Capítulo 3- Modelos populacionais

(Versão: para o manual a partir de 2016/17)

3.1- Introdução (página 84 do manual) **<u>(Vídeo 29)</u>**

Aqui pretendemos estudar a evolução do número de indivíduos de uma população.

(84) **Crescimento** populacional **positivo**: Há um aumento da população inicial.
Crescimento populacional **negativo**(ou declínio): Há uma diminuição da população inicial.

(84) **Crescimento contínuo**: as mudanças acontecem a todo o instante. (exemplo: crescimento de uma planta)
Crescimento discreto: as mudanças acontecem de tempos a tempos.(exemplo: nascimento de crianças numa vila.)

3.2- Modelos de crescimento.

3.2.1) Crescimento linear (85)

Em cada transição, aumentamos sempre o mesmo valor. O gráfico é formado por pontos em linha reta.

Exemplo 1(85) O João tem 350 euros e recebe 40 euros por mês.

Daqui a um mês terá 350 +40= 390

Daqui a dois meses terá 350 +2*40= 430

Daqui a cinco meses terá 350 + 5*40= 550

Daqui a ***n*** meses terá 350 + ***n****40

Se quisermos saber ao fim de quanto tempo, obtemos 830 euros, devemos resolver a equação 350 + ***n****40 = 830. (R:n=12)

<u>Nota:</u> No exemplo 1, verificamos que, na transição de um mês para o outro, há sempre um aumento de 40 euros. Temos uma Progressão aritmética de razão 40.

(86) **Sucessão** é uma sequência infinita de números que podem respeitar uma determinada ordem.

(87) **progressão aritmética**(p.a.) é uma sucessão em que é constante a diferença entre duas transições consecutivas.

A essa constante chamamos **razão**, r, da progressão.

No caso de crescimento populacional, a <u>razão</u> representa a **taxa de crescimento** da população.

Exemplos de progressões aritméticas:

1) Considere a sequência: 7; 10; 13; 16; 19; 22, …….

P.a. U_o=7 (valor inicial) r=3 (Razão)

Expressão geral: Un= 7+ 3n

2) Consideremos uma p.a. em que U_5=21 e U_7=29

Calculemos r, U_0, U_{10} e U_n (r=4 u_0=1 U_{10}=41, U_n=1+4n)

3) Consideremos uma p.a. em que U_1=7 e U_{12}=62 (r=5, U_n=2+5n)

Calculemos o valor de r e a expressão geral U_n.

☞***Exercícios(112:) 1 a 5***

(87)**Modelo de Crescimento Linear discreto** é um modelo em que a evolução da população é descrita por uma progressão aritmética.

(**Pn+1 – Pn = r**).

Para um modelo linear discreto: **P_n= P_0+ n.r**, com n natural.

<u>*Recordar*</u>: Juro simples- O juro é depositado numa conta à ordem. O valor do juro ganho em cada período de tempo é sempre o mesmo.

☞***Atividade 1*** (87) Juro Simples.

Exemplo 2(88) Modelo de regressão linear.

(89)**Modelo de Crescimento Linear Contínuo. P(t)=at+b**

☞***Atividade 2(*** 90) Regressão linear.

3.2.2- Modelo de crescimento Exponencial (91)(Vídeo 30)

Em cada transição, multiplicando sempre o mesmo número. Na expressão geral aparece um expoente.

Recordar: No **juro composto** o juro produzido em cada período de tempo é adicionado ao capital. No período seguinte, o valor do juro aumenta por ter aumentado o capital.

Para um depósito inicial $\mathbf{C_0}$, a uma taxa de juro **i**, o capital $\boldsymbol{C_n}$ ao fim de ***n*** anos é dado por:

$$C_n = C_0.\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

Exemplo: pg 91.

(91) **Progressão Geométrica** (p.g.) é uma sucessão em que é constante o quociente entre duas transições. A essa constante, que é a Taxa de crescimento, chamamos **razão** da progressão.

Exemplos – Progressões geométricas.

1) Consideremos a sequência: 3; 6; 12; 24; 48; 96,….

Podemos verificar que $\frac{6}{3} = 2;\quad \frac{12}{6} = 2\ ;\quad \frac{24}{12} = 2;\ \frac{48}{24} = 2;\ \frac{96}{48} = 2$

Temos uma progressão geométrica de razão 2, isto é:

U_n é uma p.g. com U_0=3 e r= 2. O termo geral será $Un=3\times2^n$

2) Temos uma p.g. com Uo=5 e r=3 Determinemos U_1, U_4 e o termo geral.

3) Temos uma p.g. em que U_5=5120 e U_3=320.

Determinemos U_0, r e Un.

☞***Exercícios(112)***: 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13.

Modelo de **crescimento Exponencial discreto**(91)

é um modelo em que a evolução da população é descrita por uma progressão geométrica. ($\frac{P_{n+1}}{P_n}$=r)

Para um modelo de crescimento exponencial discreto, temos:

$\mathbf{P_n=P_0.r^n}$, com n natural

☞***Atividade 4***(92)

Exemplo:

Uma população cresce de acordo com o modelo $Y_n=5\times1{,}12^n$ com n em anos.

