Tema 4- Modelos de probabilidade.

(Versão: para o manual a partir de 2016/17)

1- Modelos de probabilidade(136)

1.1) Introdução.(36) (Vídeo: 33)

1.2) Fenómenos aleatórios(138)

Experiência determinística-produz sempre o mesmo resultado desde que seja repetido nas mesmas condições.

Exemplo: colocar um gelado ao sol em pleno verão- derrete.

Experiência aleatória- não é possível saber com exatidão o resultado que se obterá.

Exemplo: A face que fica voltado quando se lança um dado.

☞***Exercícios(202): 1 e 2***.

Espaço de resultados ou **espaço amostral-** é o conjunto de todos os resultados possíveis dessa experiência.

Acontecimento- é qualquer subconjunto do espaço de resultados.

Acontecimento elementar- é composto por apenas um elemento do espaço de resultados.

Acontecimento certo- é aquele que ocorre sempre.

Acontecimento impossível- é aquele que nunca se realiza.

Exemplo 1(139)   ***Exercícios(202): 3, 4.***

Operações com acontecimentos(141)

União, Interseção, complementar, diferença..

1.3) Argumentos de simetria. Regra de Laplace.(144).

Dois acontecimentos são **equiprováveis** se tiverem a mesma probabilidade de ocorrer.

Exemplo 1(144).   ***Exemplo 2(***144).

Regra de Laplace- A probabilidade (P) de um acontecimento (A) é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis à sua realização e o número de casos possíveis, ou seja:

$$p(A) = \frac{N^{\underline{o}}\ de\ casos\ favoráveis\ a\ A}{N^{\underline{o}}\ de\ casos\ possíveis}$$

*Exemplo 3(*145).

☞***Atividade 1***(146).

☞***Atividades 2,3***(146).

☞***Exercícios(202)***:8, 9, 10.

Regra do produto(147)- Se uma experiência se pode decompor de duas escolhas sucessivas, a primeira com m possibilidades e a segunda com n possibilidades, então existem m×n formas diferentes de a realizar.

Exemplo 4(147).

Exemplo 5(148).

☞***Exercício(203): 11***.

☞***Atividade 5***(150).

☞***Atividade 6***(151)

☞***Atividade 7***(151)

☞***Atividade 8***(151).

Definição axiomática de probabilidade(152)

Exemplo 8(152).

☞***Atividade 9*** (153).

1.4- probabilidade condicional. Acontecimentos independentes.(154).(Vídeo 34)

Exemplo 1(154).

Probabilidade do acontecimento A, **sabendo-se que** o acontecimento B se verificou, representa-se por **P(A\B)** e é dada por:

$$\boldsymbol{P(A\backslash B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}\ \text{(155)}$$

Nota: Da fórmula apresentada acima, podemos deduzir que:

P(A∩B)=P(A\B)×P(B)

Exemplo 2(155).

Exemplo 3(156).

Exemplo 4(157). ***Exemplo 5***(157). ***Exemplo 6***(158).

☞***Atividades 1, 2, 3*** (159).

1.4.1- Acontecimentos Independentes.(160)

Dois acontecimentos A e B são **independentes entre si** se a realização de um deles não modifica a probabilidade do outro, ou seja:

P(A\B)=P(A) e **P(B\A)=P(B).**

Exemplo 7(160).

<u>Nota</u>: Se A e B são <u>independentes</u>, então:

P(A∩B)=P(A)×P(B) **(161)**

☞***Atividade 4***(161).

Exercício(207): 31

1.5- Probabilidade Total. Regra de Bayes (162).

Teorema da Probabilidade Total(162).

Se os acontecimentos A1, A2, …são incompatíveis e a sua reunião é igual ao espaço de resultados (Ω), então, para qualquer acontecimento B, temos

P(B)= P(B\A1)×P(A1) + P(B\A2)×P(A2) + ….

Exemplo 1(162) ***Exemplo 2***(163)

<u>Nota:</u> Quando temos o valor da probabilidade P(B\A) e queremos obter a probabilidade P(A\B), usamos a regra seguinte.

Regra de Bayes(163) $.\boldsymbol{P(A\backslash B)}\,\frac{\boldsymbol{P(B\backslash A)\times P(A)}}{\boldsymbol{P(B)}}$

Exemplo 3(164). ***Exemplo 4***(164).

☞***Atividades 1, 2, 3***(165).

☞***Exercícios(207):*** 32, 33, 34, 35, 36, 37.

1.6- Modelos de probabilidade em espaços finitos. Função massa de probabilidade.(166).

