

Capítulo 2- Modelos de grafos.

2.1- Introdução (pág. 8) [Vídeo 24]

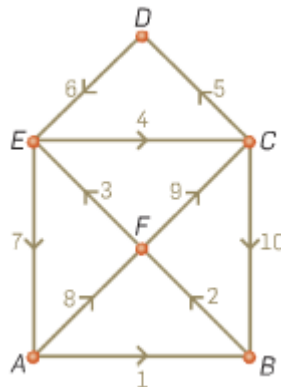
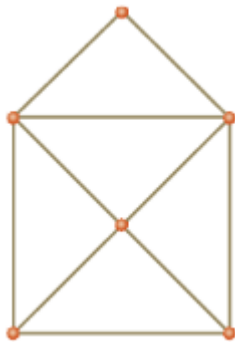
Grafo- é um esquema constituído por pontos (ou **vértices**) e por segmentos (ou **arestas**). (8)

Exemplo 1(pág.8)

Um grafo diz-se **conexo** se existir sempre uma sequência de arestas a unir quaisquer dois dos seus vértices. (9)

 **Exercício 1** (pág. 76)

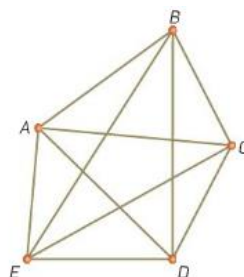
Exemplo 2 (pág. 9) Desenhar a casa sem levantar o lápis.



Um **grafo** diz-se **Orientado** (ou **dígrafo**) se as suas arestas têm orientações (ou sentidos) definidas. (10)

 **Atividade 1** (pág. 10)

Exemplo 3(pág. 11)- Grafo completo de ordem 5. Tem 5 vértices. (Tem 10 arestas).



(11) Num **Grafo completo**, cada um dos vértices é adjacente a todos os outros.

(11) **Ordem** de um **grafo** é o número de vértices que ele contém.

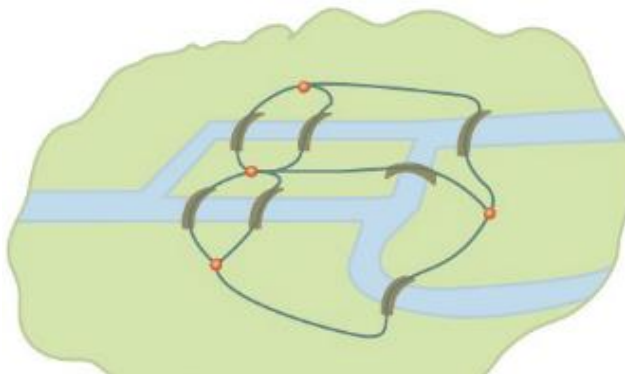
☞ **Questão:** quantas arestas tem um grafo completo de ordem 6? E de ordem 7? E de ordem 10? E de ordem n ?

Sugestão: para o grafo completo de ordem n , o número de arestas é dado por:
$$\frac{n \times (n-1)}{2}$$
. Descubra porquê.

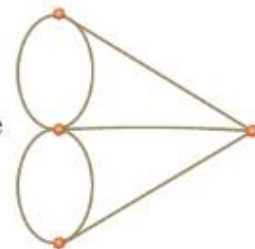
☞ **Atividade 2**(11) **Atividade 3**(12) **Exemplo 4**(12)

Exercícios (pág. 76): 2, 3, 4, 5, 6, 7.

2.2- Trajetos e circuitos eulerianos ⁽¹⁵⁾ [Vídeo 25]



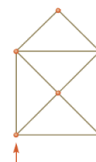
ou simplesmente



(16) **Grau** (ou valência) de um vértice- é o número de arestas que nele concorrem

Grau par/ Grau ímpar

☞ **Atividade 1**(16) ☞ **Exercícios(77)**:8, 9



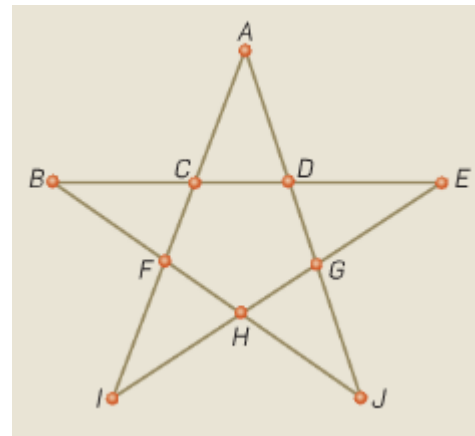
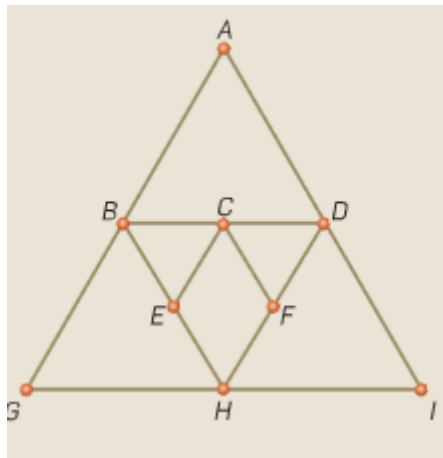
Exemplo 1(17) Desenhar a casa sem levantar o lápis.

