

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | Época Especial | Ensino Secundário | 2019

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

11 Páginas

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
 - as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
 - as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).
-

Formulário

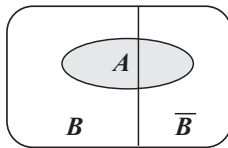
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

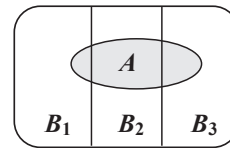
Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 σ – desvio padrão da variável
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 s – desvio padrão amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \hat{p} – proporção amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. O consórcio proprietário do Centro Comercial Futuro (CCF) é formado pelos grupos de investimento A, B e C.

Em 2020, a administração do CCF pretende convidar 150 acionistas dos grupos de investimento A, B e C para assistirem a uma apresentação pública.

Na Tabela 1, apresenta-se o número de acionistas de cada um dos grupos de investimento.

Tabela 1

Grupo de investimento	A	B	C
Número de acionistas	296	364	134

- 1.1. Admita que o número de convites atribuído a cada grupo de investimento será diretamente proporcional ao número de acionistas que o constituem.

Quantos convites serão atribuídos ao grupo C?

- (A) 23 (B) 25 (C) 27 (D) 29

- 1.2. Foi decidido que a distribuição dos 150 convites resultaria da aplicação do método a seguir descrito.

Passo 1: Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de acionistas dos três grupos de investimento pelo número de convites a distribuir.

Passo 2: Calcula-se a quota padrão de cada grupo de investimento, dividindo o número de acionistas de cada grupo pelo divisor padrão.

Passo 3: Se a quota padrão de um grupo de investimento for um número inteiro, atribui-se ao grupo essa quota.

Passo 4: Se a quota padrão de um grupo de investimento não for um número inteiro, calcula-se $\sqrt{L(L+1)}$, sendo L o maior número inteiro menor do que a quota padrão.

Passo 5: Se a quota padrão de um grupo de investimento for menor do que $\sqrt{L(L+1)}$, atribui-se a esse grupo uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor do que a quota padrão; se a quota padrão de um grupo for maior do que $\sqrt{L(L+1)}$, atribui-se a esse grupo uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão. O número de convites a distribuir por cada grupo de investimento é igual à respetiva quota padrão arredondada.

Determine o número de convites que cada grupo de investimento irá receber de acordo com a aplicação do método descrito.

Nos cálculos intermédios, utilize valores arredondados às décimas.

2. A administração do Centro Comercial Futuro pretende arrendar, por 1650 euros mensais, uma área comercial que está dividida em três espaços, E_1 , E_2 e E_3 .

Devido à forma irregular e ao facto de a localização das montras não ser uniforme, cada um dos espaços, E_1 , E_2 e E_3 , foi objeto de uma avaliação diferente.

Na Figura 1, apresenta-se um esquema dessa área comercial, indicando-se a medida da largura, em metros, de cada um dos espaços.

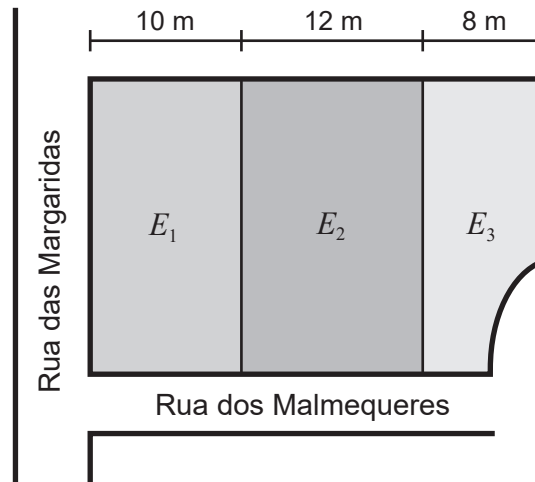


Figura 1

Admita que:

- o espaço E_1 tem 10 metros de largura e está avaliado em 40% do valor do arrendamento da área;
- o espaço E_2 tem 12 metros de largura e está avaliado em 40% do valor do arrendamento da área;
- o espaço E_3 tem 8 metros de largura e está avaliado em 20% do valor do arrendamento da área.

