548 334 874 056 252 407 679 925
 935 709 012 492 313 863 951 456 372 841 503 758 479 757 303 757 487
 595 969 934 714 513 312 832 731 848 897 785 161 343 619 278 745 148
 129 688 969 881 524 716 926 277 494 966 788 330 621 044 523 455 606
 046 307 526 049 585 872 318 671 495 098 660 293 713 484 285 927 560
 514 878 668 612 024 531 772 195 491 513 011 462 886 035 460 961 912
 820 482 002 607 983 173 216 312 055 189 238 221 746 072 706 981 081
 066 681 717 541 749 246 206 248 291 744 810 223 736 347 093 409 474
 354 406 841 121 796 366 984 845 313 703 514 364 463 839 759 411 026
 472 944 879 384 317 243 815 806 449 070 085 858 090 944 707 118 283
 626 666 235 725 637 261 252 426 780 533 431 835 138 690 745 097 280
 332 681 201 423 399 947 816 642 685 458 329 774 307 439 952 051 630
 048 374 697 516 765

.1 Matrizes de Hankel

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Então, $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1$.

Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Então, $\det B = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 2 = 1$.

Como obtemos a matriz A ? Ora, $a_{11} = C_0 = 1$, $a_{12} = a_{21} = C_1 = 1$, $a_{22} = C_2 = 2$.

E a matriz B ? Ora, $b_{11} = C_1 = 1$, $b_{12} = b_{21} = C_2 = 2$, $b_{22} = C_3 = 5$.

No caso da matriz A , temos $a_{ij} = C_{1+j-2}$, enquanto que, na matriz B , temos $a_{ij} = C_{1+j-1}$. É claro que C_n representa o número de Catalan de ordem n .

No caso das matrizes 3×3 , temos $A = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}$, tendo-se $\det A = 1$.

E $B = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_2 & C_3 & C_4 \\ C_3 & C_4 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \\ 5 & 14 & 42 \end{bmatrix}$, com $\det B = 1$.

Passemos ao caso das matrizes 4×4 .

$$\text{Então, } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \end{bmatrix} \text{ e } \det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \end{bmatrix} = 1.$$

$$\text{E } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \\ 14 & 42 & 132 & 429 \end{bmatrix}, \text{ com } \det B = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 5 & 14 & 42 \\ 5 & 14 & 42 & 132 \\ 14 & 42 & 132 & 429 \end{bmatrix} = 1.$$

Matrizes 5×5 :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 14 \\ 1 & 2 & 5 & 14 & 42 \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 \end{bmatrix} = 1, \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 & 42 \\ 2 & 5 & 14 & 42 & 132 \\ 5 & 14 & 42 & 132 & 429 \\ 14 & 42 & 132 & 429 & 1430 \\ 42 & 132 & 429 & 1430 & 4862 \end{bmatrix} = 1.$$

E, se continuarmos, iremos obter (sempre) matrizes de determinante 1, desde que se respeite a regra de formação da matriz:

$A = (a_{ij})$, com $a_{ij} = C_{i+j-2}$ e $B = (b_{ij})$, com $b_{ij} = C_{i+j-1}$. É claro que A e B são matrizes quadradas e C_k é o número de Catalan de ordem k .

As matrizes formadas da maneira acima descrita, são as matrizes de Hankel.