Sugestão: Começamos num dos vértices com grau ímpar e terminamos no outro vértice de grau ímpar.

(Passeio, trajeto, caminho, circuito)(17)

Exemplo 2(17)

Atividade 2 (18)



Sugestão: no primeiro caso pode começar num vértice com grau ímpar (E) e terminar no outro vértice de grau ímpar (F). No segundo caso, pode começar e terminar em qualquer um dos vértices, pois têm todos grau par.

(18) **Trajeto euleriano**- é um trajeto que percorre todas as arestas de um grafo uma única vez.

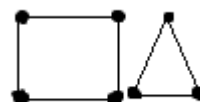
(18) **Circuito euleriano** (ou circuito de Euler) é um trajeto euleriano que começa e acaba no mesmo vértice.

(18) **Regra 1:** Num grafo conexo, podemos encontrar um **trajeto euleriano** se e só se existirem, no máximo, dois vértices de grau ímpar.

(18) **Regra 2:** um grafo conexo admite um **circuito euleriano** se e só se todos os vértices tiverem grau par.

Nota: Nestas regras, é necessário exigir que o grafo seja **conexo**, caso contrário a regra não se aplica.

Exemplo: Neste grafo, todos os vértices têm grau par, mas não admite circuito euleriano, por não ser conexo



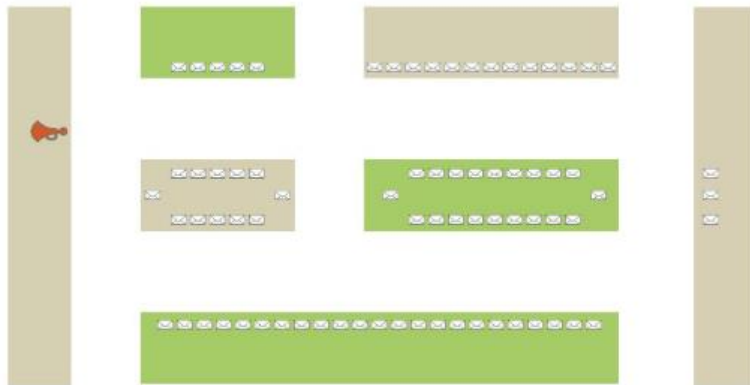
Atividade 3(19) Exemplo 3(19)

Atividade 5(21)

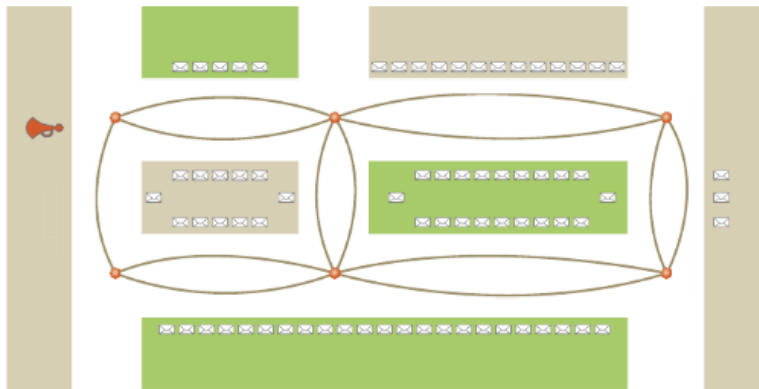
Exercícios(77):10 e 11

2.2.1. O problema do carteiro chinês (22)

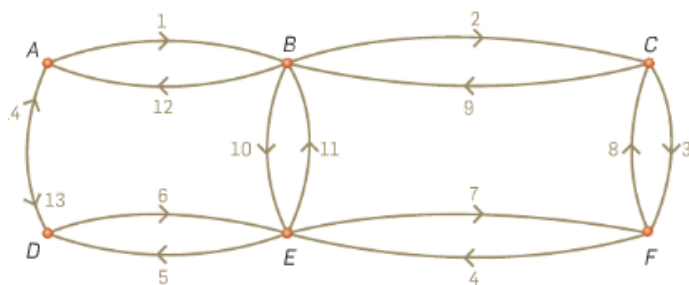
Exemplo 4 (22) Ruas onde tem de distribuir correspondência:



Traçado das ruas:



Um percurso possível:



🔗 **Atividade 6** (24)

🔗 **Atividade 8** (25)

🔗 **Exercícios(77)**12, 13, 14, 15, 16, 17.