Exemplo 1(166).

Exemplo 2 (167).

União AUB Interseção A∩B Diferença A\B

De A∩B=∅, dizemos que A e B são **Incompatíveis**.

Regra:

Se R∩S= ∅, então P(RUS)=P(R) + P(S)

Exemplo:

Seja Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6} A={1, 2} B={2, 3} C={4, 5, 6}

P(A)=2/6 P(B)=2/6 P(C)=3/6 P(BUC)=5/6 P(AUB)=3/6

☞***Atividade 1***(167)

Função massa de probabilidade ou **distribuição** de probabilidade.- é uma função que a cada elemento do suporte do modelo de probabilidade faz corresponder a respetiva probabilidade.

Exemplo3(168)

Exemplo 4(169). ***Exemplo 5***(170) ***Exemplo 6***(170) ***Exemplo 7***(171)

☞***Atividade 2***(171).

☞***Atividade 3***(171). ☞***Atividade 4***(171)

☞***Exercícios(208)38, 39*, 40, 41, 42.**

1.7- Valor médio e variância populacional(172).

Média amostral $\bar{x}$ Valor médio populacional: μ.

Exemplo 1(172).

Modelo de probabilidade (173).

Valor médio (ou valor **esperado)** (174). $\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i}$

Variância e **desvio-padrão** de um modelo de probabilidade:

$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times P_i$ $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ (174)

Exemplo 2(175)

☞***Atividades 1, 2*** (175). ☞***Exercícios(209):43, 44***.

1.8- Espaços de resultados infinitos.

Modelos discretos e Modelos contínuos. (176)

1.8.1- Modelos discretos. (176) (vídeo 36)

Modelo de Poisson (177).

Nota: Este modelo usa-se sobretudo para variáveis que representam o número de vezes que determinado fenómeno ocorre num dado período de tempo.

Exemplo: número de aviões que chegam a um aeroporto, por dia.

$$\boldsymbol{P(X=K) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^K}{K!}} \qquad \mathbf{E(X)=\lambda} \qquad \mathbf{Var(X)=\lambda}$$

k! fatorial Exemplo: 3!=3×2×1 1!=1 0!=1

Factorial na calculadora: (C.G: texas: Math/prob Casio: optn/prb)

Exemplo 1(177). ***Exemplo 2(***178). ☞***Exercícios(209): 45, 46***.

Modelo Geométrico.(180)

Nota: Este modelo utiliza-se quando queremos saber qual é a probabilidade de que certo acontecimento se realize ao fim de k experiências. Isto significa que antes de um sucesso, houve k-1 insucessos.

Exemplo: no lançamento de um dado, qual é a probabilidade o "6" apenas sair ao fim de 10 lançamentos?

Resposta: P(X=10) = $\left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \left(\frac{1}{6}\right)$

O modelo geométrico é dado por:

$$\mathbf{P(X=K)=(1-p)^{k-1}\times p} \qquad \mathbf{E(X)=\frac{1}{p}} \qquad \mathbf{Var(X)=\frac{1-p}{p^2}}$$

Reparemos que "**p**" é a probabilidade de <u>sucesso</u> e"**1-p**" é a probabilidade de <u>insucesso</u>.

Exemplo 3 (180) ☞***Exercícios(210):47, 48.***

Modelo Binomial (181)

Nota: Pretendemos calcular a probabilidade de termos k sucessos num total de n provas, onde a probabilidade de sucesso é constante(p).

$\boldsymbol{P(X = K) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.p^k.(1-p)^{n-k}}$ **E(X)= n.p Var(X)= n.p.(1-p)**

Exemplo: Se lançarmos um dado 10 vezes, qual é a probabilidade de obtermos o "6", 3 vezes? Resposta: $P(X = 3) = \frac{10!}{3!(7)!}.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^7$

Exemplo 4(182) ☞**Atividade 3**(182).

1.8.2- Modelos Contínuos(183)(Vídeo37).

Modelo Uniforme (184)

Exemplo 5(184) Para variáveis uniformemente distribuídas.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad (186)$$

Probabilidade associada ao intervalo [c, d]:

$$\boldsymbol{P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}} \quad (186)$$

☞***Atividade 4***(186) ☞***Exercícios(210):50, 51.***

Modelo Exponencial (187)

Nota: Este modelo aplica-se nas situações em que o objetivo é determinar o tempo de espera até se dar uma determinada ocorrência.

Exemplo: Qual a probabilidade de esperar entre 6 e 10 minutos para ser atendido no balcão de uma agência bancária?

