

Capítulo 3- Modelos populacionais

3.1- Introdução (página 84 do manual) [Vídeo 29]

Aqui pretendemos estudar a evolução do número de indivíduos de uma população.

(84) Crescimento populacional positivo: Há um aumento da população inicial.
--

Crescimento populacional negativo (ou declínio): Há uma diminuição da população inicial.
--

(84) Crescimento contínuo: as mudanças acontecem a todo o instante. (exemplo: crescimento de uma planta)

Crescimento discreto: as mudanças acontecem de tempos a tempos.(exemplo: nascimento de crianças numa vila.)

3.2- Modelos de crescimento.

3.2.1) Crescimento linear (85)

Em cada transição, aumentamos sempre o mesmo valor. O gráfico é formado por pontos em linha reta.

Exemplo 1(85) O João tem 350 euros e recebe 40 euros por mês.

Daqui a um mês terá $350 + 40 = 390$

Daqui a dois meses terá $350 + 2 \cdot 40 = 430$

Daqui a cinco meses terá $350 + 5 \cdot 40 = 550$

Daqui a n meses terá $350 + n \cdot 40$

Se quisermos saber ao fim de quanto tempo, obtemos 830 euros, devemos resolver a equação $350 + n \cdot 40 = 830$. (R:n=12)

Nota: No exemplo 1, verificamos que, na transição de um mês para o outro, há sempre um aumento de 40 euros. Temos uma Progressão aritmética de razão 40.

(86) **Sucessão** é uma sequência infinita de números que podem respeitar uma determinada ordem.

(87) **progressão aritmética**(p.a.) é uma sucessão em que é constante a diferença entre duas transições consecutivas.

A essa constante chamamos **razão**, r , da progressão.

No caso de crescimento populacional, a razão representa a **taxa de crescimento** da população.

Exemplo de progressão aritmética:

Considere a sequência: 7; 10; 13; 16; 19; 22,

P.a. $U_0=7$ (valor inicial) $r=3$ (Razão)

Expressão geral: $U_n = 7 + 3n$

☞ **Exercícios(112:) 1 a 5**

(87)**Modelo de Crescimento Linear discreto** é um modelo em que a evolução da população é descrita por uma progressão aritmética.

$$(P_{n+1} - P_n = r).$$

Para um modelo linear discreto: $P_n = P_0 + n.r$, com n natural.

Recordar: Juro simples- O juro é depositado numa conta à ordem. O valor do juro ganho em cada período de tempo é sempre o mesmo.

☞ **Atividade 1** (87) Juro Simples.

Exemplo 2(88) Modelo de regressão linear. (Instruções Calc. gráfica)

(89)**Modelo de Crescimento Linear Contínuo**. $P(t)=at+b$

☞ **Atividade 2**(90) Regressão linear.

3.2.2- Modelo de crescimento Exponencial (91)[*Vídeo 30*]

Em cada transição, multiplicando sempre o mesmo número. Na expressão geral aparece um expoente.

Recordar: No **juro composto** o juro produzido em cada período de tempo é adicionado ao capital. No período seguinte, o valor do juro aumenta por ter aumentado o capital.

Para um depósito inicial C_0 , a uma taxa de juro i , o capital C_n ao fim de n anos é dado por:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

Exemplo: pg 91.

(91) **Progressão Geométrica** (p.g.) é uma sucessão em que é constante o quociente entre duas transições. A essa constante, que é a Taxa de crescimento, chamamos **razão** da progressão.

Exemplo – Progressão geométrica.

Consideremos a sequência: 3; 6; 12; 24; 48; 96,....

Podemos verificar que $\frac{6}{3} = 2$; $\frac{12}{6} = 2$; $\frac{24}{12} = 2$; $\frac{48}{24} = 2$; $\frac{96}{48} = 2$

Temos uma progressão geométrica de razão 2, isto é:

U_n é uma p.g. com $U_0=3$ e $r=2$. O termo geral será $U_n=3 \times 2^n$

☞ **Exercícios(112):** 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13.

Modelo de **crescimento Exponencial discreto**(91)

é um modelo em que a evolução da população é descrita por uma progressão geométrica.

$$\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}=r\right)$$

Para um modelo de crescimento exponencial discreto, temos:

$$P_n=P_0 \cdot r^n, \text{ com } n \text{ natural}$$

Exemplo: Quando é que 2^n ultrapassa 2000? ($Y=.. x(0 \text{ a } 20) y(0 \text{ a } 2500)$)11

☞ **Atividade 4**(92)

Exemplo:

Uma população cresce de acordo com o modelo $Y_n=5 \times 1,12^n$ com n em anos.

Ao fim de quantos anos atingimos os 1100 elementos?