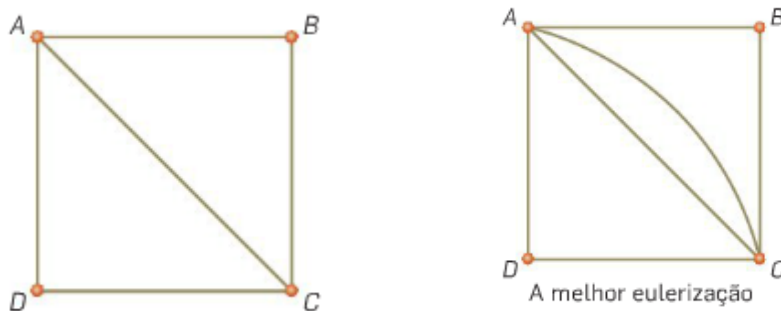
2.2.2- Eulerização de Grafos (28)

Exemplo 5 (28) O grafo à esquerda não admite circuito euleriano porque tem 4 arestas com grau ímpar. Para eulerizar, basta acrescentar(por repetição) as arestas indicadas na segunda figura:



(29)Eulerizar um grafo consiste em acrescentar-lhe arestas, por repetição, até obter um circuito euleriano.

Exemplo 6 (29) para eulerizar o primeiro grafo, basta duplicar a aresta [AC].

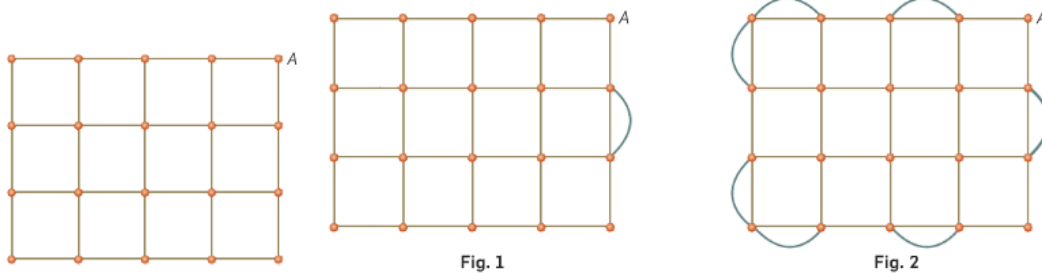


🔗 **Atividade 12** (30)

🔗 **Atividade 13** (30)

(31)Grafos retangulares ou grafos grelha.

Exemplo 7 (32) Vamos eulerizar este tipo de grafo duplicando arestas convenientemente:

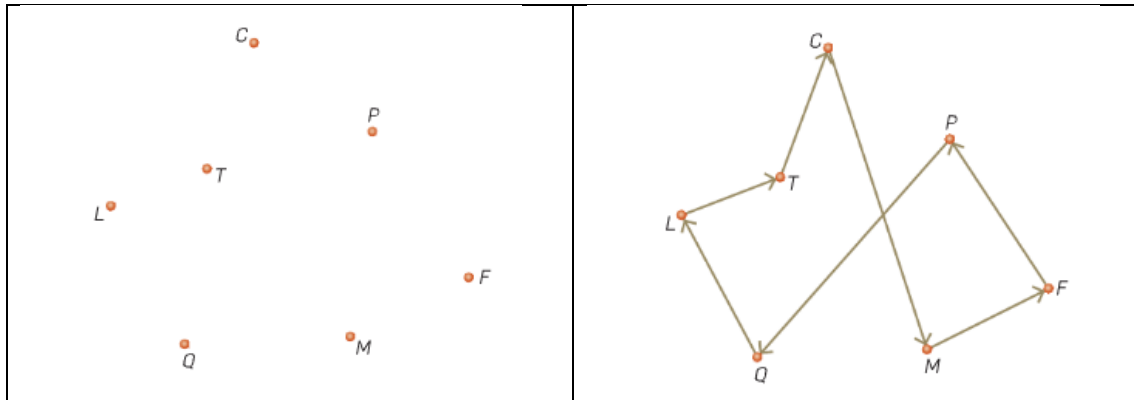


🔗 **Atividade 15** (33)

🔗 **Exercícios(78): 18, 19, 20**

2.3- Circuitos hamiltonianos(34).

Exemplo 1 (34) O objetivo é partir do ponto C, passar por todos os outros pontos uma única vez e voltar ao ponto inicial.



(36)Circuito hamiltoniano é um caminho que começa e acaba no mesmo vértice percorrendo todos os vértices uma só vez(exceto o primeiro que também é o último).

(36)Um **grafo** diz-se **hamiltoniano** se nele se pode encontrar, pelo menos, um circuito hamiltoniano.