A área comercial será partilhada por dois lojistas, a Cristina e o Jorge, que pretendem dividi-la entre si de modo a que a Cristina fique com uma parcela cujo valor monetário do arrendamento seja o dobro do valor monetário do arrendamento a pagar pelo Jorge.

A divisão da área comercial será realizada traçando, no esquema, uma linha perpendicular à Rua dos Malmequeres, ficando a Cristina com a parte da zona comercial delimitada pela Rua das Margaridas e pela linha marcada.

Determine a largura, em metros, da parcela da zona comercial destinada a Cristina.

3. Numa das alas do Centro Comercial Futuro existem 8 pontos de vigilância, designados A, B, C, D, E, F, G e H, nos quais estão instaladas câmaras de vigilância.

Pretende-se encontrar a solução mais económica para a substituição das ligações internas entre as câmaras.

A Tabela 2 apresenta o comprimento, em metros, das ligações existentes entre os pontos de vigilância.

Tabela 2

	B	C	D	E	F	G	H
A	23		20				
B		25		19	14		
C					15		45
D				22		18	
E					16		30
G							50

De modo a minimizar os custos da intervenção, construiu-se um grafo, adotando-se o procedimento seguinte:

- seleciona-se a ligação de menor comprimento (se houver mais do que uma, escolhe-se ao acaso uma delas);
- em seguida, seleciona-se, de entre as ligações restantes, a de menor comprimento, desde que esta não leve à formação de um ciclo;
- termina-se quando todos os pontos de vigilância pertencerem a alguma das ligações selecionadas no grafo.

Admita que a substituição de cada metro de ligação interna tem o custo de 12 euros.

Determine o custo total da substituição.

Na sua resposta, apresente o grafo que resulta da aplicação do método descrito.

4. Um lojista pretende arrendar uma loja no Centro Comercial Futuro.

A administração do CCF propõe um valor de arrendamento anual que pode ser fracionado e que varia em função do número de pagamentos.

O valor do arrendamento anual, em euros, arredondado às unidades, pode ser fracionado até um máximo de 12 pagamentos e é determinado de acordo com o modelo

$$R_n = 8000 + 100\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \text{ em que } n \text{ é o número de pagamentos}$$

Perante a proposta apresentada pela administração do CCF, o lojista resolve apresentar uma contraproposta. Assim, propõe pagar pelo arrendamento anual da loja o valor de 8350 euros, acrescido de 30 euros por pagamento.

Ou seja, por exemplo, se o lojista optar por fracionar a renda anual em 5 pagamentos, o valor do arrendamento anual por ele proposto será de $8350 + 5 \times 30 = 8500$ euros.

Determine entre que valores pode variar o número de fracionamentos do pagamento do arrendamento anual para que a contraproposta do lojista lhe seja mais vantajosa do que a proposta apresentada pela administração do CCF.

Para responder a esta questão, recorra à sua calculadora e apresente a(s) linha(s) relevante(s) da(s) tabela(s) visualizada(s).

5. No Centro Comercial Futuro são realizados, periodicamente, inquéritos junto dos clientes com o objetivo de conhecer as suas preferências.

5.1. Num certo dia, foram inquiridos 50 clientes acerca do valor, em euros, que haviam gastado em compras nesse dia.

Na Tabela 3, encontram-se registados os dados recolhidos.

Tabela 3

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	6	6	10	12	14	16	18	18	19
20	21	22	23	26	29	31	32	34	36
39	41	42	42	43	46	49	51	53	55
57	59	68	78	98	102	107	143	168	197

Concluiu-se que 60% dos clientes inquiridos gastaram, em compras, no máximo, _____ euros.

Qual a opção que completa a frase com correção?

(A) 34

(B) 36

(C) 39

(D) 40

- 5.2. Foi pedido ao João e à Maria, dois colaboradores do CCF, que cada um perguntasse a 50 clientes (perfazendo o total de 100 clientes) quantos artigos haviam comprado naquele dia. O João organizou os dados numa tabela (Tabela 4), e a Maria organizou os dados num gráfico de barras (Gráfico 1).