O **valor médio** é dado por: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

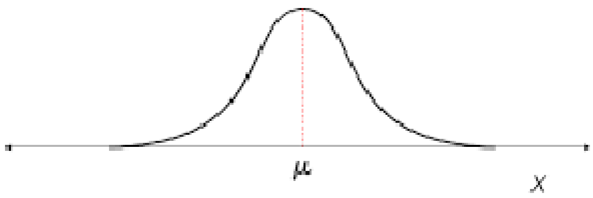
A **probabilidade** de ter uma demora entre a e b, isto é, num intervalo [a, b], é dado por:

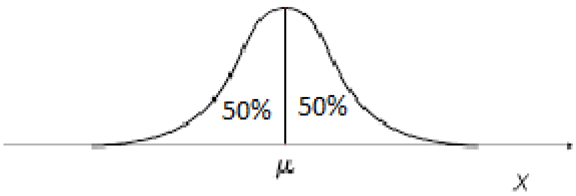
$$\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$$

☞***Atividade 6***(188) ☞***Exercícios(210): 52 e 53***.

1.9- Modelo Normal(189)(Vídeo 38)

Nota: Neste modelo, a curva tem a forma de sino e é simétrica em relação à media, a que corresponde o valor máximo da curva.





Se X é uma variável aleatória **normal** com média μ e desvio padrão σ, representamos por: **X~N(μ, σ)**

Questão: como calcular valores de probabilidades neste modelo?

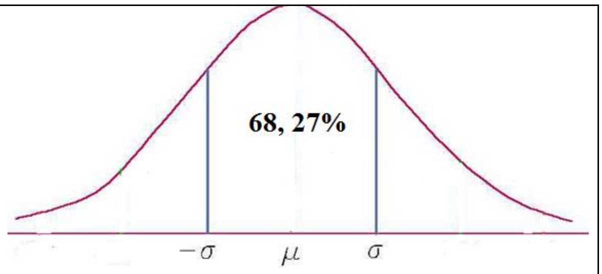
Resposta: Primeiro utilizaremos uma regra designada "68, 95, 99.7", depois usaremos uma tabela(página 160 do livro) e, para confirmar, usaremos a calculadora gráfica.

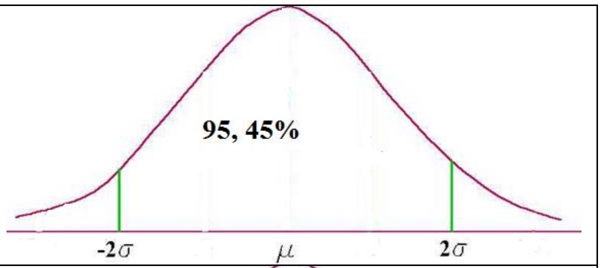
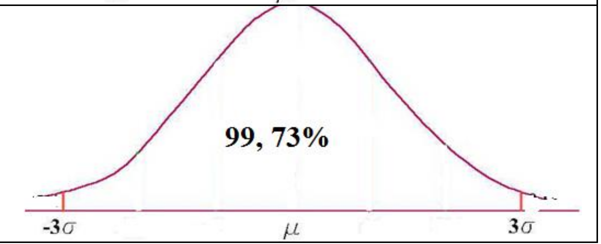
Regra dos 68, 95, 99.7

A percentagem de valores contidos no intervalo [μ-σ, μ+σ] é de, aproximadamente 68.27%.

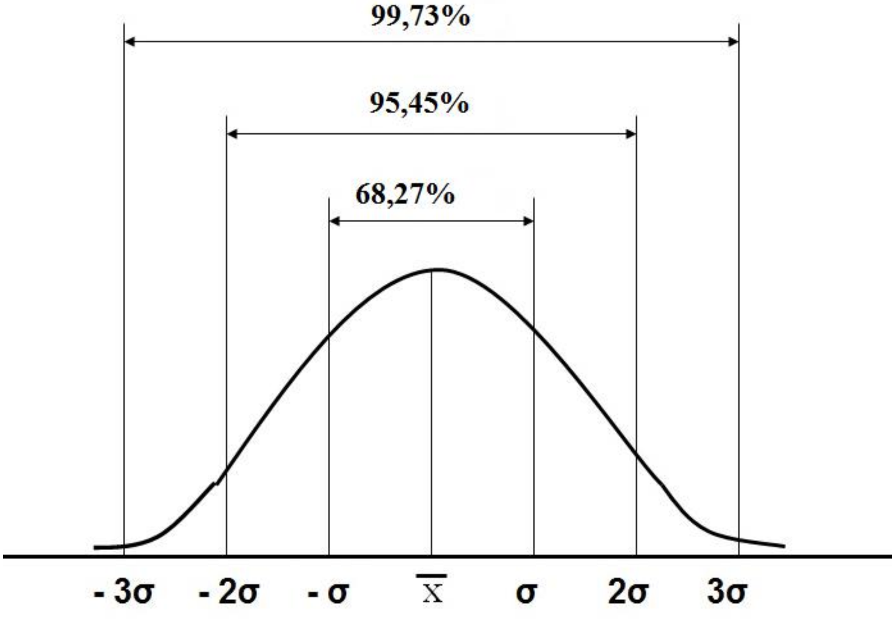
Do mesmo modo, temos valores associados aos intervalos: [μ-2σ, μ+2σ] e [μ-3σ, μ+3σ]