Exemplo 2 (36)

☞ **Atividade 3** (39)

☞ **Exercícios(79): 21, 22, 23, 25.**

☞ **Atividade 3** (39) ☞ **Atividade 4** (39)

☞ **Exercícios(79): 25, 26.**

2.3.1- O problema do caixeiro viajante (40) [Vídeo26]

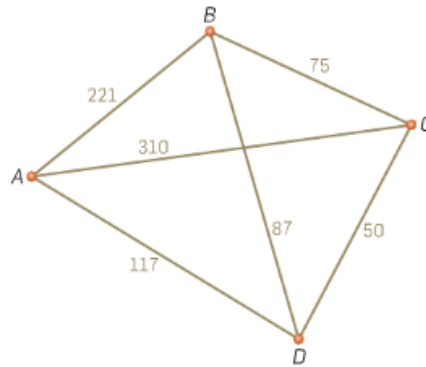
O que se pretende é encontrar o circuito hamiltoniano de percurso mínimo.

(41)Peso é o número que se atribui a cada uma das arestas.

(41) A um grafo com pesos atribuídos chamamos **grafo ponderado**.

Exemplo 3 (41)

Vamos sair do ponto “A”, passar por todos os outros e voltar ao ponto “A”, usando o percurso mais curto.



1º processo: Vamos experimentar **todas as possibilidades** (34)

Hipótese 1:

$$A \xrightarrow{221} B \xrightarrow{75} C \xrightarrow{50} D \xrightarrow{117} A \quad (\text{Total} = 463 \text{ km})$$

Hipótese 2:

$$A \xrightarrow{221} B \xrightarrow{87} D \xrightarrow{50} C \xrightarrow{310} A \quad (\text{Total} = 668 \text{ km})$$

Hipótese 3:

$$A \xrightarrow{310} C \xrightarrow{75} B \xrightarrow{87} D \xrightarrow{117} A \quad (\text{Total} = 589 \text{ km})$$

Hipótese 4:

$$A \xrightarrow{310} C \xrightarrow{50} D \xrightarrow{87} B \xrightarrow{221} A \quad (\text{Total} = 668 \text{ km})$$

Hipótese 5:

$$A \xrightarrow{117} D \xrightarrow{87} B \xrightarrow{75} C \xrightarrow{310} A \quad (\text{Total} = 589 \text{ km})$$

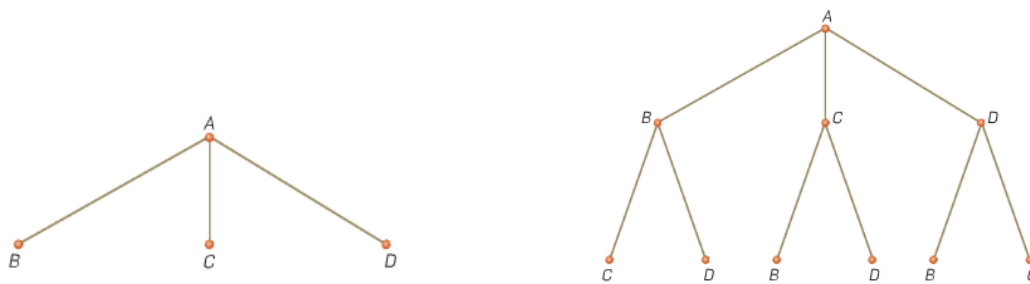
Hipótese 6:

$$A \xrightarrow{117} D \xrightarrow{50} C \xrightarrow{75} B \xrightarrow{221} A \quad (\text{Total} = 463 \text{ km})$$

