

## Tema 4- Modelos de probabilidade.

### 1- Modelos de probabilidade(136)

#### 1.1) Introdução.(36) [Vídeo: 33]

#### 1.2) Fenómenos aleatórios(138)

**Experiência determinística**-produz sempre o mesmo resultado desde que seja repetido nas mesmas condições.

**Exemplo:** colocar um gelado ao sol em pleno verão- derrete.

**Experiência aleatória**- não é possível saber com exatidão o resultado que se obterá.

**Exemplo:** A face que fica voltado quando se lança um dado.

📖 **Exercícios(202): 1 e 2.**

**Espaço de resultados** ou **espaço amostral**- é o conjunto de todos os resultados possíveis dessa experiência.

**Acontecimento**- é qualquer subconjunto do espaço de resultados.

**Acontecimento elementar**- é composto por apenas um elemento do espaço de resultados.

**Acontecimento certo**- é aquele que ocorre sempre.

**Acontecimento impossível**- é aquele que nunca se realiza.

**Exemplo 1**( 139)    **Exercícios(202): 3, 4.**

#### Operações com acontecimentos(141)

(exemplo do livro...)

União, Interseção, complementar, diferença..

**Exemplo 2**(142)+ **Exemplo 3** (143)

**Exercícios (202): 5, 6, 7.**

#### 1.3) Argumentos de simetria. Regra de Laplace.(144).

Dois acontecimentos são **equiprováveis** se tiverem a mesma probabilidade de ocorrer.

**Exemplo 1**( 144).    **Exemplo 2**(144).

**Regra de Laplace-** A probabilidade (P) de um acontecimento (A) é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis à sua realização e o número de casos possíveis, ou seja:

$$p(A) = \frac{N^{\circ} \text{ de casos favoráveis a } A}{N^{\circ} \text{ de casos possíveis}}$$

**Exemplo 3(145).**

☞ **Atividade 1(146).**

☞ **Atividades 2,3(146).**

☞ **Exercícios(202):**8, 9, 10.

**Regra do produto(147)-** Se uma experiência se pode decompor de duas escolhas sucessivas, a primeira com m possibilidades e a segunda com n possibilidades, então existem  $m \times n$  formas diferentes de a realizar.

**Exemplo 4( 147).**

**Exemplo 5( 148).**

☞ **Exercício(203): 11.**

☞ **Atividade 5(150).**

☞ **Atividade 6(151)**

☞ **Atividade 7(151)**

☞ **Atividade 8(151).**

### **Definição axiomática de probabilidade( 152)**

**Exemplo:**  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   $A = \{1, 2, 3\}$   $B = \{3, 4\}$   $C = \{4, 5\}$

$$P(A \cup B) = \dots \quad P(A \cup C) = \dots \quad P(\emptyset) = \dots \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

**Exemplo 8( 152).**

☞ **Atividade 9 (153).**

**Exercícios: (203): 12, 13, 14, 15.**

## 1.4- probabilidade condicional. Acontecimentos independentes.(154).[Vídeo 34]

**Exemplo 1**(154).

**Probabilidade** do acontecimento A, **sabendo-se que** o acontecimento B se verificou, representa-se por  $P(A|B)$  e é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (155)$$

Nota: Da fórmula apresentada acima, podemos deduzir que:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

**Exemplo 2**(155).

**Exemplo 3**(156).

**Exemplo 4**(157).    **Exemplo 5**(157).    **Exemplo 6**(158).

☞ **Atividades 1, 2, 3** (159).

### 1.4.1- Acontecimentos Independentes.(160)

Dois acontecimentos A e B são **independentes entre si** se a realização de um deles não modifica a probabilidade do outro, ou seja:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B).$$

**Exemplo 7**(160).

**Nota:** Se A e B são independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (161)$$

☞ **Atividade 4** (161).

**Exercício(207):** 31

## 1.5- Probabilidade Total. Regra de Bayes (162).

**Exemplo:** Temos duas caixas com bolas brancas e bolas pretas. cx1:[5B 5P] cx2:[2B 8P] escolhemos aleatoriamente uma caixa e, dessa caixa, escolhemos uma bola. Qual é a probabilidade de essa bola ser branca?