Ao fim de quantos anos atingimos os 1100 elementos?

1º processo: Tentativas. Vamos experimentando vários valores para n…. (R: n=48)

2º processo: Tabela. Fazemos $Y_1=5\times1{,}12^x$ e pedimos a tabela.

3º processo: Gráfico Usando o trace. (window: $0<x<50$ $0<y<1500$)

4º processo: usar a interseção fazendo $Y_1=5\times1{,}12^x$ e $Y_2= 1100$ pedimos o gráfico e depois: Calc/ intersect ou isct.

Nota: O número ***e***

A sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Tende para "e". A sucessão $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ Tende para "e^k"

e≈ 2,718 Número de Euler (também conhecido por número de Neper).

Juros e capitalizações (Livro: 92-93)- exemplo

Modelo de Crescimento Exponencial contínuo (93)

$P(t)=P_0.e^{kt}$ sendo k constante.

☞***Exercício(113):14*** Juro composto. Capitalizações.

Exemplo 3(94)

<u>Calculadora gráfica(CG) (Casio-280; Texas TI84-284, Texas Inspire-288).</u>

☞***Atividade 5***(95)

Exemplo 4 (95)- Regressão exponencial.

4.2) Texas: $247{,}81*1{,}43^t$ Casio: $247{,}81*e^{0{,}36t}$

☞**Atividade 6**(97).

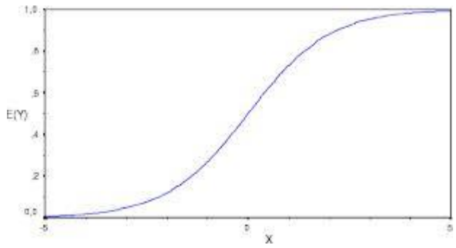
☞**Atividade 7**(97).

Exercícios(113): 15, 16, 17, 18.

(Sugestão: recapitular resolução de sistemas de equações)

3.2.3- Modelo de crescimento Logístico(98)(Vídeo 31).

Este modelo tem algumas semelhanças com o modelo exponencial. Aqui começamos com um crescimento lento, seguido de um crescimento rápido e de um crescimento lento, até estabilizar. É um modelo mais realista sobre os modelos de crescimento populacional.



A sua expressão é dada por

$$P(t) = \frac{c}{1+a.e^{-bt}} \qquad (98)$$

Exemplo 5(98)

☞***Exercícios(113): 19, 20, 21, 22.***

☞***Atividade 8*** (101).

Exemplo 6(101).

3.2.4- Modelo de crescimento Logarítmico.(104)(Video 32).

<u>Noção de logaritmo:</u> **$a^x=y \Leftrightarrow x=\log_a y$**

X é o <u>logaritmo</u> de y na base "a"

Exemplos:

1) $2^5=32 \Leftrightarrow 5=\log_2 32$

2) $3^4=81 \Leftrightarrow 4=\log_3 81$

3) $4^3=64 \Leftrightarrow 3=\log_4 64$.

C.G. $\boxed{\text{Log}}$ significa logaritmo de base 10. $\boxed{\text{Ln}}$- Logaritmo de base *e*.

Questão : se a calculadora tem apenas as bases "e" e "10", como fazemos para calcular os outros logaritmos?

Resposta: fazemos uma mudança de base de acordo com a fórmula seguinte:

Conversão ou mudança de base:

$$log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad \text{ou} \quad log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Exemplo de aplicação: $log_2 64 = \frac{\log 64}{\log 2}$.

Exemplos:

1) $log_2 32$ =5 **2)** $log_3 81$=4 **3)** $log_4 64$=3 **4)** $log_{10} 1000 = 3$

5) $log_{\,10} 1$ **6)** $log_2 1$ **7)** $log_e 1$ **8)** $log_{100} 10$ **9)** $log_{10} 10$ **10)** $log_5 5$ **11)** $log_{\,20} 20$

12) $log_5 5^4$ **13)** $log_6 6^7$ **14)** $log_{10} 10^2$

Propriedades (105)

$$\mathbf{Log_a 1=0 \qquad log_a a=1 \qquad log_a a^b=b}$$

Exemplos: Determinar o valor de x

1) $\log_5 X = 3 \Leftrightarrow x=5^3 = 125$ **2)** $\log_2 X = 8 \Leftrightarrow x=2^8 = 256$

3) $2^x=120 \Leftrightarrow x= \log_2 120$

4) $3^{1+2X}=2187 \Leftrightarrow 1+2X=\log_3 2187 \Leftrightarrow x= (7-1)/2 \Leftrightarrow x= 3$

Exemplo 7 (105)

Modelo de Crescimento logarítmico.

$$\mathbf{P(t) = K+ \log_a t}$$

☞**Atividade 10**(105). ☞**Exercícios(115): 23**

Exemplo 8(106) ☞***Atividade 11***(107). ☞***Exercícios(115): 24*, 25, 26.**

☞***Exercícios globais***(117): 9, 10+ 24 até 40.

☞Caderno de exercício pg 26 a 444.

☞Net: teste 2, exames por assuntos- 6- modelos populacionais, Fichas de trabalho 5,6,7, resumo-- assunto 6.