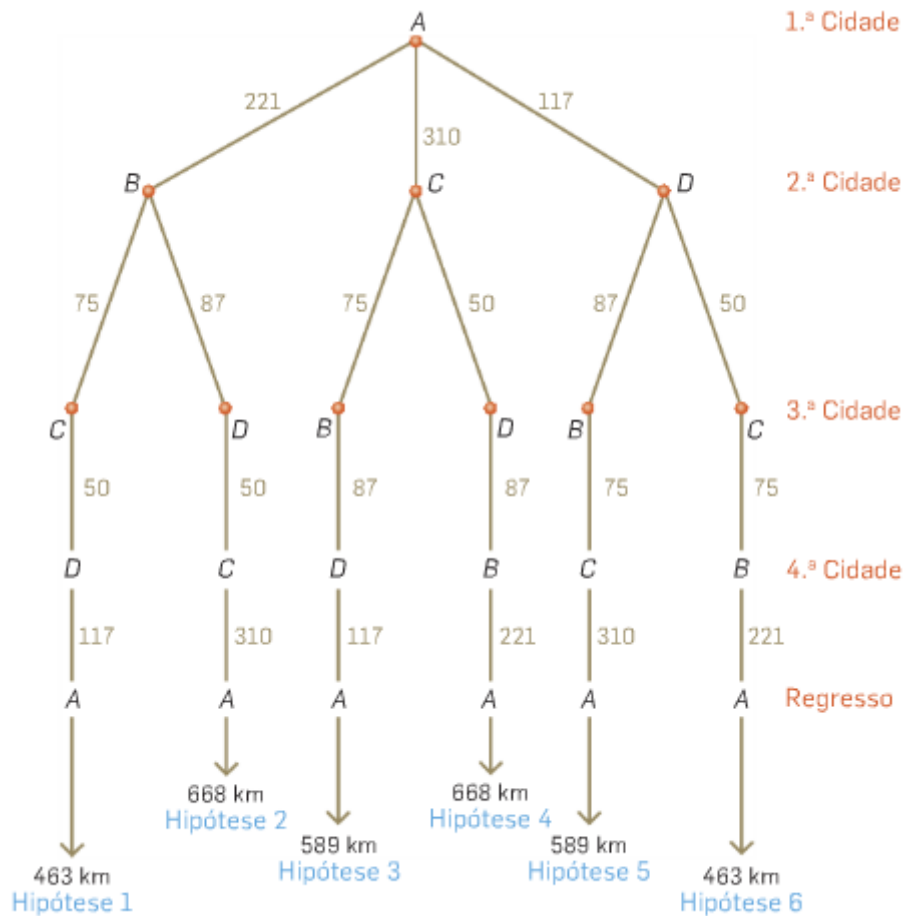
As melhores soluções são as hipóteses 1 e 6, cuja distância é 463 Km.

2º processo: **Método das árvores**-(42) Também experimentamos todas as possibilidades, mas apresentamos sob a forma de uma árvore.

Começamos por “A” e vamos experimentado todas as possibilidades:



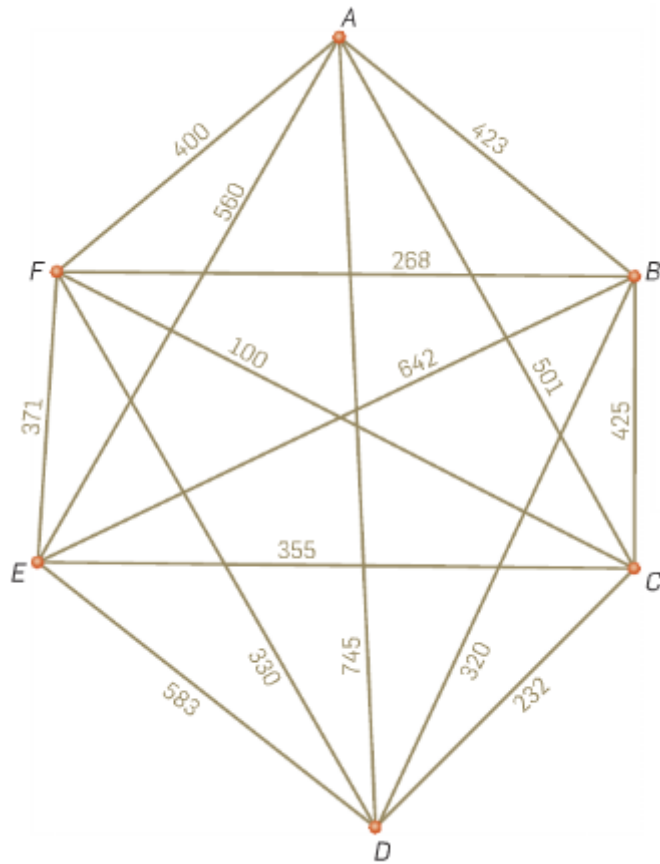
Até obtermos a árvore completa, cujo resultado é o mesmo que foi observado no método anterior.



Nota: Os dois métodos que vimos são muito úteis e garantem-nos sempre a melhor solução possível, mas tornam-se pouco práticos quando aumentamos o número de lugares a visitar.

Se o grafo for demasiado grande, utilizaremos outros métodos que apresentaremos de seguida, a partir do exemplo 4.

Exemplo 4 (45) Pretendemos sair de uma das cidades A, B, C, D, E ou F, visitar as restantes e voltar a cidade inicial, usando o menor percurso possível.



Algoritmo dos mínimos sucessivos(46)

Começamos numa cidade e seguimos sempre para a cidade mais próxima ainda não visitada.

Experimentamos o começo em cada uma das cidades.