**Teorema da Probabilidade Total( 162).**

Se os acontecimentos  $A_1, A_2, \dots$  são incompatíveis e a sua reunião é igual ao espaço de resultados ( $\Omega$ ), então, para qualquer acontecimento  $B$ , temos

$$P(B) = P(B \setminus A_1) \times P(A_1) + P(B \setminus A_2) \times P(A_2) + \dots$$

Ou

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots$$

**Exemplo 1( 162)      Exemplo 2( 163)**

**Nota:** Quando temos o valor da probabilidade  $P(B \setminus A)$  e queremos obter a probabilidade  $P(A \setminus B)$ , usamos a regra seguinte.

$$\text{Regra de Bayes(163)} \quad P(A \setminus B) = \frac{P(B \setminus A) \times P(A)}{P(B)}$$

$$\text{Note-se que } P(B \setminus A) \times P(A) = P(A \cap B)$$

**Exemplo 3(164).      Exemplo 4(164).**

☞ **Atividades: 2, 3(165).**

☞ **Exercícios(207):** 32, 33, 34, 35, 36, 37.

**Exercícios(204):** 18, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

## **1.6- Modelos de probabilidade em espaços finitos.**

### **Função massa de probabilidade.(166)[vídeo33-minuto23].**

**Exemplo 1(166).**

**Exemplo 2 (167).**

União  $A \cup B$       Intersecção  $A \cap B$       Diferença  $A \setminus B$

De  $A \cap B = \emptyset$ , dizemos que  $A$  e  $B$  são **Incompatíveis**.

**Regra:**

$$\text{Se } R \cap S = \emptyset, \text{ então } P(R \cup S) = P(R) + P(S)$$

☞ **Atividade 1(167)**

**Função massa de probabilidade** ou **distribuição** de probabilidade.- é uma função que a cada elemento do suporte do modelo de probabilidade faz corresponder a respetiva probabilidade.

**Exemplo3**(168)

**Exemplo 4**(169). **Exemplo 5**(170) **Exemplo 6**(170) **Exemplo 7**(171)

☞ **Atividade 2**(171).

☞ **Atividade 3**(171). ☞ **Atividade 4**(171)

☞ **Exercícios(208)**38, 39, 40, 41, 42.

## 1.7- Valor médio e variância populacional(172).

Média amostral  $\bar{x}$

Valor médio populacional:  $\mu$ .

*Exemplo e revisão*  $x_1=1, x_2=2, x_3=3, f_1=5 f_2=10 f_3=15 n=30$  calcular média e desvio padrão. Usar tb. Freq. relativa.

*Exemplo: o dado e o valor médio.*

**Modelo de probabilidade** (173).

**Valor médio** (ou valor **esperado**) (174).  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p_i$

**Variância e desvio-padrão** de um modelo de probabilidade:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \times P_i \quad \sigma = \sqrt{Var(X)} \quad (174)$$

**Exemplo 2(175)**+ C.G. para verificar.

☞ **Atividades 1, 2** (175).

☞ **Exercícios(209)**:43, 44.

## 1.8- Espaços de resultados infinitos.

### Modelos discretos e Modelos contínuos. (176)

#### 1.8.1- Modelos discretos. (176) [vídeo 36]

**Modelo de Poisson** (177).


**Nota:** Este modelo usa-se sobretudo para variáveis que representam o número de vezes que determinado fenómeno ocorre num dado período de tempo.

**Exemplo:** número de aviões que chegam a um aeroporto, por dia.

$$P(X = K) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^K}{K!} \quad E(X)=\lambda \quad \text{Var}(X)=\lambda$$

k! fatorial Exemplo: 3!=3×2×1 1!=1 0!=1

Factorial na calculadora: (C.G: texas: Math/prob Casio: optn/prb)

**Exemplo 1**(177). **Exemplo 2**(178).  **Exercícios(209): 45, 46.1.**

### Modelo Geométrico.(180)

**Nota:** Este modelo utiliza-se quando queremos saber qual é a probabilidade de que certo acontecimento se realize ao fim de k experiências. Isto significa que antes de um sucesso, houve k-1 insucessos.