Em termos de probabilidade, temos:

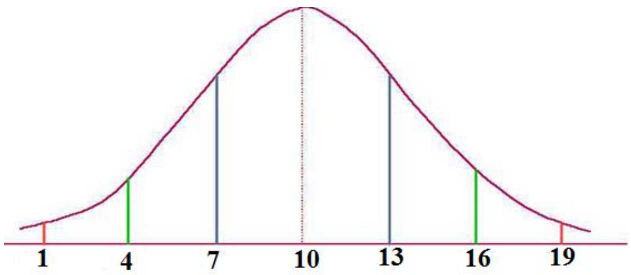
$\boldsymbol{P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 68.27\%}$	

$P(\boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{\mu} + 2\boldsymbol{\sigma}) \approx \mathbf{95.45}\%$	
$P(\boldsymbol{\mu} - 3\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{\mu} + 3\boldsymbol{\sigma}) \approx \mathbf{99.73}\%$	

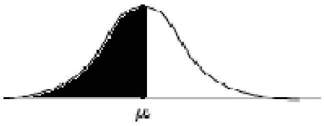
<u>Em síntese, temos:</u>



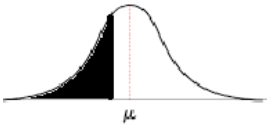
Exemplo- a variável aleatória X tem distribuição Normal com valor médio 10 e desvio-padrão 3, isto é, X~N(10,3).



Usando a regra dos 68, 95, 99.7, calculemos as seguintes probabilidades:



.1) P(X<10) =P(X<μ)= 50%



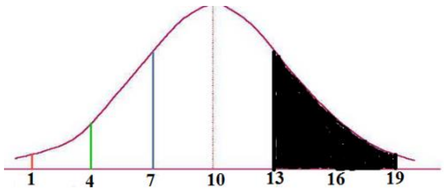
.2) P(X<7)= P(X < μ – σ)= $\frac{100\%-68{,}27\%}{2}$ =15,865%

.3) P(7<X<13)= P(μ-σ<X<μ+σ) = 68,27%

.4) P(4<X<16)= P(μ-2σ<X<μ+2σ)=95,45 %

.5) P(1<X<19)= P(μ-3σ<X<μ+3σ)=99,73%

.6)) P(13<X<19)= P(μ+σ<X<μ+3σ)= $\frac{99{,}73\%}{2} - \frac{68{,}27\%}{2}$ = 49,865%-34,135= 15,73%



.7) P(7<X<16)= P(μ-σ<X<μ+2σ)= $\frac{68{,}27\%}{2} + \frac{95{,}45\%}{2} = 81{,}86\%$

.8) P(X<13)= 50% + $\frac{68{,}27\%}{2}$ = 84,135%

.9) P(X>4) **.10)** P(X<1) **.11)** P(13<X<16) **.12)** P(4<X<13)

Exemplo 1(191)

Nota: De seguida, vamos ver um segundo processo para calcular probabilidades no modelo normal, mesmo que os valores pretendidos nada tenham a ver com μ, μ±σ, μ±2σ ou μ±3σ.

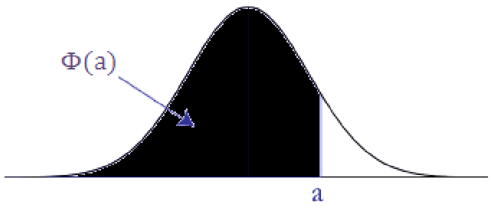
Tabela da Normal Standard (193)

Na normal **standard** ou (normal **reduzida**) a média é zero e o desvio padrão é 1.