Vamos começar na cidade “A”:

$$A \xrightarrow{400} F \xrightarrow{100} C \xrightarrow{232} D \xrightarrow{320} B \xrightarrow{642} E \xrightarrow{560} A \text{ (Total = 2254 km)}$$

Vamos aplicar o mesmo algoritmo, começando em cada uma das cidades:

$$B \xrightarrow{268} F \xrightarrow{100} C \xrightarrow{232} D \xrightarrow{583} E \xrightarrow{560} A \xrightarrow{423} B \text{ (Total = 2166 km)}$$

$$C \xrightarrow{100} F \xrightarrow{268} B \xrightarrow{320} D \xrightarrow{583} E \xrightarrow{560} A \xrightarrow{501} C \text{ (Total = 2332 km)}$$

$$D \xrightarrow{232} C \xrightarrow{100} F \xrightarrow{268} B \xrightarrow{423} A \xrightarrow{560} E \xrightarrow{583} D \text{ (Total = 2166 km)}$$

$$E \xrightarrow{355} C \xrightarrow{100} F \xrightarrow{268} B \xrightarrow{320} D \xrightarrow{745} A \xrightarrow{560} E \text{ (Total = 2348 km)}$$

$$F \xrightarrow{100} C \xrightarrow{232} D \xrightarrow{320} B \xrightarrow{423} A \xrightarrow{560} E \xrightarrow{371} F \text{ (Total = 2006 km)}$$

A melhor solução é a última, a que corresponde à distância total de 2006 Km.

Esta solução também pode ser escrita na forma:

$$A \xrightarrow{560} E \xrightarrow{371} F \xrightarrow{100} C \xrightarrow{232} D \xrightarrow{320} B \xrightarrow{423} A \quad \text{Total: 2006}$$

Nota: Apesar de esta ser a melhor solução segundo este algoritmo, pode não ser a melhor em termos absolutos.

Algoritmo por ordenação dos pesos das arestas (46)

1º) Ordenamos as arestas por ordem crescente dos seu pesos.

2º) escolhemos sucessivamente a aresta com o peso mais baixo, tendo em conta que:

Nunca se pode obter três arestas no mesmo vértice.

Nunca se pode fechar o circuito quando ainda restam vértices por visitar.

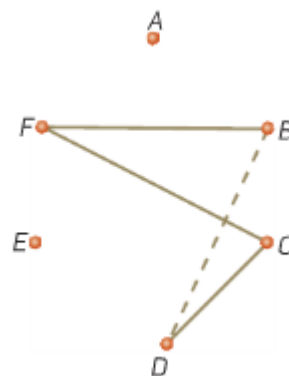
Retomando o exemplo anterior, começamos por ordenar as arestas:

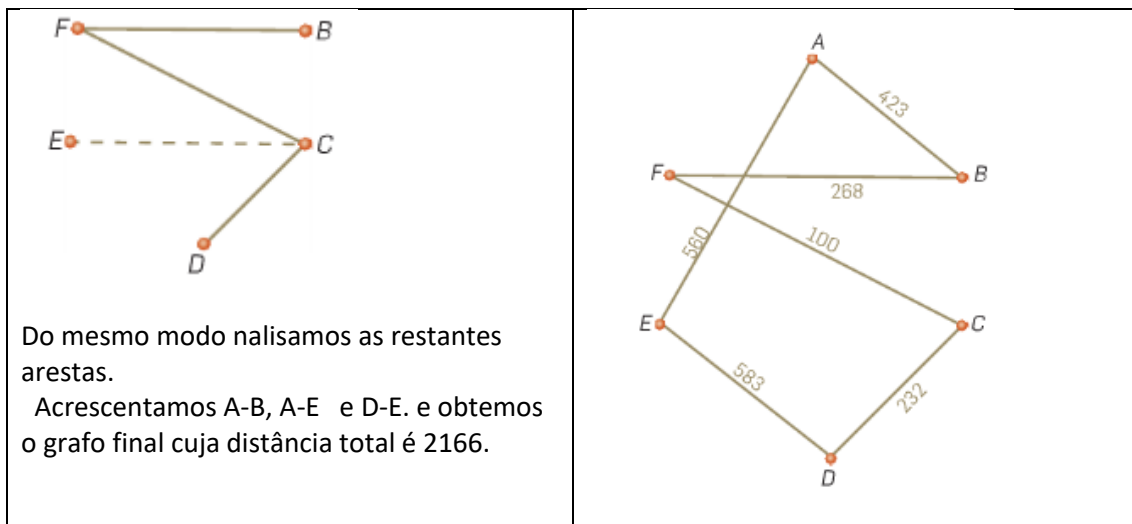
$$\begin{array}{l} F \xrightarrow{100} C ; C \xrightarrow{232} D ; B \xrightarrow{268} F ; B \xrightarrow{320} D ; D \xrightarrow{330} F ; \\ C \xrightarrow{355} E ; E \xrightarrow{371} F ; A \xrightarrow{400} F ; A \xrightarrow{423} B ; B \xrightarrow{425} C ; \\ A \xrightarrow{501} C ; A \xrightarrow{560} E ; D \xrightarrow{583} E ; B \xrightarrow{642} E ; A \xrightarrow{745} D \end{array}$$

Começamos por F-C, seguido por C-D e por B-F por terem menor peso.