**Exemplo:** no lançamento de um dado, qual é a probabilidade o “6” apenas sair ao fim de 10 lançamentos?

$$\text{Resposta: } P(X=10) = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \times \left(\frac{1}{6}\right)$$

O modelo geométrico é dado por:

$$P(X=K)=(1-p)^{k-1} \times p \quad E(X)=\frac{1}{p} \quad \text{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

Reparemos que “p” é a probabilidade de sucesso e “1-p” é a probabilidade de insucesso.

**Exemplo 3** (180)  **Exercícios(210):47, 48.**

### Modelo Binomial (181)

**Nota:** Pretendemos calcular a probabilidade de termos k sucessos num total de n provas, onde a probabilidade de sucesso é constante(p).

$$P(X = K) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad E(X)= n \cdot p \quad \text{Var}(X)= n \cdot p \cdot (1-p)$$

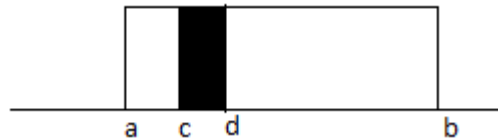
**Exemplo:** Se lançarmos um dado 10 vezes, qual é a probabilidade de obtermos o “6”, 3 vezes? Resposta:  $P(X = 3) = \frac{10!}{3!(7)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$

**Exemplo 4**( 182)  **Atividade 3**( 182).

## 1.8.2- Modelos Contínuos(183)[Video37].

### Modelo Uniforme (184)

**Exemplo 5**(184) Para variáveis uniformemente distribuídas.



$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad (186)$$

Probabilidade associada ao intervalo  $[c, d]$ :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} \quad (186)$$

☞ **Atividade 4**(186)

☞ **Exercícios(210):50, 51.**

### Modelo Exponencial (187)

Nota: Este modelo aplica-se nas situações em que o objetivo é determinar o tempo de espera até se dar uma determinada ocorrência.

**Exemplo:** Qual a probabilidade de esperar entre 6 e 10 minutos para ser atendido no balcão de uma agência bancária?

O **valor médio** é dado por:  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$  logo:  $\lambda=1/E$

A **probabilidade** de ter uma demora entre  $a$  e  $b$ , isto é, num intervalo  $[a, b]$ , é dado por:

$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

**Nota:** o tempo mínimo é zero.

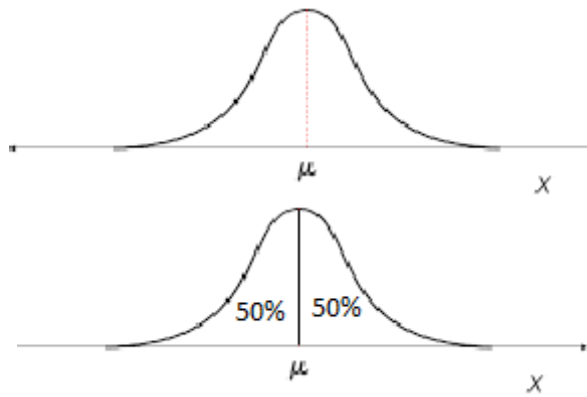
☞ **Atividade 6**(188)

☞ **Exercícios(210): 52 e 53.**

## 1.9- Modelo Normal(189) [Vídeo 38]

**Exemplo:** As alturas das pessoas.

**Nota:** Neste modelo, a curva tem a forma de sino e é simétrica em relação à media, a que corresponde o valor máximo da curva.