Tabela 4

N.º de artigos comprados	N.º de clientes
0	8
1	14
2	12
3	13
a	3

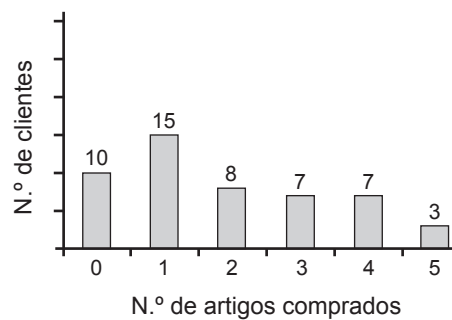


Gráfico 1

- 5.2.1. Admita que a média do número de artigos comprados pelos 50 clientes inquiridos, cujos dados se encontram representados na Tabela 4, é 1,96

Determine o valor de a

- 5.2.2. Considere agora que $a = 4$

Construa um diagrama de extremos e quartis que traduza os dados relativos ao número de artigos que os 100 clientes inquiridos compraram naquele dia no CCF.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades da sua calculadora e apresente a(s) lista(s) utilizada(s).

6. Desde que foi inaugurado, o Centro Comercial Futuro tem, ano após ano, cada vez mais visitantes. De acordo com a informação disponível, o número anual de visitantes do CCF, em milhares, t anos após o início do ano de 1990, é bem aproximado pelo modelo seguinte

$$V(t) = \frac{120}{1 + 5e^{-0,5t}}$$

- 6.1. Determine em que ano o número de visitantes anuais do CCF ultrapassou pela primeira vez o valor de 75 000

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às décimas.

- 6.2. Determine o valor da percentagem de aumento do número de visitantes do CCF entre o início de 1995 e o início de 2000.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

7. O Centro Comercial Futuro dispõe de dois parques de estacionamento, um interior e um exterior.

- 7.1. De um conjunto de 80 automóveis que entraram num dos parques do CCF, foi possível observar que:

- um quarto eram conduzidos por mulheres;
- metade eram ocupados apenas pelo condutor;
- dos conduzidos por homens, um terço eram ocupados apenas pelo condutor.

Determine quantos desses automóveis eram conduzidos por uma mulher que viajava sozinha.

(A) 20

(B) 25

(C) 30

(D) 40

- 7.2. De acordo com um estudo efetuado junto dos clientes do CCF que estacionam o seu automóvel num dos parques de estacionamento do centro comercial, foi possível apurar que 90% estacionam o automóvel no parque interior.

Admita ainda que:

- 70% dos clientes que estacionam o automóvel no parque interior são mulheres;
- 60% dos clientes que estacionam o automóvel no parque exterior são homens.

Considere que se escolhe, ao acaso, um cliente que estacionou o seu automóvel num dos parques do CCF.

Determine a probabilidade de esse cliente ter estacionado o seu automóvel no parque interior, sabendo-se que é homem.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

7.3. De acordo com a informação recolhida, o tempo de estacionamento dos automóveis nos parques de estacionamento do CCF segue uma distribuição aproximadamente normal, de valor médio 2,5 horas e desvio padrão 30 minutos.

Considere 20 000 clientes que estacionam o seu automóvel nos parques de estacionamento.

Determine quantos desses clientes será de esperar que tenham o automóvel estacionado durante um período de tempo superior a 2 horas.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

8. Admita que, numa amostra de 500 clientes do Centro Comercial Futuro, 150 afirmam que o CCF necessita de obras de remodelação.

Com base nesta informação, construa um intervalo de confiança a 90% para a proporção dos clientes do CCF que consideram que este precisa de obras de remodelação.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve cinco casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Item														TOTAL
Cotação (em pontos)														
1.1.	1.2.	2.	3.	4.	5.1.	5.2.1.	5.2.2.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	7.3.	8.	
8	16	16	16	16	8	16	16	16	16	8	16	16	16	200