O B-D não é aceite por fechar o circuito.

O D-F não é aceite, porque um vértice ficaria com grau 3. Acontecendo o mesmo com C-E e com A-F.





Solução final:

$$A \xrightarrow{423} B \xrightarrow{268} F \xrightarrow{100} C \xrightarrow{232} D \xrightarrow{583} E \xrightarrow{560} A \quad \text{Total: 2166 Km}$$

Nota: Apesar de esta ser a melhor solução segundo este algoritmo, pode não ser a melhor em termos absolutos. Basta constatar que, no método anterior obtivemos uma solução melhor.

Nota: Os algoritmos “mínimos sucessivos” e “ordenação dos pesos das arestas”, não são aplicáveis a alguns grafos.

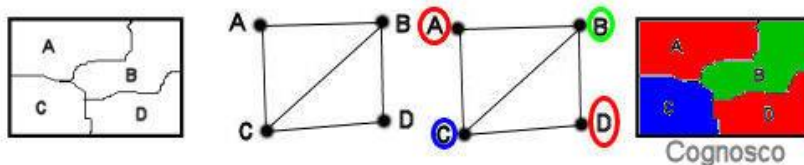
Exemplo 5 (47) ➤ **Atividade 6 (48)** ➤ **Exercícios(81): 29, 30**

2.3.2. coloração de Grafos(51)

Mapas- Teorema das quatro cores.

É possível colorir qualquer mapa com apenas 4 cores diferentes.

Começamos por construir o grafo correspondente, onde experimentamos as várias cores. Depois colorimos o mapa.



Exemplo6 (51), Exemplo 8(52),

Atividade 11(55)

Atividade 13(58)

Exercícios (81): 32.

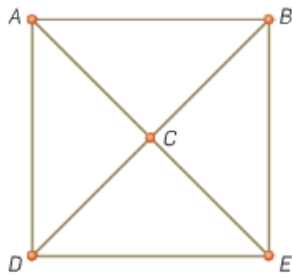
2.4- Árvores abrangentes mínimas (60) [Vídeo 27]

O que se pretende é garantir que todos os vértices estejam ligados entre si. Não é necessário efetuar qualquer circuito. Pretendemos ainda obter uma distância mínima.

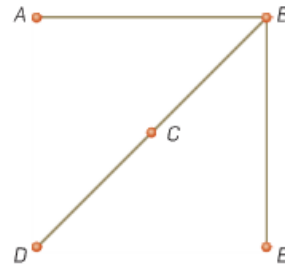
Uma **árvore** é um grafo conexo sem circuitos.

Exemplos: Tubos para distribuir água, fios de eletricidade, cabos de internet,...

Exemplo: Para distribuir água nos locais assinalados pelos pontos A, B, C, D, E:



bastam as ligações seguintes:



(60)Árvore Abrangente (ou árvore geradora) é uma árvore que contém todos os vértices de um grafo dado.

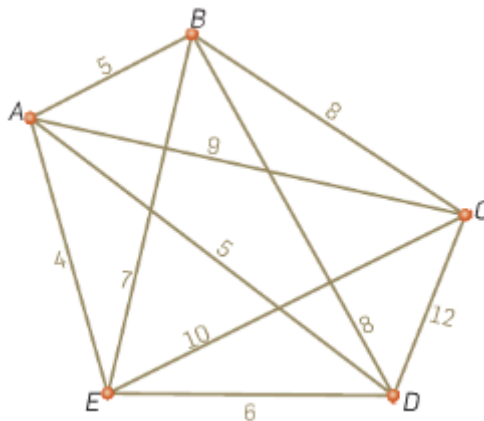
📖 **Exercícios(81): 33, 34**

(61)Árvore abrangente mínima é uma árvore em que a soma dos pesos das arestas é mínima.

Nota: Para obtermos a árvore abrangente mínima a partir de um dado grafo, usamos o algoritmo de Kruskal, que nos garante sempre a melhor solução possível.

(61)Algoritmo de Kruskal: As arestas do grafo vão-se unindo por ordem crescente dos pesos, desde que não se formem circuitos e se garanta que no final todos os vértices estão na árvore.