Se  $X$  é uma variável aleatória **normal** com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , representamos por:  $X \sim N(\mu, \sigma)$

**Questão:** como calcular valores de probabilidades neste modelo?

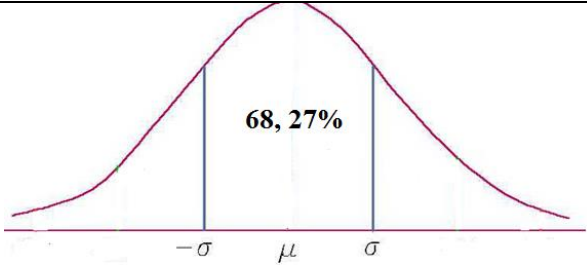
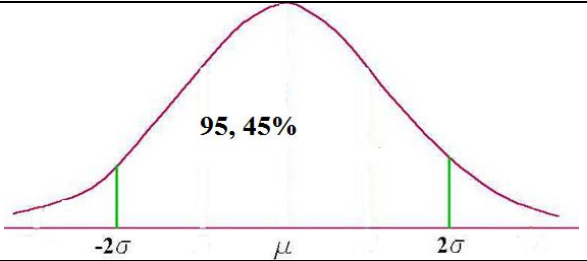
**Resposta:** Primeiro utilizaremos uma regra designada “68, 95, 99.7”, depois usaremos uma tabela( página 93 do livro) e, para confirmar, usaremos a calculadora gráfica.

### Regra dos 68, 95, 99.7

A percentagem de valores contidos no intervalo  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$  é de, aproximadamente 68.27%.

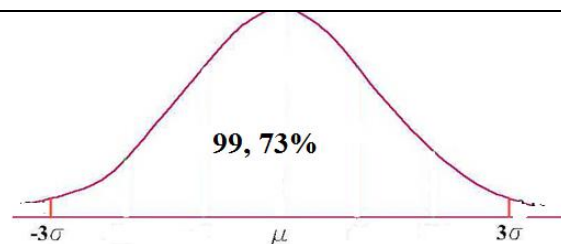
Do mesmo modo, temos valores associados aos intervalos:  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$  e  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Em termos de probabilidade, temos:

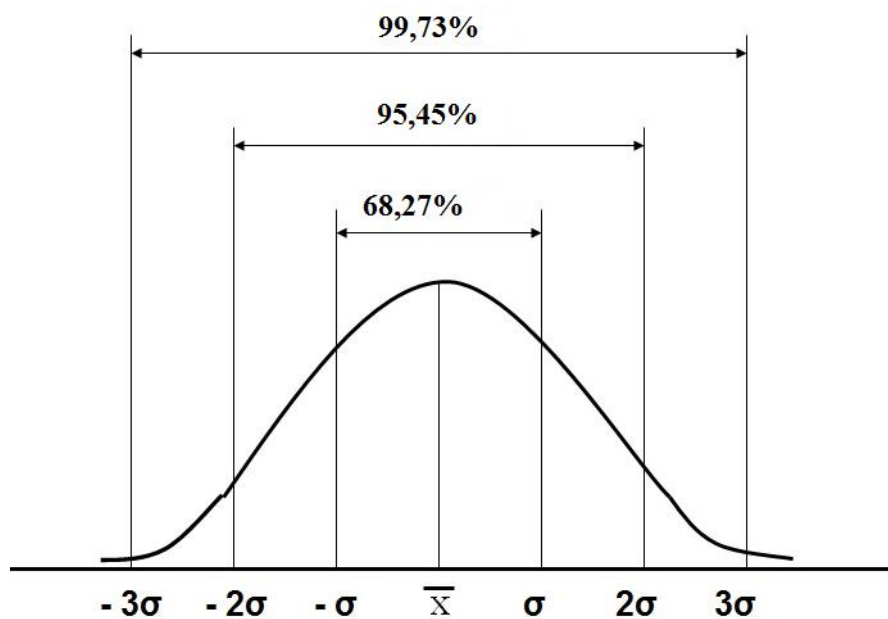
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68.27\%$	
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.45\%$	