1º processo: Tentativas. Vamos experimentando vários valores para n.... (R: n=48)

2º processo: Tabela. Fazemos $Y_1=5 \times 1,12^x$ e pedimos a tabela.

3º processo: Gráfico Usando o trace. (window: $0 < x < 50$ $0 < y < 1500$)

4º processo: usar a interseção fazendo $Y_1=5 \times 1,12^x$ e $Y_2= 1100$ pedimos o gráfico e depois: Calc/ intersect ou isct.

Nota: O número **e**

A sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Tende para “e”. A sucessão $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$ Tende para “e^k”
e ≈ 2,718 Número de Euler (também conhecido por número de Neper).

Juros e capitalizações (Livro: 92-93)- exemplo

Modelo de Crescimento Exponencial contínuo (93)

$$P(t)=P_0 \cdot e^{kt} \quad \text{sendo } k \text{ constante.}$$

☞ **Exercício(113):14** Juro composto. Capitalizações.

Exemplo 3(94)

Calculadora gráfica(CG) (Casio-280; Texas TI84-284, Texas Inspire-288).

☞ **Atividade 5**(95)

Exemplo 4 (95)- Regressão exponencial.

4.2) Texas: $247,81 \cdot 1,43^t$ Casio: $247,81 \cdot e^{0,36t}$

☞ **Atividade 6**(97).

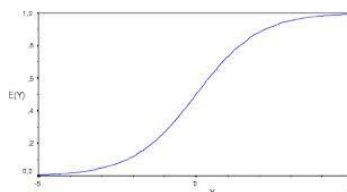
☞ **Atividade 7**(97).

Exercícios(113): 15, 16, 17, 18.

(Sugestão: recapitular resolução de sistemas de equações)

3.2.3- Modelo de crescimento Logístico(98)[Vídeo 31].

Este modelo tem algumas semelhanças com o modelo exponencial. Aqui começamos com um crescimento lento, seguido de um crescimento rápido e de um crescimento lento, até estabilizar. É um modelo mais realista sobre os modelos de crescimento populacional.



A sua expressão é dada por
$$P(t) = \frac{c}{1+a \cdot e^{-bt}} \quad (98)$$

Exemplo 5(98)

☞ **Atividade 8** (101).

Exemplo 6(101).

☞ **Exercícios(113): 19, 20, 21, 22.**

3.2.4- Modelo de crescimento Logarítmico.(104) [Video32].

Noção de logaritmo: $a^x=y \Leftrightarrow x=\log_a y$

X é o logaritmo de y na base “a”

Exemplos:

1) $2^5=32 \Leftrightarrow 5=\log_2 32$

2) $3^4=81 \Leftrightarrow 4=\log_3 81$

C.G. $\boxed{\text{Log}}$ significa logaritmo de base 10. $\boxed{\text{Ln}}$ Logaritmo de base e.

Questão : se a calculadora tem apenas as bases “e” e “10”, como fazemos para calcular os outros logaritmos?

Resposta: fazemos uma mudança de base de acordo com a fórmula seguinte:

Conversão ou mudança de base:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad (\text{ou } \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a})$$

Exemplo de aplicação: $\log_2 64 = \frac{\log 64}{\log 2}$.

Exemplos:

1) $\log_2 32 = 5$ 2) $\log_3 81 = 4$

3) $\log_{10} 1$ 4) $\log_2 1$ 5) $\log_{10} 10$ 6) $\log_5 5$ 7) $\log_5 5^4$ 8) $\log_6 6^7$ 9) $\log_{10} 10^2$

Propriedades (105)

$$\text{Log}_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad \log_a a^b = b$$

Exemplos: Determinar o valor de x

1) $\log_5 X = 3 \Leftrightarrow x=5^3 = 125$ 2) $\log_2 X = 8 \Leftrightarrow x=2^8 = 256$

3) $2^x=120 \Leftrightarrow x= \log_2 120$

4) $3^{1+2x}=2187 \Leftrightarrow 1+2x=\log_3 2187 \Leftrightarrow x= (7 - 1)/2 \Leftrightarrow x= 3$

Exemplo 7 (105)

Modelo de Crescimento logarítmico.

$$P(t) = K+ \log_a t$$

☞ **Atividade 10**(105).

Exemplo 8(106)

☞ **Atividade 11**(107).

☞ **Exercícios(114): 21, 22, 23, 25, 26.**

☞ **Exercícios globais**(117): 9, 10+ 24 até 40.

☞ Caderno de exercício pg 26 a 444.

☞ Net: teste 2, exames por assuntos- 6- modelos populacionais, Fichas de trabalho 5,6,7, resumo-- assunto 6.

Vídeos: 29, 30, 31, 32.