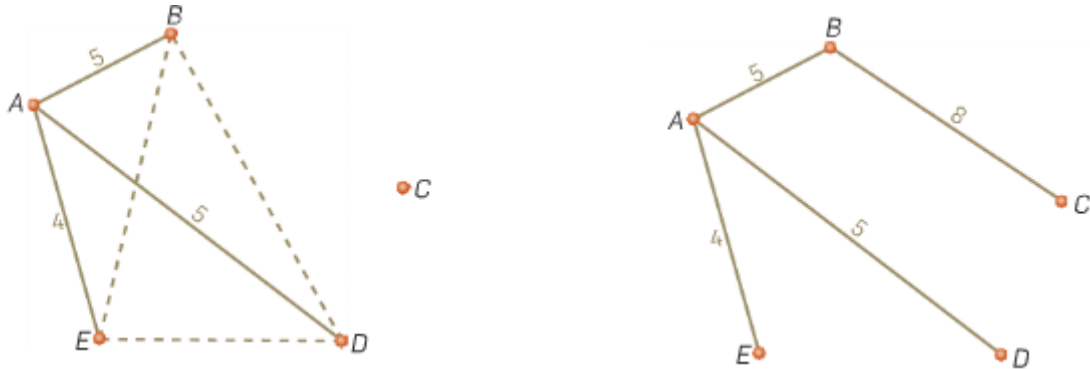
Exemplo 1(62) Procuremos a árvore abrangente mínima para o grafo seguinte.



Começamos por colocar as arestas por ordem crescente:

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{4} E; A \xrightarrow{5} B; A \xrightarrow{5} D; D \xrightarrow{6} E; B \xrightarrow{7} E; \\ B \xrightarrow{8} D; B \xrightarrow{9} C; A \xrightarrow{9} C; C \xrightarrow{10} E; C \xrightarrow{12} D \end{array}$$

Vamos colocando por ordem crescente dos pesos, de modo a não se formarem circuitos:



Obtemos uma árvore abrangente mínima com distância $4+5+5+8=22$.

(63) Algoritmo de Prim.

Exemplo 2 (63)

☞ **Atividade 1**(64) ☞ **Atividade 2**(65)

☞ **Exercícios**(82): 37.

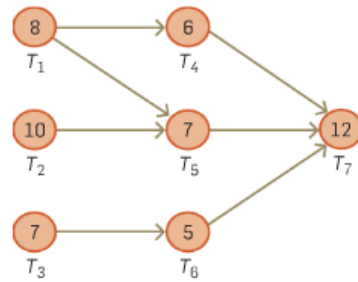
2.4.1- Caminhos críticos⁽⁶⁶⁾ [Vídeo 28]

Aqui pretendemos usar os grafos para planejar a concretização de um projeto composto por várias tarefas. Normalmente há tarefas que dependem de outras, o que obriga a respeitar as precedências.

(67) Caminho crítico é uma sequência de tarefas que deve ser realizada no tempo previsto, de forma que determinado trabalho ou projeto seja concretizado dentro do prazo. A sua duração é aquela que determina o menor tempo para a conclusão do projeto e corresponde à maior duração global.

Exemplo 3(68)...Vejam ao fim de quanto tempo está terminada cada uma das atividades...

Um projeto envolve sete tarefas T_1, \dots, T_7 , com as durações e as precedências indicadas no grafo seguinte:



Qual o menor tempo necessário para que o projeto fique concluído?

Reparemos que T_1, T_2 e T_3 podem começar ao mesmo tempo.

T_4 começa ao fim de 8 dias e demora 6 dias, pelo que estará concluída ao fim de 14 dias.

T_5 começa ao fim de 10 dias e demora 7 dias, pelo que estará concluída ao fim de 17 dias.

T_6 Começa ao fim de 7 dias e demora 5 dias, pelo que estará concluída ao fim de 12 dias.

T_7 depende de T_4, T_5, T_6 , pelo que começa ao fim de 17 dias. Como demora 12 dias, ficará concluída ao fim de $17+12=29$ dias. O projeto ficará concluído ao fim de 29 dias.

Outra forma de apresentar a informação do grafo anterior é através da tabela

Tarefa	Tempo (dias)	Dependências
T_1	8	Nenhuma
T_2	10	Nenhuma
T_3	7	Nenhuma
T_4	6	T_1
T_5	7	T_1 e T_2
T_6	5	T_3
T_7	12	T_4, T_5 e T_6

☞ **Atividade 4** (69) ☞ **Atividade 5** (69) ☞ **Exercícios(83): 40 e 41**

☞ **Exercícios de Aplicação:(81,...) 31, 35, 36, 38.**

☞ **Exercícios globais** (pág. 116) **1 a 8, 11, 12, 13, 14.1, 15, 16.2, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23.**

☞ **Caderno de exercícios(opção) pág 2 a 25.**

☞ **Site: [www. Pedronoia.net](http://www.Pedronoia.net)**

11º ano/ Testes e trabalhos/ t1 e tr1.

Exames/ exames por assuntos/ Grafos.

Fichas de trabalho: 1,2,3,4

Resumo 10º/11º- 5-Modelos de Grafos.