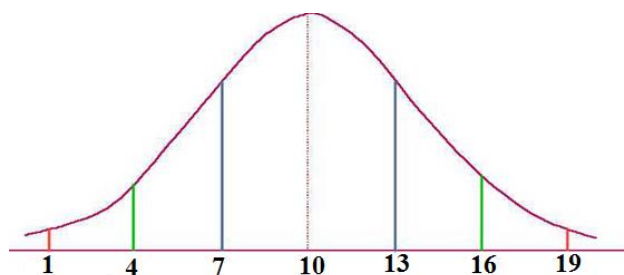
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.73\%$$



**Em síntese, temos:**

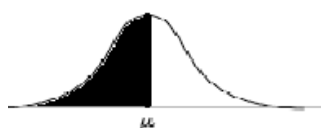


**Exemplo-** a variável aleatória X tem distribuição Normal com valor médio 10 e desvio-padrão 3, isto é,  $X \sim N(10,3)$ .

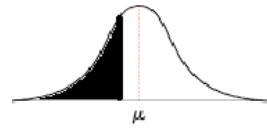


Usando a regra dos 68, 95, 99.7, calculemos as seguintes probabilidades:

.1)  $P(X < 10) = P(X < \mu) = 50\%$



$$.2) P(X < 7) = P(X < \mu - \sigma) = \frac{100\% - 68,27\%}{2} = 15,865\%$$

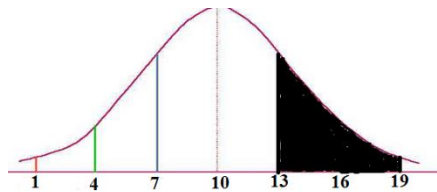


$$.3) P(7 < X < 13) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 68,27\%$$

$$.4) P(4 < X < 16) = P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 95,45\%$$

$$.5) P(1 < X < 19) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 99,73\%$$

$$.6) P(13 < X < 19) = P(\mu + \sigma < X < \mu + 3\sigma) = \frac{99,73\%}{2} - \frac{68,27\%}{2} = 49,865\% - 34,135\% = 15,73\%$$



$$.7) P(7 < X < 16) = P(\mu - \sigma < X < \mu + 2\sigma) = \frac{68,27\%}{2} + \frac{95,45\%}{2} = 81,86\%$$

$$.8) P(X < 13) = 50\% + \frac{68,27\%}{2} = 84,135\%$$

$$.9) P(X > 4) \quad .10) P(X < 1) \quad .11) P(13 < X < 16) \quad .12) P(4 < X < 13)$$

**Exemplo 1(191)**

**Exercício(211):** 56.1

Nota: De seguida, vamos ver um segundo processo para calcular probabilidades no modelo normal, mesmo que os valores pretendidos nada tenham a ver com  $\mu$ ,  $\mu \pm \sigma$ ,  $\mu \pm 2\sigma$  ou  $\mu \pm 3\sigma$ .

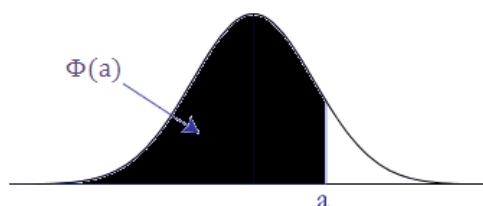
## Tabela da Normal Standard ( 193)

Na normal **standard** ou (normal **reduzida**) a média é zero e o desvio padrão é 1.

$$U \sim N(0, 1)$$

No caso da normal standard, existe uma tabela que nos permite calcular os valores das probabilidades- página 193 do livro.

Os valores da tabela são representados pela função  $\Phi$ , e representam a probabilidade de X ser menor que "a", isto é  $\Phi(a) = P(X \leq a)$



Vejamos alguns exemplos de aplicação.