U ~ N(0, 1)

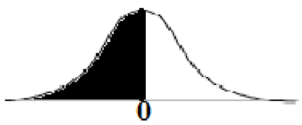
No caso da normal standard, existe uma tabela que nos permite calcular os valores das probabilidades- página 160 do livro.

Os valores da tabela são representados pela função ϕ, e representam a probabilidade de X ser menor que "a", isto é ϕ(a)=P(X≤a)



Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplos: Seja U **~** N(0, 1). Utilizando os valores da tabela da normal standard (página 160), Calculemos as seguintes probabilidades:

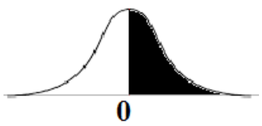
.1) $P(U<0)= \phi(0)= 0.5000$ 

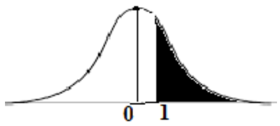
(Tabela: a= .0 Coluna: .00)

.2) $P(U< 1) = \phi(1)= 0.8413$ (Tabela: a=1.0 coluna .00)

.3) $P(U<2.73)= \phi(2.73)= 0.9968$ (Tabela a= 2.7 coluna .03)

.4) $P(U<1.14) = \phi(1.14)= 0.8729$ (Tabela a= 1.1 coluna .04)

.5) $P(U>0)=1- \phi(0)=1- 0.5= 0.5$ 

.6) $P(U>1)= 1- \phi(1)= 1- 0.8413= 0.1587$ 

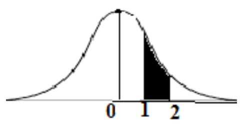
.7) $P(U> 1.14) = 1- \phi(1.14)= 1- 0.8729= 0.1271$

.8) P(U< -1) = 

$=P(U>1)= 1- \phi(1)= 1- 0.8413= 0.1587$

.9) $P(U< - 1.72) = P(U> 1.72) = 1 - \phi(1.72)= 1- 0.9573= 0.0427$

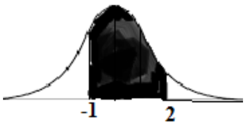
.10) $P(U<-2) =P(U<2) = 1- \phi(2)= 1- 0.9772= 0.0228$

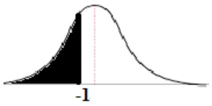
.11) $P(1<U<2) = \phi(2)- \phi(1)= 0.9772- 0.8413= 0.1359$ 

.12) $P(1.7<U<3.1)= \phi(3.1)- \phi(1.7)= 0.9990- 0.9554= 0.0436$

.13) $P(-2<U< -1) = P(1<U<2)= \phi(2)- \phi(1)= 0.9772- 0.8413= 0.1359$

.14) P(-1<U<2) = ϕ(2)- ϕ(-1)= ϕ(2) - [1-ϕ(1)]=0.9772- (1- 0.8413)= 0.8185





Nota: Para podermos usar a tabela da normal standard (página 193), é necessário garantir que a média seja zero e o desvio-padrão seja 1, Caso contrário, temos de usar a seguinte conversão:

$$\boldsymbol{U = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

Exemplo: X~N(5, 2) logo $U = \frac{X-5}{2} \sim N(0,1)$

Exemplos:

1) X~N(5, 2) Calculemos P(X<6).

P(X<6) = $P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{6-5}{2}\right) = P(U < 0.5) = 0.6915$

2) Seja X~N(8, 3) Calculemos **2.1)** P(X<11) **2.2)** P(X>14).

2.1) P(X<11) = $P\left(\frac{X-8}{3} < \frac{11-8}{3}\right) = P(U < 1) = 0.8413$

2.2) P(X>14)= $P\left(\frac{X-8}{3} > \frac{14-8}{3}\right) = P(U > 2)$ =1-ϕ(2)= 1- 0.9772= 0.0228

☞***Atividade 1***(195)

☞***Exercícios(210):54, 55, 56, 57, 58.***

Calculadora Gráfica

Nota: Também podemos Calcular valores aproximados da probabilidade referente à distribuição normal utilizando a calculadora gráfica.

Casio Dist/ Normal c.d/…

Texas Distr/ normalCdf(min, máx, media, desvio)

Sugestão: para valores menores do que…., utilize como valor mínimo: ” – 1000 000”

Para valores maiores do que…, utilize como valor máximo: “ 1000 000”

Ex.1) X tem distr. Normal com média 10 e desvio-padrão 2. Calcule:

1.1) p(6<X<7) 1.2) p(X>9) 1.3) p(X<6)

Exercícios globais(212) 1 a 20.