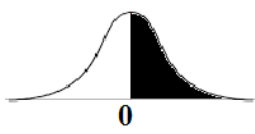
**Exemplos:** Seja  $U \sim N(0, 1)$ . Utilizando os valores da tabela da normal standard (página 160), Calculemos as seguintes probabilidades:

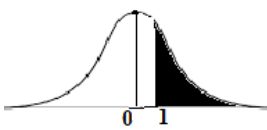
.1)  $P(U < 0) = \Phi(0) = 0.5000$   ( Tabela: a= .0 Coluna: .00)

.2)  $P(U < 1) = \Phi(1) = 0.8413$  ( Tabela: a=1.0 coluna .00)

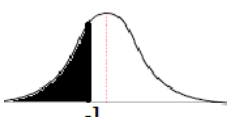
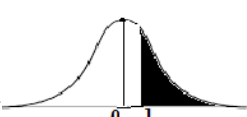
.3)  $P(U < 2.73) = \Phi(2.73) = 0.9968$  ( Tabela a= 2.7 coluna .03)

.4)  $P(U < 1.14) = \Phi(1.14) = 0.8729$  (Tabela a= 1.1 coluna .04)

.5)  $P(U > 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5$  

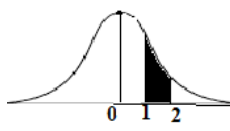
.6)  $P(U > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$  

.7)  $P(U > 1.14) = 1 - \Phi(1.14) = 1 - 0.8729 = 0.1271$

.8)  $P(U < -1) =$     
 $= P(U > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

.9)  $P(U < -1.72) = P(U > 1.72) = 1 - \Phi(1.72) = 1 - 0.9573 = 0.0427$

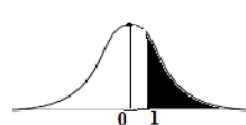
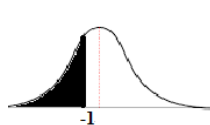
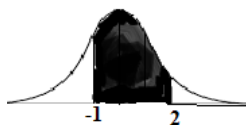
.10)  $P(U < -2) = P(U < 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

.11)  $P(1 < U < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$  

.12)  $P(1.7 < U < 3.1) = \Phi(3.1) - \Phi(1.7) = 0.9990 - 0.9554 = 0.0436$

.13)  $P(-2 < U < -1) = P(1 < U < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$

.14)  $P(-1 < U < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - [1 - \Phi(1)] = 0.9772 - (1 - 0.8413) = 0.8185$



**Nota:** Para podermos usar a tabela da normal standard (página 193), é necessário garantir que a média seja zero e o desvio-padrão seja 1, Caso contrário, temos de usar a seguinte conversão:

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

**Exemplo:**  $X \sim N(5, 2)$  logo  $U = \frac{X-5}{2} \sim N(0,1)$

**Exemplos:**

1)  $X \sim N(5, 2)$  Calculemos  $P(X < 6)$ .

$$P(X < 6) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{6-5}{2}\right) = P(U < 0.5) = 0.6915$$

2) Seja  $X \sim N(8, 3)$  Calculemos **2.1)**  $P(X < 11)$  **2.2)**  $P(X > 14)$ .

$$\text{2.1)} P(X < 11) = P\left(\frac{X-8}{3} < \frac{11-8}{3}\right) = P(U < 1) = 0.8413$$

$$\text{2.2)} P(X > 14) = P\left(\frac{X-8}{3} > \frac{14-8}{3}\right) = P(U > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

☞ **Atividade 1**( 195)

☞ **Exercícios(210):Tabela:54, 55.**

### Calculadora Gráfica

**Nota:** Também podemos Calcular valores aproximados da probabilidade referente à distribuição normal utilizando a calculadora gráfica.

Casio Stat/ Dist/ Normal c.d/...

Texas Distr/ normalCdf( min, máx, media, desvio)

Sugestão: para valores menores do que..., utilize como valor mínimo: " - 1000 000"

Para valores maiores do que..., utilize como valor máximo: " 1000 000"

Ex.1) X tem distr. Normal com média 10 e desvio-padrão 2. Calcule:

$$1.1) p(6 < X < 7) = 0.044 \quad 1.2) p(X > 9) = 0.69146 \quad 1.3) p(X < 6) = 0.02275$$

### Exercícios-Praticar:

Mod. Uniforme: 18 (217)+ Exponencial:19(217).

Regra "68, 95, 99":57, 58 (211)+12.2, 13.1(215)+7(219).

Tabela Normal: 20(217)

**Exercícios globais(212) 1 a 20.**